

Manuel Vaz Guedes

O ALTERNADOR SÍNCRONO TRIFÁSICO

modelização

Faculdade de Engenharia

Universidade do Porto

1996

O ALTERNADOR SÍNCRONO TRIFÁSICO

modelização

Manuel Vaz Guedes

(Prof. Associado com Agregação)

FACULDADE de ENGENHARIA

UNIVERSIDADE do PORTO

Índice

- 1 *Modelização*
 - 1.1 Condições de Estudo
 - 1.2 Parâmetros
 - 1.2.1 Parâmetros Eléctricos
 - 1.2.2 Parâmetros Mecânicos
 - 1.3 Equações Fundamentais
 - 1.3.1 Equações em Coordenadas de Fase
 - 1.3.2 Equações no Referencial d-q
 - 1.3.3 Análise Crítica
 - 1.4 Valores Reduzidos
 - 1.4.1 A Equação de Movimento em Valores Reduzidos
 - 1.5 Representação Esquemática do Circuito Magnético
 - 1.6 Modelo Energético para o Alternador Síncrono Trifásico
 - 1.7 Um Modelo para o Alternador Síncrono Trifásico

Bibliografia

Apêndices

- A Fluxo Totalizado
- B Enrolamento Amortecedor
- C Transformada de Park
- D O Alternador Síncrono de Brown
- E Símbolos para Grandezas e Unidades

— * * * —

O ALTERNADOR SÍNCRONO TRIFÁSICO

modelização

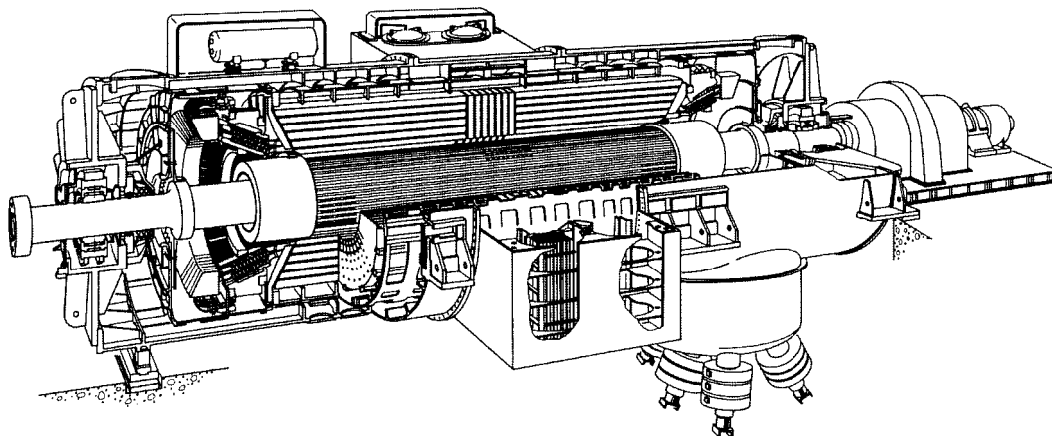
Manuel Vaz Guedes

(Prof. Associado com Agregação)

FACULDADE de ENGENHARIA
UNIVERSIDADE do PORTO

O *alternador síncrono trifásico* é uma máquina que promove uma transformação de energia mecânica em energia eléctrica, com as características de um sistema de grandezas alternadas trifásicas. Nessa conversão, que se efectua com um rendimento energético muito elevado, há uma razão constante entre a frequência das forças electromotrizes induzidas e a velocidade angular de rotação da máquina: $f = p \cdot n$.

Este tipo de máquina eléctrica, que tem uma construção complexa, é projectada para produzir força electromotriz com uma variação no tempo praticamente sinusoidal, e formando um sistema trifásico de grandezas praticamente simétrico, [CEI-34.1].



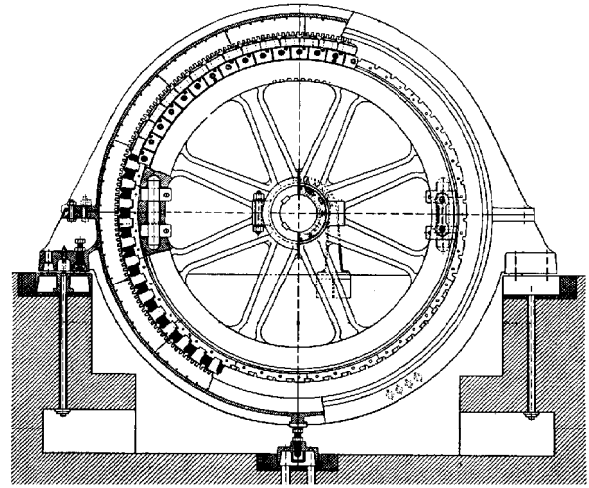
Alternador Síncrono Trifásico (turboalternador)

O alternador síncrono trifásico, accionado por diversos tipos de máquinas primárias, é utilizado na produção de energia eléctrica nos grandes sistemas eléctricos interligados ou em pequenos sistemas eléctricos isolados; é, por isso, grande a gama de potências de fabrico deste tipo de Máquina Eléctrica.

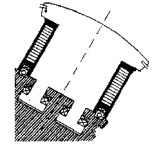
O alternador síncrono trifásico é construído tanto como *máquina eléctrica de pólos salientes* (ρ) como *máquina eléctrica de indutor cilíndrico* (ρ). Embora estes dois tipos de máquinas eléctricas, devido à forma do seu circuito magnético, tenham características

diferentes, a sua selecção e aplicação está ligada ao valor da velocidade de accionamento imposta pela máquina primária.

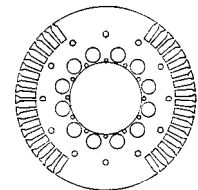
O seu circuito magnético tem uma parte estatórica constituída por um empacotamento de chapa magnética, que forma uma coroa circular, ranhurada do lado do entreferro. Na superfície da coroa circular podem existir furos que depois do empacotamento da chapa formam os canais de ventilação. Nas ranhuras do circuito magnético estatórico são colocadas os condutores das bobinas do enrolamento trifásico. Estes condutores, que formam o enrolamento do induzido da máquina, encontram-se electricamente isolados, entre si e relativamente à massa de ferro.



O circuito eléctrico indutor, que se encontra no rotor da máquina, tem características diferentes conforme a máquina é de pólos salientes ou de indutor cilíndrico. Na máquina de pólos salientes, máquina com vários pares de pólos e accionada, habitualmente, por turbinas hidráulicas (máquinas primárias de baixa velocidade), o circuito indutor é formado por bobinas concentradas que envolvem os núcleos dos pólos indutores. Estes pólos magnéticos encontram-se montados numa roda polar que está solidária com o veio da máquina. Os pólos indutores podem ser construídos em material ferromagnético maciço ou folheado.

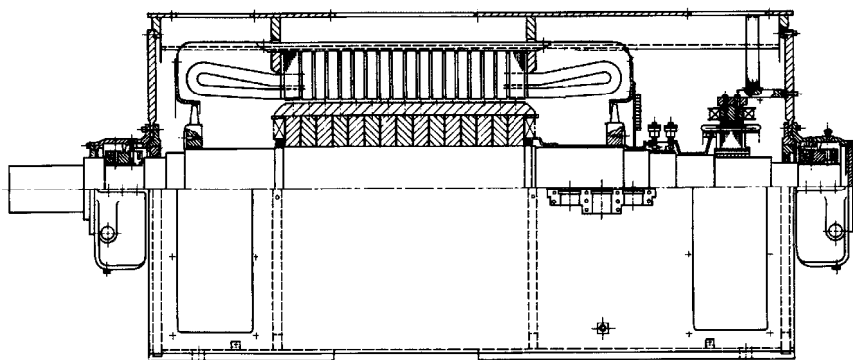


Na máquina de indutor cilíndrico, máquina habitualmente bipolar e accionada por turbinas de vapor (turboalternador), o circuito indutor encontra-se distribuído pelas ranhuras existentes em parte da periferia do rotor.



Nos alternadores síncronos trifásicos existe, na periferia do polo, um enrolamento amortecedor, constituído por barras condutoras que formam um enrolamento encastrado do tipo gaiola, que envolve, total ou parcialmente, a roda polar.

O circuito eléctrico indutor pode ser alimentado a partir de uma fonte de corrente contínua através de um colector de anéis; ou pode ser alimentado directamente por um outro alternador ligado a um rectificador, sendo este conjunto montado no veio da máquina, [MVG-1].



Alternador Síncrono Trifásico – excitação rotativa sem escovas (ABB)

O funcionamento do alternador síncrono trifásico, em qualquer regime ou tipo de serviço, tem de começar pelo estabelecimento de um modelo: *modelização*.

1 Modelização

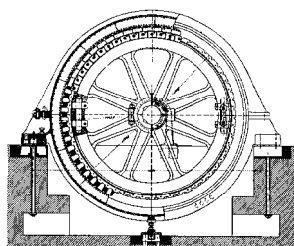
Antes de se efectuar a análise do funcionamento de uma máquina eléctrica, como o alternador síncrono trifásico, é necessário efectuar uma selecção entre os seus muitos e variados aspectos reais. É, por isso, necessário criar um modelo simbólico, com as suas propriedades eléctricas, magnéticas e mecânicas expressas por relações matemáticas. Desta forma, é possível tratar aquelas equações por meios matemáticos seguros, de forma a obterem-se resultados precisos e conclusivos.

O alternador síncrono trifásico foi estudado como Máquina Síncrona, durante o último século, por variados métodos, conforme está documentado em apontamentos didácticos conhecidos, [CCC-1,3], [CAS-1,3,4]. No entanto, tais métodos, que informam a Teoria Clássica das Máquinas Eléctricas, embora permitissem um pormenorizado conhecimento do funcionamento da máquina, dificilmente permitiam o estudo do seu funcionamento em regime transitório.

Com os métodos de modelização da Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas, [ADK-1] [CCC-2], é possível efectuar não só o estudo do alternador síncrono trifásico funcionando em regime permanente, mas também em regime transitório, assim como o seu comportamento dinâmico durante esse funcionamento; como se torna necessário para a análise do funcionamento destas máquinas eléctricas quando estão inseridas em sistemas eléctricos.

Por isso, torna-se necessário construir um modelo (*modelização*), em que o alternador síncrono trifásico é representado por um conjunto de equações matemáticas, com os seus *parâmetros*, formando um sistema de equações fundamentais que traduz, dentro de certos limites, a realidade do sistema.

sistema
electromecânico de
conversão de energia

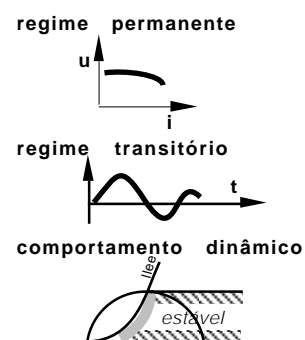


alternador síncrono trifásico

modelo
matemático

$$\begin{cases} \{\psi\} = [L] \cdot \{i\} \\ \{u\} = [R] \cdot \{i\} + p\{\psi\} \\ T_m = J \cdot p^2 \theta + D \cdot p\theta + T_{el} \end{cases}$$

análise do
funcionamento



Para se efectuar a modelização do alternador síncrono trifásico, começa-se por estabelecer as *condições de estudo* (1.1) que caracterizam e limitam o modelo a construir. Depois definem-se os *parâmetros* eléctricos, magnéticos e mecânicos (1.2) que irão caracterizar o alternador síncrono trifásico. Recorrendo a leis físicas, leis do Electromagnetismo e da Mecânica, estabelecem-se as *equações fundamentais* (1.3) que regem o funcionamento do alternador síncrono trifásico nas condições de estudo adoptadas.

Como as equações fundamentais, estabelecidas em coordenadas de fase, eram de tratamento e resolução difícil, passou-se a efectuar uma *transformação passiva* da qual resulta um conjunto de equações com mais fácil tratamento analítico, ou computacional. Deste sistema de equações, estabelecidas segundo os dois eixos (d-q) de simetria magnética da máquina, é possível deduzir os *circuitos eléctricos equivalentes*, e obter as expressões para a *potência* e para o *binário electromagnético* da máquina.

1.1 Condições de Estudo

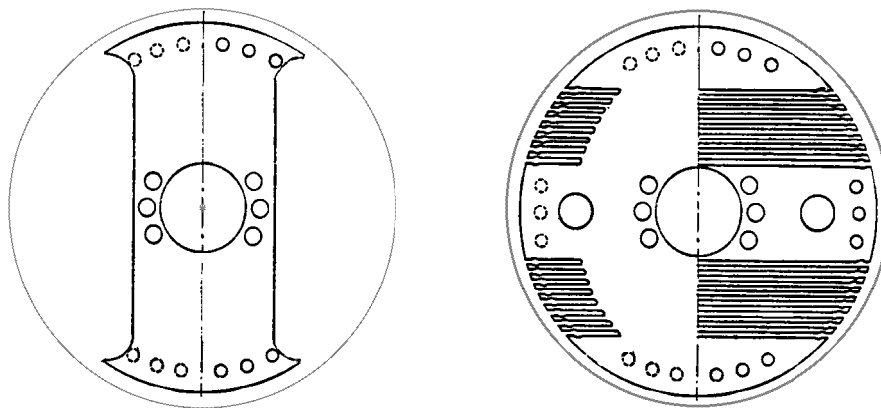
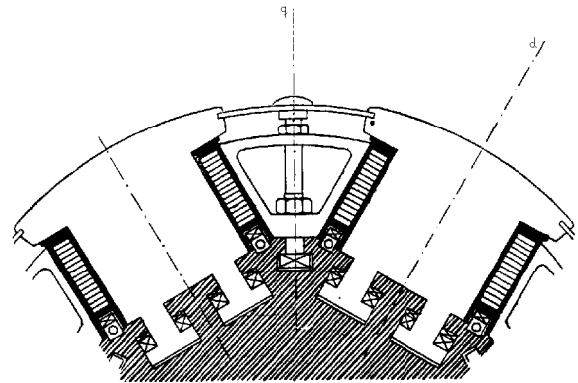
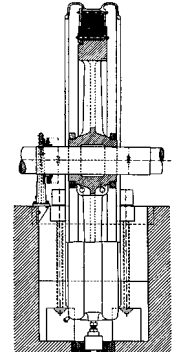
Uma máquina eléctrica, como o alternador síncrono trifásico, é demasiado complicada para poder ser integralmente modelizada de uma forma acessível; por isso, estabelece-se um conjunto de condições de estudo simplificativas. Eventualmente, poderão ser adoptadas outras condições de estudo, mediante uma extensão dos métodos de modelização, próprios da Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas, adoptados.

Como um modelo nunca chega a representar completamente essa realidade complexa que é o alternador síncrono trifásico, pode-se aumentar ou restringir o domínio de validade desse modelo com a adopção, ou rejeição, de determinadas condições de estudo.

Existe, assim, uma relação importante entre o estabelecimento das condições de estudo e o tipo de estudos que se pretendem realizar, assim como com os aspectos globais (ambientais) do sistema eléctrico em que o alternador síncrono trifásico está inserido.

Um aspecto construtivo dos alternadores síncronos trifásicos que é importante na modelização desta máquina eléctrica é a distinção entre o eixo de simetria magnético que se localiza segundo o polo magnético — o eixo longitudinal ou eixo directo (d) — e um outro eixo magnético que se localiza na zona interpolar em avanço de $\pi/2$ rad elect. sobre o primeiro — o eixo transversal ou eixo em quadratura (q).

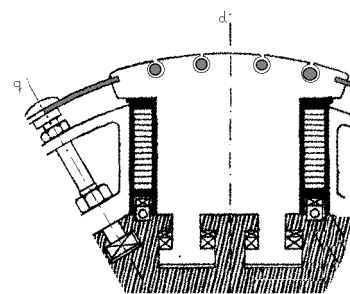
Estas duas direcções representam circuitos magnéticos que podem ter características diferentes (relutância R_m), conforme o tipo de circuito magnético indutor da máquina: de pólos salientes ($\rho\delta$) ou de indutor cilíndrico ($\rho\delta$).



No alternador síncrono trifásico de pólos salientes ($\rho\delta$) existem, claramente definidos pelas suas características construtivas, os dois eixos de simetria magnética. Assim, segundo o eixo directo, que coincide com o eixo do pólo, a máquina apresenta um circuito magnético com menor entreferro, e, portanto, com menor relutância magnética (R_{md}); enquanto que o circuito magnético na zona interpolar tem um maior entreferro, e portanto um maior valor da relutância magnética (R_{mq}): $R_{mq} > R_{md}$.

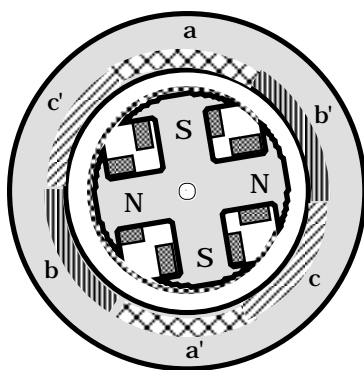
No alternador síncrono trifásico de indutor cilíndrico ($\rho\delta$) considera-se que o entreferro da máquina é uniforme, despreza-se a variação periódica da relutância magnética devido às ranhuras, e considera-se que $R_{mq} = R_{md}$.

Também na expansão polar, e distribuído por ranhuras semi-fechadas localizadas na periferia externa do pólo, existe um conjunto de condutores curto-circuitados nas extremidades que formam um enrolamento em gaiola: são os amortecedores {ver Apêndice B}. Estes enrolamentos podem cobrir parcialmente (incompletos ou abertos), ou integralmente (completos ou ligados), a superfície do rotor da máquina. Estes enrolamentos amortecedores podem ter uma resistência eléctrica baixa ou uma resistência eléctrica elevada, conforme se pretende que a sua acção seja máxima com um deslizamento elevado ou com um deslizamento baixo.



Na modelização do alternador síncrono trifásico considera-se a máquina representada num plano médio, perpendicular ao eixo da máquina, desprezando-se, assim, os fenómenos de dispersão que ocorrem nas extremidades devido à disposição das cabeças das bobinas do enrolamento. Considera-se que a máquina é simétrica e mecanicamente equilibrada. Os circuitos eléctricos do estator, enrolamento do induzido, são equilibrados e iguais para cada uma das fases.

{Neste estudo os símbolos das grandezas físicas do estator serão afectados do índice s , enquanto que os símbolos das grandezas físicas do rotor serão afectados do índice r }



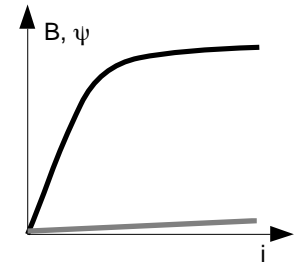
Representação esquemática de um alternador síncrono trifásico (plano médio)

- ① Apesar desta máquina eléctrica poder ser construída com um número elevado de pares de pólos p , o estudo da máquina é feito recorrendo à máquina eléctrica bipolar equivalente, com o auxílio da transformação entre ângulos geométricos (θ) e ângulos eléctricos (α); $\alpha = p \cdot \theta$.
- ② Apesar dos alternadores síncronos trifásicos, essencialmente os de potência elevada, trabalharem com uma tensão de alimentação com um valor de alta tensão, na gama da média tensão, considera-se que esta não é suficientemente elevada pelo que a totalidade da energia electromagnética armazenada no espaço da máquina é magnética, desprezando-se a energia electrostática. Não se pretendendo fazer estudos envolvendo variações bruscas de tensão ou de fenómenos com frequência muito elevada, desprezam-se por isso, no funcionamento normal, quaisquer efeitos de capacidades distribuídas entre os enrolamentos, ou entre os enrolamentos e a massa metálica da estrutura da máquina.
- ③ Surgindo nesta máquina grandezas eléctricas com frequência variável, considera-se que a frequência tem sempre um valor suficientemente baixo para permitir que sejam desprezados todos os fenómenos de efeito pelicular e de efeito de proximidade nos condutores eléctricos dos diferentes enrolamentos, assim como é desprezada a presença de correntes de Foucault.

Quando se torna necessário considerar a acção das correntes de Foucault,

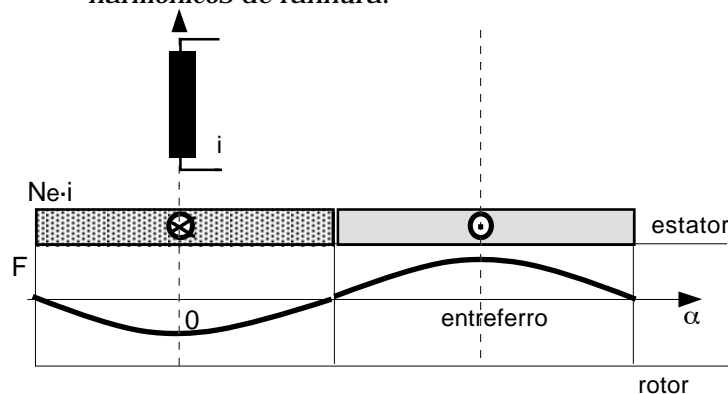
consideram-se circuitos eléctricos fictícios onde circulam essas correntes eléctricas, e a partir dos quais são produzidos os mesmos efeitos magnéticos.

- ④ O alternador síncrono trifásico, como qualquer máquina electromagnética, tem o seu circuito magnético construído com materiais ferromagnéticos, que têm perdas magnéticas. No entanto, considera-se que a curva de magnetização do material é unívoca, isto é, o material ferromagnético não tem histerese magnética. Também se considera que o circuito magnético está dimensionado de tal forma que nunca ocorre a saturação do circuito. O seu ponto de funcionamento encontra-se na parte rectilínea da característica de magnetização, o que implica que existe sempre uma relação constante entre as correntes eléctricas e o fluxo magnético por elas criado.



Actualmente, esta última condição de estudo pode ser abandonada porque existem teorias que tornam possível a realização do estudo computacional das máquinas síncronas com saturação, total ou parcial, do circuito magnético, [GAR-1,2].

- ⑤ A força magnetomotriz indutora ($F = N_e \cdot i$) quando é criada por pólos magnéticos salientes com entreferro polar variável (\mathcal{N}) tem uma distribuição periódica no espaço do entreferro com uma forma quase-sinusoidal, que possui o seu valor máximo segundo o eixo polar; quando é criada por um circuito indutor distribuído pelas ranhuras do rotor de entreferro uniforme (\mathcal{L}), tem uma distribuição periódica em escada com o valor máximo segundo o eixo polar. Qualquer uma dessas formas de onda, porque é periódica, é decomponível em série de termos harmónicos, série de Fourier, e atendendo a que a forma de onda é simétrica relativamente ao eixo polar, $F(\alpha) = F(-\alpha)$, só existem termos harmónicos em *coseno* e de ordem *ímpar*. Como a amplitude de cada termo harmónico diminui com o aumento da sua ordem, desprezam-se todos os termos harmónicos além do fundamental. Por isso, considera-se que a forma de onda da força magnetomotriz tem uma variação sinusoidal no espaço, com o valor máximo segundo a direcção do eixo polar, e que é criada por uma bobina concentrada colocada sobre o eixo de referência. Não se considera o efeito dos harmónicos devidos à variação periódica da relutância do circuito magnético, provocada pelas ranhuras dos estator ou do rotor: os *harmónicos de ranhura*.



Como se considerou que é linear a relação entre a intensidade do campo magnético e a indução magnética, também será sinusoidal a variação espacial da indução magnética no entreferro da máquina.

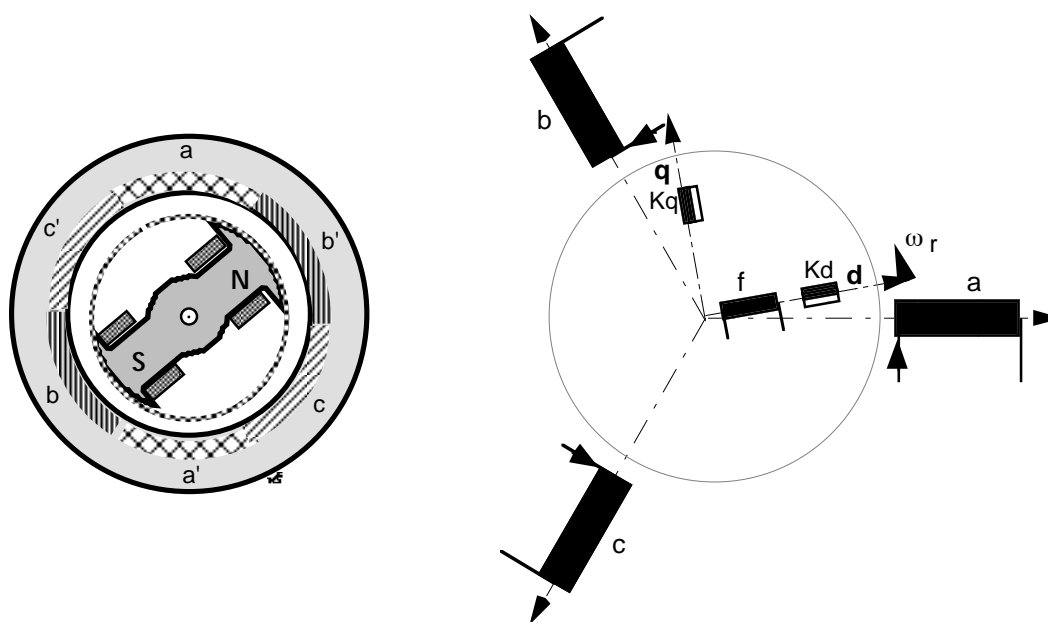
$$\boxed{i} \rightarrow N_e \cdot i \rightarrow \boxed{F} \rightarrow F/l \rightarrow \boxed{H} \rightarrow (\text{linear}) \rightarrow \boxed{B} \rightarrow B/S \rightarrow \boxed{\phi} \rightarrow -N_e \cdot \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \rightarrow \boxed{e}$$

Pela lei da indução (*Lei de Faraday*) a força electromotriz induzida nos condutores do

enrolamento estático terá uma variação sinusoidal no tempo.

- ⑥ A presença, no alternador síncrono trifásico, dos circuitos amortecedores provoca as considerações de estudo que se seguem. O circuito amortecedor é formado por um enrolamento de barras condutoras curto-circuitadas por ligações, do tipo enrolamento em gaiola, situado na periferia das expansões polares. Quando este circuito eléctrico se desloca no interior de um campo magnético, nele se induzem forças electromotrizes que estão esfasadas no tempo devido ao afastamento no espaço das ranhuras em que estão inseridos os condutores; surge, assim, no enrolamento amortecedor um sistema polifásico de forças electromotrizes. Este enrolamento único pode ser substituído por tantas bobinas, em curto-circuito, quantas as fases do sistema de forças electromotrizes induzidas. Esse conjunto de bobinas forma um enrolamento polifásico que, através de uma transformação passiva — *transformação do número de fases* — pode ser reduzido a um enrolamento difásico equivalente, com duas bobinas K_d e K_q , colocadas, respectivamente, segundo um eixo coincidente com a direcção polar (d), e segundo um eixo coincidente com a direcção interpolar (q) que está em quadratura avanço sobre o eixo d . {ver Apêndice B}.

O alternador síncrono trifásico, *idealizado* através das condições de estudo acima expostas, pode ser representado por um conjunto de circuitos eléctricos, interligados pelo campo magnético, que se encontra representado na figura seguinte, como se poderá verificar através da concordância das grandezas determinadas com auxílio deste modelo, utilizando os métodos matemáticos da Teoria dos Circuitos, e a sua actual contraparte, [PAR-1].



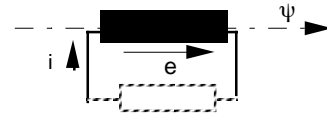
Esquema eléctrico de estudo para o alternador síncrono trifásico

O circuito eléctrico estático do alternador síncrono trifásico é representado por três bobinas concentradas, (a, b, c), colocadas no espaço segundo os três eixos de um sistema de referência, ou referencial, complanares e esfasados no espaço de $2\pi/3$ rad elect, ($s; a, b, c$). O circuito rotórico está referido a um referencial com dois eixos ortogonais complanares: um eixo directo d segundo a direcção polar, e um eixo em quadratura q , segundo o eixo interpolar, situado em avanço no espaço sobre o eixo d , ($r; d, q$). Este circuito eléctrico rotórico é constituído pela bobina indutora (f) colocada segundo o eixo directo (d), e pelas duas bobinas diferentes, representativas dos amortecedores, (K_d, K_q) colocadas, respectivamente, segundo o eixo directo ($K_d \leftrightarrow d$) e segundo o eixo em quadratura ($K_q \leftrightarrow q$). O sistema eléctrico rotórico, assim como o referencial ($r; d, q$), rodam

com uma velocidade angular eléctrica $\omega_r = d\alpha_r/dt = p \cdot d\theta_r/dt$.

□ Para este esquema electromecânico, representativo do alternador síncrono trifásico, estabelecem-se as seguintes *convenções de sinal*:

- o sentido da corrente eléctrica numa bobina é o da corrente que entra na bobina pelo condutor mais próximo do centro do esquema eléctrico;
- uma corrente eléctrica de sentido positivo cria um fluxo magnético com sentido positivo, isto é segundo o eixo da bobina e com o sentido radial centrífugo indicado pela seta do eixo;
- uma força electromotriz induzida tem sentido positivo quando, fechada sobre uma resistência, faz circular uma corrente eléctrica com sentido positivo, então $e = -d\psi/dt$;
- os circuitos eléctricos do estator (induzido) são considerados *produtores*, verificando-se, para os valores instantâneos das grandezas, que $-u = Ri - e$;
- os circuitos eléctricos rotóricos são considerados *consumidores*, verificando-se, para os valores instantâneos das grandezas, que $u = Ri - e$;
- o binário electromagnético é positivo quando a máquina eléctrica absorve energia mecânica, com uma velocidade de sentido positivo, que é o sentido directo ou trigonométrico, (gerador). O ângulo rotórico é medido entre o eixo da fase estatórica a e o eixo rotórico d .



Neste caso, a máquina síncrona trifásica funcionando como gerador ligado a uma rede de potência infinita apresenta-se como uma máquina eléctrica duplamente excitada. Para se estabelecerem as respectivas equações fundamentais, que regem o seu funcionamento, é necessário definir os parâmetros característicos dos diversos componentes eléctricos e mecânicos.

1.2 Parâmetros

As diversas partes da máquina eléctrica podem ser caracterizadas por parâmetros eléctricos e por parâmetros mecânicos, em função dos quais o comportamento da máquina eléctrica, como sistema de conversão electromecânica de energia, é estudado, [MVG-6].

1.2.1 Parâmetros Eléctricos

Os diferentes circuitos eléctricos, interligados magneticamente, são caracterizados por parâmetros. Esses parâmetros eléctricos são resistências e indutâncias, que devido às condições de estudo estabelecidas para esta máquina (1.1) são parâmetros concentrados lineares e constantes (*circuitos filiformes*).

As bobinas eléctricas do estator (induzido) da máquina, que são percorridas pela corrente eléctrica de carga, apresentam uma *resistência* eléctrica que se considera constante, porque não se admite a variação da temperatura durante o tempo de estudo desse regime de funcionamento, e se considera que não existe efeito pelicular ou de proximidade nos condutores (transposição dos condutores). Devido à existência de vários circuitos eléctricos no modelo da máquina utiliza-se uma representação matricial, apesar das resistências serem iguais $R_a = R_b = R_c = R_s$. {Afectam-se as grandezas do estator do índice s }. A matriz das resistências eléctricas do circuito do estator é uma matriz diagonal:

$$[R_s] = \text{diag}[R_a, R_b, R_c] = \text{diag}[R_s, R_s, R_s]$$

Também os circuitos eléctricos rotóricos possuem uma resistência eléctrica {Afectam-se as

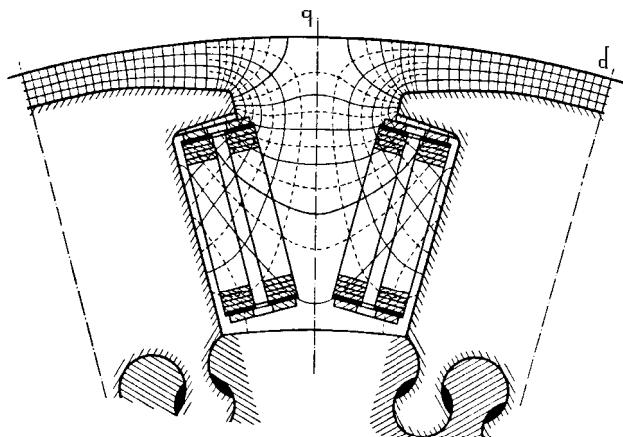
grandezas do rotor do índice r }, que pode ser representada pela matriz diagonal,

$$[R_r] = \text{diag}[R_f, R_{Kd}, R_{Kq}]$$

Para o alternador síncrono trifásico as resistências eléctricas dos diferentes circuitos podem agrupar-se numa matriz diagonal das resistências $[R]$

$$[R] = \text{diag}[R_a, R_b, R_c, R_f, R_{Kd}, R_{Kq}] = \text{diag}[R_s, R_s, R_s, R_f, R_{Kd}, R_{Kq}] \quad (1.1)$$

O parâmetro que estabelece a ligação entre as correntes eléctricas que percorrem as bobinas do circuito eléctrico e o fluxo de indução magnética totalizado por elas criado é a *indutância*; assume a forma de um coeficiente de auto-indução quando relaciona o fluxo magnético que envolve uma bobina e a corrente eléctrica que o cria, ou assume a forma de coeficiente de indução mútua entre duas bobinas quando relaciona o fluxo magnético totalizado que envolve uma bobina e a corrente eléctrica que o cria e que circula numa outra bobina {ver Apêndice A}.



Quando o circuito magnético tem propriedades magnéticas lineares, conforme estabelecido em ④, a indutância é um coeficiente constante (não varia com a intensidade da corrente eléctrica que cria o fluxo magnético totalizado).

Os *coeficientes de auto-indução e de indução mútua* dos diferentes circuitos eléctricos ligados pelo campo magnético do alternador síncrono trifásico são determinados atendendo às características construtivas próprias de cada circuito e atendendo à distribuição da força magnetomotriz criada por cada bobina, [CCC-2].

$$i \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow N_e \cdot i = F \rightarrow F/R_m = \phi \rightarrow N_e \cdot \phi = \psi \rightarrow \\ \rightarrow \text{-----} \rightarrow \end{array} \right\} \psi/i = L$$

Estator (induzido)

Considerando o enrolamento do estator, formado por três bobinas afastadas no espaço de $2\pi/3$ rad elect, e sucedendo-se em avanço, (a,b,c) verifica-se que o circuito magnético percorrido pelo fluxo totalizado criado por qualquer uma das bobinas depende do tipo de rotor utilizado.

(p) pólos salientes

No alternador síncrono trifásico de pólos salientes considerando que são lineares as propriedades do circuito magnético ④, a força magnetomotriz é sinusoidal ⑤, ou que sendo periódica, se pode representar apenas pelo termo fundamental da sua decomposição em série de Fourier, [MVG-5], e tomando como referência o eixo magnético que atravessa a bobina a, a expressão para a respectiva força magnetomotriz é: $f_a(\alpha_r) = F_a \cdot \cos(\alpha_r) = N_{ea} \cdot i_a \cdot \cos(\alpha_r)$, em que N_{ea} é o número efectivo de espiras da bobina a.

Número Efectivo de Espiras

Num alternador síncrono trifásico os diversos condutores estão dispostos, e estão ligados, de forma a que a força electromotriz criada seja máxima. Mas devido à topologia cilíndrica normalmente utilizada resulta que nos diversos condutores, distribuídos por ranhuras na periferia do entreferro, geram-se forças

electromotrizes com um esfasamento temporal, que traduz a deslocação espacial dos condutores que constituem as espiras da bobina, [CCC-1]:

$$E' = k_e \cdot C \cdot e_c \quad e \quad E = k_e \cdot N \cdot e_e = N_e \cdot e_e \quad N_e = k_e \cdot N$$

em que C = número de condutores em série, e $N = C/2$ o número total de espiras.

Como os condutores estão contidos nas ranhuras e não formam uma banda contínua, existe a necessidade de considerar esse aspecto na fórmula da força electromotriz. Isso consegue-se afectando o valor calculado com um coeficiente — *o factor de enrolamento*.

Para uma máquina eléctrica de corrente alternada o factor de enrolamento tem diferentes factores componentes, $k_e = k_d \cdot k_c \cdot k_i$.

factor de distribuição — k_d — traduz a diminuição do valor da amplitude da soma da força electromotriz total \underline{E}_R devido ao esfasamento temporal das forças electromotrizes criadas em cada espira \underline{E}_i na série que forma a bobina.

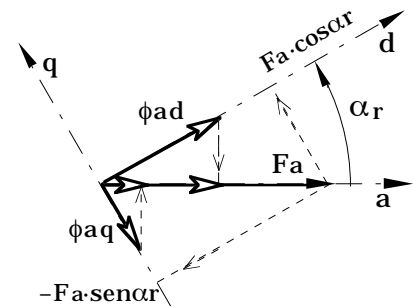
factor de encurtamento — k_c — traduz a diminuição da amplitude da força electromotriz gerada em cada bobina devido ao facto de os condutores de ida e de volta não estarem exactamente debaixo de pólos de nomes diferentes, isto é, distanciados exactamente do passo polar.

factor de inclinação — k_i — traduz a diminuição da força electromotriz gerada em cada bobina devido ao facto da ranhura estar inclinada relativamente ao eixo da máquina.

Normalmente numa máquina eléctrica apenas um ou dois destes factores entram na definição de factor de enrolamento, k_e .

A força magnetomotriz indutora, reduzida ao seu termo fundamental, tem uma distribuição sinusoidal no espaço $f_a(\alpha_r) = F_a \cdot \cos(\alpha_r)$, é decomponível segundo os dois eixos magnéticos rotóricos d e q (conforme estabeleceu A. Blondel em 1899), tendo cada componente um percurso, num circuito magnético, com relutância magnética diferente $R_{mq} > R_{md}$.

$$F_{ad} = F_a \cdot \cos \alpha_r \quad F_{aq} = F_a \cdot \cos((\pi/2) + \alpha_r) = -F_a \cdot \sin \alpha_r$$



O fluxo de indução magnética médio por espira segundo cada eixo rotórico é dado por $\phi = F/R_m$, em que R_m é a relutância do circuito magnético, que, devido à condição de estudo 4, é uma grandeza constante $R_m = 1/\mu \cdot S$, ou

$$\phi_{ad} = (F_a/R_{md}) \cdot \cos \alpha_r \quad \phi_{aq} = -(F_a/R_{mq}) \cdot \sin \alpha_r$$

Estes dois fluxos, que têm como componente segundo o eixo a $\phi'_{ad} = \phi_{ad} \cdot \cos \alpha_r$ e $\phi'_{aq} = \phi_{aq} \cdot \cos((\pi/2) + \alpha_r) = -\phi_{aq} \cdot \sin \alpha_r$, contribuem para o fluxo médio por espira que envolve a bobina a , com a soma dos contributos de cada componente. Para o fluxo médio por espira que envolve a bobina a , também contribui o fluxo médio por espira que apenas envolve a bobina a — o *fluxo de fugas* ϕ_σ .

