

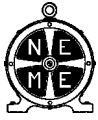
Manuel Vaz Guedes

Grandezas Periódicas

Não Sinusoidais

Núcleo de Estudos de Máquinas Eléctricas
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

1992



GRANDEZAS PERIÓDICAS

NÃO SINUSOIDAIS

Manuel Vaz Guedes

(Professor Associado com Agregação)

Núcleo de Estudos de Máquinas Eléctricas

FACULDADE de ENGENHARIA da UNIVERSIDADE do PORTO

Índice

1. *Análise Harmónica*
 - 1.1 Série de Fourier
 - 1.2 A Série de Fourier Finita
 - 1.3 Propriedades da Série de Fourier
 - 1.4 Exemplo de Aplicação
 - 1.5 Elementos de Análise Harmónica
 - 1.5.1 Métodos do Processamento Digital de Sinal
 - 1.5.2 Análise Harmónica Computacional
 - 1.5.3 Medidas em Análise Harmónica
2. *Grandezas Periódicas Não Sinusoidais*
 - 2.1 Origem dos Harmónicos
 - 2.2 Caracterização da Distorção
 - 2.3 Grandezas Eléctricas Não Sinusoidais
 - 2.3.1 Sistemas Monofásicos
 - 2.3.2 Sistemas Polifásicos
 - 2.3.3 Potência Eléctrica
 - 2.3.4 Medidas Eléctricas
3. *Consequências das Grandezas Periódicas Não Sinusoidais*
Bibliografia

GRANDEZAS PERIÓDICAS

NÃO SINUSOIDAIS

Manuel Vaz Guedes

(Professor Associado com Agregação)

Núcleo de Estudos de Máquinas Eléctricas

FACULDADE de ENGENHARIA da UNIVERSIDADE do PORTO

Nas Máquinas Eléctricas, devido a aspectos construtivos particulares, ou às suas condições de funcionamento, existem grandezas físicas periódicas com uma forma de onda não sinusoidal.

O estudo destas grandezas, e das suas consequências, no comportamento da máquina eléctrica pode ser feito através da análise harmónica da grandeza. Consiste esse tipo de análise na decomposição da função representativa da grandeza numa série de termos harmónicos, segundo a teoria estabelecida por Jean Baptiste J. Fourier (1768-1830).

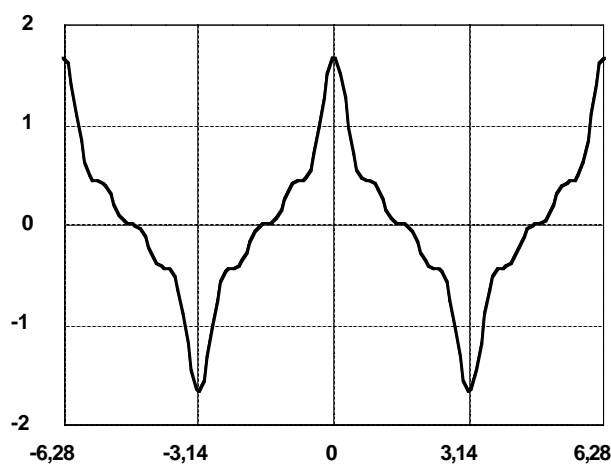


Fig. 1.1 - Onda alternada não sinusoidal

Quando a máquina eléctrica pode ser considerada um sistema linear, o seu estudo

pode ser feito, isoladamente, para cada termo harmónico da série representativa da grandeza física em estudo. O resultado da aplicação da grandeza periódica não sinusoidal é a sobreposição dos contributos de cada termo componente da série de Fourier. Frequentemente, utiliza-se o Método Simbólico na representação da grandeza, o que facilita o estudo.

Para compreender o comportamento não sinusoidal de certas grandezas físicas características do funcionamento da máquina eléctrica torna-se necessário conhecer a origem e o comportamento dos respectivos termos harmónicos. A origem desses harmónicos pode estar nos materiais ferromagnéticos, nos aspectos construtivos da máquina, ou nas características das grandezas eléctricas do sistema de alimentação.