O fluxo médio por espira segundo o eixo da fase a é dado por:

$$\begin{aligned} \phi_a &= \phi'_{ad} + \phi'_{aq} + \phi_\sigma = \\ &= (\phi_{ad} \cos \alpha_r) + (-\phi_{aq} \cdot \sin \alpha_r) + \phi_\sigma \end{aligned}$$

ou

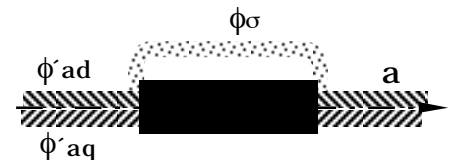
$$\phi_a = F_a \cdot ((1/R_{md}) \cdot \cos^2 \alpha_r + (1/R_{mq}) \cdot \sin^2 \alpha_r) + \phi_\sigma$$

substituindo $\cos^2 \alpha_r = (1 + \cos 2\alpha_r)/2$ e $\sin^2 \alpha_r = (1 - \cos 2\alpha_r)/2$, e reordenando,

$$\phi_a = (F_a/(2 \cdot R_{md} \cdot R_{mq})) \cdot (R_{md} + R_{mq}) + (F_a/(2 \cdot R_{md} \cdot R_{mq})) \cdot ((R_{mq} - R_{md}) \cdot \cos 2\alpha_r) + \phi_\sigma$$

O coeficiente de auto-indução da fase a é a razão entre o fluxo totalizado que envolve a fase a , ψ_a , e a intensidade da corrente eléctrica que o criou i_a , como $\psi_a = N_{ea} \cdot \phi_a$,

$$L_a = \psi_a/i_a = (N_{ea}^2/(2 \cdot R_{md} \cdot R_{mq})) \cdot ((R_{md} + R_{mq}) + (R_{mq} - R_{md}) \cdot \cos 2\alpha_r) + (N_{ea}/i_a) \cdot \phi_\sigma$$



$$L_a = L_A + L_B \cdot \cos(2\alpha_r) + l_\sigma$$

$$e \quad L_A = (N_{ea}^2 / (2 \cdot R_{md} \cdot R_{mq})) \cdot (R_{md} + R_{mq}), \quad e \quad L_B = (N_{ea}^2 / (2 \cdot R_{md} \cdot R_{mq})) \cdot (R_{mq} - R_{md})$$

Os coeficientes de auto-indução das fases *b* e *c* obtêm-se de forma análoga, ou por mera substituição do ângulo α_r , pelo correspondente ângulo de posição.

$$L_b = L_A + L_B \cdot \cos(2\alpha_r + (2\pi/3)) + l_\sigma \quad L_c = L_A + L_B \cdot \cos(2\alpha_r + (4\pi/3)) + l_\sigma$$

Os coeficientes de indução mútua *M* das bobinas do circuito estatórico podem ser determinados de uma forma análoga à utilizada na determinação dos coeficientes de auto-indução.

Considerando a determinação do coeficiente de indução mútua da bobina *a* devido à corrente eléctrica que circula na bobina *b*: M_{ab} , começa-se por considerar o fluxo médio por espira que envolve a bobina *a*, quando só circula corrente eléctrica na bobina *b* ($i_a = i_c = 0$, $i_b \neq 0$). O fluxo produzido pela corrente i_b na bobina *b* tem duas componentes segundo os eixos rotóricos:

$$\phi_{bd} = (F_b / R_{md}) \cdot \cos(\alpha_r - 2\pi/3)$$

$$\begin{aligned} \phi_{bq} &= (F_b / R_{mq}) \cdot \cos((\alpha_r + (\pi/2)) - (2\pi/3)) = \\ &= -(F_b / R_{mq}) \cdot \sin(\alpha_r - 2\pi/3) \end{aligned}$$

Como somente as componentes de ϕ_{bd} e de ϕ_{bq} paralelas ao eixo *a* contribuirão para o fluxo que envolve a bobina *a*, torna-se necessário projectar aquelas componentes segundo o eixo *a*, assim

$$\phi'_{abd} = \phi_{bd} \cdot \cos \alpha_r$$

$$\phi'_{abq} = \phi_{bq} \cdot \cos(\alpha_r + (\pi/2)) = -\phi_{bq} \cdot \sin \alpha_r$$

ou

$$\phi_{ab} = \phi'_{abd} - \phi'_{abq} = (F_b / R_{md}) \cdot \cos \alpha_r \cdot \cos(\alpha_r - 2\pi/3) - (F_b / R_{mq}) \cdot \sin \alpha_r \cdot \sin(\alpha_r - 2\pi/3)$$

considerando as relações trigonométrica $\cos \alpha \cdot \cos \beta = (1/2) \cdot (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$, e $\sin \alpha \cdot \sin \beta = (1/2) \cdot (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$, resulta

$$\phi_{ab} = (F_b / (-4 \cdot R_{md} \cdot R_{mq})) \cdot (R_{md} + R_{mq}) + (F_b / (2 \cdot R_{md} \cdot R_{mq})) \cdot (R_{mq} - R_{md}) \cdot \cos(2\alpha_r - 2\pi/3)$$

O coeficiente de indução mútua entre a fase *a* devido à fase *b*, M_{ab} é a razão entre o fluxo totalizado que envolve a fase *a* ψ_{ab} e a corrente que o criou i_b , como $\psi_{ab} = N_{eb} \cdot \phi_{ab}$,

$$M_{ab} = \psi_{ab} / i_b = (N_{ea} \cdot N_{eb} / (2 \cdot R_{md} \cdot R_{mq})) \cdot (-(R_{md} + R_{mq}) / 2 + (R_{mq} - R_{md}) \cdot \cos(2\alpha_r - 2\pi/3))$$

$$M_{ab} = -L_A / 2 + L_B \cdot \cos(2\alpha_r - 2\pi/3)$$

Os coeficientes de indução mútua M_{bc} e M_{ca} obtêm-se atendendo ao correspondente ângulo de posição;

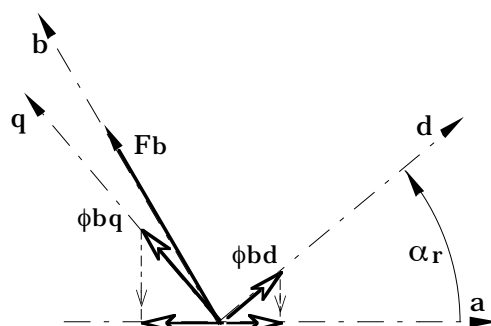
$$M_{bc} = -L_A / 2 + L_B \cdot \cos(2\alpha_r)$$

$$M_{ca} = -L_A / 2 + L_B \cdot \cos(2\alpha_r - 4\pi/3)$$

Devido à simetria e às propriedades lineares do circuito magnético, e devido aos aspectos construtivos admitidos para a máquina, verifica-se que $M_{ab} = M_{ba}$, $M_{bc} = M_{cb}$, $M_{ca} = M_{ac}$.

Assim, numa máquina eléctrica de pólos salientes, devido à anisotropia do circuito magnético, os coeficientes de auto-indução e de indução mútua dependem do valor do ângulo de posição do rotor α_r , segundo uma expressão de forma geral

$$L(\alpha_r) = L_A \cdot \cos(\gamma) + L_B \cdot \cos(2 \cdot \alpha_r - \beta)$$

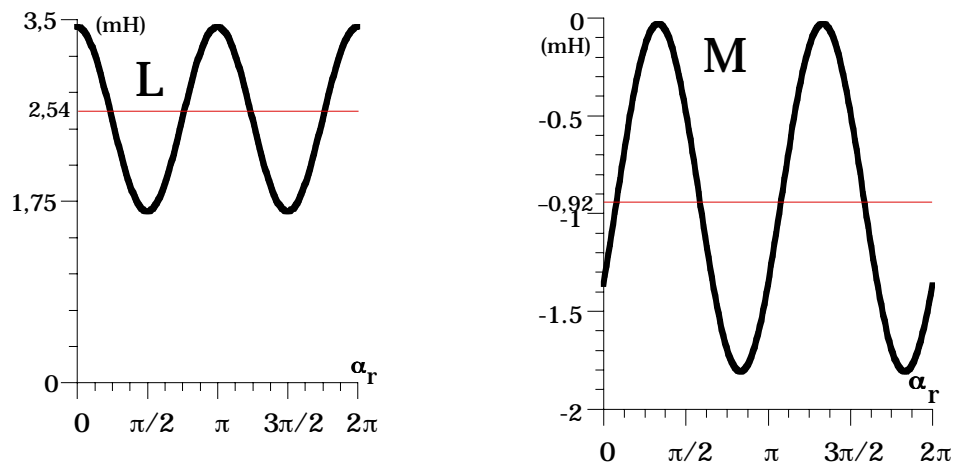


Note-se que considerando γ o ângulo de posição do eixo da bobina, $\gamma_a = 0$, $\gamma_b = 2\pi/3$, $\gamma_c = -2\pi/3$, é possível obter as expressões conhecidas para os coeficientes de auto-indução e de indução mútua das diferentes bobinas estatóricas. E β é o ângulo entre os eixos.

Assim: $L_a = L_A + L_B \cdot \cos(2 \cdot \alpha_r) + l_\sigma$; $M_{ab} = (-L_A/2) + L_B \cdot \cos(2 \cdot \alpha_r - (2\pi/3))$; $M_{ac} = (-L_A/2) + L_B \cdot \cos(2 \cdot \alpha_r + (2\pi/3))$; etc...

O coeficiente de auto-indução l_σ de uma bobina representa a indutância de fugas da respectiva bobina, e a consideração de que o fluxo totalizado segundo um eixo de referência é composto pelo fluxo de fugas da respectiva bobina e pelo fluxo de magnetização.

Exemplo_1.2-1 Num alternador síncrono trifásico — $S = 20$ kVA, $U = 200$ V, $f = 50$ Hz, $n = 1000$ rot/min, induzido ligado em estrela — verificou-se, experimentalmente, que o coeficiente de auto-indução da bobina estatórica de referência era $L_a = 2,54 + 0,89 \times \cos(2\alpha_r)$ mH, do que se conclui $L_A + l_\sigma = 2,54$ mH e $L_B = 0,89$ mH. O coeficiente de indução mútua entre duas bobinas estatóricas tinha o valor $M_{ab} = -0,92 + 0,89 \times \cos(2\alpha_r - (2\pi/3))$ mH.



Verifica-se que: $l_\sigma = 2,54 - L_A = 2,54 - (2 \times 0,92) = 0,7$ mH; que $L_A > L_B$ ($1,84 > 0,92$); e que $L_B < L_A/2$, ($0,89 < 0,92$). Como $L_B < L_A/2$, o coeficiente de indução mútua M_{ab} é sempre negativo, o que se explica atendendo a que o fluxo magnético totalizado ψ_{ab} , fluxo criado na bobina b e que percorre o eixo a , percorre esse eixo em sentido contrário ao sentido positivo do eixo.

As indutâncias do estator podem ser reunidas numa matriz das indutâncias próprias do estator $[L_{SS}]$, que para a máquina de pólos salientes tem a forma:

$$[L_{SS}] = \begin{bmatrix} L_A + L_B \cdot \cos(2\alpha_r) + l_\sigma & (-L_A/2) + L_B \cdot \cos(2\alpha_r - (2\pi/3)) & (-L_A/2) + L_B \cdot \cos(2\alpha_r + (2\pi/3)) \\ (-L_A/2) + L_B \cdot \cos(2\alpha_r - (2\pi/3)) & L_A + L_B \cdot \cos(2\alpha_r + (2\pi/3)) + l_\sigma & (-L_A/2) + L_B \cdot \cos(2\alpha_r) \\ (-L_A/2) + L_B \cdot \cos(2\alpha_r + (2\pi/3)) & (-L_A/2) + L_B \cdot \cos(2\alpha_r) & L_A + L_B \cdot \cos(2\alpha_r - (2\pi/3)) + l_\sigma \end{bmatrix} \quad (1.2.23)$$

(i) indutor cilíndrico

No alternador síncrono trifásico de indutor cilíndrico, não existe diferença de relutância do circuito magnético segundo o eixo directo e segundo o eixo em quadratura, por isso quando se faz um tratamento análogo ao apresentado, verifica-se que nas expressões dos coeficientes de auto-indução e de indução mútua se anulam os termos função do ângulo de posição porque $R_{md} = R_{mq}$, ficando assim

$$L_a = L_A + l_\sigma$$

$$M_{ab} = -L_A/2$$

e os restantes coeficientes também são constantes. A matriz dos coeficientes próprios do

estator é, para esta máquina, uma matriz constante (que não depende da posição do rotor),

$$[L_{SS}] = \begin{bmatrix} L_A + l_\sigma & (-L_A/2) & (-L_A/2) \\ (-L_A/2) & L_A + l_\sigma & (-L_A/2) \\ (-L_A/2) & (-L_A/2) & L_A + l_\sigma \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Rotor (indutor, bobinas dos amortecedores)

Tanto para o alternador síncrono trifásico de pólos salientes (2) como para o alternador síncrono trifásico de indutor cilíndrico (3), os coeficientes de auto-indução e de indução mútua dos circuitos eléctricos rotóricos são determinados atendendo à distribuição do fluxo magnético num circuito magnético que apresenta sempre a mesma relutância, apesar do movimento do rotor. Assim, os coeficientes de auto-indução das bobinas rotóricas, bobina indutora e bobinas representativas dos amortecedores, são independentes do movimento: L_f , L_{Kd} , L_{Kq} . Entre os circuitos rotóricos em quadratura espacial não existem coeficientes de indução mútua, porque se considerou que o circuito magnético tem propriedades magnéticas lineares. Assim, $M_{fKq} = M_{Kqf} = 0$, $M_{KqKd} = M_{KdKq} = 0$. Entre os circuitos rotóricos situados segundo o mesmo eixo, existem coeficientes de indução mútua constantes. Entre o circuito indutor e a bobina representativa dos amortecedores colocada segundo o eixo directo, existem coeficientes de indução mútua com valor constante, $M_{fKd} = M_{Kdf}$. Todas estas indutâncias são elementos da matriz das indutâncias próprias do rotor, $[L_{RR}]$.

$$[L_{RR}] = \begin{bmatrix} L_f & M_{fKd} & 0 \\ M_{fKd} & L_{Kd} & 0 \\ 0 & 0 & L_{Kq} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Estator — Rotor

Entre as bobinas estatóricas e as bobinas rotóricas, de qualquer tipo de alternador síncrono trifásico, existem coeficientes de indução mútua, que devido à variação da posição relativa dos eixos das duas bobinas com o movimento do rotor, dependem do ângulo α_r de posição do rotor. A sua forma genérica é $m_{af} = M_{af} \cdot \cos(\alpha_r)$, $m_{aKd} = M_{aKd} \cdot \cos(\alpha_r)$, $m_{aKq} = -M_{aKq} \cdot \sin(\alpha_r)$. Têm um valor máximo quando os eixos das respectivas bobinas coincidem, e têm um valor nulo quando os respectivos eixos estão em quadratura eléctrica. Os coeficientes de indução mútua para as restantes bobinas entram em consideração com sua posição espacial, que é um esfasamento de $\pm 2\pi/3$ rad elect da bobina estatórica a .

$$[M_{SR}] = \begin{bmatrix} M_{af} \cdot \cos(\alpha_r) & M_{aKd} \cdot \cos(\alpha_r) & -M_{aKq} \cdot \sin(\alpha_r) \\ M_{af} \cdot \cos(\alpha_r - (2\pi/3)) & M_{aKd} \cdot \cos(\alpha_r - (2\pi/3)) & -M_{aKq} \cdot \sin(\alpha_r - (2\pi/3)) \\ M_{af} \cdot \cos(\alpha_r + (2\pi/3)) & M_{aKd} \cdot \cos(\alpha_r + (2\pi/3)) & -M_{aKq} \cdot \sin(\alpha_r + (2\pi/3)) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Estes coeficientes de indução mútua podem agrupar-se, para o alternador síncrono trifásico, numa matriz de indutâncias mútuas do estator devido ao rotor $[M_{SR}]$.

Rotor — Estator

Também existem coeficientes de indução mútua entre as bobinas rotóricas e as bobinas estatóricas. Devido à simetria axial da máquina eléctrica e à linearidade das propriedades dos circuitos magnéticos, esses coeficientes de indução mútua entre uma bobina do rotor e uma bobina do estator são iguais aos coeficientes de indução mútua entre a mesma bobina do estator e a mesma bobina do rotor. Por isso, ao agruparem-se numa matriz de indutâncias mútuas do rotor devido ao estator, verifica-se que se forma uma matriz transposta da matriz das indutâncias mútuas do estator devido ao rotor: $[M_{RS}] = [M_{SR}]^T$.

Atendendo às diferentes ligações magnéticas entre os diversos circuitos eléctricos do alternador síncrono trifásico é possível criar a matriz das indutâncias para esta máquina eléctrica agrupando as diferentes submatrizes.

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{L}_{SS}] & [\mathbf{M}_{SR}] \\ [\mathbf{M}_{RS}] & [\mathbf{L}_{RR}] \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

No caso do alternador síncrono trifásico de pólos salientes é:

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} L_A + I_\sigma & (-L_A/2) + L_B \cos(2\alpha_r - 2\pi/3) & (-L_A/2) + L_B \cos(2\alpha_r + 2\pi/3) & M_{af} \cos(\alpha_r) & M_{aKd} \cos(\alpha_r) & -M_{aKq} \sin(\alpha_r) \\ (-L_A/2) + L_B \cos(2\alpha_r - 2\pi/3) & L_A + I_\sigma & (-L_A/2) + L_B \cos(2\alpha_r) & M_{af} \cos(\alpha_r - 2\pi/3) & M_{aKd} \cos(\alpha_r - 2\pi/3) & -M_{aKq} \sin(\alpha_r - 2\pi/3) \\ (-L_A/2) + L_B \cos(2\alpha_r + 2\pi/3) & (-L_A/2) + L_B \cos(2\alpha_r) & L_A + I_\sigma & M_{af} \cos(\alpha_r + 2\pi/3) & M_{aKd} \cos(\alpha_r + 2\pi/3) & -M_{aKq} \sin(\alpha_r + 2\pi/3) \\ M_{af} \cos(\alpha_r) & M_{af} \cos(\alpha_r - 2\pi/3) & M_{af} \cos(\alpha_r + 2\pi/3) & L_f & M_{fKd} & 0 \\ M_{aKd} \cos(\alpha_r) & M_{aKd} \cos(\alpha_r - 2\pi/3) & M_{aKd} \cos(\alpha_r + 2\pi/3) & M_{fKd} & L_{Kd} & 0 \\ -M_{aKq} \sin(\alpha_r) & -M_{aKq} \sin(\alpha_r - 2\pi/3) & -M_{aKq} \sin(\alpha_r + 2\pi/3) & 0 & 0 & L_{Kq} \end{bmatrix} \quad (1.6) \hat{J}$$

No caso do alternador síncrono trifásico de indutor cilíndrico é:

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} L_A + I_\sigma & (-L_A/2) & (-L_A/2) & M_{af} \cos(\alpha_r) & M_{aKd} \cos(\alpha_r) & -M_{aKq} \sin(\alpha_r) \\ (-L_A/2) & L_A + I_\sigma & (-L_A/2) & M_{af} \cos(\alpha_r - 2\pi/3) & M_{aKd} \cos(\alpha_r - 2\pi/3) & -M_{aKq} \sin(\alpha_r - 2\pi/3) \\ (-L_A/2) & (-L_A/2) & L_A + I_\sigma & M_{af} \cos(\alpha_r + 2\pi/3) & M_{aKd} \cos(\alpha_r + 2\pi/3) & -M_{aKq} \sin(\alpha_r + 2\pi/3) \\ M_{af} \cos(\alpha_r) & M_{af} \cos(\alpha_r - 2\pi/3) & M_{af} \cos(\alpha_r + 2\pi/3) & L_f & M_{fKd} & 0 \\ M_{aKd} \cos(\alpha_r) & M_{aKd} \cos(\alpha_r - 2\pi/3) & M_{aKd} \cos(\alpha_r + 2\pi/3) & M_{fKd} & L_{Kd} & 0 \\ -M_{aKq} \sin(\alpha_r) & -M_{aKq} \sin(\alpha_r - 2\pi/3) & -M_{aKq} \sin(\alpha_r + 2\pi/3) & 0 & 0 & L_{Kq} \end{bmatrix} \quad (1.6) \hat{J}$$

A matriz das indutâncias $[\mathbf{L}]$, através das submatrizes da indutância própria do estator $[\mathbf{L}_{SS}]$ no caso do alternador síncrono trifásico de pólos salientes, e das submatrizes das indutâncias mútuas do estator devido ao rotor, $[\mathbf{M}_{SR}]$, e do rotor devido ao estator, $[\mathbf{M}_{RS}]$, é uma função do tempo t , através do ângulo de posição α_r : $\alpha_r = \omega_r \cdot t + \alpha_0$.

1.2.2 Parâmetros Mecânicos

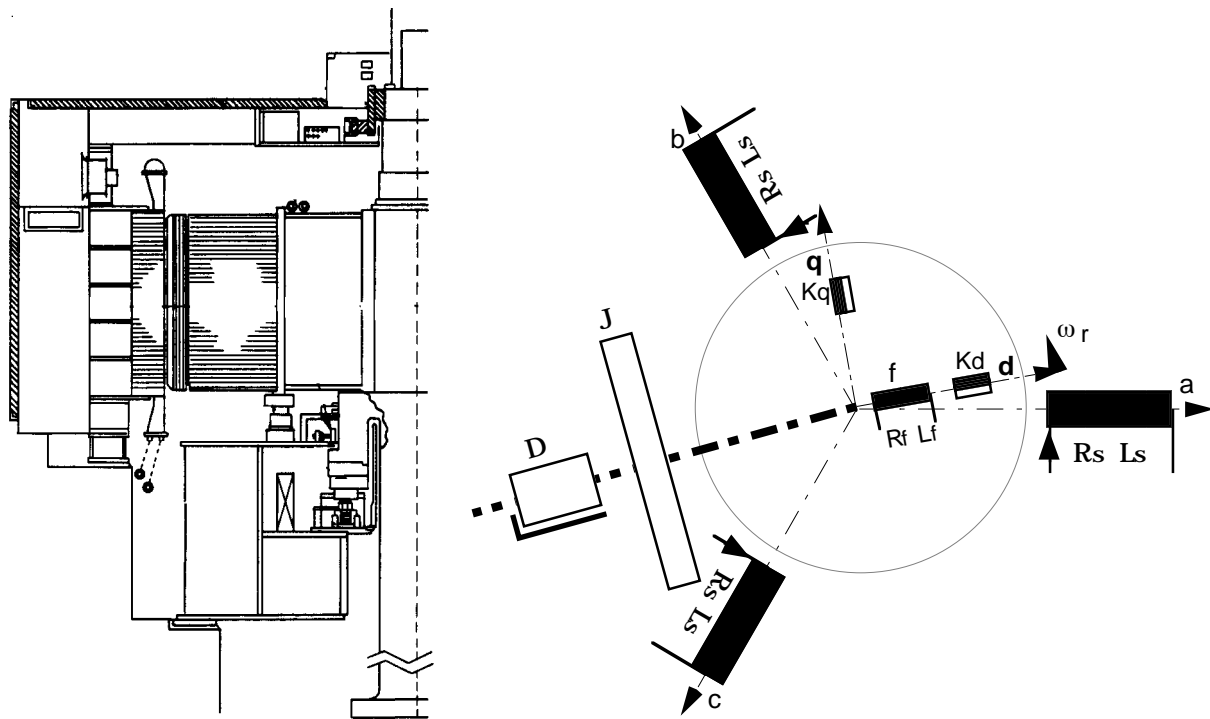
Os parâmetros mecânicos característicos do alternador síncrono trifásico são o coeficiente de atrito D , e o momento de inércia J . Estes parâmetros são responsáveis, respectivamente, pelos binário de atrito T_A , e pelo binário de inércia T_J .

$$T_A = D \cdot (d(\alpha_r/p)/dt) = D \cdot (\omega_r/p) \quad T_J = J \cdot (d^2(\alpha_r/p)/dt^2) = J \cdot ((1/p) \cdot (d\omega_r/dt)) \quad (1.7)$$

Em alguns estudos pode considerar-se que o coeficiente de atrito tem um valor que torna o binário de atrito desprezável face ao binário de inércia da máquina, ou ao binário de inércia da máquina adicionado do binário de inércia da máquina primária reduzido ao veio do alternador, [MVG—7].

1.2.3 Modelo de Parâmetros Concentrados

Com os parâmetros eléctricos e mecânicos definidos anteriormente, e nas condições de estudo consideradas, o alternador síncrono trifásico fica representado por um sistema electromecânico simples: vários circuitos eléctricos ligados pelo campo magnético e um circuito mecânico com inércia e atrito.



Representação Esquemática do Circuito Electromecânico de Parâmetros Concentrados

1.3 Equações Fundamentais

Definidos os parâmetros eléctricos e mecânicos que caracterizam o alternador síncrono trifásico, podem estabelecer-se as equações matemáticas que permitem modelizar esta máquina eléctrica, e que regem o seu funcionamento.

1.3.1 Equações em Coordenadas de Fase

A cada uma das bobinas representativas dos circuitos do alternador síncrono trifásico está aplicada a respectiva tensão, que é representada pelo seu valor instantâneo. Atendendo ao critério do produtor adoptado para os circuitos estatóricos, ao critério do consumidor adoptado para os circuitos rotóricos, e que $u_{Kd} = u_{Kq} = 0$, as tensões podem ser escritas sobre a forma de um vector das tensões eléctricas instantâneas $\{u\}$,

$$\{u\} = \{-u_a, -u_b, -u_c, u_f, u_{Kd}, u_{Kq}\}^T \tag{1.8}$$

Também as correntes eléctricas que circulam nas bobinas do alternador síncrono trifásico podem ser agrupadas num vector dos valores instantâneos das correntes $\{i\}$,

$$\{i\} = \{i_a, i_b, i_c, i_f, i_{Kd}, i_{Kq}\}^T \tag{1.9}$$

EQUAÇÃO MAGNÉTICA

Devido às condições de estudo que foram estabelecidas para o alternador síncrono trifásico, as propriedades magnéticas do material ferromagnético são lineares ④, e, por isso, é constante a relação entre o fluxo totalizado que envolve uma bobina e as correntes eléctricas que o criam.

Para o fluxo magnético totalizado ψ_a , que envolve uma bobina estatórica a, contribui:

- o fluxo de auto-indução, que inclui o fluxo de fugas da bobina a,

$$\psi_{aa} = (L_A + L_B \cdot \cos(2 \cdot \alpha_r) + l_\sigma) \cdot i_a \quad \text{ou} \quad \psi_{aa} = (L_A + l_\sigma) \cdot i_a \tag{1.10}$$

- o fluxo de indução mútua, que é criado por cada uma das outras bobinas do estator,

$$\psi_{ab} = ((-L_A/2) + L_B \cdot \cos(2 \cdot \alpha_r - (2\pi/3))) \cdot i_b \quad \text{ou} \quad \psi_{ab} = (-L_A/2) \cdot i_b$$

$$\psi_{ac} = ((-L_A/2) + L_B \cdot \cos(2 \cdot \alpha_r + (2\pi/3))) \cdot i_c \quad \text{ou} \quad \psi_{ac} = (-L_A/2) \cdot i_c \quad (1.11)$$

– o fluxo de indução mútua, que é criado por cada uma das bobinas rotóricas,

$$\psi_{af} = (M_{af} \cdot \cos(\alpha_r)) \cdot i_f$$

$$\psi_{aKd} = (M_{aKd} \cdot \cos(\alpha_r)) \cdot i_{Kd}$$

$$\psi_{aKq} = (-M_{aKq} \cdot \sin(\alpha_r)) \cdot i_{Kq} \quad (1.12)$$

Atendendo aos sentidos das grandezas eléctricas e magnéticas definidos nas condições de estudo, e à dedução da expressão das indutâncias, resulta que:

$$\psi_a = \psi_{aa} + \psi_{ab} + \psi_{ac} + \psi_{af} + \psi_{aKd} + \psi_{aKq}$$

$$\psi_b = \psi_{ba} + \psi_{bb} + \psi_{bc} + \psi_{bf} + \psi_{bKd} + \psi_{bKq}$$

$$\psi_c = \psi_{ca} + \psi_{cb} + \psi_{cc} + \psi_{cf} + \psi_{cKd} + \psi_{cKq}$$

$$\psi_f = \psi_{fa} + \psi_{fb} + \psi_{fc} + \psi_{ff} + \psi_{fKd} + \psi_{fKq}$$

$$\psi_{Kd} = \psi_{Kda} + \psi_{Kdb} + \psi_{Kdc} + \psi_{Kdf} + \psi_{KdKd} + \psi_{KdKq}$$

$$\psi_{Kq} = \psi_{Kqa} + \psi_{Kqb} + \psi_{Kqc} + \psi_{Kqf} + \psi_{KqKd} + \psi_{KqKq} \quad (1.13)$$

A este conjunto de equações magnéticas, atendendo às expressões do tipo (1.10) a (1.12) para as diferentes bobinas, pode ser dada uma forma matricial, aparecendo, assim, a *equação magnética* para o alternador síncrono trifásico:

$$\mathbf{\Psi} = [\mathbf{L}] \cdot \mathbf{i} \quad (1.14)$$

em que $\{\psi\} = \{\psi_a, \psi_b, \psi_c, \psi_f, \psi_{Kd}, \psi_{Kq}\}^T$, $\{i\} = \{i_a, i_b, i_c, i_f, i_{Kd}, i_{Kq}\}^T$, e a matriz das indutâncias $[\mathbf{L}]$ tem a forma definida em (1.6); ((1.6/2) ou (1.6/3)).

EQUAÇÃO ELÉCTRICA

As equações eléctricas, que traduzem a aplicação da lei de Kirchhoff para as malhas dos circuitos eléctricos, são escritas atendendo às convenções de sinal estabelecidas anteriormente.

Considerando que a variação do fluxo totalizado que atravessa cada bobina vai dar origem a uma força electromotriz, e atendendo ao critério adoptado par o sentido da energia, para cada circuito eléctrico é possível escrever uma equação de tensões. Nestas equações utiliza-se $p = d/dt$ como operador diferencial (operador de Heaviside).

$$-u_a = R_a \cdot i_a - e_a = R_a \cdot i_a + p\psi_a$$

$$-u_b = R_b \cdot i_b - e_b = R_b \cdot i_b + p\psi_b$$

$$-u_c = R_c \cdot i_c - e_c = R_c \cdot i_c + p\psi_c$$

$$u_f = R_f \cdot i_f - e_f = R_f \cdot i_f + p\psi_f$$

$$u_{Kd} = R_{Kd} \cdot i_{Kd} - e_{Kd} = R_{Kd} \cdot i_{Kd} + p\psi_{Kd}$$

$$u_{Kq} = R_{Kq} \cdot i_{Kq} - e_{Kq} = R_{Kq} \cdot i_{Kq} + p\psi_{Kq} \quad (1.15)$$

A estas equações eléctricas também é possível dar uma forma matricial. À equação obtida é possível dar uma outra forma atendendo a que as correntes eléctricas são função do tempo, assim como algumas das indutâncias, através do ângulo de posição α_r ($\alpha_r = \omega_r \cdot t + \alpha_0$). A *equação eléctrica* tem a forma matricial:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [\mathbf{R}] \cdot \mathbf{i} + p\{\psi\} = \\ &= [\mathbf{R}] \cdot \mathbf{i} + p([\mathbf{L}] \cdot \mathbf{i}) = [\mathbf{R}] \cdot \mathbf{i} + (p[\mathbf{L}]) \cdot \mathbf{i} + [\mathbf{L}] \cdot (p\mathbf{i}) = \\ &= [\mathbf{R}] \cdot \mathbf{i} + \omega_r \cdot [d\mathbf{L}/d\alpha_r] \cdot \mathbf{i} + [\mathbf{L}] \cdot (p\mathbf{i}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

em que $\{u\} = \{-u_a, -u_b, -u_c, u_f, u_{Kd}, u_{Kq}\}^T$, $\{i\} = \{i_a, i_b, i_c, i_f, i_{Kd}, i_{Kq}\}^T$, $[\mathbf{R}]$ é a matriz diagonal das resistências (1.1), e se atende a que $p = (d/dt) = (d/d\alpha_r) \cdot (d\alpha_r/dt) = \omega_r \cdot (d/d\alpha_r)$.

Salienta-se, assim, a presença das duas componentes da força electromotriz:

- a *força electromotriz dinâmica* $\omega_r \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot \{i\}$, devida ao movimento dos condutores no interior do campo magnético;
- a *força electromotriz estática* $[L] \cdot p\{i\}$, devida à variação no tempo das grandezas.

Para o alternador síncrono trifásico verifica-se que $u_{Kd} = u_{Kq} = 0$.

A equação electromecânica de funcionamento do alternador síncrono trifásico obtém-se através de uma análise energética, baseada na expressão da potência instantânea.

EQUAÇÃO ELECTROMECAÂNICA

A potência eléctrica instantânea do alternador, $p(t)$, atendendo a (1.16),

$$\begin{aligned} p(t) &= \{i\}^T \cdot \{u\} = \\ &= \{i\}^T \cdot [R] \cdot \{i\} + \omega_r \cdot \{i\}^T \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot \{i\} + \{i\}^T \cdot [L] \cdot p\{i\} \end{aligned}$$

é dissipada em perdas por efeito Joule, $\{i\}^T \cdot [R] \cdot \{i\}$, alimenta a variação da energia magnética armazenada no espaço da máquina, $\{i\}^T \cdot [L] \cdot p\{i\} + (1/2) \cdot \omega_r \cdot \{i\}^T \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot \{i\}$, e resulta da potência transformada de mecânica em eléctrica e que entra no estator a partir do rotor, $(1/2) \cdot \omega_r \cdot \{i\}^T \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot \{i\}$, [JON-1]. A potência transformada é igual ao produto do binário electromagnético pela velocidade angular rotórica instantânea, $\omega_s \cdot T_{el}$ ou $(\omega_r/p) \cdot T_{el}$, resulta para a *equação electromecânica* do alternador, a partir do estator:

$$T_{el} = (1/2) \cdot p \cdot \{i\}^T \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot \{i\} \quad (1.17)$$

Atendendo às expressões para o vector das correntes eléctricas, e determinando a matriz $[dL/d\alpha_r]$, verifica-se que resulta uma expressão complicada, da forma

$$T_{el} = \frac{p}{2} \cdot \sum_{i=a,b,c} \sum_{j=f,Kd,Kq} \frac{dL_{ij}}{d\alpha_r} \cdot i_j \cdot i_j \quad (1.18)$$

em que várias, das muitas, parcelas são função de funções trigonométricas do ângulo de posição.

EQUAÇÃO MECÂNICA

Atendendo a que o binário electromagnético é alimentado pelo binário motor T_m , assim como o são o binário de inércia T_J e o binário de atrito T_a , é possível escrever uma *equação mecânica* que traduza a condição de equilíbrio mecânico:

$$\bullet \quad T_m = J \cdot (1/p) \cdot (d\omega_r/dt) + D \cdot (\omega_r/p) + T_{el} \quad (1.19)$$

As equações fundamentais do alternador síncrono trifásico, em coordenadas de fase, (1.14) + (1.16) + (1.19), constituem um modelo matemático desta máquina eléctrica que pode ser utilizado para efectuar o estudo do seu funcionamento em regime permanente ou em regime transitório. Tal tipo de estudo, que apresenta a vantagem de determinar directamente as grandezas eléctricas nas fases, pode ser feito por simulação computacional.

Utilizando um método de integração numérica, pode-se efectuar um estudo sobre o comportamento do alternador síncrono trifásico, quando se escolhem como *variáveis de estado* as correntes eléctricas e a velocidade angular e se conhecem as condições iniciais; $t = t_0 \Rightarrow \{i_0\}, \omega_{r0}$. Para isso as equações (1.16) e (1.19) tomam a forma de um sistema de equações diferenciais não lineares,

$$\begin{cases} (d\{i\}/dt) = [L]^{-1} \cdot (\{u\} - ([R] + \omega_r \cdot [dL/d\alpha_r]) \cdot \{i\}) \\ (d\omega_r/dt) = (p/J) \cdot (T_{em} - D \cdot (\omega_r/p) - T_c) \end{cases} \quad (1.20)$$

Um programa de computador genérico, escrito em pseudocódigo e sem preocupações de optimização da programação, permite ver o esforço computacional exigido, devido à determinação em cada intervalo de integração dos termos das matrizes das indutâncias

$[L]^{-1}$, e $[dL/d\alpha_r]$, assim como as operações contidas na expressão (1.18) para o binário electromagnético. No entanto, existem casos em que, por não se considerar a variação do ângulo de carga, se pode reduzir o esforço computacional, [MVG-3].

```

Programa SIMUL_ASTcf
  Ler os parâmetros e as condições iniciais
  Ler to, tf, Nint
  Construir os vectores {u}, {io}, e a matriz [R]
  C  { /* Algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem, [MVG-2] */ }
      Chamar RK4
  Escrever {t}, {i}, {ωr}
Fim

```

A aplicação do algoritmo de Runge-Kutta, através do subprograma RK4, [MVG-2], implica a chamada de um outro subprograma DERIV, onde são determinados os valores das derivadas $\{pi\}$ e $\{p\omega_r\}$.

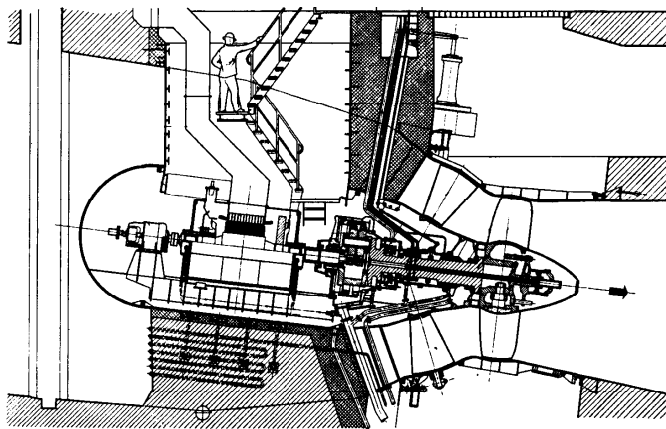
```

Sub DERIV(t, ωr, {i}, {pi}, {pωr})
  Dar valores aos parâmetros δ, pi, f, ωs
  Construir  $[L]^{-1}$ ,  $[dL/d\alpha_r]$ 
  Determinar  $\omega_r = 2\pi f$  e  $\alpha_r = \omega_r t + \alpha_0$ 
  Determinar  $\{v\} = \{u\} - \{[R]\{i\}\} - \omega_r \{[dL/d\alpha_r]\{i\}\}$ 
      Determinar  $\{pi\} = [L]^{-1}\{v\}$ 
  Determinar  $T_{em} = (p/2)\{i\}_T [dL/d\alpha_r]\{i\}$ 
      Determinar  $\{p\omega_r\} = (p/J)(T_{em} - D \cdot (\omega_r/p) - T_C)$ 
Fim_Sub

```

A dificuldades encontradas no estudo do alternador síncrono trifásico em coordenadas de fase, devido ao elevado número de parâmetros, à não linearidade das equações, e agravadas pela falta, nessa época, de meios de cálculo automático, levou à utilização de outras formas para as equações fundamentais desta máquina eléctrica.

Tal trabalho foi realizado por R. H. Park (1929), que seguindo o trabalho de Blondel (1899) e de Doherty e Nickle (1926) sobre o estudo da máquina síncrona baseado na decomposição da força magnetomotriz de reacção do induzido segundo os dois eixos de simetria — *Teoria das Duas Reacções* — promoveu a transformação das variáveis características da máquina para outras variáveis referidas a um sistema de referência, ou referencial, com dois eixos ortogonais complanos fixos ao sistema indutor da máquina (referencial natural nos eixos longitudinal e transversal (d-q)).



Alternador Síncrono Trifásico accionado por uma turbina bolbo

1.3.2 Equações no Referencial d-q

Devido às dificuldades de utilização do modelo de um alternador síncrono trifásico em coordenadas de fase, há a necessidade de procurar um outro modelo referido a um referencial em que as respectivas equações tenham uma forma mais compacta e com mais fácil tratamento matemático.

Para que se mantenha a equivalência entre os dois modelos é necessário que os efeitos magnéticos, produzidos pelas bobinas colocadas segundo os dois referenciais sejam iguais. Para que resulte uma simplificação, o novo referencial deverá ter dois eixos complanos *ortogonais*, o que faz anular alguns coeficientes de indução mútua, e deve rodar à velocidade do rotor, para que seja constante o ângulo entre o referencial a que está referido o estator e o referencial rotórico, o que torna as indutâncias independentes do ângulo de posição do rotor, e, portanto, do movimento.

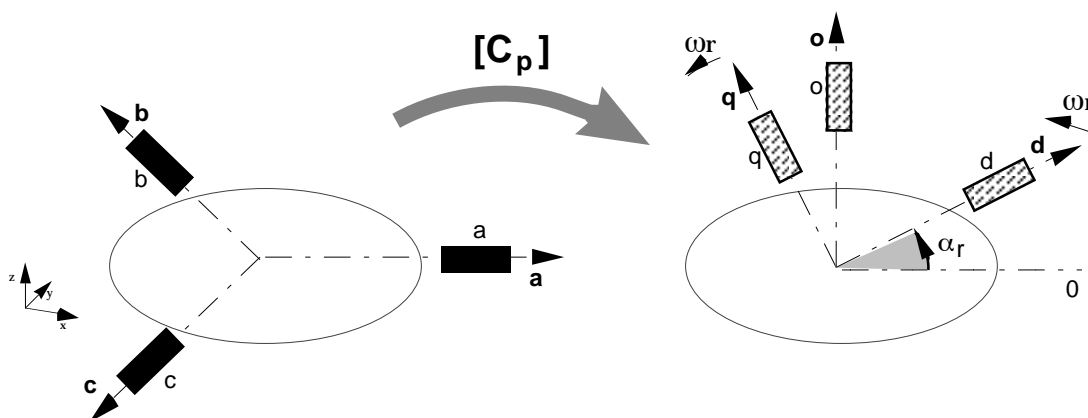
Considerando que as bobinas no referencial estacionário das fases, a,b,c, têm um número efectivo de espiras igual a $N_e/3$, e que no referencial d-q, móvel e que forma um ângulo $\alpha_r = \omega_r \cdot t + \alpha_0$ com a origem do referencial trifásico, as bobinas terão $N_e/2$ espiras efectivas, então, a relação entre dois sistemas de correntes eléctricas que criam uma mesma distribuição de força magnetomotriz nos dois referenciais é,

$$\{idq\} = [C_p] \cdot \{abc\} \quad (1.21)$$

em que $[C_p]$ é a matriz de transformação de Park, {ver Apêndice C}

$$[C_p] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & \cos (\alpha_r - 2\pi/3) & \cos (\alpha_r + 2\pi/3) \\ -\text{sen } \alpha_r & -\text{sen } (\alpha_r - 2\pi/3) & -\text{sen } (\alpha_r + 2\pi/3) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Com a aplicação da transformada de Park, passa a existir um sistema de componentes d-q, com uma *componente directa* ou componente longitudinal (d), uma *componente em quadratura* ou componente transversal (q), e uma *componente homopolar* (o), que é introduzida para manter a reversibilidade da transformação entre os dois referenciais.



Referenciais do estator para o alternador síncrono trifásico

Atendendo às equações fundamentais do alternador síncrono trifásico pode-se considerar que existem vários tipos de variáveis a que é necessário aplicar a transformada de Park: tensão, intensidade de corrente eléctrica, fluxo totalizado, impedâncias puramente óhmicas e impedâncias puramente indutivas.

No caso da tensão, da intensidade da corrente eléctrica e do fluxo totalizado a expressão de transformação é:

$$\{u\} = [C_p] \cdot \{u\} \quad \text{e} \quad \{u\} = [C_p]^{-1} \cdot \{u\}$$

$$\begin{aligned} \{i'\} &= [C_p] \cdot \{i\} & e & & \{i\} &= [C_p]^{-1} \cdot \{i'\} \\ \{\psi'\} &= [C_p] \cdot \{\psi\} & e & & \{\psi\} &= [C_p]^{-1} \cdot \{\psi'\} \end{aligned}$$

Quando se pretende transformar uma qualquer matriz impedância genérica $[Z]$, demonstra-se que a lei de transformação é $[Z'] = [C_p] \cdot [Z] \cdot [C_p]^{-1}$. Considerando os vectores genéricos $\{u\}$, e $\{i\}$,

$$\begin{aligned} \{u'\} &= [C_p] \cdot \{u\} & e & & \{u\} &= [C_p]^{-1} \cdot \{u'\} & & \{i'\} &= [C_p] \cdot \{i\} & e & & \{i\} &= [C_p]^{-1} \cdot \{i'\} \\ e & & & & \{u\} &= [Z] \cdot \{i\} \\ é & & & & \{u'\} &= [C_p] \cdot \{u\} = [C_p] \cdot ([Z] \cdot \{i\}) = [C_p] \cdot [Z] \cdot [C_p]^{-1} \cdot \{i'\} = [Z'] \cdot \{i'\} \\ ou & & & & [Z'] &= [C_p] \cdot [Z] \cdot [C_p]^{-1} \end{aligned}$$

Para o alternador síncrono trifásico, nas condições de estudo estabelecidas, apenas é necessário aplicar a transformada de Park às variáveis estatóricas, porque os parâmetros rotóricos já estão expressos em coordenadas de um sistema de eixos ortogonais, complanos e fixos ao rotor da máquina: o referencial natural do rotor d-q.

No caso de uma impedância puramente óhmica, como é o caso da matriz diagonal das resistências estatóricas do alternador síncrono trifásico $[R_S] = \text{diag}[R_S, R_S, R_S]$, verifica-se que:

$$[R_S'] = [C_p] \cdot [R_S] \cdot [C_p]^{-1} = [R_S]$$

e

$$[R'] = \begin{bmatrix} [C_p] & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & [1] \end{bmatrix} \cdot [R] \cdot \begin{bmatrix} [C_p] & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & [1] \end{bmatrix}^{-1} \equiv [R] \quad (1.23)$$

Para a matriz das indutâncias $[L]$, que tem a expressão completa dada por (1.16), a aplicação da transformação de Park conduz a:

$$[L'] = [C_p] \cdot [L] \cdot [C_p]^{-1}$$

mas, os parâmetros da parte rotórica do alternador síncrono trifásico já estão expressos num referencial d-q, pelo que se pode desdobrar a determinação de $[L']$, [CCC-2] [BAR-1], em,

$$[L'] = \begin{bmatrix} [C_p] & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & [1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [L_{ss}] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_{rr}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [C_p]^{-1} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & [1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L'_{ss}] & [M'_{sr}] \\ [M'_{rs}] & [L'_{rr}] \end{bmatrix}$$

ou, efectuando a tripla multiplicação das matrizes,

$$[L'] = \begin{bmatrix} [C_p] \cdot [L_{ss}] \cdot [C_p]^{-1} & [C_p] \cdot [M_{sr}] \\ [M_{rs}] \cdot [C_p]^{-1} & [L_{rr}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L'_{ss}] & [M'_{sr}] \\ [M'_{rs}] & [L'_{rr}] \end{bmatrix}$$

Atendendo à expressão (1.2), e efectuando as operações matriciais expressas em $[C_p] \cdot [L_{ss}] \cdot [C_p]^{-1}$ obtém-se $[L'_{ss}]$ para a expressão (1.16/2),

$$[L'_{ss}] = \begin{bmatrix} L_d & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & L_q & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & L_0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} L_d &= (3/2) \cdot (L_A + L_B) + l_\sigma = L_{md} + l_\sigma \\ L_q &= (3/2) \cdot (L_A - L_B) + l_\sigma = L_{mq} + l_\sigma \\ L_0 &= l_\sigma \end{aligned} \quad (1.24/2)$$

da definição de indutância directa ou longitudinal L_d , e de indutância em quadratura ou transversal L_q , retira-se que o fluxo próprio de uma bobina segundo um eixo de referência

é composto pelo fluxo de magnetização e pelo fluxo de fugas; e que $L_d - L_q = 3 \cdot L_B$.

Atendendo à expressão (1.2), e efectuando as operações matriciais expressas em $[C_p] \cdot [L_{SS}] \cdot [C_p]^{-1}$ obtém-se $[L'_{SS}]$ para a expressão (1.16/),

$$[L'_{SS}] = \begin{bmatrix} L_S & 0 & 0 \\ 0 & L_S & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} L_d &= (3/2) \cdot (L_A) + l_\sigma = L_m + l_\sigma = L_S \\ L_q &= (3/2) \cdot (L_A) + l_\sigma = L_d = L_S \\ L_0 &= l_\sigma \end{aligned} \quad (1.24/)$$

da definição de indutância directa ou longitudinal L_d que coincide com a indutância em quadratura ou transversal L_q na indutância síncrona L_S retira-se que o fluxo próprio de uma bobina segundo um eixo de referência é composto pelo fluxo de magnetização e pelo fluxo de fugas.

Note-se que, com a aplicação da transformação de Park, a matriz das indutâncias próprias do estator $[L'_{SS}]$ se tornou uma matriz diagonal, dentro das condições de estudo estabelecidas. Desta forma, e nessas condições, desfez-se a ligação magnética existente entre as bobinas estatóricas.

A expressão (1.4) para a matriz das indutâncias mútuas do estator devidas ao rotor $[M_{SR}]$, e a sua transposta para a matriz das indutâncias mútuas do rotor devidas ao estator $[M_{RS}]$, permitem determinar $[M'_{sr}] = [C_p] \cdot [M_{SR}]$ e $[M'_{rs}] = [M_{RS}] \cdot [C_p]^{-1}$,

$$[M'_{sr}] = \begin{bmatrix} M_{af} & M_{aKd} & 0 \\ 0 & 0 & M_{aKq} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [M'_{rs}] = \begin{bmatrix} (3/2) \cdot M_{af} & 0 & 0 \\ (3/2) \cdot M_{aKd} & 0 & 0 \\ 0 & (3/2) \cdot M_{aKq} & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz das indutâncias reduzidas ao referencial d-q tem a forma global $[L']$,

$$[L'] = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & M_{af} & M_{aKd} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & M_{aKq} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ (3/2) \cdot M_{af} & 0 & 0 & L_f & M_{fKd} & 0 \\ (3/2) \cdot M_{aKd} & 0 & 0 & M_{fKd} & L_{Kd} & 0 \\ 0 & (3/2) \cdot M_{aKq} & 0 & 0 & 0 & L_{Kq} \end{bmatrix} \quad (1.25/)$$

ou

$$[L'] = \begin{bmatrix} L_S & 0 & 0 & M_{af} & M_{aKd} & 0 \\ 0 & L_S & 0 & 0 & 0 & M_{aKq} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ (3/2) \cdot M_{af} & 0 & 0 & L_f & M_{fKd} & 0 \\ (3/2) \cdot M_{aKd} & 0 & 0 & M_{fKd} & L_{Kd} & 0 \\ 0 & (3/2) \cdot M_{aKq} & 0 & 0 & 0 & L_{Kq} \end{bmatrix} \quad (1.25/')$$

Esta matriz das indutâncias transformada $[L']$, por aplicação da transformada de Park (1.22), é constituída por termos independentes do ângulo de posição (α_r) do referencial d-q, e, por isso, independentes do tempo.

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

A equação magnética transformada é obtida por aplicação da transformada de Park à equação magnética (1.14), resultando

$$\bullet \quad \{\psi'\} = [L'] \cdot \{i'\} \quad (1.26)$$

em que $\{\psi'\} = \{\psi_d, \psi_q, \psi_0, \psi_f, \psi_{Kd}, \psi_{Kq}\}^T$, $\{i'\} = \{i_d, i_q, i_0, i_f, i_{Kd}, i_{Kq}\}^T$, e a matriz das indutâncias $[L']$ tem a forma definida em (1.25).

Esta equação magnética pode ser decomposta em três sistemas de equações independentes, segundo cada um dos eixos do referencial de transformação.

Fluxo longitudinal — relaciona o fluxo que se desenvolve segundo o eixo directo ou longitudinal com as correntes eléctricas que circulam nas bobinas colocadas segundo esse eixo;

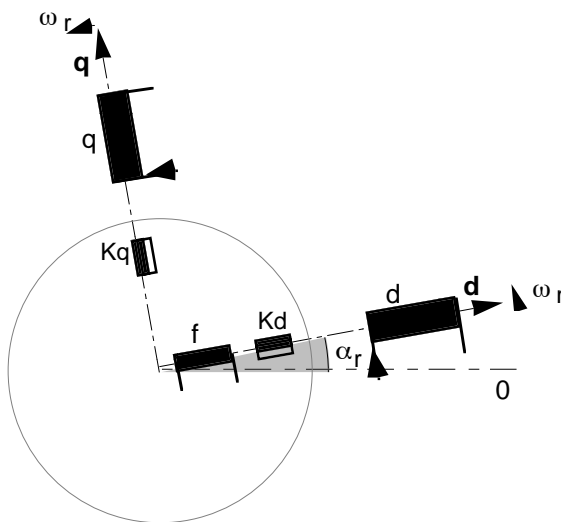
$$\begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_{Kd} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & M_{af} & M_{aKd} \\ (3/2) \cdot M_{af} & L_f & M_{fKd} \\ (3/2) \cdot M_{aKd} & M_{fKd} & L_{Kd} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_d \\ i_f \\ i_{Kd} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Fluxo transversal — relaciona o fluxo que se desenvolve segundo o eixo em quadratura ou transversal com as correntes eléctricas que circulam nas bobinas colocadas segundo esse eixo;

$$\begin{pmatrix} \psi_q \\ \psi_{Kq} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_q & M_{aKq} \\ (3/2) \cdot M_{aKq} & L_{Kq} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_q \\ i_{Kq} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Fluxo homopolar — relaciona o fluxo ψ_0 com a corrente eléctrica de valor instantâneo $i_0 = (1/3) \cdot (i_a + i_b + i_c)$, através de uma indutância $L_0 = l_\sigma$, relacionada com o fluxo de todas as fugas do induzido;

$$\psi_0 = L_0 \cdot i_0 \quad (1.29)$$



Esquema eléctrico de estudo do alternador síncrono trifásico no referencial d-q

Como as equações para os circuitos eléctricos rotóricos já estão expressas segundo um referencial d-q, para se transformar a equação eléctrica das tensões há, apenas, que transformar as equações referentes aos circuitos estatóricos, a,b,c, e contidas em $\{u_s\}$.

$$\{u_s\} = [R_s] \cdot \{i_s\} + p\{\psi_s\} \quad (1.30)$$

em que $\{u_s\} = \{-u_a, -u_b, -u_c\}^T$, $\{i_s\} = \{i_a, i_b, i_c\}^T$, $[R_s]$ é a matriz diagonal das resistências $[R_s] = \text{diag}[R_s, R_s, R_s]$, e $\{\psi_s\} = \{\psi_a, \psi_b, \psi_c\}^T$.

Assim, para $\{u'_s\} = \{-u_d, -u_q, -u_0\}^T$,

$$\{u'_s\} = [C_p] \cdot \{u_s\} = [C_p] \cdot [R_s] \cdot \{i_s\} + [C_p] \cdot p\{\psi_s\}$$

como $\{i_s\} = [C_p]^{-1} \cdot \{i'_s\}$, $[C_p] \cdot [C_p]^{-1} = 1$, $p = d/dt$

e, como $[C_p] \cdot [R_s] \cdot \{i_s\} = [R_s] \cdot [C_p] \cdot \{i_s\} = [R_s] \cdot \{i'_s\}$,

e $\{\psi_s\} = [C_p]^{-1} \cdot \{\psi'_s\}$, é

$$\begin{aligned} \{u'_s\} &= [C_p] \cdot \{u_s\} = [R_s] \cdot \{i'_s\} + [C_p] \cdot p([C_p]^{-1} \cdot \{\psi'_s\}) \\ &= [R_s] \cdot \{i'_s\} + ([C_p] \cdot p \cdot [C_p]^{-1}) \cdot \{\psi'_s\} + ([C_p] \cdot [C_p]^{-1}) \cdot p \cdot \{\psi'_s\} \end{aligned}$$

Demonstra-se, por simples execução das operações indicadas, que:

$$[C_p] \cdot p \cdot [C_p]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot p\alpha_r = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \omega_r$$

assim,

$$([C_p] \cdot p \cdot [C_p]^{-1}) \cdot \{\psi'_s\} = \omega_r \cdot \{-\psi_q, \psi_d, 0\}_T$$

e

$$\mathbf{■} \quad \{\psi'_s\} = [R_s] \cdot \{i'_s\} + \omega_r \cdot \{-\psi_q, \psi_d, 0\}_T + p \cdot \{\psi'_s\} \quad (1.31)$$

Atendendo à equação (1.31) e considerando as equações eléctricas para as bobinas rotóricas, obtêm-se as *equações eléctricas* no referencial d-q.

<i>estator</i>	<i>rotor</i>
• $-u_d = R_s \cdot i_d + p \cdot \psi_d - \omega_r \cdot \psi_q$	$u_f = R_f \cdot i_f + p \cdot \psi_f$
• $-u_q = R_s \cdot i_q + p \cdot \psi_q + \omega_r \cdot \psi_d$	$u_{Kd} = R_{Kd} \cdot i_{Kd} + p \cdot \psi_{Kd}$
• $-u_o = R_s \cdot i_o + p \cdot \psi_o$	$u_{Kq} = R_{Kq} \cdot i_{Kq} + p \cdot \psi_{Kq}$

(1.32)

A transformada de Park da *equação electromecânica* (1.17) obtém-se atendendo a que:

$$\{i\} = [C_p]^{-1} \cdot \{i\}' \quad \text{e} \quad \{i\}'_T = \{i\}'_T \cdot [C_p]^{-1}$$

$$T_{el} = (1/2) \cdot p \cdot \{i\}'_T \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot \{i\}' \quad (1.17)$$

e, então

$$\begin{aligned} T_{el} &= (p/2) \cdot (\{i\}'_T \cdot [C_p]^{-1}) \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot ([C_p]^{-1} \cdot \{i\}') \\ &= (p/2) \cdot \{i\}'_T \cdot ([C_p]^{-1} \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot [C_p]^{-1}) \cdot \{i\}' \end{aligned} \quad (1.33)$$

A determinação de $[C_p]^{-1} \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot [C_p]^{-1}$ é feita atendendo à constituição da matriz das indutâncias [L], definida em (1.5), e à constituição da matriz das indutâncias próprias do rotor [L_{rr}], definida em (1.3), que é independente do ângulo de posição α_r .

$$\begin{aligned} [C_p]^{-1} \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot [C_p]^{-1} &= \\ &= \begin{bmatrix} [C_p]^{-1} & 0 \\ 0 & [1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [dL_{ss}/d\alpha_r] & [dM_{sr}/d\alpha_r] \\ [dM_{rs}/d\alpha_r] & [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [C_p]^{-1} & 0 \\ 0 & [1] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} [C_p]^{-1} \cdot [dL_{ss}/d\alpha_r] \cdot [C_p]^{-1} & [C_p]^{-1} \cdot [dM_{sr}/d\alpha_r] \\ [dM_{rs}/d\alpha_r] \cdot [C_p]^{-1} & [0] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Efectuando as operações indicadas para os elementos da matriz (1.34), obtém-se,

$$[C_p]^{-1} \cdot [dL_{ss}/d\alpha_r]_{\rho s} [C_p]^{-1} = (9/2) \cdot L_B \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\rho s}$$

ou

$$[C_p]^{-1} \cdot [dL_{ss}/d\alpha_r]_{\zeta} [C_p]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]_{\zeta}$$

$$[C_p]_T^{-1} \cdot [dM_{sr}/d\alpha_r] = (3/2) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_{aKq} \\ M_{af} & M_{aKd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[dM_{rs}/d\alpha_r] \cdot [C_p]^{-1} = (3/2) \cdot \begin{bmatrix} 0 & M_{af} & 0 \\ 0 & M_{aKd} & 0 \\ -M_{aKq} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, a equação (1.33 ρ) toma a forma,

$$T_{el} = (3 \cdot p/2) \cdot (3L_B \cdot i_d \cdot i_q + M_{af} \cdot i_f \cdot i_q + (M_{aKd} \cdot i_{Kd} \cdot i_q - M_{aKq} \cdot i_{Kq} \cdot i_d))$$

atendendo à definição de indutância longitudinal, e transversal, apresentada em (1.24 ρ), resulta,

$$L_d - L_q = 3 \cdot L_B$$

e,

$$T_{el} = (3 \cdot p/2) \cdot ((L_d - L_q) \cdot i_d \cdot i_q + M_{af} \cdot i_f \cdot i_q + (M_{aKd} \cdot i_{Kd} \cdot i_q - M_{aKq} \cdot i_{Kq} \cdot i_d))$$

$$\bullet T_{el} = k \cdot ((L_d - L_q) \cdot i_d \cdot i_q + M_{af} \cdot i_f \cdot i_q + (M_{aKd} \cdot i_{Kd} \cdot i_q - M_{aKq} \cdot i_{Kq} \cdot i_d))$$

(1.35 ρ)

Esta equação (1.35 ρ) para o binário electromecânico do alternador síncrono trifásico de pólos salientes mostra que, desenvolvendo-se numa máquina eléctrica de pólos salientes com amortecedores, aquele binário tem três componentes:

- um *binário de relutância*, devido à anisotropia do circuito magnético, $L_d \neq L_q$, com o valor $(L_d - L_q) \cdot i_d \cdot i_q$;
- um *binário assíncrono* devido à interacção entre o fluxo directo e em quadratura dos amortecedores com as componentes em quadratura e directa das correntes eléctricas estatóricas, $M_{aKd} \cdot i_{Kd} \cdot i_q - M_{aKq} \cdot i_{Kq} \cdot i_d$;
- um *binário de excitação* devido à interacção entre o fluxo magnético indutor e a componente em quadratura da corrente eléctrica estatórica, $M_{af} \cdot i_f \cdot i_q$.

Atendendo à equação para o fluxo magnético longitudinal, $\psi_d = L_d \cdot i_d + M_{af} \cdot i_f + M_{aKd} \cdot i_{Kd}$, e para o fluxo magnético transversal, $\psi_q = L_q \cdot i_q + M_{aKq} \cdot i_{Kq}$, é possível dar a seguinte forma à expressão do binário electromagnético ((1.35 ρ),

$$T_{el} = (3 \cdot p/2) \cdot ((L_d \cdot i_d + M_{af} \cdot i_f + M_{aKd} \cdot i_{Kd}) \cdot i_q - (L_q \cdot i_q + M_{aKq} \cdot i_{Kq}) \cdot i_d)$$

ou

$$T_{el} = (3 \cdot p/2) \cdot (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) = k \cdot (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) \quad (1.36)$$

No caso do alternador síncrono trifásico de indutor cilíndrico, a equação (1.33) toma a forma,

$$T_{el} = (3 \cdot p/2) \cdot (M_{af} \cdot i_f \cdot i_q + (M_{aKd} \cdot i_{Kd} \cdot i_q - M_{aKq} \cdot i_{Kq} \cdot i_d))$$

ou

$$\bullet T_{el} = k \cdot (M_{af} \cdot i_f \cdot i_q + (M_{aKd} \cdot i_{Kd} \cdot i_q - M_{aKq} \cdot i_{Kq} \cdot i_d))$$

(1.35 ζ)

Esta equação (1.35 ζ) para o binário electromecânico do alternador síncrono trifásico de indutor cilíndrico mostra que, desenvolvendo-se numa máquina eléctrica com enrolamentos amortecedores ou circuitos equivalentes à acção das correntes de Foucault, aquele binário tem duas componentes:

- um *binário assíncrono* devido à interacção entre o fluxo directo e em quadratura

dos amortecedores (ou circuitos equivalentes) com as componentes em quadratura e directa das correntes eléctricas estatóricas, $M_{aKd} \cdot i_{Kd} \cdot i_q - M_{aKq} \cdot i_{Kq} \cdot i_d$;

- um binário de excitação devido à interacção entre o fluxo magnético indutor e a componente em quadratura da corrente eléctrica estatórica, $M_{af} \cdot i_f \cdot i_q$.

Também é possível dar a seguinte forma à expressão do binário electromagnético ((1.35 /)),

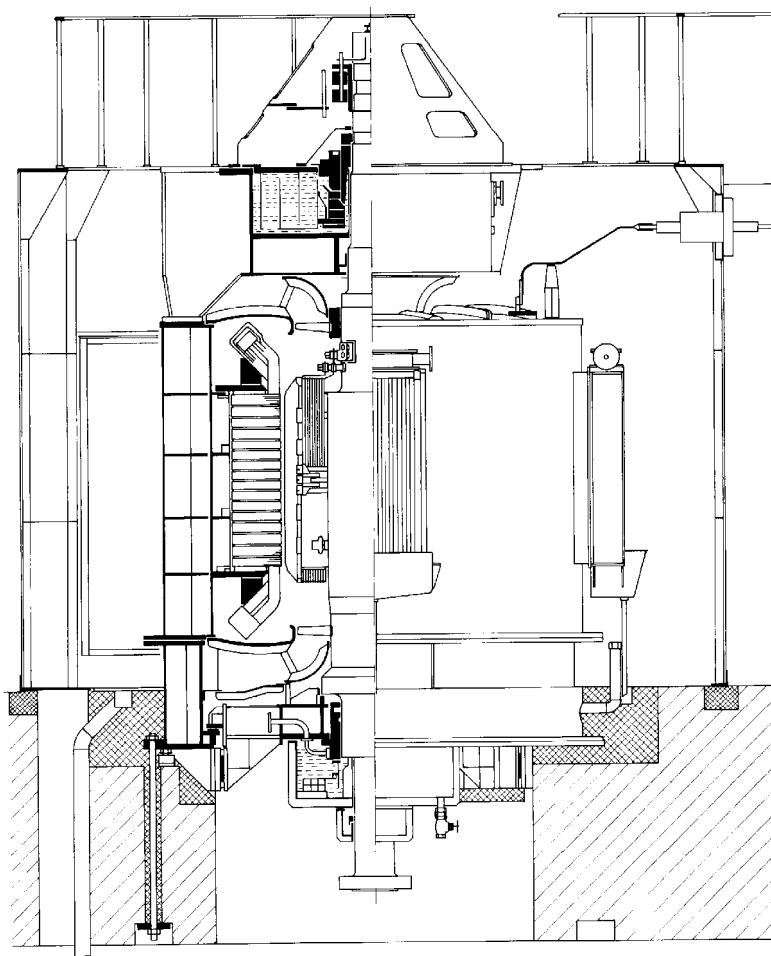
$$T_{el} = k \cdot (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) \quad (1.36)$$

A equação mecânica para o alternador síncrono trifásico não tem a sua forma alterada com a transformação de Park, e com o valor transformado para T_{el} , mantém a forma:

$$\bullet \quad T_m = (J/p) \cdot (d\omega_r/dt) + D \cdot (\omega_r/p) + T_{el} \quad (1.37)$$

O alternador síncrono trifásico fica, assim, modelizado, pelo conjunto de equações (1.26), (1.32) e (1.37), que formam agora um conjunto de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Qualquer estudo de simulação computacional feito com este modelo do alternador síncrono trifásico será de mais fácil, e rápido, tratamento, porque para cada intervalo de integração não é necessário recalculer os elementos das matrizes, porque eles não são função do ângulo de posição do rotor. Contudo, há que utilizar as expressões das transformadas inversas das grandezas para se obter o valor destas em coordenadas de fase, e portanto em valores compatíveis com os da rede eléctrica de alimentação.

A modelização do alternador síncrono trifásico num referencial d-q é a forma mais utilizada nos estudos que actualmente se fazem sobre este tipo de alternador.

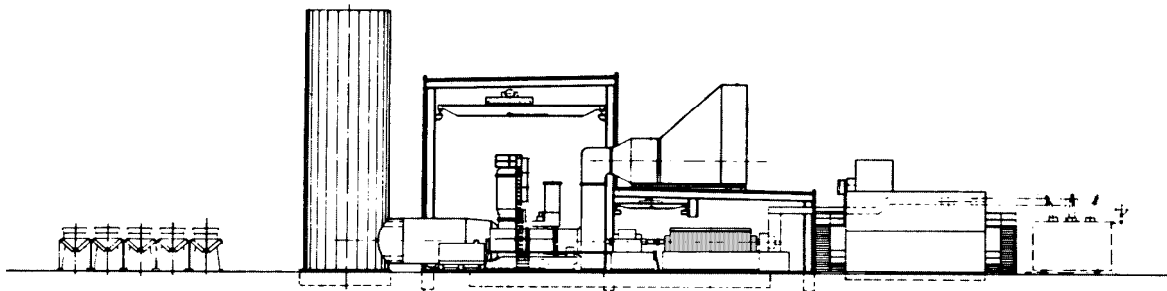


Alternador
de eixo vertical
10 MVA; 5 kV; 1500 rot/min
(OERLIKON, 1968)

1.3.3 Análise Crítica

Quando se procede à modelização do alternador síncrono trifásico utilizam-se alguns métodos, são feitas algumas considerações e obtêm-se alguns resultados que necessitam de ser analisados.

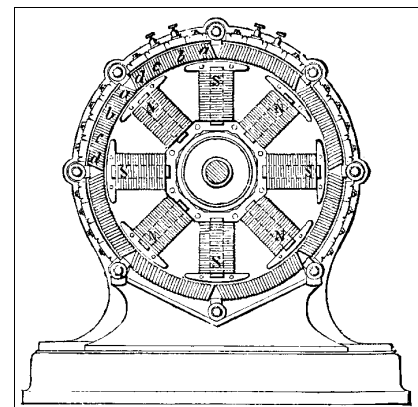
C.a A Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas — as máquinas eléctricas representam uma parte importante dos sistemas electromecânicos de conversão de energia, tanto no aspecto tecnológico como pela sua influência na economia. Do funcionamento do alternador síncrono trifásico, como conversor de energia mecânica em energia eléctrica, está dependente um vasto sistema eléctrico, um conjunto de bens fabricados e toda uma diversidade de serviços criados pela utilização da energia eléctrica produzida.



Central termoeléctrica moderna

Para um conhecimento dum máquina eléctrica, para a previsão das suas características de funcionamento, para uma fundamentação do seu projecto ou para o estudo da inter-influência da máquina com o sistema em que se integra, é preciso estabelecer as equações matemáticas que representam o funcionamento da máquina e, com essas equações, é preciso promover a análise desse funcionamento; nisso consiste a *Análise de Máquinas Eléctricas*.

No âmbito da Análise de Máquinas Eléctricas encontra-se a *Modelização*, que permite estabelecer um modelo matemático da máquina dentro das condições de estudo assumidas, encontra-se a *Simulação*, que, na actualidade, permite, por experimentação computacional, determinar as características de funcionamento da máquina em qualquer regime, e encontra-se a *Determinação de Parâmetros* que por métodos experimentais ou computacionais permite determinar os valores numéricos dos parâmetros das equações matemáticas que regem o funcionamento da máquina eléctrica dentro das condições de estudo e de aproximação assumidas.

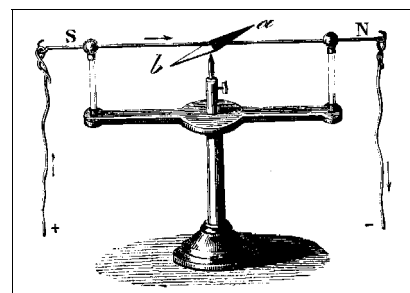


Alternador de Gramme, 1877

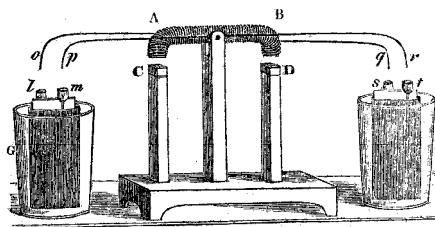
Para se efectuar a Análise de uma Máquina Eléctrica existem várias Teorias, e alguns Métodos que nessas teorias podem ser integrados, e que se foram desenvolvendo desde o aparecimento desse ramo da Física a que, na altura, se chamou *Electricidade Dinâmica*.

Como resultado dos trabalhos de A. Volta, em 1800 foi possível passar a dispor de uma fonte contínua de corrente eléctrica: a *pilha de Volta*. Compõe-se de um série de discos empilhados, segundo a seguinte ordem: um disco de cobre, um disco de zinco, uma rodela de pano húmido (água salgada), e assim sucessivamente, sempre naquela ordem.

A experimentação que se seguiu nas aplicações dessa nova forma de energia levou H. C. Oersted em 21 de Julho de 1820 a comunicar (in “*Experimenta Circa Effectum Conflictus Electrici in Acum Magneticam*”) a sua descoberta de que a passagem de uma corrente eléctrica num fio condutor perto de uma agulha magnética provocava a deslocação da agulha. Estava, assim, criada a primeira ligação entre a electricidade e o magnetismo — o *electromagnetismo* — e, pela primeira vez, detectava-se que uma corrente eléctrica produzia um movimento mecânico.



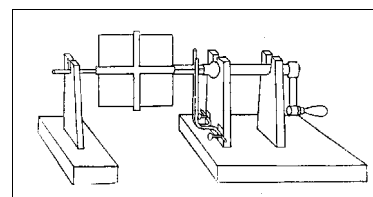
Na sequência daquela experiência desenvolveram-se um conjunto de *aparelhos electromecânicos* — Faraday (1821), Barlow (1821), Sturgeon (1828). Em 1836, W. Sturgeon apresentou uma comunicação à Royal Society descrevendo uma máquina eléctrica de colector (o colector eram dois vasos contendo mercúrio, ligados a quatro contactos que atritavam sobre um disco dividido em quatro partes isoladas entre si). Com o conhecimento desses trabalhos o americano J. Henry desenvolveu um motor eléctrico oscilante em 1831, com um electroímã horizontal (AB = 18 cm) formado por três camadas de fio de cobre.



Motor eléctrico de Henry (1831)

Todos estes aparelhos electromagnéticos — *máquinas eléctricas primitivas* — assim como outros, que entretanto se foram desenvolvendo, foram sempre projectados de uma forma empírica. Destas experiências, e da intensa comunicação que existia entre esses experimentadores, criou-se um grande conjunto de experiências laboratoriais sobre magnetismo e electricidade, que M. Faraday, em 1834, coligiu, ou desenvolveu e explicou numa notável publicação (“*Experimental Researches in Electricity*”).

Nessa publicação é descrito um gerador eléctrico alternado: um rectângulo de fio de cobre é rodado manualmente em torno de um veio (orientado Este-Oeste) no interior do campo magnético terrestre; o que origina uma força electromotriz alternada, que pode ser rectificadada por intermédio de um colector simples.



Rectângulo girante de Faraday

Nos anos seguintes o desenvolvimento desses aparelhos electromagnéticos continuou, e foram surgindo descobertas importantes: o colector (“descarregador num mesmo sentido”) foi sendo aperfeiçoando (1835, 1838, 1845); agrupamento de bobinas do induzido (1841); utilização de electroímãs (em lugar de ímanes permanentes) na excitação (C. Wheatstone, 1845). Na década seguinte desenvolve-se o enrolamento induzido (W. Siemens, 1856) (induzido em fuso, ou em duplo T), e Gramme (1870) (anel de Gramme) o que originou o aparecimento de máquinas fornecendo uma corrente eléctrica praticamente contínua; surgem as máquinas multipolares (1881). Em 1881, M. Deprez desenvolve a ideia do dínamo composto como máquina auto-regulada.

Enquanto estas acções de invenção, ou de desenvolvimento, se desenrolavam iam surgindo, de uma forma intermitente, algumas teorias explicativas do diferentes fenómenos: Neumann (1845) e Weber (1865) investigam as leis gerais da indução magneto-eléctrica, Hopkinson imaginou a representação gráfica da relação existente

entre a força electromotriz de um dínamo e a corrente eléctrica e M. Deprez deu-lhe o nome de “*característica*”; O. Frölich apresentou em 1880 a sua expressão matemática para a relação entre o “*magnetismo*” M (grandeza proporcional ao fluxo magnético por pólo) criado pelos electroímãs indutores e a corrente eléctrica que os percorre I , sendo Y o número de espiras e μ uma constante a determinar para cada material magnético: $M = \mu \cdot Y \cdot I / (1 + \mu \cdot Y \cdot I)$. A estes há que juntar os trabalhos de Hopkinson (1886) sobre o circuito magnético, de G. Kapp (1887) sobre a predeterminação das características, de Fristche (1889) e de E. Arnold (1891) sobre os enrolamentos do induzido das máquinas de corrente contínua (em anel e em tambor). Foram apresentados, também, diferentes estudos sobre perdas de energia e sobre o rendimento dessas máquinas eléctricas.