A presença dos termos harmónicos, ou a distorção das formas de onda das grandezas físicas, é responsável por um conjunto de fenómenos que alterando as condições em que a máquina eléctrica foi suposta funcionar, durante a fase de projecto, contribuem para uma má utilização da energia eléctrica na conversão de energia que a máquina promove, e contribuem para o aparecimento de fenómenos parasitas prejudiciais às características de funcionamento da máquina eléctrica.

Os termos harmónicos das grandezas eléctricas da máquina podem, ainda, provocar uma ligeira diminuição da fiabilidade das redes eléctricas em que a máquina está inserida, ou, podem contribuir para uma diminuição da qualidade na distribuição da energia eléctrica.

1. Análise Harmónica

A base teórica e a técnica de decomposição de uma *grandeza periódica não sinusoidal* encontra-se no teorema de Fourier (1822).

1.1 Série de Fourier

Uma grandeza periódica retoma as mesmas características ao fim de um intervalo de tempo constante. Esse intervalo de tempo T , chama-se *período*. Assim, para uma grandeza periódica é $g(t) = g(t + T) = \dots = g(t + nT)$, e a *frequência* da grandeza é $f = 1/T$.

Desde que a função representativa da grandeza $g(t)$ possua certas propriedades é possível decompô-la numa *série de termos harmónicos* ou *série de Fourier*.

Uma função $g(t)$ que, ao longo de todo o período T , obedece às condições de Dirichlet:

- a) a função $g(t)$ é finita;
- b) a função $g(t)$ tem um número limitado de pontos de descontinuidade e de pontos extremos,

pode ser representada, no intervalo $[t, t+T]$, por uma série de termos com variação sinusoidal com a forma:

$$g(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \cdot \cos(h\omega t + \varphi_h) \quad (1.1)$$

Atendendo a uma regra da trigonometria referente ao cosseno de uma soma de ângulos, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$, é possível escrever a série (1.1) com a forma:

$$g(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} (A_h \cdot \cos(\varphi_h)) \cdot \cos(h\omega t) + \sum_{h=1}^{\infty} (-A_h \cdot \text{sen}(\varphi_h)) \cdot \text{sen}(h\omega t) \quad (1.2)$$

ou

$$g(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} B_h \cdot \cos(h\omega t) + \sum_{h=1}^{\infty} C_h \cdot \text{sen}(h\omega t) \quad (1.3)$$

Está, assim, estabelecido que uma função periódica não sinusoidal, obedecendo a certas condições de continuidade, pode ser representada por um somatório de funções sinusoidais, com frequências que são múltiplos inteiros da frequência da função original.

Na série de termos harmónicos, que aproxima a função periódica $g(t)$, e que representa a *forma trigonométrica da série de Fourier*, tem-se que a *ordem do termo harmónico* é estabelecida pelo número inteiro h , com $h \in \{0, 1, 2, \dots\}$, a *pulsção do termo harmónico* por $h\omega = 2\pi hf$, o *esfasamento (phase) do termo harmónico* por φ_h , e a *amplitude do termo harmónico* é representada pelos coeficientes da série de Fourier, A_0 , ou $B_h = A_h \cdot \cos \varphi_h$, ou $C_h = -A_h \cdot \text{sen} \varphi_h$, em que $A_0 = B_0/2$, (a amplitude de uma grandeza sinusoidal é $A_h = \sqrt{2} \cdot A_{\text{eff}}$).

Verifica-se que entre a representação (1.1) e (1.3) da série de Fourier existe a seguinte relação: $A^2 h = B^2 h + C^2 h$, e $\varphi_h = \arctan(-C_h/B_h)$.

Quando se utiliza a série de Fourier na análise harmónica de uma função os termos do desenvolvimento têm a seguinte designação: o termo constante da série, A_0 , é designado por *termo contínuo*; o termo de primeira ordem, $h = 1$, que tem a mesma frequência, $f = 1/T$, que a função original é designado por *termo fundamental*, e os restantes termos, que têm uma frequência múltipla inteira, $h \cdot f$, da frequência da função original, designam-se por termos harmónicos ou, simplesmente, *harmónicos*.