A importância da máquina eléctrica de corrente contínua resultava de ser a única que nessa época permitia a alimentação dos sistemas de iluminação pública, e a utilização do motor eléctrico de corrente contínua na “transmissão eléctrica de força”, ou “transporte de força”.

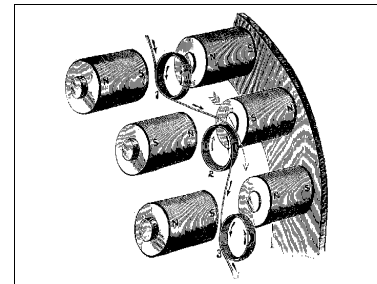
Em 1891 foi publicado o tratado de J. C. Maxwell “*A Treatise on Electricity and Magnetism*”, contendo a teoria e a fundamentação matemática do Electromagnetismo.

Nesta época a Análise de Máquinas Eléctricas, na sua primeira forma, envolvia o cálculo do circuito magnético; o que ainda é típico do estudo das máquinas de corrente contínua.

Baseado numa analogia entre a Lei de Ohm ($U = R \cdot I$) e a (depois intitulada) Lei de Hopkinson ($F = R_m \cdot \phi$) e utilizando o conceito de força magnetomotriz (F) e de relutância magnética ($R_m = l / (\mu \cdot S)$), Kapp estabeleceu a equação fundamental dos dínamos ($E = K \cdot n \cdot \phi$, com $\phi = F / R_m$), {G. Kapp, 1885}.

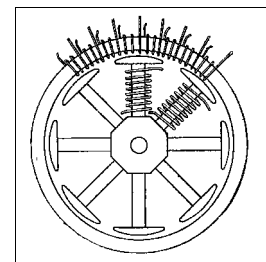
Estabelecido o valor da relutância magnética das diferentes partes do circuito magnético da máquina, tornou-se possível, desta forma, determinar as características de funcionamento de uma máquina eléctrica, o *gerador de corrente contínua*, a partir dos dados de projecto da máquina.

Em 1849 Nollet apresentou uma máquina de corrente alternada, com o campo indutor criado por ímãs permanentes fixos e o induzido com bobinas enroladas, que depois foi desenvolvida, e teve, a partir de 1863, sucesso comercial na alimentação eléctrica das lâmpadas dos faróis. O alternador foi depois modernizado por Wilde (1867) passando a ter electroímãs no sistema indutor e bobinas em meada no induzido. W. Siemens, na sua empresa Siemens e Halske em Berlim, também construiu máquinas deste tipo a partir de 1878.



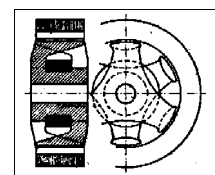
Princípio do alternador com induzido de disco

Em 1877 Gramme apresentou uma máquina de corrente alternada com induzido em anel fixo e um indutor móvel formado por electroímãs. No anel, existiam um conjunto de bobinas, quádruplo do número de pólos indutores. Como essas bobinas estavam afastadas no espaço do anel, e eram abrangidas pela acção indutora do pólo em momentos diferentes, cada bobina era sede de forças electromotrices que pertenciam a uma fase de um sistema polifásico. No entanto, não foi retirado qualquer proveito da existência do sistema de tensões polifásico disponível neste alternador; apenas cada conjunto de bobinas (fase) alimentou um conjunto diferente de lâmpadas (arcos voltaicos).



Alternador de Gramme (representação esquemática)

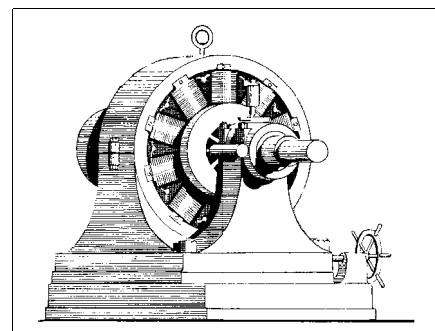
Em 1891 dá-se o primeiro transporte de energia em corrente alternada trifásica entre Lauffen e Frankfurt (175 km) durante a Exposição Electrotécnica Internacional de 1891, naquela cidade. Aqui se verificou a importância do transformador que permitiu o transporte da energia eléctrica a uma tensão mais elevada (14750 V), e depois a utilização dessa energia a uma tensão mais baixa (112 V). Para esta electrificação foram desenvolvidos, pela empresa Oerlikon, alternadores de pólos imbricados: *alternadores*



Brown.

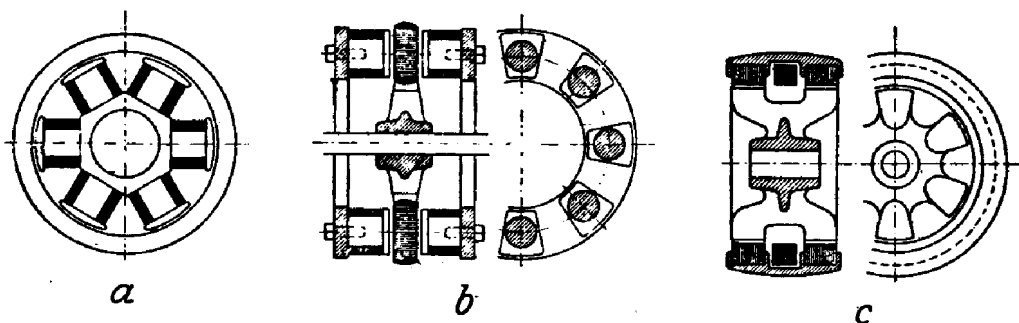
Nesta época, o desenvolvimento das máquinas eléctricas deixa de depender da iniciativa individual para passar a depender de gabinetes de engenharia (investigação, desenvolvimento e projecto) existentes nas empresas industriais.

As máquinas de corrente alternada desenvolvidas destinavam-se a trabalhar em sistemas de alimentação individuais, o que permitia a existência de uma gama vasta de frequências: 40 a 150 Hz. A uniformização da frequência das grandezas alternadas (60 Hz para iluminação na América em 1894) e a aceitação da corrente alternada pelas “*companhias de iluminação e electricidade*” — na Europa já se tinham electrificado os sistemas de iluminação das cidades de Zurich (1891) e de Cassel (1891) em corrente alternada — aumentou a utilização dos alternadores e obrigou ao desenvolvimento de máquinas cada vez mais potentes.



Alternador de induzido rotativo, Westinghouse (1887)

Nesta fase histórica, o método de análise das máquinas eléctricas através do circuito magnético é utilizado nas máquinas de corrente alternada, e G. Kapp aplicando-o no estudo do *transformador* desenvolve um método de tratamento gráfico (diagrama vectorial). A procura de métodos de análise para o transformador, levou à introdução de dois conceitos teóricos importantes para a Teoria das Máquinas Eléctricas — *indutância de fugas*, e *admitância de magnetização* — como consequência da utilização da teoria do circuito magnético, da caracterização das propriedades e perdas dos materiais ferromagnéticos (Steinemetz, 1892) e da representação simbólica das grandezas alternadas sinusoidais (Steinemetz, 1893). Paralelamente na Alemanha desenvolve-se, como método de análise, o método do diagrama circular.



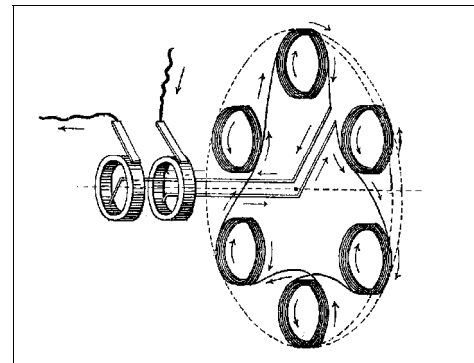
Alternadores: a) de indutor móvel; b) de induzido móvel (disco); c) ferro móvel (homopolar)

O desenvolvimento do alternador tinha-se traduzido pelo aparecimento de máquinas com aspectos construtivos muito diversificados. Conforme o modo de construção os alternadores desta época podem classificar-se: *com pólos exteriores* — alternadores de indutor exterior fixo e induzidos interiores rotativos b); *com pólos internos* — alternadores de induzido exterior fixo e indutor interno rotativo a); *de relutância variável* — nos quais o circuito indutor e o circuito induzido estão fixos, e o fluxo magnético que os envolve varia devido à acção de peças rotativas em ferro, chamados “ferros móveis” (alternadores homopolares) c); *alternadores com volante indutor exterior* — o induzido fixo está montado sobre mancais que envolvem o veio.

Os métodos de estudo das máquinas de corrente alternada evoluíram, e surgiram métodos de tratamento e análise {C. P. Steinemetz, 1893}, {A. Heyland, 1894}, teorias explicativas [Wilde, 1869], {G. Ferraris, 1885}, {N. Tesla, 1887}, {J. Joubert, 1881}, {A. Blondel, 1899}, {A. Potier, 1900} para o estudo dos fenómenos ligados ao funcionamento destas máquinas eléctricas.

No estudo do *alternador síncrono polifásico* começou a estabelecer-se a noção de reacção do induzido, e vários métodos foram sendo apresentados para a considerar na análise do funcionamento desta máquina eléctrica.

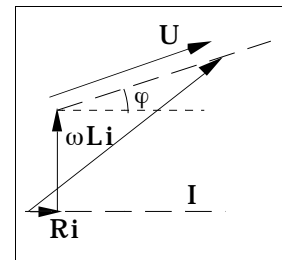
Uma primeira teoria das máquinas de corrente alternada foi apresentada por J. Joubert (1881) que considerou que num circuito eléctrico, como o induzido de um alternador em carga, onde circula uma corrente alternada existe um fenómeno de *auto-indução*, que tende a manter constante o fluxo magnético que envolve esse circuito. O termo do fluxo magnético da máquina respeitante à auto-indução devida à passagem da corrente eléctrica no circuito era até aí desprezado porque o valor do fluxo indutor era muito superior à acção da passagem da corrente eléctrica no circuito induzido (correntes de carga pouco elevadas), porque as cargas eléctricas do alternador eram essencialmente óhmicas (lâmpadas), e porque, até aí, as máquinas eléctricas aplicadas eram predominantemente de corrente contínua. Nessa situação a equação de funcionamento de um alternador era $R \cdot i = (\omega N_1 \cdot \phi) \cdot \text{sen } \omega t - L(di/dt)$; o que permitia salientar o esfasamento (atraso) introduzido na intensidade da corrente eléctrica relativamente à força electromotriz do alternador.



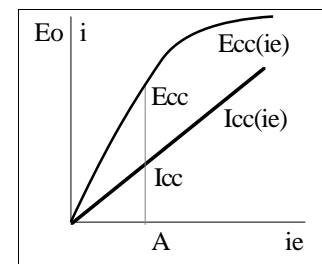
Induzido em disco, Siemens & Halske (1882)

No estudo do *alternador síncrono polifásico* foi estabelecida a noção de reacção do induzido, e vários métodos foram sendo apresentados para a considerar na análise do funcionamento desta máquina eléctrica.

A consideração, empírica, de que o efeito de reacção do induzido era traduzido por uma indutância constante ($e_o = u + R \cdot i + L(di/dt)$), permitiu a Benh-Eschenburg (1896) determiná-la, por consideração dos seus efeitos: procurou separadamente as acções indutivas devida ao enrolamento indutor e ao enrolamento do induzido e combinou-as para determinar o efeito resultante. Determina-se a força electromotriz E_o devida à força magnetomotriz indutora, determina-se a queda indutiva $\omega L \cdot i$ criada pelo fluxo de reacção do induzido ϕ_r , e *compõe-se* (vectorialmente, devido ao esfasamento entre elas) essas forças electromotrices com a queda óhmica $R \cdot i$. A determinação da queda indutiva apresentava dificuldades.



As dificuldades apresentadas pelo método de Benh-Eschenburg podem ser ultrapassadas com o emprego do método de Fischer-Hinnen (1897): considerando a linearidade do circuito magnético estabeleceu uma relação entre a força electromotriz em vazio e a força electromotriz de auto-indução através de uma razão de coeficientes (característicos dos diferentes tipos de máquinas) e das relutâncias dos respectivos circuitos magnéticos $E_{ai}/E_o = k \cdot (F_r/F_o)$; pode-se



determinar o valor da constante k através de um ensaio em curto-circuito, desprezando a queda de tensão $R \cdot i = 0 \Rightarrow E_{ai} = E_o$ e $k = F_o/F_r$; ($0,7 < k < 0,8$). Como a determinação do factor k para diferentes esfasamentos φ é fastidiosa, Fischer-Hinnen exprimiu a influência do esfasamento através de uma fórmula empírica $k_e = k \cdot (1 - 0,4 \cdot \cos \varphi)$. Quando se determinou uma característica em vazio e uma característica de curto-circuito do alternador o problema simplifica-se:

$$E_{ai} = \omega L \cdot i = E_o \cdot (i/i_{cc}) \cdot (1 - 0,4 \cdot \cos \varphi) = E_o \cdot (i/i_{cc}) - (E_o \cdot (i/i_{cc}) \cdot 0,4 \cdot \cos \varphi)$$

$$\text{e, desprezando a queda óhmica } R \cdot i = 0, U = \sqrt{E_o^2 - E_{ai}^2 \cdot \cos^2 \varphi} - E_{ai} \cdot \text{sen } \varphi.$$

No entanto, a falha das previsões destes métodos para situações de carga variável do alternador ou de saturação do circuito magnético, e a evolução dos aspectos construtivos desta máquina eléctrica que a afastaram do modelo com o induzido em disco rotórico, que

tinha coeficientes de auto-indução mais baixos e praticamente constantes, levou todos os investigadores que acompanhavam os trabalhos de G. Kapp a considerar no tratamento analítico do problema da predeterminação da queda de tensão de um alternador, que a diferença de tensão nos terminais da máquina, entre a situação em vazio e a situação de carga, era devida à resistência óhmica do circuito, à auto-indução do circuito induzido e a um efeito desmagnetizante do circuito induzido sobre o campo do circuito indutor (para o esfamento em atraso), a que se deu o nome de *reacção do induzido*.

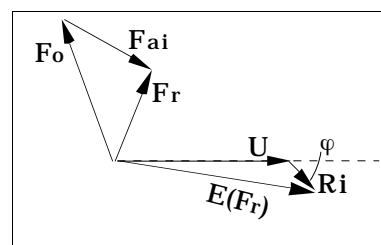
Atendendo á curva de distribuição da força magnetomotriz de reacção do induzido foi possível a G. Kapp determinar que aquela força magnetomotriz é proporcional ao seno do ângulo de esfamento φ entre a tensão nos terminais e a corrente de carga, supostas sempre sinusoidais

$$(e = u + R \cdot i + l_{\sigma} \cdot (di/dt) + \lambda \cdot ((di/dt) \cdot \sin \varphi) \Leftrightarrow \underline{E} = \underline{U} + R \cdot \underline{I} + j\omega l_{\sigma} \cdot \underline{I} + j\omega \lambda_d \cdot \underline{I} \cdot \sin \varphi$$

e para a força magnetomotriz de reacção do induzido foi dada uma fórmula $F_g = k_g \cdot N \cdot i \cdot \sin \varphi$, com $k_g = m \cdot (0,57/r) \cdot \sin(\pi\tau/2)$. G. Kapp não forneceu um meio prático de determinar os coeficientes; foi A. Potier que o apresentou.

No entanto, havia autores, como E. Arnold e depois Rothert (1896) que atribuíam à corrente total do induzido esse efeito desmagnetizante sobre o campo indutor (desprezando o fluxo de fugas).

Para estes autores a tensão nos terminais do alternador em carga, desprezando a queda de tensão na resistência óhmica do induzido, era igual á força electromotriz em vazio e_r correspondente à acção indutora de uma força magnetomotriz $F_r = F_o - F_{ai}$, resultante da acção combinada (soma vectorial) das duas forças magnetomotrizes: F_o – indutora; F_{ai} – de reacção do induzido.

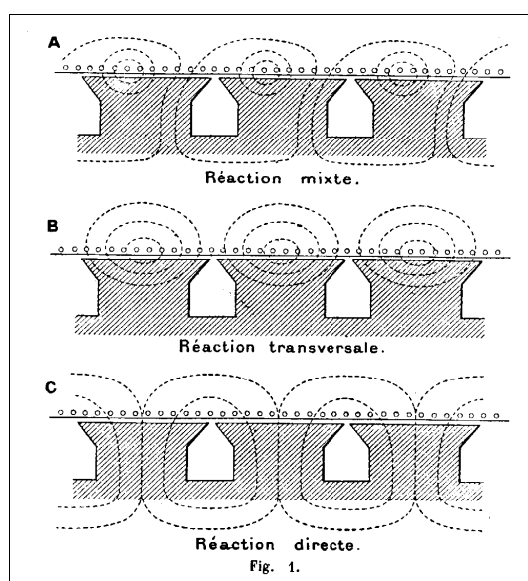


Assim, a equação de funcionamento da máquina é:

$$(e_r = u + R \cdot i) \Leftrightarrow \underline{E}_r = \underline{U} + R \cdot \underline{I}.$$

Neste contexto, em 1899, A. Blondel propôs-se (tradução livre) “tratar o problema da reacção do induzido de uma forma mais completa, se bem que aproximada, para o caso dos alternadores polifásicos igualmente carregados nos diferentes circuitos”, e supondo, como era hábito, “que as forças electromotrices e as correntes seguiam sensivelmente a lei harmónica”.

“Se se desprezarem as pequenas pulsações do fluxo de reacção do induzido, esse fluxo é sensivelmente constante e fixo no espaço se se supuserem os indutores fixos. Uma parte fecha-se através dos indutores e o resto pelas peças polares; chamarei à primeira *fluxo directo*, e à segunda *fluxo transversal*.” ... “O fundamento muito simples do meu método é a proposição seguinte: *para todo o esfamento intermediário φ , a reacção do induzido pode ser considerada como a resultante duma reacção directa devida à corrente reactiva e duma reacção transversal devida à corrente activa*”



A. Blondel, 1899

Começou-se, assim, a considerar a acção suplementar da componente activa da corrente eléctrica, ficando a equação da máquina com a forma:

$$((e = u + R \cdot i + l_{\sigma} \cdot (di/dt) + \lambda_d \cdot ((di/dt) \cdot \sin \varphi) + \lambda_q \cdot ((di/dt) \cdot \cos \varphi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{E} = \underline{U} + R \cdot \underline{I} + j\omega l_{\sigma} \cdot \underline{I} + j\omega \lambda_d \cdot \underline{I} \cdot \text{sen } \varphi + j\omega \lambda_q \cdot \underline{I} \cdot \text{cos } \varphi$$

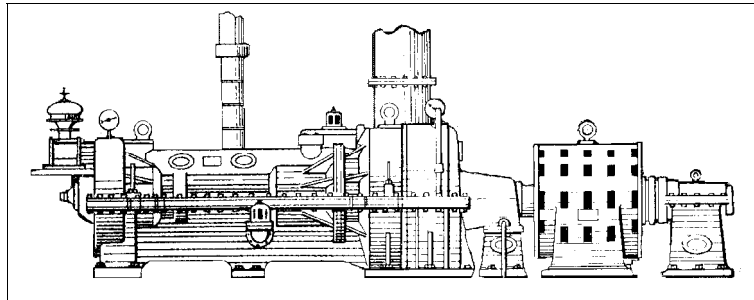
como se pode considerar a (intensidade da) corrente total decomposta na suas componentes e ligando as acções de cada uma das reacções (tal que $l_d = l_{\sigma} + \lambda_d$, e $l_q = l_{\sigma} + \lambda_q$) resulta que:

$$e = u + R \cdot i + l_d \cdot ((di/dt) \cdot \text{sen } \varphi) + l_q \cdot ((di/dt) \cdot \text{cos } \varphi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{E} = \underline{U} + R \cdot \underline{I} + j\omega l_d \cdot \underline{I} \cdot \text{sen } \varphi + j\omega l_q \cdot \underline{I} \cdot \text{cos } \varphi$$

No início do século vinte começam a desenvolver-se as turbinas a vapor e a aumentar o seu emprego no accionamento de alternadores: *turboalternadores*. Destinados a funcionar com uma velocidade angular elevada (1500 a 3600 rot/min), muito superior à velocidade das turbinas hidráulicas e das máquinas a vapor com pistão.

Vários fabricantes foram apresentando soluções novas para os problemas destes alternadores: o pioneiro Ch. Parsons (1888), E. C. L. Brown com o princípio do indutor cilíndrico (1901), as empresas Oerlikon (1901), Westinghouse (1899), General Electric com alternadores de veio vertical para turbinas Curtis (1903), ...

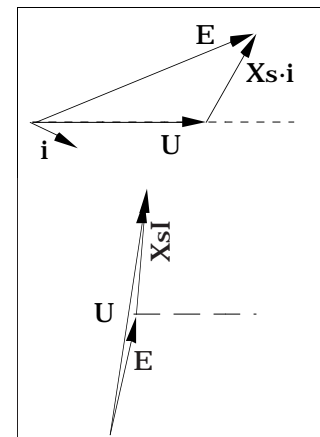


Turbina a vapor, 2000 kW, Westinghouse (1900)

Apesar da divulgação do método de Blondel nas revistas da época e das suas comunicações à Academia das Ciências, posteriormente (1900) A. Potier apresentou um método de análise do funcionamento do alternador síncrono trifásico em regime permanente, derivado do estudo do transformador: como para essa máquina estática considerou o induzido da máquina como o secundário de um transformador; decompôs o fluxo que envolve o induzido ϕ_t num fluxo que envolve o indutor e o induzido ϕ_r e num fluxo de fugas do induzido a respeito do indutor ϕ_{σ} . A força electromotriz no induzido (e_a) é produzida pelo fluxo resultante (F_r) criado pela força magnetomotriz do indutor (F_o) e do induzido (F_{ai}) e pelo fluxo de fugas ($e_s = -d\phi_{\sigma}/dt = -l_{\sigma}(di/dt)$), ($e_r = u + R \cdot i + l_{\sigma}(di/dt)$); a força electromotriz resultante e_r é devida ao fluxo resultante ϕ_r produzido pela composição (relação não linear) da força magnetomotriz do indutor (F_o) e do induzido (F_{ai}). Nesta formulação Potier considerou inserido no fluxo de fugas do induzido o fluxo que se fecha pelas expansões polares, ou seja o fluxo transversal do campo de reacção do induzido. Este método acabou por ser aceite, e adoptado, pela indústria por facilitar a predeterminação das características de funcionamento dos alternadores.

Foi Fischer-Hinnen (1902) que apresentou um processo gráfico a partir da característica em vazio, da característica de curto-circuito e de um ponto de funcionamento com carga indutiva pura, para determinar as relações necessárias ao método de Potier.

Em 1902 numa revista americana surgiu um artigo de F. G. Baum promovendo que, desprezando a queda óhmica, se poderá reunir num só termo, ao qual se dava o nome de *reactância síncrona*, o efeito de auto-indução e o efeito desmagnetizante do enrolamento do induzido, para simplificar os cálculos, as construções gráficas e o raciocínio. Essa reactância síncrona era determinada por um ensaio em que a máquina funcionava como motor síncrono e era sobreexcitada até circular uma intensidade de corrente de carga igual a cerca de metade da corrente normal. Como o motor funciona em vazio a tensão que lhe está aplicada e a força electromotriz são praticamente em oposição. A



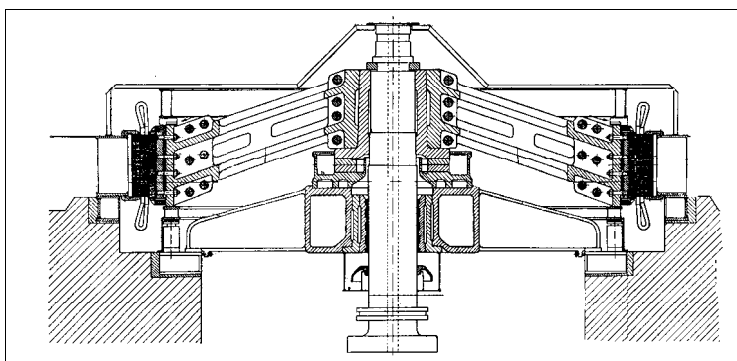
impedância síncrona correspondente é $X_s = (U - E)/I$.

Na segunda década do século vinte, e através de uma construção gradual e acidentada, estavam estabelecidos os principais métodos de *análise do alternador síncrono trifásico*.

Em 1925 o American Institute of Electrical Engineers (A.I.E.E.) publica a sua Norma nº 7, que prescreve um método expedito para determinar a impedância síncrona (em condições de saturação magnética próximas das existentes no funcionamento normal do alternador).

Nestas circunstâncias surgem os trabalhos de R. E. Doherty e C. A. Nickle (1926–1928) estendendo o trabalho de Blondel sobre a teoria das duas reacções — *resolução da reacção do induzido segundo os dois eixos de simetria magnética da máquina* — incluindo a forma real das grandezas físicas periódicas através da sua análise harmónica, a consideração da distribuição da força magnetomotriz em lugar do fluxo magnético, a definição dos parâmetros característicos, com o estabelecimento das equações de funcionamento e a determinação de características de funcionamento típicas tanto em regime permanente (característica de regulação, ângulo de carga, potência e binário) como em regime transitório (curto-circuito simétrico e assimétrico).

No estudo do regime transitório do alternador síncrono trifásico eram utilizadas técnicas analíticas não sistemáticas (circuito equivalente, cálculo operacional) baseadas na teoria desta máquina eléctrica, mas procurando sempre um fácil, e seguro, tratamento por adopção de hipóteses simplificativas e por validação dos resultados com os valores obtidos durante os ensaios das máquinas construídas.



Alternador Síncrono Trifásico, 11,2 MVA, 6,9 kV, 60 Hz, 128,57 rot/min, veio vertical, 1928

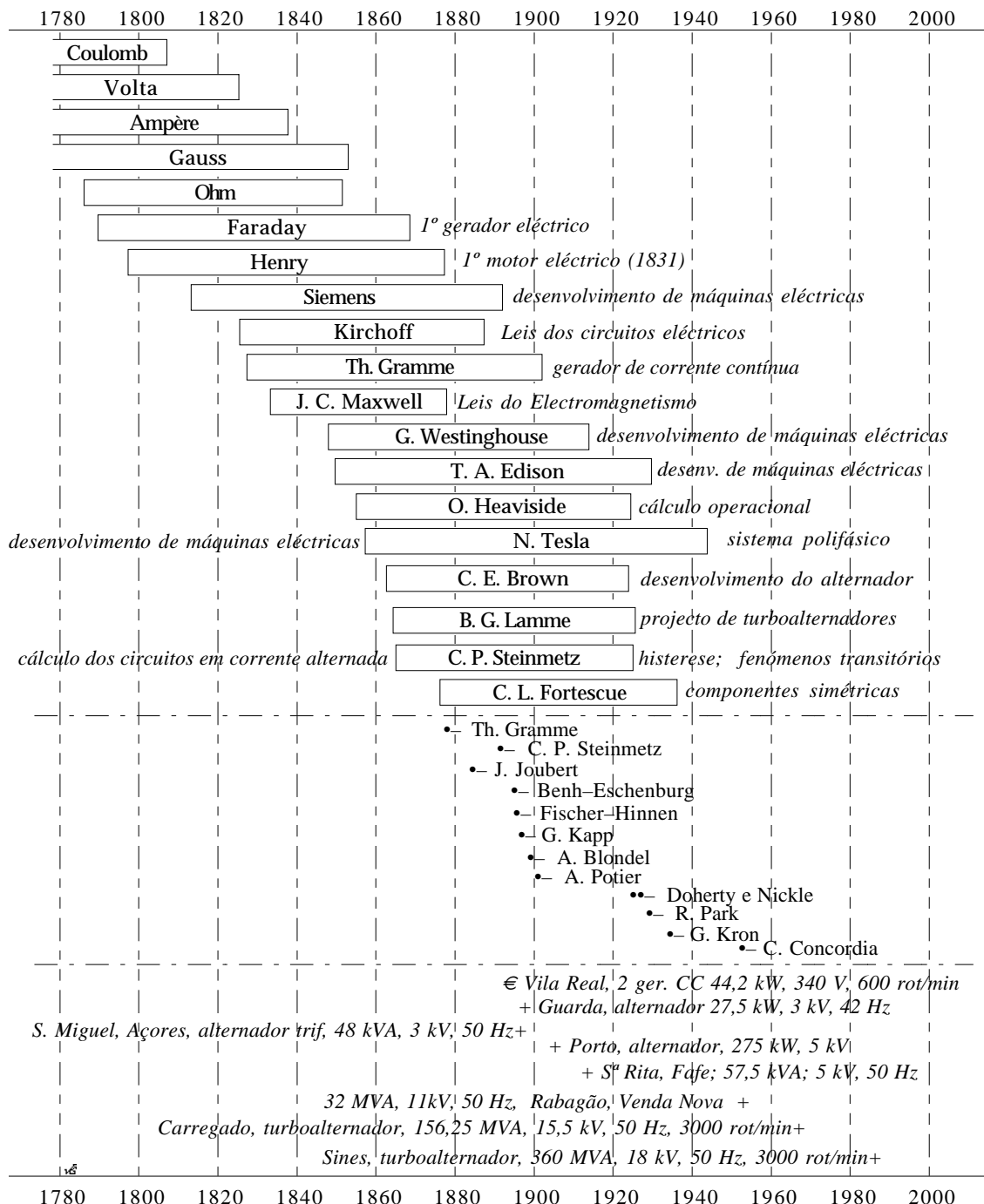
Em 1928 a *Análise de Máquinas Eléctricas aplicada ao alternador síncrono trifásico* utilizava, já, os seguintes conceitos básicos:

- resolução das diversas componentes harmónicas do fluxo e da força magnetomotriz girantes relativamente ao rotor em componentes estacionárias segundo o eixo directo e o eixo em quadratura. As ondas de fluxo magnético e de força magnetomotriz estacionárias (termo fundamental) relativamente ao rotor também eram decomponíveis, segundo Blondel, nos dois eixos de simetria magnética;
- as indutâncias correspondentes ao circuito do induzido variavam como uma função sinusoidal do segundo harmónico do ângulo eléctrico de posição;
- atendendo ao funcionamento da máquina em regime sinusoidal, a máquina era caracterizada pelas reactâncias síncronas e transitórias segundo os dois eixos de simetria magnética da máquina, e
- a utilização de valores reduzidos (por unidade (p.u.)).

Até 1930 acabou por ser constituída, na parte que se refere ao alternador síncrono trifásico, a *Teoria Clássica das Máquinas Eléctricas*, que divulgada em vários livros {P. Janet, 1916}, {A. Mauduit, 1916}, {R. Richter, 1924}, {J. Fischer-Hinnen, 1926}, {M. A. Illiovici, 1926}, {M. G. Say, 1936}, {A. Langsdorf, 1937}, {A. Pen-Tung Sah, 1946}, {M. Liwschitz-Garik, 1946}, caracterizou o tipo de estudo das máquinas eléctricas de

corrente alternada com os seguintes procedimentos:

- análise qualitativa das relações físicas inerentes à estrutura da máquina;
- representação dessas relações sobre uma forma geométrica ou gráfica, através de diagramas fasoriais, ou de outras construções gráficas;
- a tradução dessas formas geométricas através de relações analíticas, e
- o desenvolvimento dessas relações analíticas, por mero tratamento algébrico da amplitude das grandezas envolvidas na representação analítica.

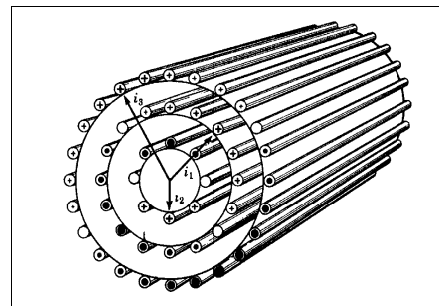


A aplicação destes procedimentos a cada tipo de máquina eléctrica criou um método de análise próprio para cada máquina, sem qualquer referência, ou ligação, ao método utilizado para os outros tipos de máquinas eléctricas.

Nesta última fase de desenvolvimento da Teoria Clássica das Máquinas Eléctricas surge um trabalho de R. H. Park (1929) que estabelece um método generalizado de análise do

alternador síncrono trifásico tendo por base a *Teoria das Duas Reacções* e utilizando o conceito de fluxo totalizado em lugar do conceito de reactância (linear), permitindo o estudo da máquina em regime permanente ou em regime transitório. No entanto, este trabalho, onde não era utilizado qualquer tipo de notação matricial, partia da condição de estudo de ausência de saturação ou de histerese e de correntes de Foucault e da condição de estudo de distribuição sinusoidal no espaço das forças magnetomotrizes criadas pelo induzido. Na discussão deste trabalho G. Kron interpreta as operações feitas por Park sobre as equações fundamentais das máquina como uma *transformação dos eixos de coordenadas*, com o fim de “eliminar os enfadonhos termos em $\cos \theta$ ”.

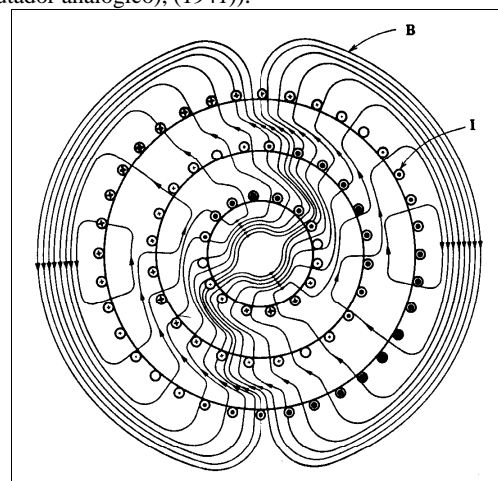
Nesta época tinham-se iniciado os trabalhos de G. Kron sobre a Teoria das Máquinas Eléctricas numa procura da generalização dos conceitos e numa unificação dos métodos de análise. Surge em 1930 um trabalho deste autor, intitulado “*Generalized Theory of Electrical Machinery*”, que, recorrendo ao conceito de *energia livre* da Termodinâmica, procura fazer uma análise iminentemente geométrica do funcionamento de diversos tipos de máquinas eléctricas. A evolução do seus trabalhos na década seguinte ficou traduzida por um vasto conjunto de artigos, e por alguns livros, onde foi sendo apresentada a aplicação dos métodos do Cálculo Tensorial de G. Ricci (1888), à análise de circuitos eléctricos, e desde 1932 à análise das máquinas eléctricas rotativas.



Camadas de bobinas rotóricas concêntricas

Nos trabalhos apresentados por G. Kron, a *análise tensorial*, que era utilizada para estabelecer as leis invariantes da natureza (espaço multidimensional) na forma de equações tensoriais que eram independentes do referencial utilizado, foi usada para estabelecer um tipo de raciocínio que consistiu em substituir um sistema complexo por um mais simples cujo comportamento pode ser facilmente analisado, e depois transformar as equações do sistema simples nas equações do sistema complexo através de um procedimento rotineiro (que era fornecido pela análise tensorial), mas respeitando algumas condições de invariância. No caso das máquinas eléctricas isso traduzia-se pelo estabelecimento das equações para uma *máquina primitiva* (a partir das Leis da Electrodinâmica), seguido do estabelecimento de um grupo de *transformações* para cada máquina (com invariância de algumas grandezas físicas) e finalizado com a determinação das características de funcionamento da máquina. Toda a unificação de conceitos neste método de análise foi reforçada pela utilização da notação tensorial, que nos casos mais simples se apresenta como notação matricial. Na fase final do seu trabalho traduziu as equações de funcionamento das diferentes máquinas eléctricas em circuitos eléctricos equivalentes (facilmente adaptáveis a um analisador de circuitos eléctricos (computador analógico), (1941)).

Deste trabalho inovador de G. Kron, muito mal compreendido pelos contemporâneos que nele não viam mais do que um desprezo da terminologia e das técnicas estabelecidas e que não entenderam a utilização de conceitos matemáticos seus contemporâneos {...aplicável apenas a uma máquina idealizada matematicamente} e {...trabalho sem resultados experimentais}, houve alguns continuadores: os que seguiram as suas ideias e as tentaram divulgar como W. J. Gibbs (1952), D. C. White e H. H. Woodson (1959), L. Bewley (1961), J. W. Lynn (1963); os que apenas reivindicaram uma utilização dos conceitos apresentados por Kron (*referencial, máquina eléctrica primitiva, transformação*), como B. Adkins (1951; 1975), ou, introduziram a comprovação



Campo electromagnético da Máquina Eléctrica

experimental ausente do trabalho original, como C. V. Jones (1967), ou que ligaram os conceitos de G. Kron ao Método Simbólico, mais divulgado na Europa Central, como G. J. Retter (1980); e, ainda, outros que procuraram fazer uma utilização mista da Teoria Clássica e dos novos métodos de Kron, como A. E. Fitzgerald e C. Kingsley (1952) que criaram uma teoria "semi-clássica", que vem sendo suavizada em cada nova edição...

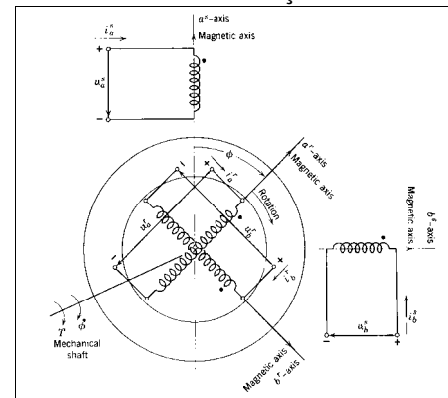
Do trabalho de G. Kron e dos seus continuadores surgiu uma *Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas*, com o seu método de aplicação, as suas ferramentas matemáticas, e a sua aplicação a muitos e importantes problemas de Análise de Máquinas Eléctricas.

Procurando as características próprias desta Teoria, tal como se apresentam na actualidade, verifica-se que:

- * assenta na construção de um modelo físico da máquina, através do estabelecimento de um conjunto de condições de estudo, que têm vindo a abranger fenómenos anteriormente desprezados, como a saturação, as correntes de Foucault, os harmónicos, etc,... ;
- * os elementos desse modelo físico da máquina eléctrica são caracterizados por parâmetros concentrados, cuja determinação constitui, já, um ramo específico das Máquinas Eléctricas;
- * estabelece um conjunto de equações matriciais fundamentais — *magnética, eléctrica, electromecânica e mecânica* — que regem o funcionamento da máquina eléctrica, e que apresentam uma mesma forma para todas as máquinas;
- * recorrem a um conjunto de *transformações* passivas que reduzem o estudo da máquina eléctrica no *referencial* natural ao estudo de uma *máquina primitiva* num referencial ideal (fictício), e que permitem reverter os resultados obtidos para o referencial natural da máquina, e
- * na resolução das equações fundamentais da máquina eléctrica, em qualquer referencial, serve-se dos métodos próprios da Análise Matemática ou da Análise Numérica Computacional para obter as características de funcionamento para qualquer tipo de regime da máquina eléctrica.

Com a Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas tornou-se possível não só continuar os estudos sobre o alternador síncrono trifásico integrado em grandes redes eléctricas, como o estudo da máquina síncrona associada a conversores electrónicos de potência. Foi possível, também, integrar na Análise das Máquinas Eléctricas, através da *matriz das indutâncias* as não linearidades {P. Silvester, 1964}, introduzidas pelas propriedades magnéticas do material do circuito magnético.

Nos últimos anos, e como resultado da utilização de máquinas eléctricas integradas em sistemas de accionamento com conversores electrónicos de potência, a Análise de Máquinas Eléctricas tem sido enriquecida com a utilização do Método dos Fasores Espaciais. É um *Método Simbólico* de representação por quantidades complexas (*fasores*) das grandezas físicas com variação sinusoidal (no tempo, ou no espaço) — {M. Corrêa de Barros, 1947}, {Lyon, 1954}, {K. P. Kovács e I. Rácz, 1959}, {J. Stepina, 1968}, {G. J. Retter, 1980}. Com uma mais compacta forma de estabelecimento e de escrita das equações fundamentais, este desenvolvimento contemporâneo do Método Simbólico promove uma ligação dos métodos da Teoria Generalizada a outras formas de Análise das Máquinas Eléctricas.



Máquina Eléctrica Primitiva, [WOO-1]

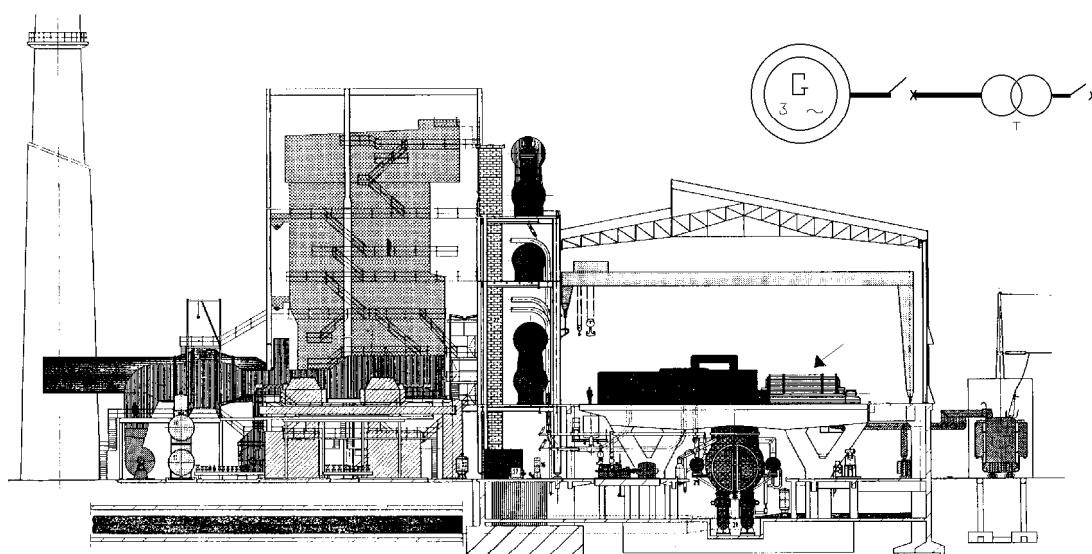
C.b O Modelo em Coordenadas de Fase — este modelo do alternador síncrono trifásico que tem a grande vantagem de poder ser deduzido sem o recurso a qualquer transformação passiva, de se integrar directamente no modelo de rede eléctrica nas condições de funcionamento real, e de apresentar uma grande versatilidade, tem contra ele todo um muito vasto conjunto de estudos marcantes, baseados no modelo d-q, que foram efectuados numa época (1929 – 1970) em que não era possível dispor de sistemas de cálculo automático (analógico ou digital) capazes de tratarem devidamente, e em tempo útil, um grande número de equações com diversos parâmetros variáveis durante o tempo de funcionamento da máquina eléctrica.

Com a disseminação dos modernos computadores digitais, já é possível uma utilização deste modelo em coordenadas de fase num estudo mais preciso das características de funcionamento da máquina (isolada ?), em regime permanente simétrico ou assimétrico, ou em regime transitório. Regista-se uma especial vantagem deste modelo no trabalho com harmónicos e o modelo mostra grande versatilidade no estudo de curto-circuitos (simétricos e assimétricos).

Na experimentação computacional é habitual utilizar-se equações de estado como fluxo totalizado como variável de estado ($p\{\psi\} = \{u\} - [R] \cdot [L]^{-1} \cdot \{\psi\}$), mas, também, têm sido utilizadas as correntes eléctricas como variáveis de estado, ($d\{i\}/dt = [L]^{-1} \cdot (\{u\} - ([R] + \omega_r \cdot [dL/d\alpha_r]) \cdot \{i\})$).

No modelo em coordenadas de fase, os parâmetros são grandezas que podem ser determinadas a partir dos dados de projecto ou de ensaios laboratoriais [IEEE-115], mas não resultam da transformação de outros valores.

Na implementação computacional do modelo do alternador síncrono trifásico em coordenadas de fase tem sido utilizados métodos de integração numérica do tipo métodos de Runge-Kutta [MVG- 2] e métodos do preditor-corrector. Os métodos de Runge-Kutta utilizados podem ser de quarta ordem ou de ordem superior, existindo um tipo de análise que desvaloriza qualquer destes métodos em face do número de avaliações das funções necessário em cada passo de integração. Tal não tem significado nos modernos computadores; face a isso, o método do preditor-corrector apresenta as características de não se auto-iniciar, mas de fornecer uma estimativa do erro de truncatura cometido.



Central Termoeléctrica — Carregado, alternador: 156,25 MVA; 15,5 kV, 3000 rot/min, 50 Hz, 1967

C.C O Modelo d-q — a modelização do alternador síncrono trifásico é feita considerando um máquina real formada: por três bobinas do induzido (a,b,c), localizadas num estator com uma superfície lisa e equivalentes ao enrolamento trifásico da máquina; por uma bobina rotórica correspondente ao circuito eléctrico indutor (f); e por duas bobinas curto-circuitadas nos terminais (K_d , K_q) representativas dos enrolamentos amortecedores ou de qualquer efeito amortecedor obtido através de anéis de curto-circuito ou pela indução de correntes de Foucault no material ferromagnético rotórico.

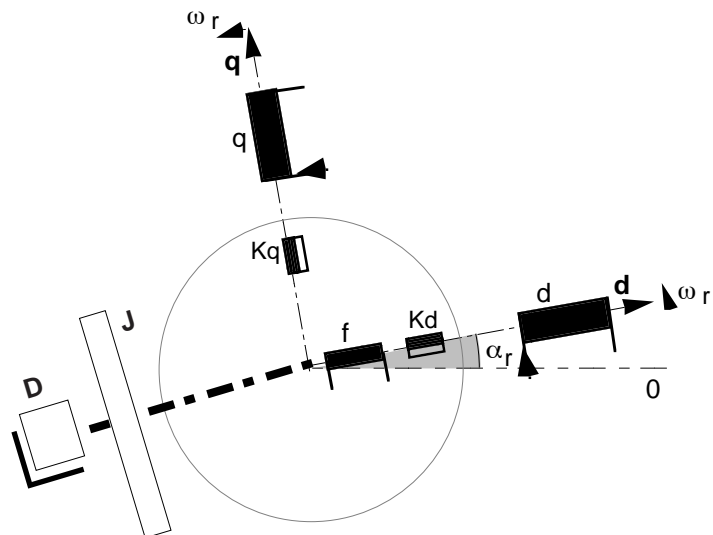
Outros modelos poderiam ter sido adoptados, com mais bobinas rotóricas. No entanto, este modelo é o mais vulgarizado, [ADK-1] [CCC-2].

Nesta máquina eléctrica caracterizaram-se duas direcções, com propriedades magnéticas diferentes, que acompanham, respectivamente, o eixo do pólo magnético e a direcção interpolar, estando afastadas de $\pi/2$ rad elect. São a direcção longitudinal ou directa (d) e a direcção transversal ou em quadratura (q).

Ao longo do trabalho de modelização efectuado verificou-se que o alternador síncrono trifásico de pólos salientes apresenta a condição de modelização mais geral, porque as equações fundamentais do alternador síncrono trifásico de indutor cilíndrico deduzem-se, facilmente, atendendo a que neste tipo de alternador não existe anisotropia do circuito magnético rotórico, e, por isso, é:

$$R_{md} = R_{mq} \Rightarrow L_B = 0 \Rightarrow L_d = L_q = L_s$$

Estabelecido o circuito electromecânico representativo do alternador síncrono trifásico segundo os dois eixos de simetria magnética d-q, teria sido fácil estabelecer as respectivas equações fundamentais. No entanto, derivaram-se essas novas equações das equações fundamentais do modelo em coordenadas de fase, com a utilização de uma transformação passiva: a *Transformada de Park*.



Do trabalho de aplicação da transformada de Park, que se procurou reduzir apenas ao essencial e se realizou de uma forma sistemática, resultou o conjunto de equações fundamentais que, dentro das condições de estudo estabelecidas, formam o modelo do alternador síncrono trifásico em coordenadas d-q, ou modelo em “coordenadas de Park”.

$$\bullet \quad \{\psi\} = [L'] \cdot \{i\} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad -u_d &= R_s \cdot i_d + p \cdot \psi_d - \omega_r \cdot \psi_q & u_f &= R_f i_f + p \cdot \psi_f \\ \bullet \quad -u_q &= R_s \cdot i_q + p \cdot \psi_q + \omega_r \cdot \psi_d & u_{Kd} &= R_{Kd} \cdot i_{Kd} + p \cdot \psi_{Kd} \\ \bullet \quad -u_o &= R_s \cdot i_o + p \cdot \psi_o & u_{Kq} &= R_{Kq} \cdot i_{Kq} + p \cdot \psi_{Kq} \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$T_{el} = (3 \cdot p/2) \cdot (L_d - L_q) \cdot i_d \cdot i_q + M_{af} \cdot i_f \cdot i_q + (M_{aKd} \cdot i_{Kd} \cdot i_q - M_{aKq} \cdot i_{Kq} \cdot i_d)$$

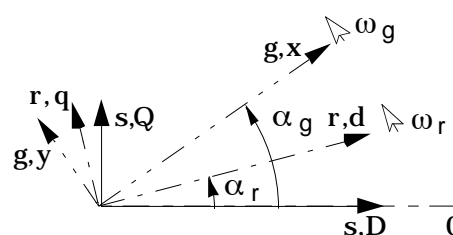
$$\bullet \quad T_{el} = (3 \cdot p/2) \cdot (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) = k \cdot (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) \quad (1.36)$$

$$\bullet \quad T_m = (J/p) \cdot (d\omega_r/dt) + D \cdot (\omega_r/p) + T_{el} \quad (1.37)$$

Uma característica importante deste modelo de Park é que os elementos da equação magnética (1.35) já não contêm parâmetros (indutâncias) dependentes do tempo através do ângulo de posição, $\alpha_r = \omega t + \alpha_0$. Tudo se passa como se as variáveis no referencial dqo estivessem solidárias com o rotor, ou, com mais rigor, como se estivessem a actuar através de um colectador de anéis fixo, onde deslizassem escovas solidárias com os eixos do referencial rotórico (r; d,q), {ver Bobinas Pseudo-estacionárias}.

Outra característica deste modelo é que os circuitos eléctricos estatóricos deixaram de estar ligados pelo campo magnético, o que se traduz pela respectiva matriz das indutâncias ser uma matriz diagonal, $[L'_{SS}] = \text{diag}(L_d, L_q, L_0)$. Esta propriedade é válida, somente, nas condições de estudo adoptadas, principalmente nas referentes à forma de onda sinusoidal da distribuição da força magnetomotriz criada por cada bobina estatórica real no entreferro ⑤, e de não saturação do material ferromagnético ④.

É de notar que neste estudo as grandezas definidas no referencial estatórico real (s; a,b,c) foram reduzidas ao referencial solidário com o rotor (r, d-q). Em lugar desta transformação podia-se utilizar um outro tipo de transformação, em que tanto as grandezas físicas do referencial estatórico, como as grandezas físicas do referencial rotórico eram reduzidas a um mesmo referencial geral (g; x,y) com dois eixos ortogonais complanares (x e y) e com o eixo y em quadratura avanço sobre o eixo x. O eixo x forma um ângulo geral α_g com o referencial do estator. Obtém-se um modelo no referencial geral ou referencial arbitrário (!...) de referência (“arbitrary reference frame”) [KRA-1], que é um referencial arbitrário, formado por eixos complanos ortogonais que rodam com uma velocidade arbitrária. Conforme a conveniência do estudo, assim se define a velocidade do referencial,



ângulo do referência	velocidade do referencial	observações
α_g	ω_g	referencial geral
$\alpha_g \equiv \alpha_s$	0	referencial do estator s (E. Clarke)
$\alpha_g \equiv \alpha_r$	ω_r	referencial do rotor r (Park)
$\alpha_g \equiv \alpha_s$	ω_s	referencial síncrono *

* O referencial síncrono, que acompanha o fluxo magnético de reacção do induzido (girante), apresenta a vantagem das grandezas físicas serem constantes.

A passagem das grandezas nos referenciais naturais da máquina — grandezas em coordenadas de fase — para as grandezas em coordenadas no referencial geral torna-se necessário aplicar a Transformada de Park com o ângulo α_g às grandezas do estator (passagem a um referencial difásico seguida da passagem a um referencial animado da velocidade ω_g) e torna-se necessário aplicar às grandezas do rotor a transformada entre referenciais animados de velocidade relativa ($\omega_r - \omega_g \equiv$ com a diferença de velocidade entre o referencial geral e o referencial do rotor).

No modelo de Park para o alternador síncrono trifásico as equações eléctricas do estator, que resultam da aplicação da transformada de Park às equações eléctricas do estator em coordenadas de fase, merecem algumas considerações.

As grandezas homopolares, tensão u_0 e corrente eléctrica i_0 , estão relacionadas através da respectiva equação e são independentes das

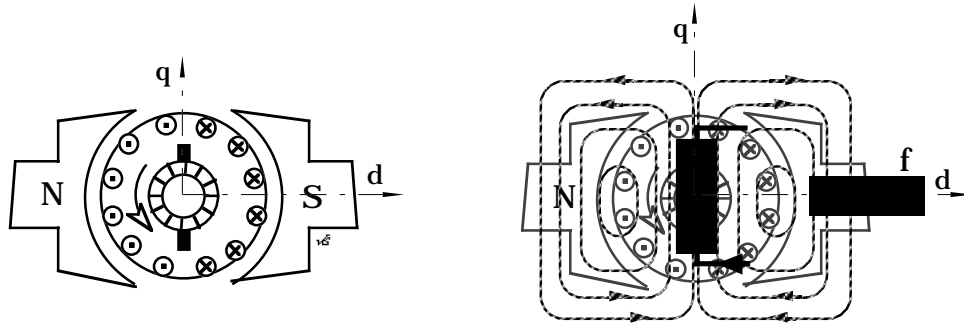
$$\begin{aligned}
 -u_d &= R_s \cdot i_d + p\psi_d - \omega_r \cdot \psi_q \\
 -u_q &= R_s \cdot i_q + p\psi_q + \omega_r \cdot \psi_d \\
 -u_0 &= R_s \cdot i_0 + p\psi_0
 \end{aligned}$$

outras variáveis.

A presença nas expressões da tensão para os dois eixos do referencial (d-q) das forças electromotrizes dinâmicas ($e_{ddin} = -\omega_r \cdot \psi_q$, e $e_{qdin} = \omega_r \cdot \psi_d$), quando através da transformada de Park se reduziram a um referencial comum, mostra que essas forças electromotrizes se desenvolvem em bobinas pseudo-estacionárias.

Bobinas Pseudo-estacionárias

No estudo das Máquinas Eléctricas pela Teoria Generalizada, e na interpretação física do resultado de algumas transformações, como aquelas em que intervém a transformação entre referenciais animados de velocidade relativa [C₂], surge a noção de *bobina pseudo-estacionária*.



A *bobina pseudo-estacionária* tem as seguintes propriedades:

- 1) a passagem da corrente eléctrica na bobina produz um campo magnético fixo no espaço (tal como o campo de reacção do induzido das máquinas eléctricas de colector de lâminas);
- 2) o movimento de rotação do campo magnético indutor provoca a indução de uma força electromotriz (dinâmica) numa bobina colocada em quadratura relativamente ao eixo do campo, *mas aparentemente sem movimento relativo* (tal como no enrolamento do induzido de uma máquina de colector de lâminas).

Assim, as propriedades das bobinas pseudo-estacionárias são as mesmas que as propriedades de um enrolamento do induzido de uma máquina eléctrica de colector de lâminas, na qual a corrente eléctrica circula entre um par de escovas.

Note-se que a aplicação da transformada entre referenciais animados de velocidade relativa tanto pode dar origem a uma situação, análoga à da máquina de corrente contínua, em que o colector é móvel e as escovas são fixas, ou dar origem a uma situação, sem correspondência nas máquinas de colector ainda em funcionamento na actualidade (salvo a Máquina Generalizada), em que o colector é fixo e as escovas rodam sobre ele...

Torna-se fácil compreender porque a Transformada entre Referenciais Animados de Velocidade Relativa recebeu de alguns autores a designação de *Transformada de Colector!*...

Nas equações das tensões, segundo o eixo directo e segundo o eixo em quadratura, existem termos representativos da força electromotriz estática: $p\psi_d$, $p\psi_q$. Em certo tipo de estudos — curto-circuito brusco nos terminais da máquina, ressonância subsíncrona, tensões mecânicas nos veios das máquinas durante manobras na rede eléctrica, funcionamento assíncrono, transitórios de comutação, rejeição de carga — (ou seja, em fenómenos com um tempo de estudo inferior a um ciclo de onda) considera-se a acção dessa força electromotriz, ou o fenómeno transitório criado pela variação do fluxo totalizado segundo cada um dos eixos.

Mas, existem estudos — como os estudos de estabilidade em larga escala (multimáquina) — em que esses transitórios de estator não são explicitamente considerados, embora as suas consequências afectem algumas outras grandezas através de factores correctivos. Quando o modelo de alternador síncrono trifásico é utilizado em estudos de simulação com integração numérica, têm-se desprezado os termos em $p\psi_d$ e $p\psi_q$, porque:

- os intervalos de integração têm de ser muito reduzidos (0,03 s → 0,001 s), com o consequente aumento do tempo de computação (!...);

- a inclusão destes termos no modelo do alternador síncrono trifásico obriga à inclusão dos termos análogos nos modelos dos restantes elementos da rede eléctrica, porque as correntes eléctricas deixam de ser sinusoidais devido à presença da componente contínua, o que se torna extremamente incómodo para estudos com uma alargada escala de tempo (!...). *{Note-se que estes comentários dizem respeito aos meios e às práticas computacionais correntes em 1975, [SCH-1]}.*

Quando os termos $p\psi_d$ e $p\psi_q$ são desprezados, considera-se que a velocidade do alternador síncrono trifásico é constante, e correspondente à velocidade de sincronismo $\omega_r \equiv \omega_s$, o que tem um efeito sobre os resultados contrário ao da aproximação feita (quanto às oscilações de baixa frequência do rotor) e leva a desprezar os termos das equações nos quais se considera a variação de velocidade $\Delta\omega_r$. Nessa situação os fluxos totalizados deixam de ser utilizados como variáveis de estado.

$$\begin{aligned} &\approx \\ -u_d &= R_s \cdot i_d - \omega_s \cdot \psi_q \\ -u_q &= R_s \cdot i_q + \omega_s \cdot \psi_d \\ &\approx \end{aligned}$$

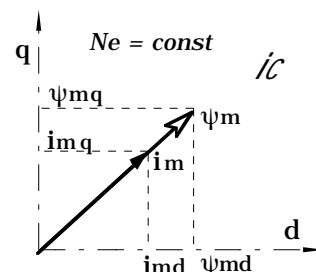
As equações fundamentais do alternador síncrono trifásico em coordenadas d-q foram estabelecidas de acordo com as condições de estudo. É, por isso, errado contrariar essas hipóteses de estudo pela inclusão de coeficientes ou de factores correctivos. No caso da condição de estudo que estabeleceu a linearidade das propriedades do material ferromagnético ④, o abandono dessa hipótese provocava uma outra dedução das equações fundamentais e a consideração de fenómenos físicos que não estão representados no modelo de Park deduzido, considerando o material ferromagnético linear.

No estabelecimento do modelo matemático da máquina considerou-se que o fluxo magnético totalizado que envolve um enrolamento é constituído por um fluxo de fugas, que só envolve o enrolamento e por um fluxo — *fluxo de magnetização* — comum a esse enrolamento e aos outros que não se desenvolvem segundo um eixo ortogonal ao eixo do enrolamento considerado: $\psi_e = \psi_{me} + \psi_\sigma$.

Considerando os circuitos magnéticos segundo os quais estes fluxos se desenvolvem, verifica-se que o fluxo de fugas tem a maior parte do seu percurso no ar ou em materiais de permeabilidade magnética constante. O fluxo de magnetização desenvolve-se ao longo de um percurso (principal) que envolve materiais ferromagnéticos susceptíveis de saturar (nalgumas partes do circuito) devido à acção de qualquer uma das correntes eléctricas que contribui para este fluxo totalizado.

O fluxo de magnetização segundo um eixo ψ_m , numa situação de material ferromagnético com magnetização variável, é função de uma corrente eléctrica que representa todas as correntes que contribuem para a criação desse fluxo i_m ; $\psi_m = \psi_m(i_m)$, com $i_m = i_m(\sum_e i_e)$.

No caso particular de uma máquina com simetria biaxial d-q, de indutor cilíndrico (\angle), e com igual número efectivo de espiras em todas as bobinas (!), o fluxo de magnético totalizado é função da corrente de magnetização $\psi_m = \psi_m(i_m)$, com $i_m = \sqrt{i_{md}^2 + i_{mq}^2}$, em que i_{md} representa todas as correntes eléctricas que actuam segundo o eixo d e i_{mq} representa todas as correntes que actuam segundo o eixo q.



Podem-se, assim, definir o fluxo totalizado segundo o eixo d, ψ_{md} , e o fluxo totalizado segundo o eixo q, ψ_{mq} ; o que permite determinar a expressão da variação do fluxo totalizado no tempo ($p = d / dt$), $d(\psi_m(i_m)) / dt = (\partial\psi / \partial i) \cdot (di / dt)$,

$$\frac{d\psi_{md}}{dt} = \left(\frac{\partial\psi_{md}}{\partial i_{md}}\right) \cdot \frac{di_{md}}{dt} + \left(\frac{\partial\psi_{md}}{\partial i_{mq}}\right) \cdot \frac{di_{mq}}{dt}$$

$$\frac{d\psi_{mq}}{dt} = \left(\frac{\partial\psi_{mq}}{\partial i_{md}}\right) \cdot \frac{di_{md}}{dt} + \left(\frac{\partial\psi_{mq}}{\partial i_{mq}}\right) \cdot \frac{di_{mq}}{dt}$$

Nesta expressão verifica-se que: mesmo num referencial estacionário existem ligações magnéticas entre os dois eixos ortogonais (*magnetização cruzada*); os fluxos totalizados de magnetização são função das componentes da corrente de magnetização (i_{md} , i_{mq}); o fluxo totalizado que se desenvolve segundo um determinado eixo induz uma força electromotriz estática segundo um eixo ortogonal (para além da força electromotriz dinâmica); surge uma indutância incremental $L^{inc} = \partial\psi/\partial i$, para além da indutância aparente $L = \psi/i$.

$$\frac{d\psi_{md}}{dt} = (L_{md}^{inc}) \cdot \frac{di_{md}}{dt} + (M_{dq}^{inc}) \cdot \frac{di_{mq}}{dt}$$

$$\frac{d\psi_{mq}}{dt} = (M_{qd}^{inc}) \cdot \frac{di_{md}}{dt} + (L_{mq}^{inc}) \cdot \frac{di_{mq}}{dt}$$

Considerando que não existe saturação no circuito magnético do fluxo totalizado de fugas, o que no alternador síncrono trifásico resulta de um entreferro de maior largura, continua a verificar-se que $d\psi_{\sigma}/dt = l_{\sigma} \cdot di/dt$.

Apesar da modelização de um alternador síncrono trifásico em regime de magnetização variável (*saturação*) estar já devidamente apresentada [GAR-1,2] [KOV-1], mesmo para um alternador de pólos salientes, em alguns programas de computador para análise de redes eléctricas é utilizada uma *mera* aproximação que consiste em considerar uma “indutância saturada”, definida a partir da indutância aparente $L = \psi/i$ através de um factor de saturação (empírico): $L_{sat} = K_S \cdot L$, [HAR-1]. Na actualidade têm sido recomendados métodos de representação da saturação mais aperfeiçoados, [IEEE-CR2], [IEEE-1110].

A modelização do alternador síncrono trifásico recorrendo à Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas baseia-se na ligação magnética que existe entre diferentes circuitos eléctricos, que atendendo à consideração de estudo adoptada ④ — linearidade das propriedades magnéticas do material ferromagnético — permite estabelecer uma relação constante entre o fluxo totalizado e a corrente eléctrica que o cria através da indutância: coeficiente de auto-indução ou coeficiente de indução mútua.

Desta forma, no modelo em coordenadas d-q surgiram os coeficientes de auto-indução e de indução mútua,

segundo o eixo directo,

$$L_d = (3/2) \cdot (L_A - L_B) + l_{\sigma} = L_{md} + l_{\sigma}$$

$$L_f$$

$$L_{Kd}$$

$$M_{af}$$

$$M_{aKd}$$

$$M_{fKd}$$

e segundo o eixo em quadratura

$$L_d = (3/2) \cdot (L_A + L_B) + l_{\sigma} = L_{mq} + l_{\sigma}$$

$$L_{Kq}$$

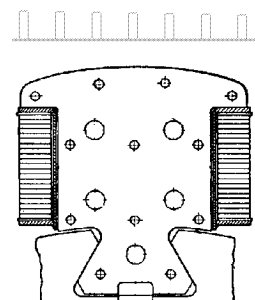
$$M_{aKq}$$

Estas diferentes grandezas podem ser visualizadas através dos percursos dos diferentes fluxos totalizados associados a um determinada indutância, com a ajuda do desenho junto. Quando nesse desenho se estabelece o percurso dos fluxos totalizados de indução mútua que actuam segundo o eixo directo pode-se verificar como *está errada* a consideração, frequentemente implementada em programas comerciais, que consiste em considerar que os três coeficientes,

$$M_{af}$$

$$M_{aKd}$$

$$M_{fKd}$$



expressos em valores reduzidos, são iguais; apesar de ser difícil a sua determinação experimental, [TAK-1].

Como o alternador síncrono trifásico funciona, frequentemente, em regime sinusoidal, em lugar das indutâncias consideram-se as correspondentes *reactâncias*: $X = 2\pi f \cdot L = \omega \cdot L$.

1.4 Valores Reduzidos

No estudo das máquinas eléctricas síncronas os valores reduzidos das grandezas facilitam o cálculo e o controlo dos resultados. A importância desta forma de representação das grandezas do alternador síncrono trifásico traduz-se pela utilização frequente deste modo de representação das grandezas nos estudos sobre este gerador eléctrico e na normalização que já esteve estabelecida sobre este assunto, [IEEE-86].

Considera-se que uma grandeza está representada em valores reduzidos “*por unidade*” (p.u.) quando é representada por um número resultante da divisão do seu valor actual pelo valor da grandeza de base, quando as duas quantidades estão expressas na mesma unidade.

Como uma máquina eléctrica é uma unidade que promove uma transformação de energia que envolve grandezas eléctricas e mecânicas, é necessário que os dois sistemas de unidades estejam ligados de uma forma coerente para que os valores reduzidos das grandezas sejam significativos, [BAR-1].

Para uma máquina síncrona, como o alternador síncrono trifásico, definem-se, quando expressas num sistema de unidades coerente, as seguintes grandezas de base,

- *potência aparente de base* — é a potência aparente total nominal à tensão e à corrente nominal;
- *tensão de base* — é a tensão nominal por fase (tensão simples);
- *corrente de base* — é a corrente nominal nos condutores da fase;
- *impedância base* — é o valor da divisão da tensão base pela corrente base;
- *velocidade base* — é a velocidade nominal de sincronismo;
- *a pulsação base* — é a pulsação de sincronismo $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$;
- *velocidade angular base* — é a velocidade angular de sincronismo, $\omega_b = \omega_s = \omega/p$;
- *binário base* — é dado pelo cociente da potência de base pela velocidade angular de base $T_b = (3 \cdot U_{ns} \cdot I_n) / \omega_b = (3 \cdot U_{ns} \cdot I_n) \cdot p / \omega$;
- *tempo base* — é dado por $t_b = 1$ (segundo).

Note-se que devido à forma utilizada para a matriz de transformação de Park, (1.22), normalmente, utiliza-se na definição dos valores de base das grandezas alternadas sinusoidais os valores máximos das grandezas, para uma ligação dos enrolamentos em estrela, (essas grandezas, normalmente, são expressas em valores eficazes), $U_b = \sqrt{2} \cdot U_{ns}$, $I_b = \sqrt{2} \cdot I_n$.

Com os valores das grandezas de base é possível calcular a impedância de base, “*impedância nominal*”, $Z_n = U_{ns}/I_n$.

Desta forma,

$$\text{as correntes eléctricas são: } i_d \text{ (p.u.)} = i_d / (\sqrt{2} \cdot I_n), \quad i_q \text{ (p.u.)} = i_q / (\sqrt{2} \cdot I_n)$$

$$\text{as tensões eléctricas são: } u_d \text{ (p.u.)} = u_d / (\sqrt{2} \cdot U_{ns}), \quad u_q \text{ (p.u.)} = u_q / (\sqrt{2} \cdot U_{ns})$$

$$\text{as resistências eléctricas são: } r_s \text{ (p.u.)} = R_s / Z_n = R_a \cdot I_n / U_{ns}$$

$$\text{a potência eléctrica (activa, reactiva, ou aparente): } p_e \text{ (p.u.)} = P_e / S_n = P_e / (3 \cdot U_{ns} \cdot I_n)$$

Nesta redução o tempo mantém a sua dimensão e a sua unidade habitual — o segundo. Assim, os valores reduzidos do fluxo são referidos à tensão nominal de base

$$\psi_d \text{ (p.u.)} = \psi_d / (\sqrt{2} \cdot U_{Ns}).$$

O binário em valores reduzidos é dado por $t_e \text{ (p.u.)} = T_e / T_b$.

As reduções apresentadas referem-se aos circuitos eléctricos do estator. Para os circuitos eléctricos rotóricos atende-se a outras considerações.

Como a expressão para a matriz de transformação de Park, (1.22), tem uma forma não ortogonalizada verifica-se que a expressão da potência eléctrica vem afectada de um coeficiente; isto é, não existe invariância da potência na transformação de Park, apenas existe invariância de efeitos magnéticos.

$$P_{abc} = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c \quad P_{dqo} = (3/2) \cdot (u_d i_d + u_q i_q + 2 \cdot u_o i_o) \quad (1.38)$$

Por isso, ao definirem-se as grandezas de base para um enrolamento rotórico procura-se que exista uma relação com as grandezas de base dos enrolamentos estatóricos de forma a que se possam utilizar os valores referentes aos diferentes enrolamentos numa mesma escala numérica e, desta forma, se possam construir, facilmente, os esquemas equivalentes correspondentes.

Assim, a corrente eléctrica de base do enrolamento rotórico deverá provocar os mesmos efeitos magnéticos que a corrente eléctrica de base estatórica. Por isso haverá uma relação entre elas dada por um factor de escala. Para o enrolamento genérico g , será $I_{bg} = k_g \cdot (\sqrt{2} \cdot I_N)$.

Nesta situação a tensão de base para o enrolamento rotórico genérico g , para que a potência permanecesse constante, atendendo a (1.38) seria dada por $U_{bg} = (3/2) \cdot (\sqrt{2} \cdot U_N) \cdot k_g$, atendendo a que $u_d = \sqrt{2} \cdot U_N$, $i_d = \sqrt{2} \cdot I_N$, $u_g = U_{bg}$, e $i_g = I_{bg}$.

O factor k_g pode ser determinado de forma a que se torne num factor de escala, na redução dos enrolamentos do rotor ao estator. Para isso ele terá de produzir a mesma força magnetomotriz, ou devido à linearidade do circuito magnético o mesmo fluxo, quando como enrolamento reduzido ao estator nele circula a corrente eléctrica base do estator $\sqrt{2} \cdot I_N$, e quando como enrolamento rotórico nele circula a corrente base rotórica para esse enrolamento I_{bg} .

Considerando N_g o número de espiras efectivas do enrolamento genérico rotórico, e N_s o número de espiras efectivas do enrolamento reduzido ao estator, então a igualdade de força magnetomotriz exige que:

$$N_g \cdot I_{bg} = (3/2) \cdot N_s \cdot \sqrt{2} \cdot I_N \quad \text{e} \quad k_g = 3 \cdot N_s / 2 \cdot N_g$$

Para o alternador síncrono trifásico podem definir-se os factores de escala k_f , k_{Kd} , k_{Kq} , e a partir deles os valores de base para as grandezas de cada enrolamento. No caso do enrolamento indutor f , será:

$$r_f = R_f \cdot I_{fb} / U_{fb} = 2 \cdot k_f^2 \cdot R_f \cdot I_N / (3 \cdot U_{Ns})$$

e para as indutâncias,

$$l_f = L_f \cdot I_{fb} / U_{fb} = 2 \cdot k_f^2 \cdot L_f \cdot I_N / (3 \cdot U_{Ns}) \quad m_{af} = M_{af} \cdot I_{fb} / (\sqrt{2} \cdot U_{fb}) = k_f \cdot M_{af} \cdot I_N / U_{Ns}$$

De uma forma análoga determinavam-se os valores reduzidos das grandezas para os outros enrolamentos rotóricos, utilizando-se o mesmo valor de base para as grandezas dos dois enrolamentos amortecedores, (K_d , K_q).

Estabelecida a forma de proceder à redução das grandezas eléctricas e magnéticas, é necessário analisar o modo como se procede para efectuar a redução das grandezas mecânicas. Desprezando o binário de atrito a equação mecânica para o alternador síncrono trifásico é: $T_m = (J/p) \cdot d\omega_r / dt + T_{el}$; dividindo os dois membros da equação por $T_b = (3 \cdot U_{Ns} \cdot I_N) \cdot p / \omega = S_N \cdot p / \omega$, resulta: $t_m = t_{el} + (J \cdot \omega / p^2 \cdot S_N) \cdot d\omega_r / dt$ (1.40)

Energia Cinética Reduzida H

Na análise do comportamento dinâmico das máquinas eléctricas de corrente alternada é utilizada na modelização da parte mecânica da máquina uma grandeza relacionada com o momento de inércia J. É a energia cinética reduzida H, {segundo}; trata-se da energia cinética armazenada no corpo em movimento de rotação expressa em valores reduzidos a uma base definida pela potência aparente da máquina.

A energia cinética reduzida H é o valor do cociente da energia cinética armazenada no rotor W_c , quando roda à sua velocidade nominal n_n ($\omega_{nr} = 2\pi n_n$), reduzida à potência aparente nominal S_b ; [CEI-34.4; § 22, 64].

$$H = \frac{W_c}{S_b} \cdot 10^{-3} = \frac{(1/2) \cdot J \cdot \omega_{nr}^2}{S_b} \cdot 10^{-3} \quad [\text{s}; \text{kgm}^2, \text{rad/s}, \text{kVA}]$$

Os valores típicos da energia cinética reduzida H, incluindo a inércia combinada do alternador e da máquina primária, encontram-se na tabela seguinte:

Grupo Hidráulico	$2 \text{ s} < H < 4 \text{ s}$
Grupo Térmico bipolar	$2,5 \text{ s} < H < 6 \text{ s}$
Grupo Térmico quadripolar	$4 \text{ s} < H < 10 \text{ s}$

Introduzindo a *constante de energia cinética* H, tal que $H = ((1/2) \cdot J \cdot (\omega/p)^2) / S_n$, é

$$t_m = t_{el} + (2 \cdot H / \omega) \cdot d\omega_r / dt \quad (1.41)$$

A utilização dos valores relativos definidos permite escrever as equações do alternador síncrono trifásico em valores relativos:

equações magnéticas

$$\psi_d = l_d \cdot i_d + m_{af} \cdot i_f + m_{aKd} \cdot i_{Kd}$$

$$\psi_f = m_{af} \cdot i_d + l_f \cdot i_f + m_{fKd} \cdot i_{Kd}$$

$$\psi_{Kd} = m_{fKd} \cdot i_d + m_{fKd} \cdot i_f + l_{Kd} \cdot i_{Kd}$$

$$\psi_q = l_q \cdot i_q + m_{aKq} \cdot i_{Kq}$$

$$\psi_{Kq} = m_{aKq} \cdot i_q + l_{Kq} \cdot i_{Kq}$$

$$\psi_o = l_o \cdot i_o \quad (1.42)$$

equações eléctricas

$$-u_d = r_s \cdot i_d + p\psi_d - \omega_r \cdot \psi_q$$

$$-u_q = r_s \cdot i_q + p\psi_q + \omega_r \cdot \psi_d$$

$$-u_o = r_s \cdot i_o + p\psi_o$$

$$u_f = r_f \cdot i_f + p\psi_f$$

$$u_{Kd} = r_{Kd} \cdot i_{Kd} + p\psi_{Kd}$$

$$u_{Kq} = r_{Kq} \cdot i_{Kq} + p\psi_{Kq} \quad u_{Kd} = u_{Kq} = 0 \quad (1.43)$$

equação electromecânica

$$t_{el} = \omega(\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) \quad (1.44)$$

O sistema de valores reduzidos adoptados para as grandezas do alternador síncrono trifásico, [BAR-1], é o que melhor se presta ao estabelecimento dos circuitos eléctricos equivalentes ao circuito magnético da máquina segundo os dois eixos magnéticos. Outros sistemas de valores, mais simples ou mais complicados, mas que servirão melhor outra situação pontual, poderão ser adoptados.

Exemplo_1.4-1 — Um alternador síncrono trifásico tem as seguintes características nominais [IEEE-86],

bipolar, 6,25 kVA, 220 V, 3000 rot/min, 50 Hz, factor de potência $\lambda = 0,8$,

rendimento $\eta = 79,6\%$, ligação em estrela.