Note-se que nesta apresentação da série de Fourier foi utilizada a função $g(t)$, que é uma função periódica no domínio do tempo. No entanto, no estudo das Máquinas Eléctricas também surgem grandezas representadas por funções periódicas no domínio do espaço. Nesse caso, sendo a posição no espaço caracterizada por um ângulo α , geométrico ou eléctrico, a função $g(\alpha)$, é periódica de período 2π , verificando-se que, para $g(\alpha) = g(\alpha + 2\pi) = \dots = g(\alpha + 2n\pi)$, é

$$g(\alpha) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} B_h \cdot \cos(h\alpha) + \sum_{h=1}^{\infty} C_h \cdot \text{sen}(h\alpha)$$

Quando a função $g(x)$ tem uma variação periódica num espaço linear limitado, $b \leq x \leq b + L$, isto é $g(x) = g(x + L) = \dots = g(x + nL)$, então é possível efectuar a mudança de variável $x \in \alpha \cdot L/2\pi$, que reduz o problema ao caso de uma função espacial com período 2π .

Através da expressão (1.3) verifica-se que a *análise harmónica* de uma função periódica consiste na determinação da amplitude e no esfasamento de um número infinito de termos harmónicos, ou coeficientes de uma função de aproximação, que é uma combinação linear de parâmetros e de funções de forma trigonométricas. Para determinar os coeficientes, ou parâmetros, dessa expressão, de tal forma que ela aproxima a função periódica em estudo, recorre-se ao método dos mínimos quadrados.

Considerando que a função $g(t)$ é aproximada pela função $g'(t)$, o erro, ou resíduo, cometido na aproximação é dado por $\varepsilon = g(t) - g'(t)$. O erro médio quadrático é dado por:

$$emq = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varepsilon^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [g(t) - g'(t)]^2 dt$$

Procuram-se os valores dos coeficientes para os quais a função integral emq tem um valor mínimo. Para isso estabelece-se um sistema de equações, que, neste caso, tem equações de dois tipos:

$$\frac{\partial emq}{\partial B_h} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [g(t) - g'(t)] \cdot \cos(k\omega t) dt = 0, \quad \text{para } k=0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{\partial emq}{\partial C_h} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [g(t) - g'(t)] \cdot \sin(k\omega t) dt = 0, \quad \text{para } k=1, 2, \dots$$

Substituindo a série de Fourier, expressão (1.3), nestas expressões, atende-se, depois, às condições de ortogonalidade entre funções circulares, em que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(r\omega t) \cdot \cos(s\omega t) dt = \begin{cases} T/2 & \text{para } r=s \\ T & \text{para } r=s=0 \\ 0 & \text{para } r \neq s \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(r\omega t) \cdot \cos(s\omega t) dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(r\omega t) \cdot \sin(s\omega t) dt = \begin{cases} T/2 & \text{para } r=s \\ 0 & \text{para } r \neq s \end{cases}$$

Como resultado das diferentes operações, realizadas para se estabelecer o sistema de equações, verifica-se que para $l \neq k$ as expressões são nulas. Para $l = k$, e depois de se efectuarem os diferentes cálculos, obtêm-se as expressões para os coeficientes da série de Fourier:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt \tag{1.4}$$

$$B_h = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cdot \cos(h\omega t) dt \quad \text{para } h=1, 2, \dots \tag{1.5}$$

$$C_h = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cdot \sin(h\omega t) dt \quad \text{para } h=1, 2, \dots \tag{1.6}$$

O termo contínuo da série de Fourier, A_0 , representa o *valor médio* da função periódica $g(t)$. Como, para $h=0$ é $A_0 = B_0/2$, é possível simplificar a apresentação das expressões (1.4) ÷ (1.6) para os coeficientes da série de Fourier.

Quando uma função não sinusoidal $y(t)$ está definida, apenas, num intervalo finito $[a, b]$, ainda pode ser representada por uma série de Fourier. Para isso, considera-se que a função é periódica $[0, T=(b-a)]$, supondo que a função se repete, de um modo escolhido, para

além do intervalo de definição.