Tomam-se os seguintes valores de base:

$$\begin{aligned} \text{tensão } 220/\sqrt{3} &= 127 \text{ V} & \text{intensidade de corrente } 6250/(3 \times 127) &= 16,4 \text{ A} \\ \text{impedância } 127/16,4 &= 7,74 \ \Omega & \text{potência activa } 6250 \times 1 &= 6250 \text{ W} \\ \text{velocidade angular } (50/1) \times 60 &= 3000 \text{ rot/min} & \text{binário } (60/2\pi) \times (6250/3000) &= 19,89 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Os valores reduzidos (p.u.) das grandezas são:

$$\text{Resistência: estatórica } R_S = 0,517 \ \Omega \rightarrow r_S = 0,517/7,71 = 0,0668$$

$$\text{Reactância: directa } X_d = 8,4 \ \Omega \rightarrow x_d = 8,4/7,74 = 1,085; \text{ quadratura } X_q = 2,9 \ \Omega \rightarrow x_q = 2,9/7,74 = 0,375$$

$$\text{Potência de saída } P_u = 5 \text{ kW} \rightarrow p_u = 5/6,25 = 0,8$$

1.4.1 A Equação de Movimento em Valores Reduzidos

No estudo do funcionamento da máquina síncrona é muito importante a utilização da equação mecânica do alternador síncrono trifásico expressa em valores reduzidos.

Considerando o modelo mecânico de uma máquina rotativa geradora, e desprezando a influência do atrito face ao valor da influência da inércia, pode-se caracterizar aquele modelo pela equação mecânica que relaciona os binários aplicados na máquina [MVG-6].

Considerando a equação (1.40),

$$t_m = t_{el} + (J \cdot \omega / p^2 \cdot S_N) \cdot d\omega_r / dt$$

pode-se-lhe dar a forma da equação (1.41),

$$t_m = t_{el} + (2 \cdot H / \omega) \cdot d\omega_r / dt, \quad \text{ou} \quad t_m - t_{el} = (2 \cdot H / \omega) \cdot (d\omega_r / dt)$$

em que $t_m - t_{el} = t_a$ é o binário acelerador (dado pela diferença entre o binário motor fornecido pela máquina primária e o binário electromecânico apresentado pelo alternador no respectivo regime de carga).

O movimento do rotor do alternador é caracterizado pelo respectivo ângulo de posição θ , que neste tipo de estudo é transformado no ângulo eléctrico correspondente, $\alpha = p \cdot \theta$; verificando-se que $\alpha = \omega t + \alpha_0$.

A variação da posição do rotor (oscilação, movimento pendular) devida à variação de velocidade, desde a velocidade (eléctrica) de sincronismo (ω) até a uma velocidade de regime (ω_Δ), é dada por:

$$\delta = (\alpha + \Delta\alpha) - \alpha = \omega_\Delta t - \omega t \quad \text{e} \quad d\delta / dt = \omega_\Delta \quad \text{e} \quad d^2\delta / dt^2 = d\omega_\Delta / dt$$

A equação de movimento em valores reduzidos pode ser escrita como:

$$(2H/\omega) \cdot (d^2\delta / dt^2) = t_m - t_{el} \quad \text{ou} \quad ((2H) \cdot (d^2\delta(pu) / dt^2)) = t_m - t_{el}$$

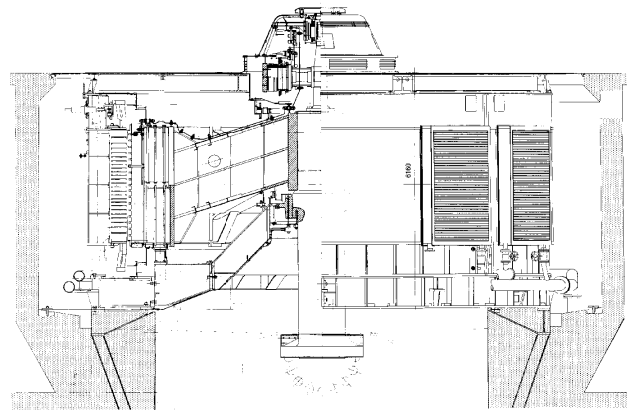
A partir desta equação é possível determinar o *tempo de arranque do alternador* — tempo que demora a velocidade a , partindo do repouso, atingir o valor da velocidade de sincronismo, quando está aplicado o binário acelerador nominal.

$$t_a = t_m - t_{el} = (2 \cdot H / \omega) \cdot (d\omega_r / dt) \quad \text{ou} \quad t_a = t_m - t_{el} = (2 \cdot H) \cdot (d\omega_r(pu) / dt)$$

e

$$t_a(1/2H) = (d\omega_r(pu) / dt) \quad \text{ou} \quad \omega_r(pu) = (1/2H) \cdot \int_0^{t_a} t_a dt$$

Exemplo_1.4.1-1 — Um alternador síncrono trifásico tem aplicado um binário acelerador nominal, $t_a = 1,0$, e pretende-se determinar o tempo que demora a atingir a velocidade de sincronismo partindo



do repouso. $\omega_r(\text{pu}) = 1,0$.

$$1,0 = (1/2H) \cdot \int_0^{t_{aa}} 1,0 \, dt \quad \text{ou} \quad 1,0 = t_{aa}/2H \quad \text{logo} \quad t_{aa} = 2H \quad \{\text{segundos}\}$$

1.5 Representação Esquemática do Circuito Magnético

Um outro tipo de modelo utilizado no estudo do alternador síncrono trifásico, essencialmente no estudo do seu funcionamento em regime transitório, ou quando é necessário conhecer o comportamento dos circuitos eléctricos rotóricos, consiste num esquema eléctrico equivalente ao circuito magnético, que devido às características construtivas dos alternadores síncronos trifásicos de pólos salientes (o mais geral) se distribui por dois eixos magnéticos complanos e ortogonais.

Este circuito eléctrico equivalente foi utilizado no passado, essencialmente, nos analisadores de circuitos eléctricos (tipo de computador analógico). Actualmente constitui uma forma elegante e clarificadora de analisar os diferentes problemas de caracterização de parâmetros e de melhoria dos modelos do alternador síncrono trifásico, incluindo os modernos turboalternadores, [CAN-1].

Os circuitos eléctricos equivalentes para a *ligação magnética* entre os diferentes circuitos eléctricos que se encontram nos dois eixos de simetria, são obtidos directamente sobre as equações fundamentais escritas em valores reduzidos, (1.42 e 1.43).

Utilizando o princípio da dualidade é possível construir para uma determinada estrutura electromagnética, como o alternador síncrono trifásico, um esquema eléctrico equivalente ao circuito magnético (ao acoplamento magnético). Para qualquer circuito magnético, *com propriedades magnéticas lineares*, é possível escrever uma equação matricial do tipo:

$$\{\phi\} = [R_m]^{-1} \cdot \{F\} \quad (1.45)$$

em que $\{F\}$ é o vector das forças magnetomotrizes, $[R_m]$ é a matriz das relutâncias dos circuitos magnéticos, e $\{\phi\}$ é o vector dos fluxos médios por espira de cada uma das bobinas indutoras.

Como, por definição, a força magnetomotriz é o produto do número efectivo de espiras de uma bobina pela corrente eléctrica que nela circula, ($F = N_i \cdot i$), e a força electromotriz é a variação no tempo do fluxo totalizado, ($E = -p\psi = -pN_j \cdot \phi$), com $p = d/dt$ (p é o operador diferencial, ou operador de Heaviside), é possível escrever a equação matricial,

$$\begin{aligned} \{\phi\} &= [R]^{-1} \cdot \{F\} = [R]^{-1} \cdot \{N_i \cdot i\} \quad \text{ou} \quad -\{E/pN_j\} = [R]^{-1} \cdot \{N_i \cdot i\} \\ \{E\} &= (-pN_j \cdot N_i) \cdot [R]^{-1} \{i\} = -[pL] \cdot \{i\} \end{aligned} \quad (1.46)$$

atendendo à linearidade das propriedades do circuito magnético, os elementos da matriz $[N_i \cdot N_j / R]$ são as indutâncias, próprias e mútuas, das bobinas presentes no circuito magnético, e assim a equação (1.45) reduz-se a

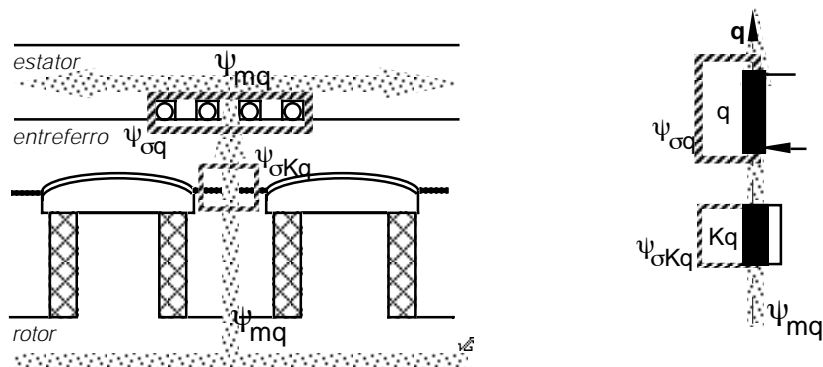
$$\{E\} = [pL] \cdot \{i\} \quad (1.46)$$

Da comparação das equações (1.45) e (1.46) é possível estabelecer a correspondência dual entre as grandezas do circuito magnético e do circuito eléctrico equivalente:

força magnetomotriz — corrente eléctrica
fluxo médio por espira — força electromotriz
relutância — susceptância operacional ($1/pL$)

que permite construir o circuito equivalente correspondente. Em regime transitório as forças electromotrizes podem ser substituídas pela variação do fluxo totalizado $E_i = -p\psi_i$.

Aplicando estes princípios ao estudo do circuito magnético segundo o eixo transversal, conforme a figura seguinte, pode-se escrever o conjunto (1.48) de equações em valores reduzidos e transformados para o estator, obtido dos sistemas de equações (1.42) e (1.43).



Circuito magnético segundo o eixo transversal q

$$\psi_q = l_q \cdot i_q + m_{aKq} \cdot i_{Kq}$$

$$\psi_{Kq} = m_{aKq} \cdot i_q + l_{Kq} \cdot i_{Kq}$$

$$u_{Kq} = r_{Kq} \cdot i_{Kq} + p\psi_{Kq}$$

Analisando a composição dos fluxos criados por cada uma das bobinas verifica-se que eles são compostos por um fluxo próprio do enrolamento e por um fluxo de fugas. Assim cada uma das indutâncias das bobinas terá uma indutância própria de magnetização e uma, ou várias, indutâncias de fugas. Neste caso,

$$l_q = l_{mq} + l_{\sigma q} \quad \text{e} \quad l_{Kq} = l_{mq} + l_{\sigma Kq}$$

e considerando que a indutância mútua igual a $m_{aKq} = l_{mq}$.

$$\Rightarrow p\psi_q = p(l_{mq} + l_{\sigma q}) \cdot i_q + p l_{mq} \cdot i_{Kq} \quad \text{ou} \quad p\psi_q = p l_{\sigma q} \cdot i_q + p l_{mq} (i_q + i_{Kq}) \quad (1.47)$$

$$u_{Kq} = r_{Kq} \cdot i_{Kq} + p\psi_{Kq} \quad \text{ou} \quad (u_{Kq} = 0) \quad 0 = r_{Kq} \cdot i_{Kq} + p\psi_{Kq}$$

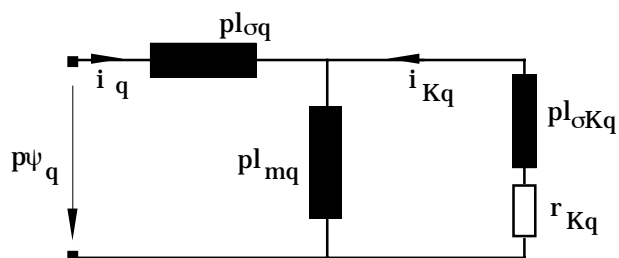
$$\psi_{Kq} = m_{aKq} \cdot i_q + l_{Kq} \cdot i_{Kq} \quad \text{ou} \quad \psi_{Kq} =$$

$$l_{mq} \cdot i_q + l_{Kq} \cdot i_{Kq}$$

$$0 = p l_{mq} \cdot i_q + (r_{Kq} + p(l_{mq} + l_{\sigma Kq})) \cdot i_{Kq}$$

$$\Rightarrow p l_{mq} \cdot (i_q + i_{Kq}) = - (r_{Kq} + p l_{\sigma Kq}) \cdot i_{Kq} \quad (1.48)$$

As equações (1.47) e (1.48) correspondem a um circuito eléctrico, que é o circuito equivalente para o eixo transversal (q).



Circuito eléctrico equivalente para o eixo transversal q

De um modo análogo pode-se obter o circuito equivalente para o eixo longitudinal d.

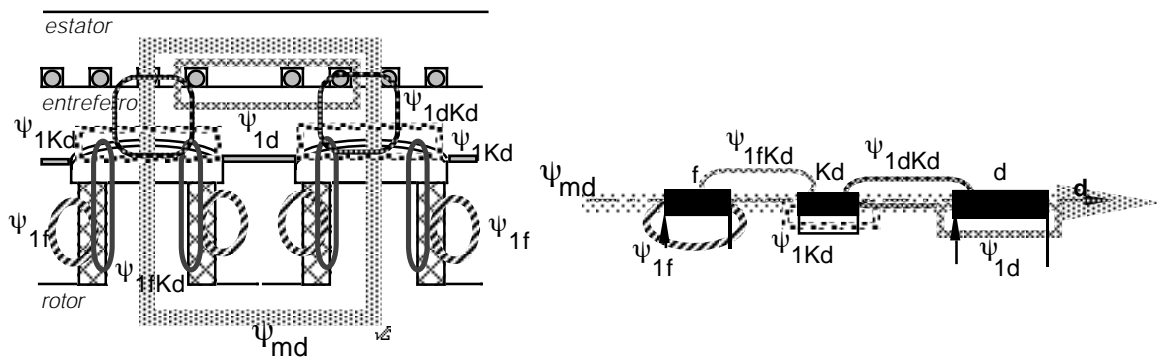
As equações para os três elementos do circuito são:

$$\psi_d = l_d \cdot i_d + m_{af} \cdot i_f + m_{aKd} \cdot i_{Kd}$$

$$\psi_f = m_{af} \cdot i_d + l_f \cdot i_f + m_{fKd} \cdot i_{Kd}$$

$$\psi_{Kd} = m_{fKd} \cdot i_d + m_{fKd} \cdot i_f + l_{Kd} \cdot i_{Kd}$$

$$u_{Kd} = r_{Kd} \cdot i_{Kd} + p\psi_{Kd}$$



Circuito magnético segundo o eixo longitudinal d

Considerando que a ligação magnética entre os circuitos indutor, dos amortecedores e do induzido é apenas efectuada pelo termo fundamental do campo magnético no entreferro, resulta que as indutâncias mútuas nos três circuitos são iguais entre si e iguais a l_{md} .

$$m_{af} = m_{aKd} = m_{fKd} = l_{md}$$

considerando que as indutâncias próprias têm componentes de fugas, é:

$$l_d = l_{md} + l_{\sigma d} + l_{\sigma d Kd} \quad ; \quad l_f = l_{md} + l_{\sigma f} + l_{\sigma f Kd} \quad ; \quad l_{Kd} = l_{md} + l_{\sigma Kd} + l_{\sigma d Kd}$$

Assim,

$$p\psi_d = p(l_{md} + l_{\sigma d} + l_{\sigma d Kd}) \cdot i_d + p l_{md} \cdot i_f + p l_{md} \cdot i_{Kd}$$

$$\Rightarrow p\psi_d = p(l_{\sigma d} + l_{\sigma d Kd}) \cdot i_d + p l_{md} \cdot (i_d + i_f + i_{Kd}) \quad (1.49)$$

$$p\psi_{Kd} = u_{Kd} - r_{Kd} \cdot i_{Kd}$$

$$p\psi_{Kd} = p l_{md} \cdot i_d + p l_{md} \cdot i_f + p(l_{md} + l_{\sigma Kd} + l_{\sigma d Kd}) \cdot i_{Kd}$$

$$0 = p l_{md} \cdot (i_d + i_f + i_{Kd}) + (r_{Kd} + p(l_{\sigma Kd} + l_{\sigma d Kd})) \cdot i_{Kd}$$

$$\Rightarrow p l_{md} \cdot (i_d + i_f + i_{Kd}) = -(r_{Kd} + p(l_{\sigma Kd} + l_{\sigma d Kd})) \cdot i_{Kd} \quad (1.50)$$

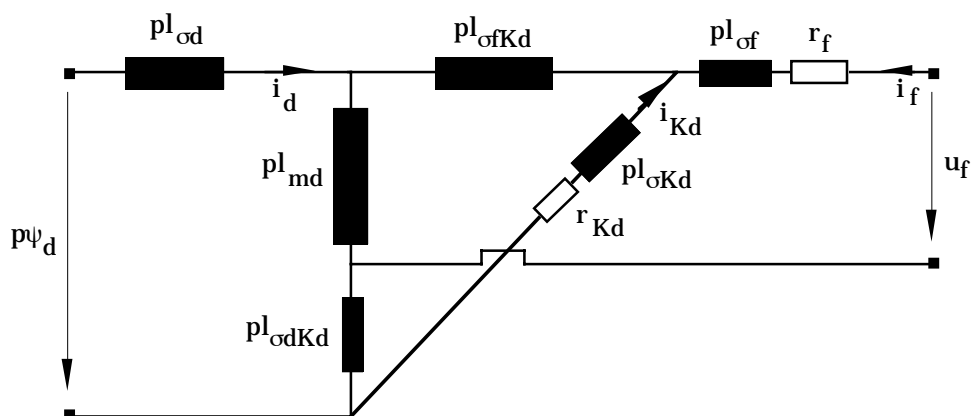
$$p\psi_f = u_f - r_f \cdot i_f$$

$$p\psi_f = p l_{md} \cdot i_d + p(l_{md} + l_{\sigma f} + l_{\sigma f Kd}) \cdot i_f + p l_{md} \cdot i_{Kd}$$

$$u_f = p l_{md} \cdot (i_d + i_f + i_{Kd}) + (r_f + p(l_{\sigma f} + l_{\sigma f Kd})) \cdot i_f$$

$$\Rightarrow u_f - (r_f + p(l_{\sigma f} + l_{\sigma f Kd})) \cdot i_f = p l_{md} \cdot (i_d + i_f + i_{Kd}) \quad (1.51)$$

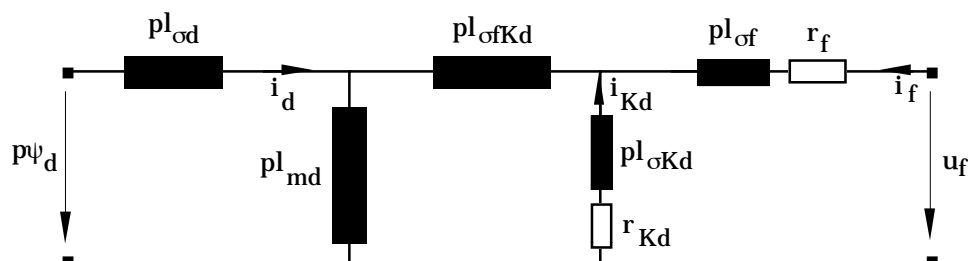
As equações (1.49), (1.50) e (1.51) correspondem ao circuito eléctrico equivalente para o eixo longitudinal que se encontra representado na figura



A sua forma “tridimensional” é condicionada pela indutância de fugas operacional $p l_{\sigma d Kd}$.

A indutância operacional $p l_{\sigma d Kd}$ corresponde a uma ligação magnética do fluxo de fugas

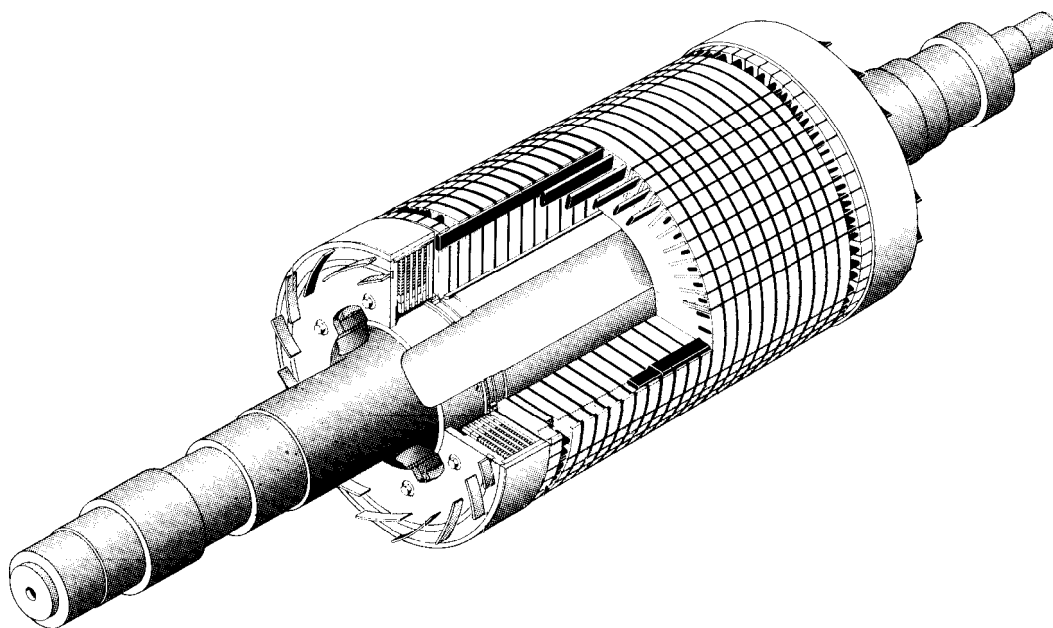
da bobina estatórica longitudinal d , representativa do circuito induzido, com o circuito da bobina rotórica representativa do amortecedor K_d . Tal situação, rara, apenas ocorre nos motores síncronos trifásicos com comutação do número de pólos: *motor síncrono de pólos comutáveis* (ou, nalguns, raros, motores-alternadores). Nas outras máquinas síncronas aquele fluxo de fugas é desprezável, e, por isso, é nulo o valor da indutância operacional, $pl_{\sigma d K_d} = 0$, o que simplifica o esquema eléctrico equivalente ao circuito magnético segundo o eixo longitudinal.



Circuito eléctrico equivalente para o eixo longitudinal d ($pl_{\sigma d K_d} = 0$)

A partir dos circuitos equivalentes apresentados e das reactâncias operacionais a definir, é possível dar novas formas a estes circuitos e deduzir um conjunto de novos parâmetros (reactâncias) que entram em consideração com o comportamento do campo magnético durante a ocorrência de um fenómeno transitório, tendo em consideração as ligações magnéticas ao longo dos dois eixos de simetria magnética, [ADK-1].

A ligação magnética ao longo do eixo directo, envolvendo o circuito do induzido, o circuito indutor, o circuito amortecedor ou a porção de ferro onde se desenvolvem correntes de Foucault, tem sido profundamente estudada e considerada nas modernas técnicas de modelização do alternador síncrono trifásico [CAN-1, 2], e tem tido influência nos novos métodos de determinação de parâmetros, [CAN-3].



Rotor cilíndrico quadripolar (SIEMENS, 1983)

1.6 Modelo Energético do Alternador Síncrono Trifásico

Como uma unidade conversora de energia mecânica em energia eléctrica o alternador síncrono trifásico pode ser submetido a uma análise energética, que permite verificar a distribuição da energia que é absorvida da máquina primária e da fonte de alimentação do circuito indutor, que nesta máquina eléctrica tem uma pequena parte dissipada pelas perdas mecânicas, outra parte dessa energia é integralmente transformada de energia mecânica em energia eléctrica, e, dessa energia transformada, há uma parte disponível para fornecimento à carga eléctrica.

Este balanço energético encontra-se representado no esquema tradicional da figura junta. Nele se pode verificar a importância das perdas de energia (cerca de 5% a 10% da energia total).

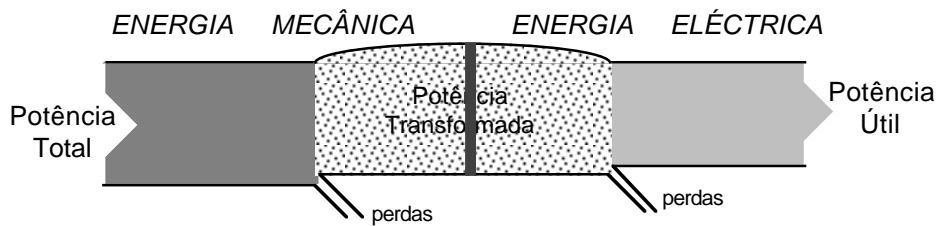


Diagrama energético para o alternador síncrono trifásico

De todas as perdas de energia — perdas eléctricas, perdas magnéticas e perdas mecânicas — são aquelas que constituem as *perdas adicionais* que hoje são motivo de preocupação e de estudo, assim como, também, é estudada a influência nas perdas de energia do tipo de carga eléctrica do alternador, que pode gerar grandezas eléctricas periódicas mas não sinusoidais.

As perdas adicionais, que levam à consideração dos aspectos construtivos reais do alternador síncrono trifásico, abrangem as perdas magnéticas nos circuitos magnéticos principais devidas aos fluxos magnéticos de fugas, as perdas magnéticas nas estruturas de sustentação dos elementos da máquina, as perdas magnéticas no empacotamento das chapas do circuito magnético devidas à forma como esse empacotamento é feito, as perdas magnéticas no ferro rotórico dos alternadores de indutor cilíndrico, e, ainda, as perdas na superfície das expansões polares do lado do entreferro ou na superfície dos amortecedores. Existem, também, perdas adicionais eléctricas devidas a correntes eléctricas parasitas, ou correntes de Foucault, nos condutores dos enrolamentos.

As consequências da existência de termos harmónicos, na forma de onda da corrente eléctrica de carga do alternador síncrono trifásico, são: o aumento das perdas eléctricas, e o conseqüente aumento dos efeitos térmicos sobre a diminuição da esperança de vida dos isolantes; são o aparecimento de binários electromagnéticos parasitas (pulsatórios) de baixa frequência, e o conseqüente aparecimento de efeitos vibratórios, ou, mesmo, de ressonância mecânica.

Na análise do funcionamento do alternador síncrono trifásico verifica-se que o comportamento dinâmico desta máquina eléctrica depende do balanço energético da energia eléctrica e da energia mecânica que é posta em jogo durante o funcionamento da máquina. Nesse funcionamento, em regime estático (regime permanente) ou em regime dinâmico (regime transitório) existe um comportamento da energia — armazenamento, conversão, dissipação — que tem de ser definido e localizado para uma melhor compreensão do funcionamento da máquina e para uma melhor caracterização do modelo físico do alternador síncrono trifásico.

No funcionamento do alternador síncrono trifásico em regime transitório dão-se um

conjunto de trocas de energia (reversíveis) entre a energia armazenada no campo magnético e a energia mecânica armazenada nas massas em movimento de rotação, que devido à sua diferente velocidade de variação condicionam o desenrolar do fenómeno e a actuação de qualquer sistema (de controlo ou de protecção) sujeito ao funcionamento do alternador.

Na análise energética de um Sistema de Conversão Electromecânica de Energia, como o alternador síncrono trifásico, são utilizados conceitos de *Comportamento Energético*, que aqui se apresentam.

Comportamento Energético

No espaço dos elementos de sistema de conversão electromecânica de energia, como uma máquina eléctrica, existem campos eléctricos e campos magnéticos, onde se dão armazenamentos (ou acumulações) de energia. Também nos órgãos mecânicos do sistema de accionamento electromecânico existem armazenamentos (ou acumulações) de energia mecânica.

Como os elementos do sistema de conversão electromecânica de energia estão caracterizados por parâmetros concentrados (lineares), a cada parâmetro associa-se uma actuação sobre a energia contida no elemento, ou no subsistema. Assim, o circuito eléctrico pode ter como elementos uma resistência, uma bobina, e um condensador. A esses elementos podem associar-se os parâmetros resistência, indutância, capacidade. Esses parâmetros podem servir para caracterizar o comportamento energético dos elementos:

resistência — dissipação de energia — $R \cdot i^2$

indutância — armazenamento de energia no campo magnético — $(1/2) \cdot L \cdot i^2$

capacidade — armazenamento de energia no campo eléctrico — $(1/2) \cdot C \cdot u^2$

Da mesma forma para um carga mecânica em movimento de rotação é possível caracterizar o comportamento energético dos seus elementos:

mancal — coeficiente de atrito — dissipação de energia — $D \cdot \omega_r^2$

mola — coeficiente de restituição — armazenamento de energia — $(1/2) \cdot (1/K) \cdot \theta^2$

volante — momento de inércia — armazenamento de energia — $(1/2) \cdot J \cdot \omega_r^2$

Com o auxílio do Princípio de Conservação da Energia, e atendendo a que a energia não pode variar instantaneamente

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \lim_{dt \rightarrow 0} P = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dW}{dt} \rightarrow \infty \quad (?! \dots)$$

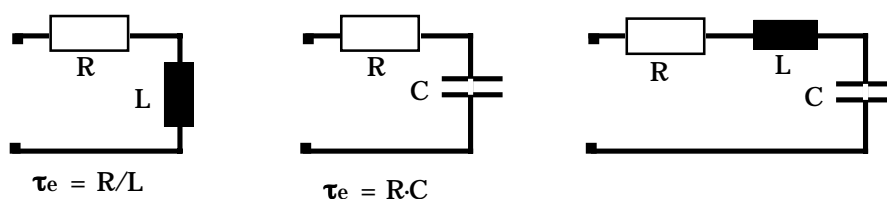
é possível acompanhar o estudo do comportamento dinâmico de um sistema com uma análise física qualitativa, que permite uma compreensão mais profunda da actuação do sistema.

Como controlo complementar, verifica-se que a ordem da equação diferencial que rege o comportamento do sistema é igual ao número de armazenamentos de energia.

Exemplo —

No caso dos circuitos eléctricos a energia pode estar armazenada no campo eléctrico e no campo magnético. Casos como o circuito resistência-indutância (RL) ou resistência-capacidade (RC) são circuitos em que a energia está armazenada numa só forma, são circuitos de *energia simples*.

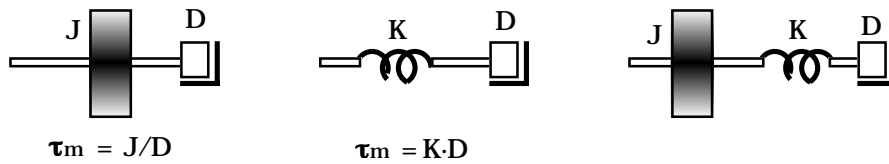
Um circuito eléctrico com resistência-indutância-capacidade (RLC) é um circuito de energia dupla, porque a energia pode estar armazenada em duas formas diferentes (no campo eléctrico ou no campo magnético). As trocas entre os armazenamentos destas duas formas de energia pode, em certas circunstâncias, provocar a oscilação do circuito: *ressonância eléctrica*.



No caso das cargas mecânicas a energia mecânica pode estar armazenada sob a forma de energia potencial ou de energia cinética. Casos como o volante em movimento, ou do veio elástico (sem inércia), mas com mancais de atrito, são cargas mecânicas de energia simples.

Uma carga mecânica formada por um veio elástico com um volante de inércia e com mancais de atrito

constitui uma carga com energia dupla. As trocas de energia entre estas duas formas de armazenamento de energia (mola e volante) pode, em certas circunstâncias, provocar a oscilação da carga: *ressonância mecânica*.



No caso dos sistemas electromecânicos a energia pode estar armazenada no campo eléctrico e no campo magnético ou nas massas em movimento de rotação e nas molas (ou veios elásticos). Se se provocarem alterações no movimento dum sistema electromecânico, o sistema tem um comportamento dinâmico, associado ao comportamento energético, que é função dos parâmetros eléctricos e mecânicos do sistema. Em certas circunstâncias, como no funcionamento do alternador síncrono trifásico de indutor cilíndrico (turboalternador) pode ocorrer (simultaneamente) ressonância eléctrica com uma frequência tal que provoca a ressonância mecânica: *ressonância subsíncrona*.

Conhecido, e caracterizado, o comportamento energético dos diferentes elementos constituintes do modelo de parâmetros concentrados do alternador síncrono trifásico é possível interpretar as equações fundamentais em termos energéticos ou promover uma análise crítica dessas equações, do valor dos seus parâmetros ou de certas aproximações efectuadas durante a Análise desta máquina eléctrica.

Repetindo a análise energética realizada em 1.3.1, e que permitiu determinar a expressão para o binário electromagnético, verifica-se que a energia mecânica de alimentação é utilizada na conversão electromecânica de energia e na alimentação dum conjunto de perdas mecânicas. A energia que realmente é transformada em energia eléctrica, destina-se a alimentar um conjunto de perdas eléctricas e magnéticas, porque na máquina real os materiais ferromagnéticos têm uma característica de magnetização dada por um ciclo histerético, e conseqüentemente existem perdas magnéticas. A energia eléctrica restante é transmitida à carga eléctrica.

Assim, para que seja válida a dedução da expressão do binário, há que considerar que as perdas mecânicas são reduzidas directamente da energia mecânica absorvida pelo alternador, e que as perdas magnéticas são parte da energia requerida pela carga. Tal consideração permitirá deduzir a expressão do binário electromagnético no regime de funcionamento permanente sinusoidal.

A potência instantânea fornecida à rede eléctrica, expressa em grandezas de fase é:

$$p = u_a \cdot i_a + u_b \cdot i_b + u_c \cdot i_c$$

atendendo à relação com as grandezas expressas no referencial d-q, mas não considerando a existência de componente homopolar ($i_a + i_b + i_c = 0$), é

$$\begin{aligned}
 p = & u_d \cdot i_d \cdot \cos^2(\omega t + \alpha_0) + u_q \cdot i_q \cdot \sin^2(\omega t + \alpha_0) + (u_d \cdot i_d + u_q \cdot i_q) \cdot \cos(\omega t + \alpha_0) \cdot \sin(\omega t + \alpha_0) + \\
 & + u_d \cdot i_d \cdot \cos^2(\omega t + \alpha_0 - 2\pi/3) + u_q \cdot i_q \cdot \sin^2(\omega t + \alpha_0 - 2\pi/3) + (u_d \cdot i_d + u_q \cdot i_q) \cdot \cos(\omega t + \alpha_0 - 2\pi/3) \cdot \sin(\omega t + \alpha_0 - 2\pi/3) + \\
 & + u_d \cdot i_d \cdot \cos^2(\omega t + \alpha_0 - 4\pi/3) + u_q \cdot i_q \cdot \sin^2(\omega t + \alpha_0 - 4\pi/3) + (u_d \cdot i_d + u_q \cdot i_q) \cdot \cos(\omega t + \alpha_0 - 4\pi/3) \cdot \sin(\omega t + \alpha_0 - 4\pi/3)
 \end{aligned}$$

ou, por utilização de relações trigonométricas conhecidas,

$$p = (3/2) \cdot (u_d \cdot i_d + u_q \cdot i_q)$$

Os elementos da análise energética do alternador síncrono trifásico aqui apresentados, embora de uma forma sumária, são importantes para a validação de qualquer modelo matemático do alternador e a sua consideração é indispensável para a análise do funcionamento destes sistemas de conversão electromecânica de energia.

1.7 Um Modelo para o Alternador Síncrono Trifásico

A necessidade contemporânea das empresas de electricidade preverem as características de funcionamento de um sistema eléctrico depois de uma perturbação é o maior incentivo à procura de um modelo preciso e eficiente para o alternador síncrono trifásico. Como a análise do funcionamento dessa máquina eléctrica terá de ser feita por meios computacionais, o modelo tem de traduzir em expressões matemáticas simples a realidade física complexa do alternador.

Existem, hoje, bons modelos para estudo do alternador síncrono trifásico, já bastante mais complexos que o modelo segundo o referencial d-q apresentado em 1.3.2, e baseado nos trabalhos de R. H. Park [PAR-1, 2] e divulgado no livro de C. Concordia. Para além dos modelos resultantes da extensão da Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas, utilizam-se os modelos baseados no circuito eléctrico equivalente do circuito magnético [CAN-1], não sendo comum a utilização do Método dos Fasores Espaciais na Análise do alternador síncrono trifásico, [HOS-1].

Mas, para além da simples representação matemática do alternador síncrono trifásico, em certo tipo de estudos é necessário um conhecimento profundo de todos os fenómenos electromagnéticos envolvidos no funcionamento deste alternador. Assim, os estudos de rendimento, que hoje são de procura de um alto rendimento, ou os estudos de optimização do projecto, exigem o conhecimento dos fenómenos electromagnéticos e electromecânicos susceptíveis de afectarem as perdas de energia adicionais que contribuem para uma diminuição do rendimento da máquina.

Muitos dos modelos necessários ao estudo do alternador síncrono trifásico são extensões do modelo de Park, no referencial d-q. No entanto, a consideração das não linearidades das propriedades do material ferromagnético, ou a necessidade de considerar todas as diversas ligações magnéticas que, realmente, se estabelecem entre os diferentes circuitos onde estão presentes correntes eléctricas (principalmente segundo o eixo em quadratura) obrigam a que seja necessário desenvolver modelos próprios com um maior número de parâmetros (três bobinas rotóricas traduzindo o efeito de amortecimento no ferro do rotor em regime dinâmico), ou obrigam ao desenvolvimento de modelos em que os parâmetros estão relacionados por analogia com as realidades físicas que pretendem representar (circuitos eléctricos equivalentes).

•	$\{\psi\} = [L] \cdot \{i\}$	(1.14)
•	$-u_a = R_a \cdot i_a - e_a = R_a \cdot i_a + p\psi_a$	$u_f = R_f \cdot i_f + p \cdot \psi_f$
•	$-u_b = R_b \cdot i_b - e_b = R_b \cdot i_b + p\psi_b$	$u_{Kd} = R_{Kd} \cdot i_{Kd} + p \cdot \psi_{Kd}$
•	$-u_c = R_c \cdot i_c - e_c = R_c \cdot i_c + p\psi_c$	$u_{Kq} = R_{Kq} \cdot i_{Kq} + p \cdot \psi_{Kq}$
	$T_{el} = (1/2) \cdot p \cdot \{i\}_T \cdot [dL/d\alpha_r] \cdot \{i\}$	(1.17)
•	$T_m = (J/p) \cdot (d\omega_r/dt) + D \cdot (\omega_r/p) + T_{el}$	(1.19)

Modelo em Coordenadas de Fase

Em todos esses diferentes tipos de modelos, que constituem apenas uma estrutura, existe a necessidade de definir os parâmetros, de os determinar, ou de desenvolver novos parâmetros relacionados com as grandezas físicas actuais. Na determinação dos parâmetros do alternador síncrono trifásico, e como consequência do estudo da determinação dos parâmetros das máquinas síncronas, tem sido grande a investigação e, o consequente desenvolvimento de métodos de determinação de parâmetros, mesmo para além do que já se encontra normalizado, [CEI-34.4], [IEEE-115], [IEEE-115.A].

Essencialmente existem dois métodos de obtenção dos parâmetros dos alternadores

síncronos trifásicos. Métodos baseados na experimentação laboratorial, [CAS-2], e métodos baseados numa análise da distribuição do campo magnético por métodos numéricos, [DOU-1]. Qualquer destes métodos é de execução delicada, e da sua correcta implementação depende sempre a validade do modelo de máquina eléctrica adoptado.

Os modelos anteriormente apresentados, sendo de constituição simples, permitem efectuar estudos sobre o funcionamento do alternador síncrono trifásico, e fundamentar a análise do funcionamento deste alternador em regime sinusoidal.

Devido às condições de estudo estabelecidas em 1.1, principalmente à exclusão das não linearidades das propriedades do material ferromagnético e da não consideração do desenvolvimento de correntes de Foucault, os modelos desenvolvidos são de validade limitada, e por isso deve a sua aplicação ser sempre acompanhada de uma *validação*, baseada no confronto directo entre os valores obtidos através do modelo e os valores obtidos por experimentação laboratorial do sistema electromecânico em estudo.

Esta atitude necessária, justifica-se, plenamente, num momento em que existem teorias e modelos para a análise do funcionamento das máquinas eléctricas que entram em consideração com os diversos aspectos característicos dessas máquinas, como as não linearidades, [GAR-1], ou a presença e a geração de grandezas com formas de onda ricas em termos harmónicos, [KAN-1]. A necessidade de meios computacionais capazes de realizarem o tratamento da informação contida nos modelos avançados, não pode ser alibi para a realização de estudos inúteis, porque, logo no início, ficam desprovidos de ligação à realidade física da máquina eléctrica.

•	$\{\psi\} = [L'] \cdot \{i\}$	(1.26)
•	$-u_d = R_s \cdot i_d + p \cdot \psi_d - \omega_r \cdot \psi_q$	$u_f = R_f \cdot i_f + p \cdot \psi_f$
•	$-u_q = R_s \cdot i_q + p \cdot \psi_q + \omega_r \cdot \psi_d$	$u_{Kd} = R_{Kd} \cdot i_{Kd} + p \cdot \psi_{Kd}$
•	$-u_o = R_s \cdot i_o + p \cdot \psi_o$	$u_{Kq} = R_{Kq} \cdot i_{Kq} + p \cdot \psi_{Kq}$
	$T_{el} = (3 \cdot p/2) \cdot (L_d - L_q) \cdot i_d \cdot i_q + M_{af} \cdot i_f \cdot i_q + (M_{aKd} \cdot i_{Kd} \cdot i_q - M_{aKq} \cdot i_{Kq} \cdot i_d)$	(1.32)
	$T_{el} = (3 \cdot p/2) \cdot (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) = k \cdot (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d)$	(1.36)
•	$T_m = (J/p) \cdot (d\omega_r/dt) + D \cdot (\omega_r/p) + T_{el}$	(1.37)

Modelo de Park, referencial d-q

A complexidade real do alternador síncrono trifásico obriga ao desenvolvimento de modelos matemáticos que permitem simular o seu funcionamento nos diversos regimes. No entanto, as exigências criadas na exploração destas máquinas eléctricas obrigam ao desenvolvimento, e à aplicação, de outros modelos, mais complexos mas mais poderosos do que os simples modelos apresentados nesta publicação: *modelo em coordenadas de fase, modelo de Park no referencial d-q, esquema eléctrico equivalente ao circuito magnético e modelo em valores reduzidos*. O conhecimento das teorias e dos métodos relacionados com estes modelos, com grande interesse pedagógico, constituem uma boa base para o posterior desenvolvimento, ou utilização, de modelos avançados para o alternador síncrono trifásico.

Na adopção de um modelo para aplicação em determinado estudo, uma análise prévia do problema permite solucionar a estrutura de modelo a adoptar.

O modelo de um alternador síncrono trifásico fica classificado pela sua *ordem*, que corresponde ao número de variáveis de estado associadas à máquina eléctrica, o que depende do número de circuitos rotóricos considerado segundo cada eixo; os circuitos rotóricos realmente existentes (circuito indutor) e aqueles que se suporem existir para representar o efeito de amortecimento rotórico, em circuitos amortecedores ou em

circuitos representativos das correntes de Foucault que se desenvolvem no ferro do rotor.

Pode-se, assim, considerar um conjunto vasto de modelos possíveis (13), normalmente representados numa matriz, [IEEE-CR2] [IEEE-1110].

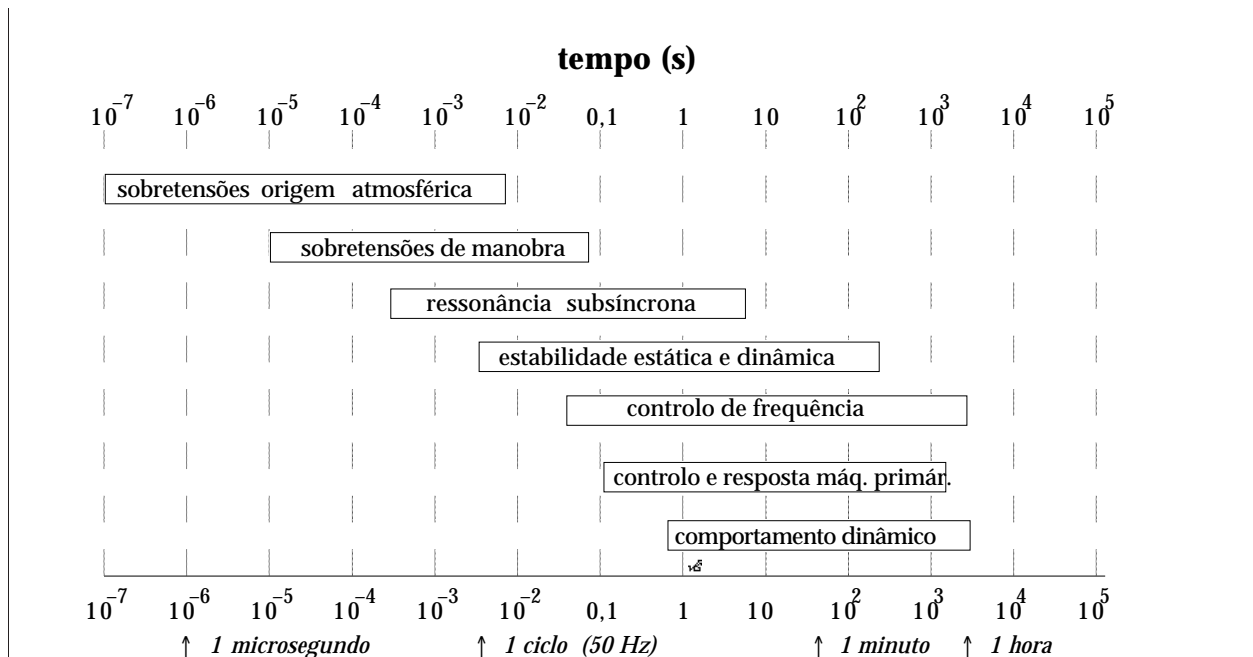
ψ_r Fluxo rotórico totalizado constante	0.0 circuito com reactância transitória $X'_d = X'_q = X'$			
	sem circuito amortecedor	um circuito amortecedor	dois circuitos amortecedores	três circuitos amortecedores
↓ Eixo d Eixo q →				
circuito indutor	1.0	1.1	—	—
circuito indutor + um circuito amortecedor	—	2.1	2.2	2.3
circuito indutor + dois circuitos amortecedores	—	—	—	3.3

Dos modelos possíveis, apenas o *modelo 2.2*, que engloba dois circuitos rotóricos segundo o eixo directo *d*, incluindo o circuito indutor *f*, e dois circuitos representativos do efeito de amortecimento segundo o eixo em quadratura *q*, goza de grande difusão, sendo os parâmetros necessários à sua definição habitualmente fornecidos pelos fabricantes de alternadores. Exceptua-se a indutância de fugas do enrolamento indutor e de um enrolamento amortecedor (1) a respeito do circuito induzido L_{of1} , que, quando não pode ser determinada por ensaios complementares [IEEE-115.A], é considerada nula.

O *modelo 2.1* tem tido grande utilização na representação de alternadores síncronos trifásicos accionados por turbinas hidráulicas (hidro-geradores). No caso de máquinas mais antigas, em que não existe a possibilidade de proceder a ensaios, é habitual, estimar-se o valor dos respectivos parâmetros.

O *modelo 1.0* tem uma estrutura muito simples, e, actualmente, considera-se ultrapassado; por isso, já não é utilizado.

Apesar das recomendações da norma [IEEE-1110] a escolha de uma modelo para o alternador síncrono trifásico ainda depende da natureza do problema em estudo. Na definição dessa natureza entra: *o tempo de duração do fenómeno em estudo, e a importância do tipo de estudo face à importância do sistema eléctrico estudado.*



O tempo de duração do fenómeno em estudo condiciona de uma forma directa a escolha da complexidade do modelo a utilizar. Conhecida a grande diferença de valor da constante de tempo, entre os fenómenos eléctricos e os fenómenos mecânicos, somente em estudos de fenómenos com certa duração se considera a variação das grandezas mecânicas. Os problemas de comutação de circuitos eléctricos podem ser feitos desprezando-se o comportamento mecânico do alternador, mas modelizando completamente o sistema eléctrico (efeitos capacitivos). Um problema de estudo da resposta da máquina primária pode ser realizado com desprezo pela modelização do sistema eléctrico, mas representando em pormenor os elementos mecânicos associados ao alternador (turbina...). Os problemas em estudo pode envolver apenas uma pequena rede eléctrica independente, ou uma grande rede ligada a outras grandes redes, ou problemas de planeamento a muito longo termo (envolvendo a localização de centros produtores).

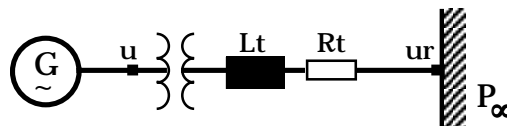
A importância do tipo de estudo pode ser dada pela classificação de problemas em

grande perturbação (grandes sinais) — nos quais as equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema não podem ser linearizadas, e

pequena perturbação (pequenos sinais) — nos quais as equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema podem ser linearizadas para se efectuar a análise.

Na procura de um modelo que melhor represente o alternador síncrono trifásico num determinado tipo de estudo tem de estar presente que o modelo de Park habitualmente utilizado (como em 1.3.2) necessita de um maior cuidado na modelização dos diferentes fenómenos electromagnéticos que ocorrem na zona interpolar (eixo em quadratura q). Actualmente, admite-se que, mesmo numa máquina de indutor cilíndrico podem ser diferentes os valores dos parâmetros magnéticos segundo o eixo directo e segundo o eixo em quadratura; por isso passou-se a considerar a *saliência* de uma máquina, independentemente do seu aspecto construtivo, mas restringindo a consideração dessa anisotropia às condições correspondentes ao regime permanente, ou ao regime transitório, ou ao regime subtransitário.

Como o alternador síncrono trifásico não trabalha isolado, mas está ligado a uma rede eléctrica torna-se necessário estabelecer a ligação entre o modelo de Park do alternador e



a rede eléctrica. Considerando que o sistema eléctrico tem uma potência infinita, e está ligado ao alternador através de um transformador e de uma linha de transmissão, torna-se necessário reduzir as respectivas equações ao referencial do rotor (d - q), utilizando a matriz de transformação de Park $[C_p]$.

As equações que regem o circuito de transmissão são (*transformador ideal(íssimo!...)*),

$$\{\Delta u_{abc}\} = \{u_{rabc}\} - \{u_{abc}\} = [L_t] \cdot p(i_{abc}) + [R_t] \cdot \{i_{abc}\}$$

que, transformada pela matriz de transformação de Park $[C_p]$, permite obter

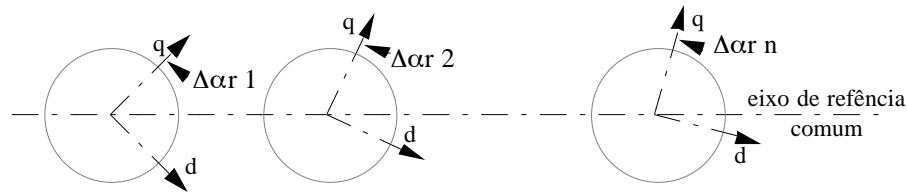
$$\{\Delta u_{dq0}\} = \{u_{rdq0}\} - \{u_{dq0}\} = [L_t] \cdot p(i_{dq0}) + [R_t] \cdot \{i_{dq0}\} + \omega_r \cdot \{-L_t \cdot i_q, L_t \cdot i_d, 0\}^T$$

Desta forma qualquer circuito estático pode ser reduzido ao referencial solidário com o rotor do alternador síncrono trifásico. Certamente que existirão problemas de definição do referencial no estudo de uma rede eléctrica quando existirem vários alternadores!...

Vários Alternadores numa Rede

Quando um alternador síncrono trifásico está integrado numa rede eléctrica pode-se reduzir todas as grandezas a um referencial (biaxial, ortogonal, móvel) solidário com o rotor da máquina. Quando existem vários alternadores numa rede eléctrica torna-se necessário proceder a uma criteriosa escolha do referencial móvel ao qual se vão referir as diferentes grandezas, porque, certamente, que os diferentes alternadores poderão estar a rodar a velocidades (ligeiramente) diferentes, devido à velocidade própria da

máquina primária. Note-se que nesta situação apenas o valor relativo dos ângulos (entre referenciais) é importante.

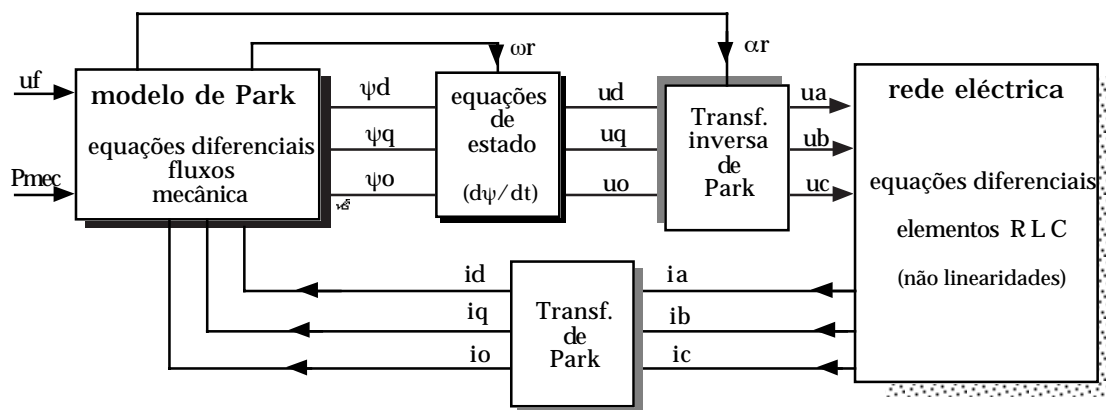


Como referência pode-se utilizar a frequência da rede eléctrica, e a correspondente velocidade angular para um caso em que as diversas máquinas estejam ligadas a uma rede poderosa. Quando existem apenas diferentes máquinas, escolhe-se uma delas (a primeira ou a maior) como referência. Depois utiliza-se a *Transformação entre Referenciais Animados de Velocidade Relativa* [C₂] para reduzir as grandezas das outras máquinas, e as grandezas do barramento, ao referencial comum.

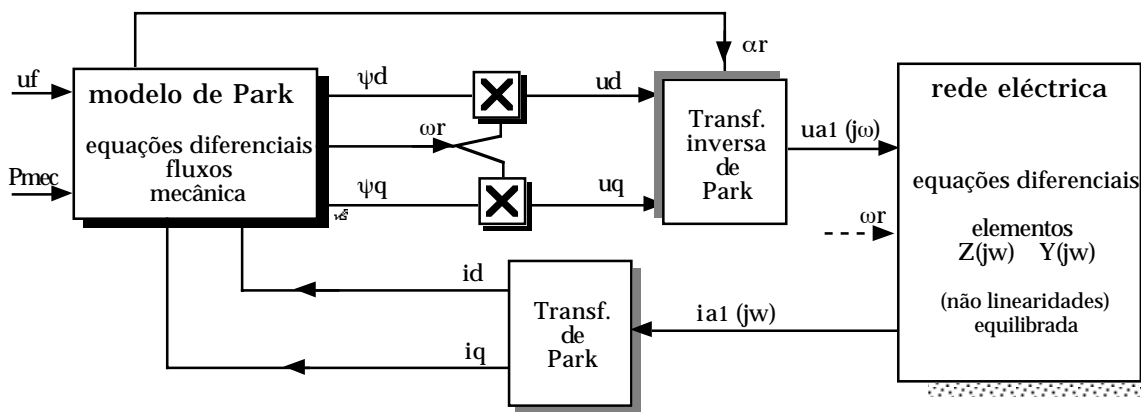
$\{u_r\} = [C_2] \cdot \{u\}$, em que o ângulo $\Delta\alpha_r$ que entra na expressão da matriz de transformação é a diferença entre o ângulo rotórico do referencial próprio e o ângulo rotórico do referencial comum.

De uma forma geral, a utilização do modelo de Park no estudo da dinâmica dos sistemas eléctricos pode ser apresentada segundo os dois diagramas seguintes, [MEL-1].

No primeiro tipo de estudo — *transitórios de ligação, de comutação e de rejeição da carga, ressonância subsíncrona, curto-circuito (fenómenos de duração curta ou longa)* — é utilizado o modelo de Park do alternador síncrono trifásico, com os fluxos totalizados como variáveis de estado. O circuito de carga é representado por elementos eléctricos com parâmetros concentrados, lineares ou não lineares, descritos por equações diferenciais. Obtêm-se, como resultado as variações no tempo das grandezas de fase: tensão, intensidade de corrente, potências.



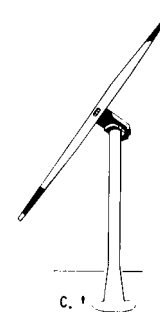
Num outro tipo de estudo — *transitórios do termo fundamental, ou outros transitórios envolvendo os efeitos de alteração da frequência (fenómenos com alguns segundos de duração)* — é utilizado o modelo de Park do alternador síncrono trifásico, com os fluxos totalizados como variáveis de estado, mas podendo-se desprezar os fenómenos transitórios no estator.



O circuito de carga é representado pela impedância $Z(j\omega)$ ou pela admitância $Y(j\omega)$, lineares, ou não lineares, mas dependentes da frequência, descritos por equações simbólicas. Obtêm-se, como resultado, expresso como quantidades complexas (fasores), as grandezas de fase: tensão, intensidade de corrente, potências. também se obtém o valor dos ângulos característicos da máquina.

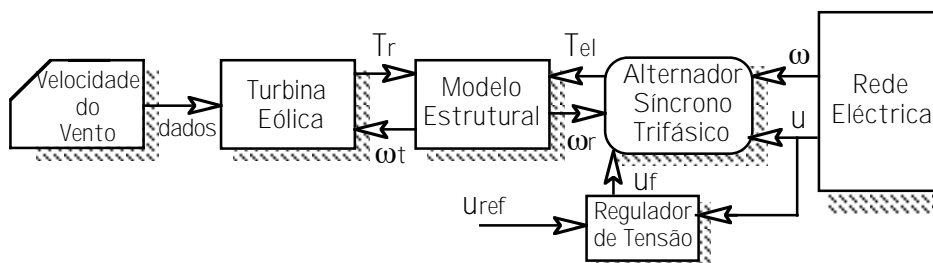
Em qualquer circunstância a escolha de um modelo para o alternador síncrono trifásico impõe sempre um conhecimento profundo dos problemas físicos a considerar no alternador e o grau de aproximação com que terão de ser representados no modelo matemático. Apesar disso, num estudo avançado pode ser necessário, em diferentes fases desse estudo, utilizar diferentes tipos de modelos, com diferente grau de complexidade.

Exemplo_1.7 — No projecto de sistemas de aproveitamento de energias alternativas, como um sistema eólico, é importante conhecer o comportamento dinâmico do sistema. Constrói-se para isso um modelo computacional do sistema, que, englobando modelos da parte mecânica (máquina primária), da parte electromecânica, da parte eléctrica e elementos de controlo, permite simular o comportamento de todo o sistema e analisar o comportamento das grandezas físicas mais representativas.



O modelo dinâmico do sistema eólico de produção de energia eléctrica permitirá determinar as variações da frequência e da tensão durante o funcionamento do sistema e permitirá, também, estudar a estabilidade e o controlo do sistema.

O desenvolvimento de um programa de computador deste tipo, deverá ter uma construção modular, e tem de assentar num conjunto de regras e de normas para a entrada dos dados, para a saída dos resultados e para a comunicação dos dados entre os diferentes módulos. Um dos pontos importantes a estabelecer, e que é de grande conveniência para o desenvolvimento do módulo referente à parte electromecânica do sistema, é a utilização de uma notação matricial das equações representativas dos diferentes componentes.



Os diferentes elementos, ou módulos, que constituem o programa podem ser agrupados para uma mais fácil apresentação.

Componentes Mecânicos — neste grupo estão incluídos a turbina eólica (TE), e num modelo estrutural (ME) os sistema de volante de inércia, o sistema de engrenagens (multiplicador de velocidade). Destes módulos, a representação da turbina eólica é feita por um modelo

indutâncias [L] obtém-se um modelo que pode ser facilmente programado para os valores dos parâmetros obtidos em ensaio laboratorial.

À saída do alternador síncrono trifásico existe um barramento que pode ser integrado na equação matricial do alternador, desprezando também as variações das correntes eléctricas, $\{u_d, u_q\}_T = [R_b] \cdot \{i_{bd}, i_{bq}\}_T + \omega_s \cdot \{-\psi_{bd}, \psi_{bq}\}_T + \{u_{bd}, u_{bq}\}_T$.

Apesar das aproximações feitas (!...) considera-se no modelo do alternador síncrono trifásico a influência da saturação do circuito magnético no valor das indutâncias. Considera-se que o fluxo totalizado tem uma parte comum aos dois enrolamentos ψ_m (fluxo totalizado de magnetização) e uma parte de fluxo de fugas ψ_σ , o que faz com que as diferentes indutâncias sejam formadas por uma parte comum e uma parte de fugas:

$$L_d = L_m + L_{\sigma d}; \quad L_q = L_m + L_{\sigma q}; \quad M_{af}; \quad L_f = L'_m + L_{\sigma f}$$

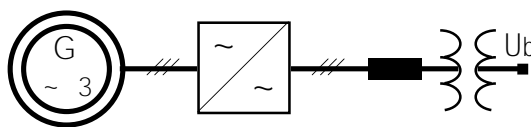
estes parâmetros podem ser corrigidos através de um coeficiente de saturação K_s ,

$$L_{ds} = (K_s \cdot L_m) + L_{\sigma d}; \quad L_{qs} = (K_s \cdot L_m) + L_{\sigma q}; \quad M_{afs} = K_s \cdot M_{af}; \quad L_{fs} = K_s \cdot L'_{ms} + L_{\sigma f}$$

em que $K_s = 1/(1 + A \cdot \psi_m^6)$, o que tem a vantagem de descrever a saturação da máquina apenas através de um parâmetro A. Certamente que a consideração da saturação obriga a que durante a integração das equações que regem o sistema, os valores das indutâncias tenham de ser actualizados...

! {face ao exposto em 1.1, 1.2 e 1.3 a modelização adoptada neste exemplo para o alternador síncrono trifásico é passível de pertinentes críticas...}

As grandes variações de velocidade do vento impõem a existência de um conversor estático de frequência que, modelizado como uma fonte de corrente filtrada, pode ser integrado nas possíveis cargas do barramento.

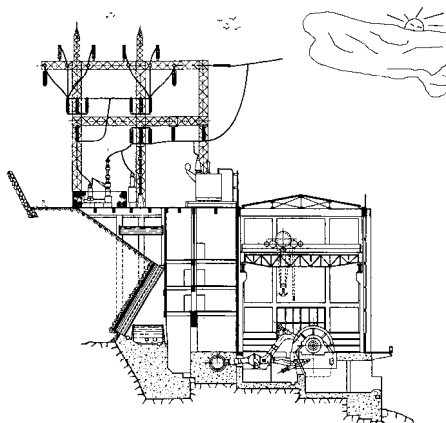


Componentes Eléctricos — este conjunto inclui um barramento ao qual estão ligadas as cargas eléctricas (resistiva, indutiva ou capacitiva), sistemas electrónicos de potência e os elementos de ligação. Os diversos elementos são ligados [STA-1] e estabelecem-se as equações segundo cada um dos eixos (d-q).

Componentes de Controlo — formam um conjunto de modelos de controladores, como o regulador de tensão, controlador do passo da turbina eólica, P, PI ou PID.

Componentes de Entrada e Saída de Dados e Auxiliares — são um conjunto de outros elementos, não representativos de qualquer elemento do sistema eléctrico, mas que são necessários à estruturação do programa de computador.

— * * * —



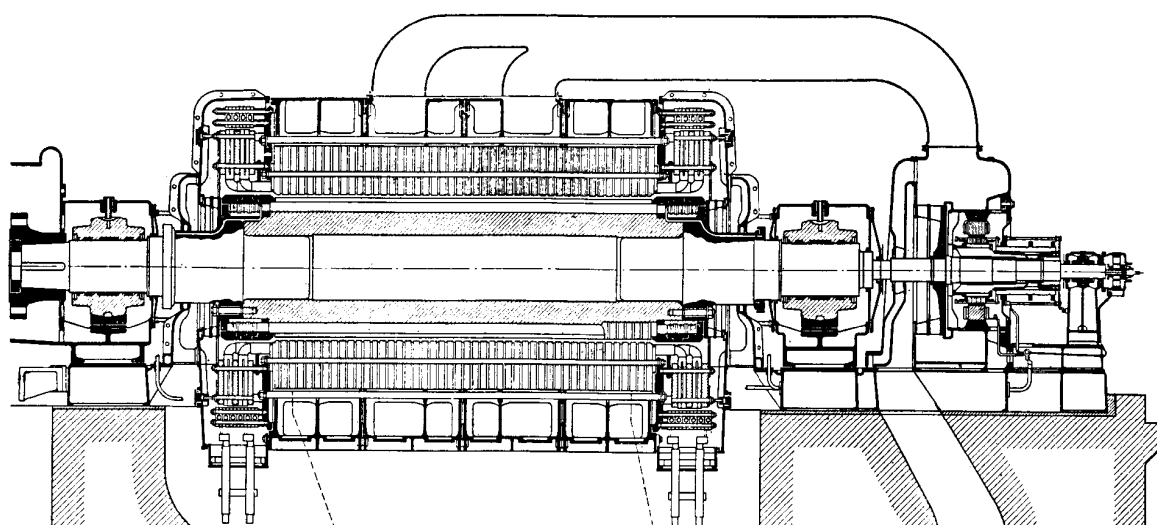
Central de Vila-Nova, 1951

Bibliografia

- [ADK-1] B. Adkins R. G. Harley; “The General Theory of Alternating Current Machines”, Chapman & Hall, 1975
- [AMS-1] Amândio Morim Silva; “Tratamento Analítico e Experimental de Protótipos de Motores de Relutância com Nova Geometria do Rotor”, FEUP, 1986
- [BAR-1] Philippe Barret; “Régimes Transitoires des Machines Tournantes Électriques”, Eyrolles, 1982
- [CAH-1] François Cahen; “Électrotechnique — tome 4: Machines Tournantes a Courants Alternatifs”, Gauthier Villars, 1964
- [CAN-1] I. M. Canay; “Extended Synchronous-Machine Model for the Calculation of Transient Processes and Stability”, *Electr. Mach. & Electromechan.*, 1, pp. 137–150, 1977
- [CAN-2] I. M. Canay; “Causes of Discrepancies on Calculation of Rotor Quantities and Exact Equivalent Diagrams of the Synchronous Machine”, *IEEE PES TP 139-PWR*, 1969
- [CAN-3] I. M. Canay, “Determination of Model Parameters of Synchronous Machines”, *IEE Proc.* 130, B, (2), pp. 86-94, 1983
- [CAS-1] Carlos Araújo Sá; “Motores Síncronos Trifásicos – fundamentos para o estudo do seu funcionamento”, FEUP, 1991
- [CAS-2] Carlos Araújo Sá; “Determinação Experimental dos Parâmetros de Máquinas Eléctricas”, NEME-FEUP, 1992
- [CAS-3] Carlos Araújo Sá; “Máquinas Síncronas Trifásicas — método de Potier”, NEME-FEUP, 1992
- [CAS-4] Carlos Araújo Sá; “Máquinas Síncronas Trifásicas — método de Blondel”, NEME-FEUP, 1994
- [CCC-1] Carlos Castro Carvalho; “Máquinas Síncronas”, FEUP, 1971
- [CCC-2] Carlos Castro Carvalho; “Complementos de Máquinas Eléctricas”, FEUP, 1985
- [CCC-3] Carlos Castro Carvalho; “Funcionamento a Tensão Constante da Máquina Síncrona de Pólos Salientes”, *ENGENHARIA*, nº 32, pp. 14–29, 1962
- [CEI-34.1] Comissão Electrotécnica Internacional; “Machines Électriques Tournantes — valeurs nominales et caractéristiques de fonctionnement”, 1969
- [CEI-34.4] Comissão Electrotécnica Internacional; “Recommandations pour les Machines Électriques Tournantes — Méthodes pour la Détermination à partir d’Essais des Grandeurs des Machines Synchrone”, 1985
- [CEI-34.10] Comissão Electrotécnica Internacional; “Machines Électriques Tournantes — Conventions Relatives à la Description des Machines Synchrone”, 1975
- [DOU-1] J. W. Dougherty S. H. Minnich; “Operational Inductances of Turbine Generators: Test Data versus Finite-Element Calculations”, *IEEE paper 83 WM 188-0*, 1983
- [GAR-1] Manuel S. Garrido et al.; “Modelling of the Saturated Salient-Pole Synchronous Machine”, in *Electrical and Power Systems Modelling and Simulation*, pp. 125--128, IMACS, 1989
- [GAR-2] Manuel S. Garrido; “Dynamique des Alternateurs”, Universidade Católica de Lovaina, 1989
- [HAR-1] R. G. Harley; “Comparative Study of Saturation Methods in Synchronous Machine Models”, *Proc. IEE*, 127-B, (1), pp. 1–7, 1980
- [HOS-1] G. Hosemann; “Space-phasors for Dynamic Minimum-Time Computing and Digital Real-Time Three-Phase Display”, *Proc. 8th PSCC*, pp. 737–745, 1984
- [IEEE-86] Institute of Electrical and Electronics Engineers; “Standard Definitions of Basic Per-Unit Quantities for Alternating Current Machines”, 1975 (*withdrawn*)
- [IEEE-115] Institute of Electrical and Electronics Engineers; “Test Procedures for Synchronous Machines”, 1983
- [IEEE-115.A] Institute of Electrical and Electronics Engineers; “IEEE Standard Procedures for Obtaining Synchronous Machine Parameters by Standstill Frequency Response Testing”, 1987
- [IEEE-1110] Institute of Electrical and Electronics Engineers; “IEEE Guide for Synchronous Generator Modeling Practices in Stability Analyses”, 1991
- [IEEE-CR1] Institute of Electrical and Electronics Engineers Committee Report; “Recommended Phasor Diagram for Synchronous Machines”, paper 69 TP 143–PWR, 1968
- [IEEE-CR2] Institute of Electrical and Electronics Engineers Committee Report; Current “Current Usage and Suggested Practices in Power System Stability Simulations for Synchronous Machines”, paper 85 WM 152–4, 1985
- [JON-1] C. V. Jones; “The Unified Theory of Electrical Machines”, Butterworths, 1967
- [KAN-1] M. D. Kankam G. R. Slemon; “Time-Harmonic Analysis of Synchronous Motors”, *IEEE paper T 74 209–3*, 1974
- [KOV-1] K. P. Kovács; “Digital Model of a Synchronous Machine with Variable Saturation”, *Arc. für Elekt.*, 66, pp. 63–66, 1983

- [KRA-1] Paul C. Krause; “Analysis of Electric Machinery”, McGraw-Hill, 1986
- [MCB-1] Manuel Corrêa de Barros; “Método Simbólico para Estudo das Máquinas Eléctricas de Corrente Alternada”, Porto, 1947
- [MEL-1] F. P. Mello; “Power Systems Dynamics – an overview”, Symposium *Adequacy and Philosophy of Modelling: Dynamic System Performance*, IEEE -PES, 1975
- [MVG-1] Manuel Vaz Guedes; “O Alternador Síncrono Trifásico na Tracção Diesel-Eléctrica”, FEUP, 1991
- [MVG-2] Manuel Vaz Guedes; “Métodos de Integração Numérica para Simulação de Máquinas Eléctricas”, FEUP, 1986
- [MVG-3] Manuel Vaz Guedes; “Simulação Computacional da Máquina Síncrona em Coordenadas de Fase”, Caderno de Estudos de Máquinas Eléctricas, nº 2, pp. 4-18, Novembro de 1990
- [MVG-4] Manuel Vaz Guedes; “Corrente Alternada — sistemas polifásicos”, NEME-FEUP, 1991
- [MVG-5] Manuel Vaz Guedes; “Grandezas Periódicas Não Sinusoidais”, NEME-FEUP, 1992
- [MVG-6] Manuel Vaz Guedes; “Sistemas Electromecânicos de Conversão de Energia”, NEME-FEUP, 1993
- [MVG-7] Manuel Vaz Guedes; “Sistemas de Accionamento Electromecânico — 3 - mecânica do sistema de accionamento”, NEME-FEUP, 1994
- [MVG-8] Manuel Vaz Guedes; “O Alternador Síncrono de Brown”, ELECTRICIDADE, nº 295, pp. 443, Dezembro de 1992
- [PAR-1] R. H. Park; “Definition of an Ideal Synchronous Machine”, General Electric Revue, 31, (6), pp. 332-334, 1928
- [PAR-2] R. H. Park; “Two-Reaction Theory of Synchronous Machines”, Trans. AIEE, I — 48, (2) pp. 716-727, 1929 e II — 52, pp. 352-355, 1933
- [SAR-1] M. Sarma; “Synchronous Machines”, Gordon & Breach, 1979
- [SAY-1] M. G. Say; “Alternating Current Machines”, Pitman, 1976
- [SCH-1] R. Schulz; “Synchronous Machine Modelling”, Symposium *Adequacy and Philosophy of Modelling: Dynamic System Performance*, IEEE -PES, 1975
- [STA-1] G. W. Stagg A. H. Al-Abiad; “Computer Methods in Power System Analysis”, McGraw-Hill ISE, 1968
- [TAK-1] Y. Takeda B. Adkins; “Determination of Synchronous-Machine Parameters Allwoing for Unequal Mutual Inductances”, Proc. IEE, 121, (12), pp. 1501, 1974
- [WOO-1] D. C. White H. H. Woodson; “Electromechanical Energy Conversion”, John Wiley, 1959

– MVG.96 –



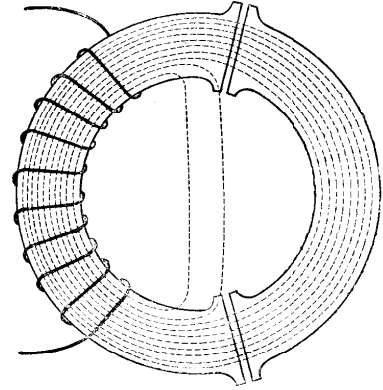
Alternador de indutor cilíndrico (BBC)

Apêndice A

Fluxo Totalizado

Nas máquinas eléctricas existem circuitos de material condutor, percorridos por uma intensidade de corrente eléctrica (de valor instantâneo i) e formando bobinas com várias espiras (N).

A passagem da corrente eléctrica na bobina com N espiras produz uma força magnetomotriz $F = N \cdot i$, que, devido ao comprimento do circuito magnético l , é responsável pelo aparecimento de um campo magnético de intensidade H ; $F = N \cdot i = H \cdot l$. Considerando que o circuito magnético tem uma permeabilidade magnética constante $\mu = \text{const.}$, resulta que o circuito magnético vai ser sede de uma indução magnética B , tal que $B = \mu \cdot H$. Num ponto qualquer do circuito magnético existirá um fluxo de indução magnética $\phi_p = B \cdot S$, em que S é a área da secção recta do circuito magnético nesse ponto.



Mas numa bobina de N espiras é natural que o fluxo de indução magnética não seja o mesmo para cada espira (devido à variação da secção recta no ponto do circuito magnético onde está a espira); surge, por isso, a consideração de um fluxo médio por espira ϕ .

Existe, no entanto, uma quantidade que representa todo o fluxo que envolve (liga ou encadeia) todas as espiras: é o *fluxo totalizado*, $\psi = N \cdot \phi$.

A variação do fluxo totalizado é responsável pelo aparecimento de uma força electromotriz, segundo a equação,

$$e = - \frac{d\psi}{dt}$$

onde estão representadas duas leis do Electromagnetismo:

- *Lei de Faraday* — que estabelece que quando há uma variação do fluxo totalizado que envolve um circuito eléctrico, gera-se uma força electromotriz proporcional a essa variação (esta Lei foi formulada por Neumann em 1845, mas continua a designar-se Lei de Faraday);
- *Lei de Lenz* — que estabelece que o sentido da força electromotriz gerada é tal que o efeito de qualquer corrente eléctrica por ela produzida no circuito eléctrico tende a opor-se à variação do fluxo indutor.

Quando se considera um circuito eléctrico percorrido por um corrente eléctrica com uma intensidade que varia no tempo, verifica-se que essa variação é contrariada por uma força electromotriz gerada no próprio circuito. Denomina-se este fenómeno *auto-indução*; $e_L = - (d\psi_L/dt)$.

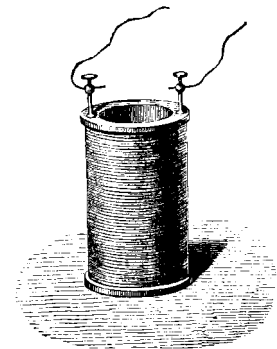
O fluxo magnético responsável por essa força electromotriz é criado pela própria corrente eléctrica variável no tempo.