1.2 A Série de Fourier Finita

Nas aplicações reais da análise harmónica surgem muitas situações em que a função periódica, representativa da grandeza física em estudo, apenas é conhecida num conjunto discreto de N pontos equidistantes. Os pontos são considerados equidistantes porque nessa situação é possível facilitar muito os diferentes cálculos a efectuar. Apenas por facilidade de exposição se considera que o número total de pontos é par, logo $N = 2 \cdot n$. Como a função é periódica, para um ponto qualquer k do intervalo será $g_k(k) = g_k(k + N) = \dots = g_k(k + nN)$.

O domínio de estudo da função ficará dividido em N intervalos de comprimento $\Delta t = T/N$, porque ao período da função correspondem N pontos, o valor do tempo em cada ponto do intervalo será $t_k = k \cdot \Delta t$, com $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$.

Atendendo à função formada pelos diferentes valores verifica-se que ela tem N valores distintos — $0, 1, 2, \dots, N - 1$ — porque sendo periódica é $g_k(0) = g_k(N \cdot \Delta t)$.

A expressão para a Série de Fourier finita é:

$$g_k(t_k) = A_0 + \sum_{h=1}^M A_h \cdot \cos(h \cdot \omega t_k + \varphi_h) \tag{1.7}$$

ou

$$g_k(t_k) = A_0 + \sum_{h=1}^M B_h \cdot \cos(h \cdot \omega t_k) + \sum_{h=1}^M C_h \cdot \sen(h \cdot \omega t_k) \tag{1.8}$$

Também as expressões para os coeficientes da série de Fourier podem ser determinadas pelo método dos mínimos quadrados, só que a aplicação do método irá impor que o número de termos a adoptar na aproximação $(2M + 1)$ seja igual ou inferior ao número de pontos N ; ou, que a maior ordem para os termos harmónicos, M , seja igual, (ou inferior), ao maior número inteiro contido em $(N-1)/2$: $M \leq [(N-1)/2]_I$.

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k(t_k) \tag{1.9}$$

$$B_h = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k(t_k) \cdot \cos\left(\frac{h \cdot 2\pi \cdot k}{N}\right) \quad \text{para } h = 1, 2, \dots, M \tag{1.10}$$

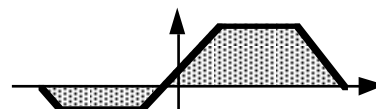
$$C_h = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k(t_k) \cdot \sen\left(\frac{h \cdot 2\pi \cdot k}{N}\right) \quad \text{para } h = 1, 2, \dots, M \tag{1.11}$$

1.3 Propriedades da Série de Fourier

Devido às características da função periódica $g(t)$ é possível, por análise, estabelecer uma expressão com menos termos harmónicos para a respectiva série de Fourier. Como, algumas dessas características dizem respeito à simetria da forma de onda da grandeza em estudo, torna-se importante o seu conhecimento.

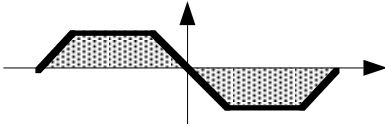
componente contínua

O termo contínuo, de valor A_0 , é o valor médio algébrico da função $g(t)$ no período T . Este termo representa a componente contínua da



grandeza física em estudo. O termo contínuo aparece em situações em que a forma de onda da grandeza física tem a semi-onda positiva diferente da semi-onda negativa. Nos circuitos eléctricos, a causa de aparecimento de uma componente contínua em $g(t)$ é a existência de uma fonte de corrente contínua, ou de corrente rectificadora, no circuito.

simetria para a semi-onda $g(t) + g(t + T/2) \equiv 0$



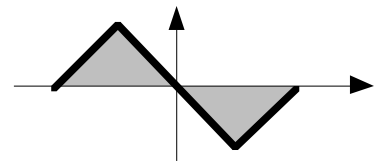
Quando a função $g(t)$ representa uma grandeza periódica, com período T , com uma forma de onda em que a semi-onda positiva é idêntica à semi-onda negativa, a respectiva série de Fourier só contém *termos de ordem*

ímpar; $h = 2 \cdot n + 1$. Como a função $g(t)$ representa uma grandeza alternada pura, por definição o seu valor médio é nulo; assim, não existe termo contínuo na respectiva série de Fourier; $A_0 = 0$. Quando para a função periódica se verifica que $g(t) - g(t + T/2) \equiv 0$, a série de Fourier só contém *termos de ordem par*, incluindo o termo contínuo.