Considerando o meio magnético com propriedades lineares é possível definir um coeficiente entre o fluxo totalizado ψ_L que envolve a bobina e a intensidade da corrente eléctrica que o cria i :

$$\text{é o coeficiente de auto-indução} \quad L = \psi_L / i.$$

Assim, $e_L = -L \cdot (di/dt)$.

Quando se consideram dois circuitos eléctricos próximos, tal que o fluxo totalizado criado pela corrente eléctrica que percorre um circuito envolve o outro circuito, verifica-se que a uma variação da intensidade de corrente eléctrica num dos circuitos corresponde o aparecimento de uma força electromotriz induzida no outro circuito. Denomina-se este fenómeno *indução-mútua*: $e_{21} =$



$$= - d\psi_{21}/dt.$$

O fluxo magnético totalizado ψ_{21} responsável pela força electromotriz induzida no segundo circuito e_{21} é criado pela corrente eléctrica que percorre o primeiro circuito i_1 .

Considerando que o meio magnético, onde se distribui o fluxo de indução magnética tem propriedades lineares, é possível definir um coeficiente entre o fluxo totalizado que envolve a segunda bobina ψ_{21} e a intensidade da corrente eléctrica que o cria i_1 :

$$\text{é coeficiente de indução mútua } M_{21} = \psi_{21}/i_1.$$

Assim, $e_{21} = -M_{21} \cdot (di_1/dt)$.

Alterando a ordem de consideração dos dois circuitos surge um outro coeficiente de indução mútua $M_{12} = \psi_{12}/i_2$.

Permanecendo constante a permeabilidade do circuito magnético, verifica-se que $M_{12} = M_{21}$.

Pode-se assim definir uma propriedade dos circuitos eléctricos: *a indutância*.

indutância — é uma propriedade dum circuito eléctrico, ou de dois circuitos vizinhos, que determina o valor da força electromotriz induzida num dos circuitos pela variação da corrente eléctrica em qualquer um deles.

No modelo de máquina eléctrica em que os diferentes circuitos eléctricos estão envolvidos (ligados) pelo campo magnético existe um indutância própria (coeficiente de auto-indução) e uma indutância mútua (coeficiente de indução mútua).

Quando são não lineares as propriedades do meio em que se distribui o campo magnético que envolve os diferentes circuitos, deixa de ser constante o valor do coeficiente que liga o fluxo totalizado à intensidade de corrente eléctrica que o cria, $L(i)$. Nessas circunstâncias,

$$e = - \frac{d(L \cdot i)}{dt} = - (L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot (\frac{\partial L}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt}))$$

Quando existe um fenómeno transitório num circuito eléctrico é importante considerar a variação do fluxo totalizado.

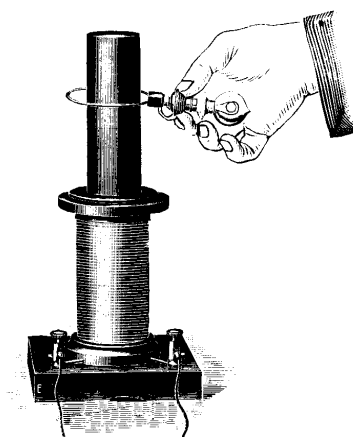
Essa variação obedece ao *teorema da invariância do fluxo totalizado*:

o fluxo totalizado de um circuito eléctrico fechado com resistência nula, e com uma tensão aplicada nula, permanece constante, independentemente da forma em que variam a indutância própria ou mútua, ou a forma como varia a intensidade da corrente eléctrica.

ou, enunciado da forma como R. E. Doherty o apresentou:

se a resistência de um circuito eléctrico fechado é nula, então a soma algébrica dos fluxos totalizados que envolvem o circuito deve permanecer constante.

$$\sum e = 0 \Rightarrow - \left(\frac{d\psi_c}{dt} \right) = 0 \Rightarrow - \frac{d}{dt} (L \cdot i + \sum M \cdot i) = 0 \Rightarrow (L \cdot i + \sum M \cdot i) = \text{constante}$$



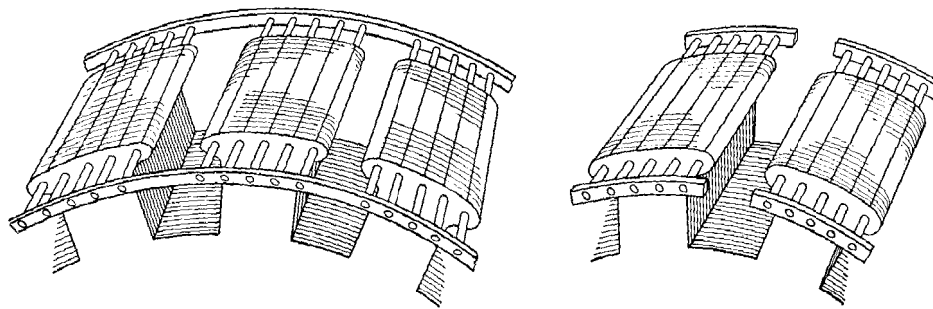
— .a —

Apêndice B

Enrolamento Amortecedor

Para melhorar o funcionamento das máquinas eléctricas síncronas durante o arranque, ou durante a sincronização, ou para estabilizar o seu funcionamento, utilizam-se circuitos eléctricos especiais distribuídos em ranhuras existentes na expansão polar formando o *enrolamento amortecedor*.

Estes circuitos eléctricos, desenvolvidos por Maurice Leblanc em 1898, têm por finalidade criar, durante as variações da velocidade da máquina síncrona, uma forte circulação de corrente eléctrica em circuitos fechados de fraca resistência eléctrica, e, como consequência, criar um campo magnético adicional no entreferro da máquina.



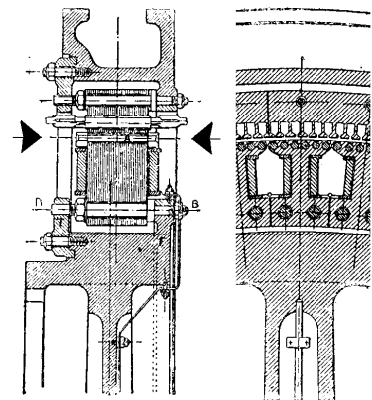
O enrolamento amortecedor consiste, essencialmente, num conjunto de barras de cobre alojadas em ranhuras semi-fechadas existentes na expansão polar estando ligadas mecânica e electricamente nas extremidades por barras de cobre. O circuito existente em cada uma das expansões polares pode estar ligada aos circuitos das expansões polares seguintes (por tiras de bronze fosfórico) formando um enrolamento amortecedor completo (ou ligado), ou podem constituir circuitos sem ligações entre os circuitos dos diferentes pólos (grelhas) formando um enrolamento amortecedor incompleto (ou aberto). O conjunto forma um enrolamento em gaiola (total ou parcial), solidário com o rotor.

Em regime permanente, o fluxo magnético, resultante do fluxo magnético indutor e do fluxo magnético de reacção do induzido, envolve as malhas do circuito amortecedor mas não induz forças electromotrizes nos seus condutores (barras) porque não existe uma variação no tempo desse fluxo e porque é nula a velocidade relativa (deslizamento) entre o fluxo resultante girante e os condutores do circuito amortecedor solidário com o rotor.

Durante o arranque da máquina síncrona, em que existe uma velocidade relativa (deslizamento) entre o fluxo de reacção do induzido e os condutores do enrolamento amortecedor; durante o funcionamento em regime de carga desequilibrada em que o fluxo de reacção do induzido inverso tem uma velocidade relativa (deslizamento) com os condutores do circuito amortecedor dupla da velocidade de sincronismo; durante a ocorrência de variações brusca da carga, em que varia no tempo o fluxo magnético de reacção do induzido, induzem-se forças electromotrizes nos condutores do enrolamento amortecedor, que formando um circuito fechado de baixa resistência, provocam a circulação de correntes eléctricas de elevada intensidade e com a frequência variável durante o fenómeno.

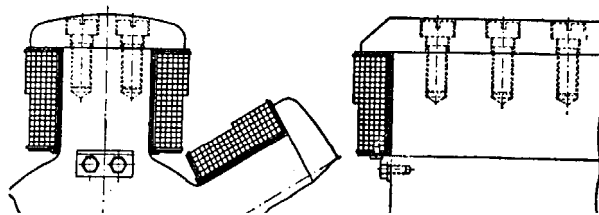
A presença dessas correntes eléctricas no interior do campo magnético da máquina provoca o aparecimento de forças mecânicas, que, combinadas, dão origem a um binário, que é aproveitado para melhorar o funcionamento da máquina na situação específica da ocorrência. A existência de enrolamento amortecedor provoca perdas de energia eléctrica durante a sua actuação, que através dos seus aspectos construtivos, se procuram diminuir.

A existência de um fluxo magnético criado pelo enrolamento amortecedor, que envolve os diferentes circuitos eléctricos rotóricos ou estáticos da máquina, origina ligações magnéticas que serão caracterizadas por parâmetros, do tipo indutância, que só surgirão em determinados momentos e em determinadas situações do



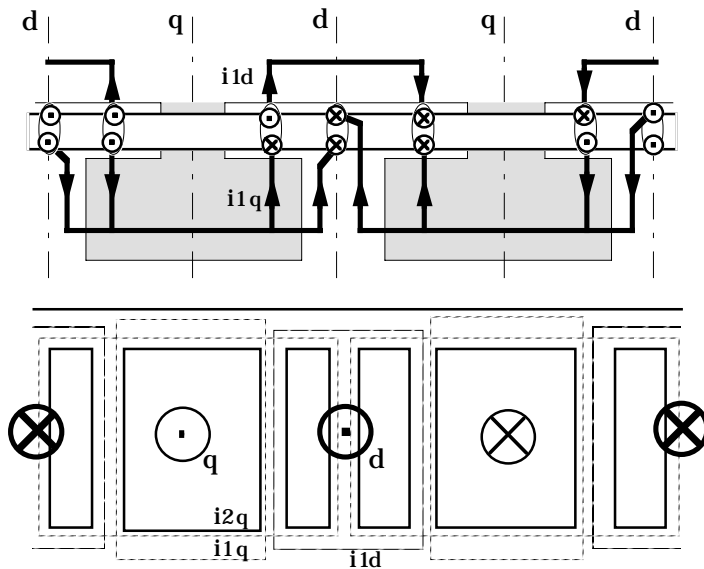
funcionamento da máquina síncrona.

O efeito produzido pelo enrolamento amortecedor pode ser obtido, de uma forma mais atenuada, pela utilização do pólos indutores maciços, onde os mesmos fenómenos provocarão o aparecimento de correntes de Foucault. Dessa forma, os pólos maciços comportam-se como um amortecedor, mas com um menor efeito e com maiores perdas de energia.



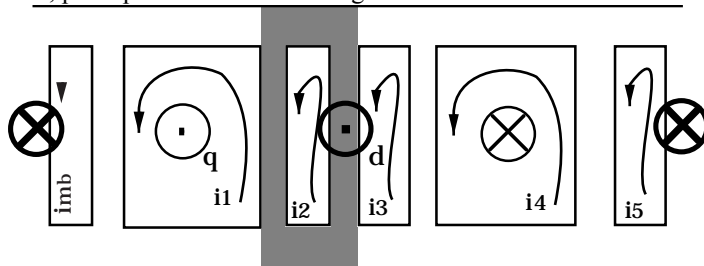
Existem vários métodos para efectuar a análise de um enrolamento amortecedor.

Um dos métodos de estudo consiste em considerar que as barras formam um conjunto de malhas ligadas em torno do eixo directo (**d**) e do eixo em quadratura (**q**), que são percorridas pela componente directa da corrente eléctrica (que só produz efeitos segundo o eixo directo) e que são percorridas pela componente em quadratura da corrente eléctrica (que só produz efeitos segundo o eixo em quadratura). Não existe ligação magnética entre os dois circuitos eléctricos fictícios ortogonais: *circuito directo* e *circuito em quadratura*.



Este método de estudo simplifica-se muito quando se considera que a variação instantânea da corrente eléctrica é sinusoidal; o que se afasta bastante da realidade, principalmente durante o regime transitório.

O outro método de estudo consiste na consideração que o circuito do enrolamento amortecedor é formado por diferentes circuitos formados por duas barras e duas partes da ligação entre barras. É normalmente utilizado quando a distância entre barras é uniforme.



Para cada um destes circuitos é possível estabelecer uma equação de tensão, envolvendo a resistência eléctrica de duas barras e dos dois segmentos da ligação, mais a indutância de fugas devida aos segmentos da ligação, mais a indutância de fugas devida às ranhuras ocupadas pelas duas barras do circuito; parâmetros que só podem ser obtidos a partir dos dados do projecto da máquina. Trata-se de expressões complicadas (mesmo quando expressas na forma matricial) que só têm interesse quando se pretende calcular o valor da intensidade das correntes eléctricas que circulam em cada circuito!...

Como em cada circuito a corrente eléctrica terá um esfasamento diferente dos restantes circuitos que não se encontram nas mesmas condições magnéticas, surge, assim, um conjunto de circuitos polifásicos a representar o enrolamento amortecedor. Pode-se reduzir esse circuito polifásico, com m_b fases “equidistantes” ($\delta = 2\pi/m_b$ rad elect), a um circuito difásico através da generalização da transformada de número de fases polifásico—difásico:

$$[C_{1p}] : (C_{1p})_{i,k} = (2/m_b) \cdot \cos((i-1) \cdot (\pi/2) - (k-1) \cdot \delta) \quad \text{com } \delta = (2\pi/m_b)$$

a matriz $(2 \times m_b)$ $[C_{1p}]$ não é invertível.

— b —

Apêndice C

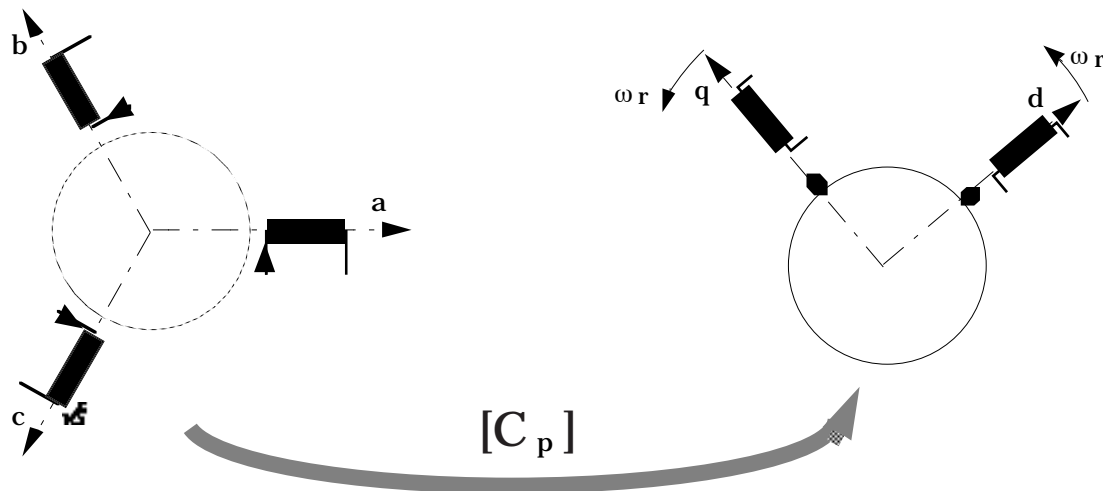
A Transformada de Park

Um dos aspectos característicos da Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas é a redução da máquina eléctrica em estudo a uma máquina eléctrica primitiva através de um conjunto de transformações lineares. Desta forma o estudo de uma qualquer máquina fica reduzido a um estudo geral, e sem muitas das complicações inerentes à topologia da máquina eléctrica, porque se substituem as variáveis naturais da máquina por outras, mantendo invariável o efeito produzido pela actuação dessas grandezas físicas.

Entre as diversas transformações utilizadas está a Transformada de Park, que foi apresentada num artigo fundamental para a Teoria das Máquinas Eléctricas: *R. H. Park; "Two-Reaction Theory of Synchronous Machines", winter convention of the AIEE, New York, 1929*. Nesse artigo é utilizado um conjunto de operações algébricas sobre as grandezas estatóricas de fase da máquina que as reduzem a grandezas fictícias do mesmo tipo, mas que estão solidárias com o rotor, e, por isso, tornam os parâmetros (indutâncias) independentes do ângulo de posição do rotor, e, portanto, independentes do tempo (constantes).

$$\{g_{dq0}\} = [C_p] \cdot \{g_{abc}\}$$

Na Máquina Síncrona, em que os elementos com simetria biaxial (**d–q**) estão ligados ao rotor, a transformada de Park aplicada às bobinas do estator (a,b,c) cria um conjunto de bobinas fictícias segundo os dois eixos de simetria (d,q) que se encontram em movimento acompanhando o rotor, e que comunicam com os terminais no estator através de um colectador de anéis fixo ao estator e sobre o qual deslizam escovas móveis, que acompanham os eixos.

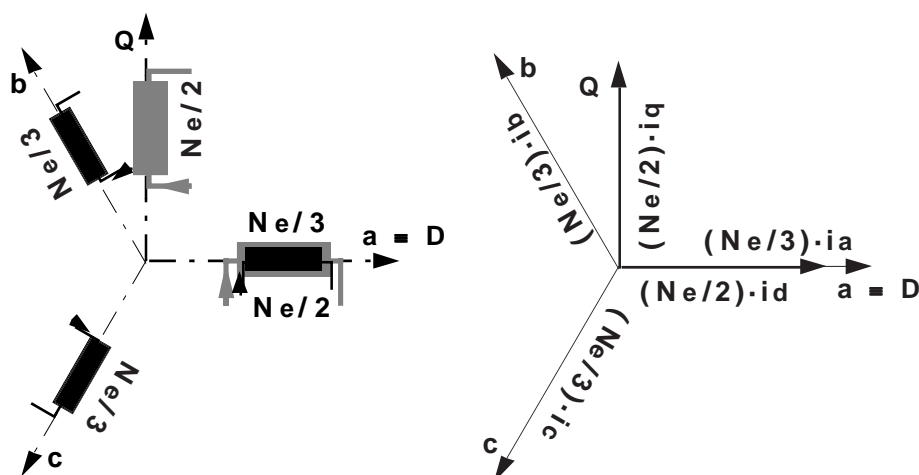


Para uma melhor compreensão dos problemas físicos associados à aplicação da Transformada de Park, apresenta-se a sua dedução, através da aplicação em cascata da Transformada do Número de Fases $[C_1]$ e da Transformada entre Referenciais Animados de Velocidade Relativa $[C_2]$:

$$[C_p] = [C_2] \cdot [C_1]$$

No estudo das máquinas eléctricas de corrente alternada a máquina eléctrica difásica representa uma máquina com o sistema polifásico de grandezas eléctricas mais simples e descrito pelo menor número de equações. Por isso, é típico da aplicação da Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas a redução de uma máquina polifásica à máquina difásica equivalente, e depois proceder ao seu estudo. Substituem-se, assim, as bobinas representativas do enrolamento trifásico, segundo a condição de estudo ⑤, por duas bobinas fictícias (D–Q), que provocam os mesmos efeitos que as bobinas reais.

Considerando a transformação trifásico–difásico ($3 \rightarrow 2$), pretende-se manter invariante na transformação os efeitos magnéticos da passagem da corrente eléctrica nos enrolamentos de fase. As bobinas representativas do enrolamento de fase possuem um número total efectivo de espiras N_e , pelo que cada bobina trifásica possui $N_e/3$ espiras efectivas, e cada bobina difásica possui $N_e/2$ espiras efectivas.



$$(fmm)_2 = (fmm)_3$$

$$\frac{N_e}{2} \cdot i_D = \frac{N_e}{3} \cdot (i_a + i_b \cos 240^\circ + i_c \cos 120^\circ) = \frac{N_e}{3} \cdot \left(i_a - \left(\frac{1}{2}\right) i_b - \left(\frac{1}{2}\right) i_c \right)$$

$$\frac{N_e}{2} \cdot i_Q = \frac{N_e}{3} \cdot (i_b \cos 330^\circ + i_c \cos 210^\circ) = \frac{N_e}{3} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) i_b - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) i_c \right)$$

e, mantendo a possibilidade de o sistema trifásico ser assimétrico, e portanto, poder circular uma corrente homopolar, cria-se no sistema difásico um circuito independente (segundo um eixo perpendicular ao plano dos outros dois eixos (d-q)), e onde circula uma corrente eléctrica de valor,

$$i_o = (1/3) \cdot (i_a + i_b + i_c)$$

resulta

$$\begin{pmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_o \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = [C_1] \cdot \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad (C.1)$$

A transformação inversa difásico-trifásico (2 → 3) será dada por:

$$\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_o \end{pmatrix} = [C_1]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_o \end{pmatrix} \quad (C.2)$$

Esta transformação que foi aplicada a correntes eléctricas de valor instantâneo i , que têm uma variação qualquer no tempo, pode ser aplicada a outras grandezas físicas. No entanto, quando aplicada à tensão e à corrente eléctrica, na expressão da potência eléctrica instantânea, $p = u \cdot i$, surgem factores multiplicativos afectando as diferentes componentes da potência, que mostram que a potência não é invariante: $p = u_a \cdot i_a + u_b \cdot i_b + u_c \cdot i_c = 3 \cdot u_o \cdot i_o + (3/2) \cdot (u_D \cdot i_D + u_Q \cdot i_Q)$.

Exemplo_C.1 — Considerando um sistema instantâneo de correntes eléctricas com variação sinusoidal e formando um sistema equilibrado de sequência a,b,c,

$$i_a = I_m \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad i_b = I_m \cdot \cos(\omega t - 2\pi/3 - \varphi) \quad i_c = I_m \cdot \cos(\omega t - 4\pi/3 - \varphi)$$

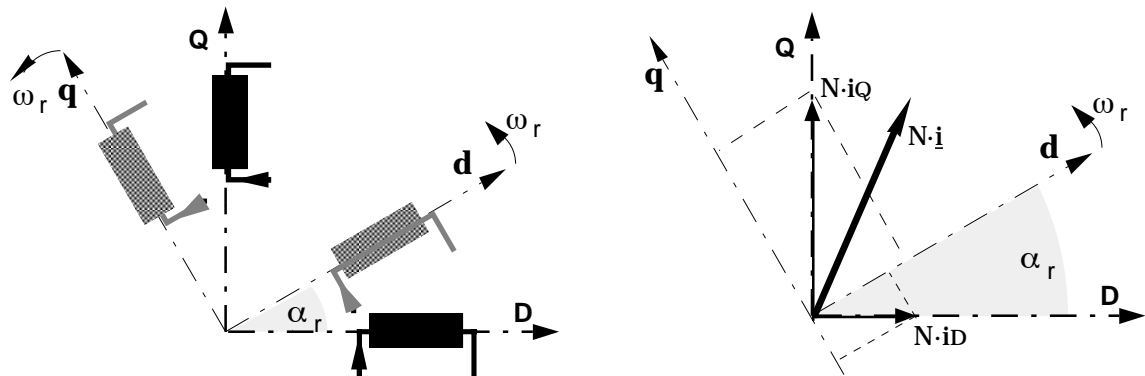
resulta que $\{i_{DQo}\} = [C_1] \cdot \{i_{abc}\}$

$$\begin{pmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_o \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m \cdot \cos(\omega t - \varphi) \\ I_m \cdot \cos(\omega t - (2\pi/3) - \varphi) \\ I_m \cdot \cos(\omega t - (4\pi/3) - \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m \cdot \cos(\omega t - \varphi) \\ I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim, um sistema trifásico e simétrico de correntes eléctricas com a sequência abc transformou-se num sistema difásico equilibrado com a sequência DQ.

Com a Transformada do Número de Fases foi possível passar do estudo de uma máquina trifásica para uma máquina difásica equivalente. Mas, se a máquina possui pólos indutores salientes, ou se existem circuitos eléctricos no rotor e no estator, ainda existem indutâncias que variam com a posição do rotor, o que faz com que as equações diferenciais, que regem o funcionamento da máquina, não tenham coeficientes constantes.

Considerando, como na figura abaixo, que o referencial solidário com o rotor ($r; d, q$) está avançado de α_r radianos eléctricos sobre o referencial solidário com o estator ($s; D, Q$), que as bobinas têm um mesmo número efectivo de espiras N_e , e que a força magnetomotriz criada pelas correntes eléctricas que atravessam as bobinas têm de ser iguais, resulta que a igualdade de efeitos magnéticos nos dois sistemas é obtida quando:



$$(fmm)_{\text{móvel}} = (fmm)_{\text{fixa}}$$

$$N_e i_d = N_e i_D \cos \alpha_r + N_e i_Q \cos (90^\circ - \alpha_r) = N_e i_D \cos \alpha_r + N_e i_Q \sin \alpha_r$$

$$N_e i_q = -N_e i_D \cos (90^\circ - \alpha_r) + N_e i_Q \cos \alpha_r = -N_e i_D \sin \alpha_r + N_e i_Q \cos \alpha_r$$

Desta expressão resulta, após simplificação, a equação matricial que liga as variáveis nos dois referenciais através da matriz de transformação $[C_2]$, que não provoca qualquer alteração à componente homopolar, [JON-1].

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & \sin \alpha_r & 0 \\ -\sin \alpha_r & \cos \alpha_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_o \end{pmatrix} \quad \{i_{d,q,o}\} = [C_2] \cdot \{i_{D,Q,o}\} \quad (C.3)$$

O efeito físico desta transformação matemática é o de substituir as bobinas estacionárias (D, Q) por bobinas fictícias (d, q) solidárias com o rotor. O que equivale a ligar as bobinas do estator a um colector de anéis fixo onde deslizam escovas móveis solidárias com o referencial do rotor.

Exemplo_C.2 — Considerando uma máquina eléctrica difásica em que as bobinas estatóricas são percorridas por um sistema difásico simétrico de correntes eléctricas,

$$i_d = I_m \cos(\omega t - \varphi) \quad i_q = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

As correntes eléctricas fictícias que circulam num conjunto de bobinas que acompanham o rotor, atendendo a que $\alpha_r = \omega t + \alpha_0$, é:

$$\begin{pmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_o \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & \sin \alpha_r & 0 \\ -\sin \alpha_r & \cos \alpha_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m \cos(\omega t - \varphi) \\ I_m \sin(\omega t - \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m \cos(\alpha_r - \omega t + \varphi) \\ -I_m \sin(\alpha_r - \omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m \cos(\alpha_0 + \varphi) \\ -I_m \sin(\alpha_0 + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica-se que as correntes eléctricas transformadas são independentes do tempo, isto é: são contínuas.

A matriz de transformação inversa é dada por:

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & -\sin \alpha_r & 0 \\ \sin \alpha_r & \cos \alpha_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_o \end{pmatrix} = [C_2]^{-1} \begin{pmatrix} i_D \\ i_Q \\ i_o \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

Verifica-se que $[C_2]_T = [C_2]^{-1}$, pelo que a transformada é ortogonal.

O índice dois da transformada indica apenas que na Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas esta é a segunda transformada que, antes de ser aplicada, é precedida por uma transformação do número de fases $[C_1]$.

Quando se pretende transformar directamente um sistema de bobinas trifásico estacionário (abc) num sistema de bobinas difásico móvel (d,q) pode-se recorrer à aplicação consecutiva da transformada do número de fases $[C_1]$ e da transformada entre referenciais animados de velocidade relativa $[C_2]$.

$$\{i_{DQo}\} = [C_1] \cdot \{i_{abc}\} \quad \{i_{d,q,o}\} = [C_2] \cdot \{i_{D,Q,o}\}$$

ou

$$\{i_{d,q,o}\} = [C_2] \cdot \{i_{D,Q,o}\} = [C_2] \cdot [C_1] \cdot \{i_{abc}\} = [C_p] \cdot \{i_{abc}\}$$

assim,

$$[C_p] = [C_2] \cdot [C_1]$$

ou

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & \sin \alpha_r & 0 \\ -\sin \alpha_r & \cos \alpha_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{Bmatrix} = [C_p] \cdot \begin{Bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{Bmatrix} &= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & \cos(\alpha_r - (2\pi/3)) & \cos(\alpha_r - (4\pi/3)) \\ -\sin \alpha_r & -\sin(\alpha_r - (2\pi/3)) & -\sin(\alpha_r - (4\pi/3)) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (B.5)$$

A matriz de transformação inversa é:

$$[C_p]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & -\sin \alpha_r & 1 \\ \cos(\alpha_r - (2\pi/3)) & -\sin(\alpha_r - (2\pi/3)) & 1 \\ \cos(\alpha_r - (4\pi/3)) & -\sin(\alpha_r - (4\pi/3)) & 1 \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

Nalguns estudos, e por vários autores, é assegurada a invariância da potência na aplicação de uma transformada. Tal situação obriga a que seja utilizada a mesma a lei de transformação para o vector das tensões $\{u\}$ e para o vector das correntes eléctricas $\{i\}$, e é obtida desde que seja satisfeita a *condição de ortogonalidade* da matriz de transformação: $[C]_T = [C]^{-1}$ ou $[C^*]_T = [C]^{-1}$.

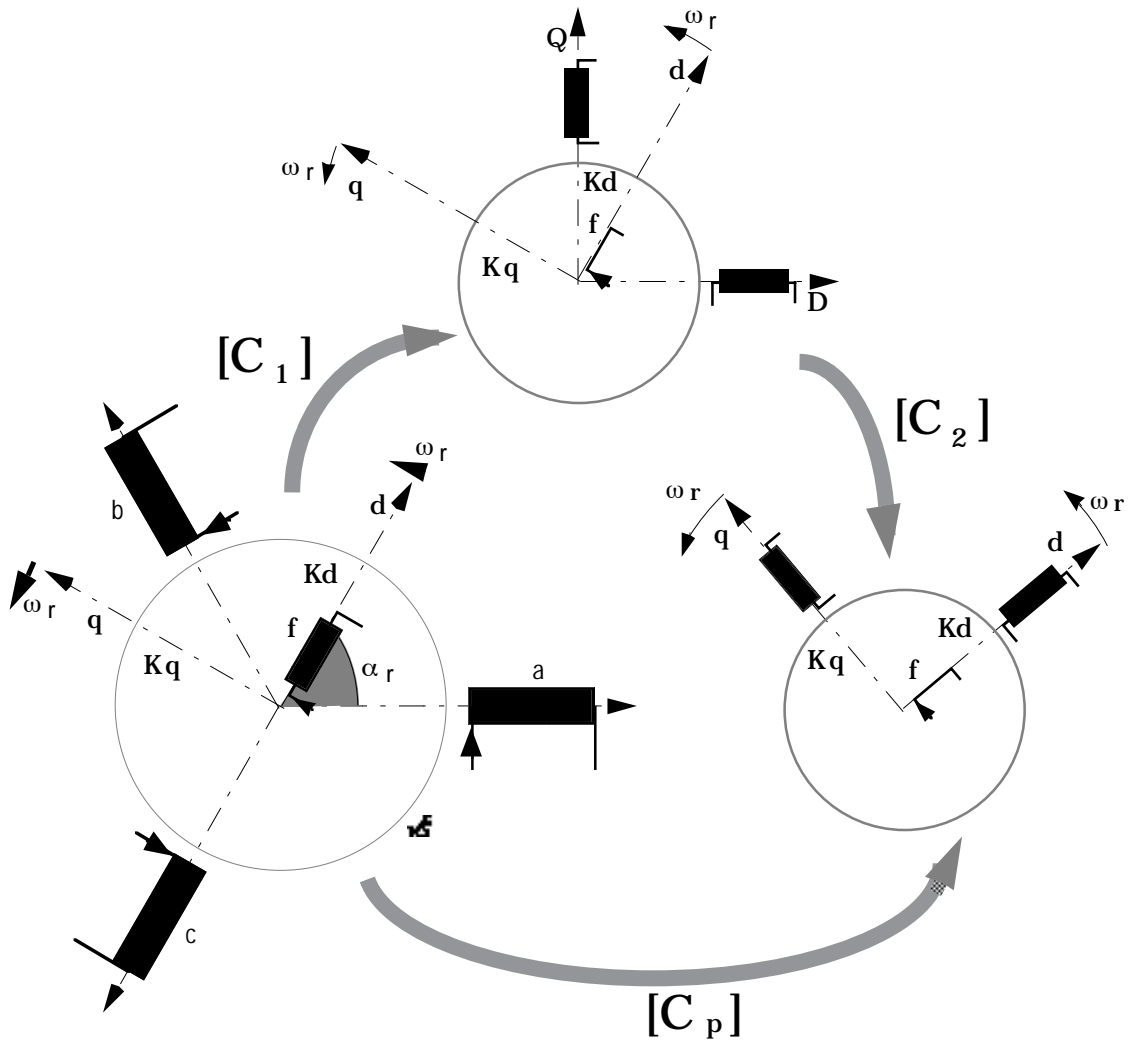
A Transformada de Park possui uma forma ortogonal, ou simétrica, ou invariante da potência:

$$[C_p] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & \cos(\alpha_r - (2\pi/3)) & \cos(\alpha_r - (4\pi/3)) \\ -\sin \alpha_r & -\sin(\alpha_r - (2\pi/3)) & -\sin(\alpha_r - (4\pi/3)) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

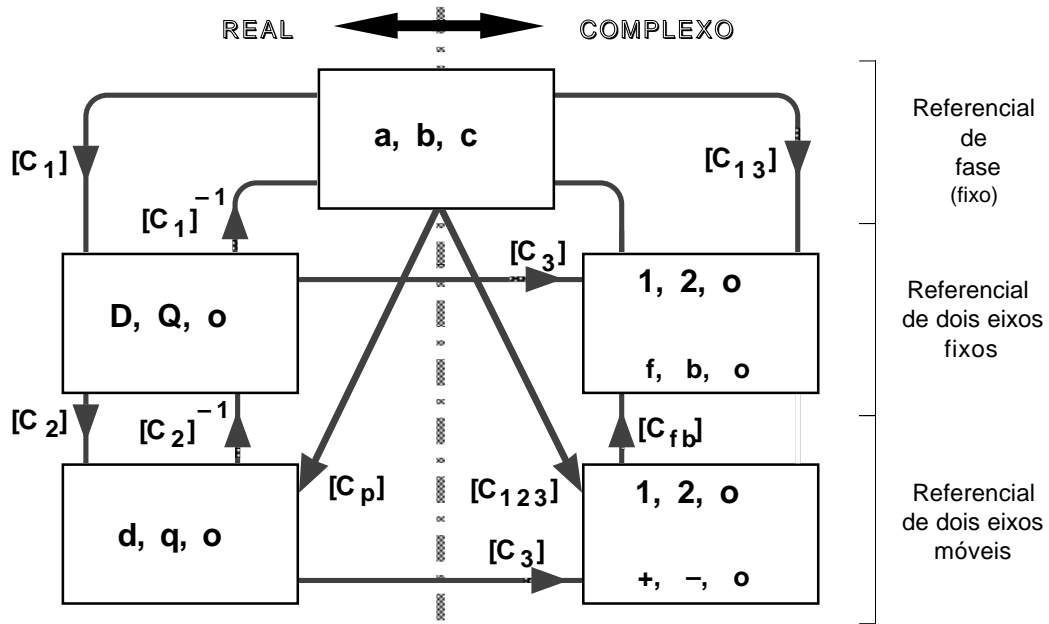
e

$$[C_p]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & -\sin \alpha_r & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\alpha_r - (2\pi/3)) & -\sin(\alpha_r - (2\pi/3)) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\alpha_r - (4\pi/3)) & -\sin(\alpha_r - (4\pi/3)) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (C.8)$$

A aplicação da Transformada de Park, ou a aplicação em cascata da transformada do Número de Fases e da Transformada entre Referenciais Animados de Velocidade Relativa pode ser visualizada no esquema seguinte.



As Transformadas Passivas utilizadas na Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas podem ser relacionadas através do seguinte esquema:



- .c -

Apêndice D

O Alternador Síncrono de Brown

O ensino dos alternadores síncronos, costuma apenas englobar máquinas heteropolares de dois tipos: as máquinas de indutor liso e as máquinas de pólos salientes. Trata-se das máquinas eléctricas utilizadas na produção da energia eléctrica em sistema de potência elevada. No entanto, é grande a utilização na indústria automóvel de um tipo de alternador, desenvolvido em 1891 por Charles E. L. Brown, e que serviu para a primeira transmissão de energia eléctrica através de um sistema trifásico de corrente, entre Lauffen e Frankfurt.

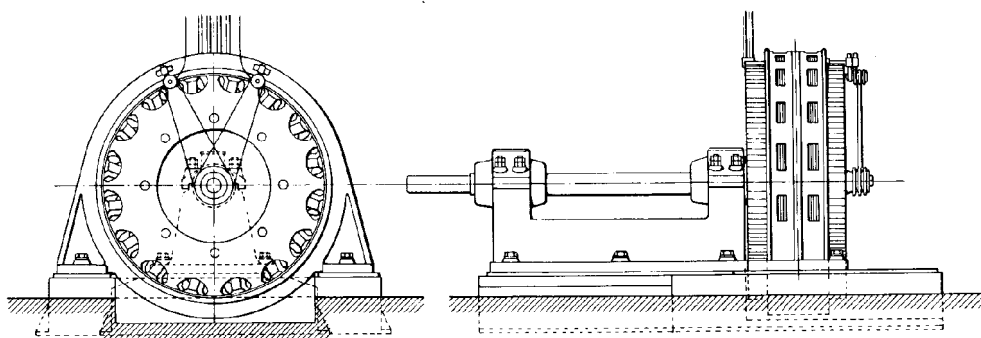
Neste tipo de alternador o circuito magnético indutor rotórico tem uma construção especial. Este tipo de circuito magnético é formado por um núcleo magnético, ligado ao eixo da máquina, em torno do qual está disposta uma bobina indutora anelada; o núcleo magnético contacta em cada extremidade com uma peça em forma de estrela, com as pontas dobradas, sobre a bobina. Cada ponta daquela estrela constitui uma expansão

polar, que por alternar com uma ponta análoga da estrela ligada à outra extremidade do núcleo magnético, contribui para criar um campo magnético com alternância do tipo de pólos. A bobina do circuito eléctrico indutor é alimentada através de um pequeno colector de anéis.

Este tipo de construção do circuito magnético rotórico apresenta grandes vantagens no aspecto construtivo. É mais simples adaptar duas peças polares a uma bobina pré-fabricada do que construir um roda polar, em que cada polo terá de dispor da respectiva bobina, como no caso do alternador de pólos salientes; ou de embutir um enrolamento num cilindro rotórico como no caso do alternador de rotor cilíndrico. Por isso, a montagem

alternador síncrono de Brown está mais adaptada a uma produção industrial em série.

*Nota de Máquinas Eléctricas in
ELECTRICIDADE, n.º 295, p. 443, 1992*



- .d -