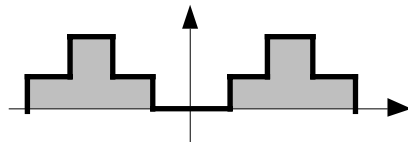
Uma função periódica pode ser classificada quanto à simetria de forma diferente conforme a posição da origem. No caso das máquinas eléctricas, geralmente, considera-se que o máximo de uma grandeza com variação sinusoidal ocorre na origem; $s(x) = S \cdot \cos(x)$.

$g(t)$ função ímpar $\Rightarrow g(t) = -g(-t)$

Nesta situação a função periódica $g(t)$ tem como centro de simetria a origem. Verifica-se que a série de Fourier representativa desta função só contém termos em *seno*; $A_0 = 0, B_h = 0$.



$g(t)$ função par $\Rightarrow g(t) = g(-t)$



Nesta situação a função periódica $g(t)$ é simétrica relativamente ao eixo das ordenadas. Verifica-se que a série de Fourier representativa desta função só contém termos em *coseno* e o *termo contínuo*; $C_h = 0$.

Estas propriedades, envolvendo a simetria da função $g(t)$, podem resumir-se no quadro:

	$g(t) = -g(-t)$ função ímpar	$g(t) = g(-t)$ função par
	$A_0 = 0, B_h = 0$	$C_h = 0$
$g(t) + g(t + (T/2)) \equiv 0$	$C_{2h} = 0$	$A_0 = 0, B_{2h} = 0$
$g(t) - g(t + (T/2)) \equiv 0$	$C_{2h+1} = 0$	$B_{2h+1} = 0$

amplitude dos termos harmónicos

A determinação da amplitude dos termos harmónicos, B_h ou C_h , é feita através das expressões integrais, (1.5) e (1.6), que são o integral do produto de duas funções: a função em estudo $g(t)$ e um função sinusoidal de argumento $(h\omega t)$. A determinação deste integral definido pode ser feita por partes, o que fará aparecer um coeficiente $1/h \cdot \omega$, comum às duas parcelas da fórmula de integração.

$$B_h = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cdot \cos(h\omega t) dt \quad C_h = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cdot \text{sen}(h\omega t) dt \quad \text{para } h=1, 2, \dots$$

para B_h , é:

$$B_h = \frac{2}{T} \left(\text{IC}(h\omega t) \cdot g(t) - \int_{-T/2}^{T/2} \text{IC}(h\omega t) \cdot g'(t) dt \right)$$

com

$$\text{IC}(h\omega t) = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(h\omega t) dt = \frac{1}{h\omega} [\text{sen}(h\omega t)]_{-T/2}^{T/2}$$

De uma forma análoga se determinava que C_h decresce com a ordem do termo harmónico h .

Conclui-se que, no desenvolvimento em série de Fourier para uma função real $g(t)$, a amplitude de um termo harmónico, B_h ou C_h , decresce com o aumento da sua ordem h .

notação simbólica

Alguns estudos de análise harmónica podem ser simplificados, e integrados em métodos modernos de Análise do Sinal, pela utilização da notação simbólica, recorrendo à fórmula de Euler: $e^{j\beta} = \exp(j\beta) = \cos \beta + j \text{sen} \beta$, em que j é o operador imaginário, $j = \sqrt{-1}$.

Como $\cos(h\omega t) = (1/2) \cdot (\exp(jh\omega t) + \exp(-jh\omega t))$,

e $\text{sen}(h\omega t) = (1/2j) \cdot (\exp(jh\omega t) - \exp(-jh\omega t))$, é:

$$g(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} B_h \cdot \cos(h\omega t) + \sum_{h=1}^{\infty} C_h \cdot \text{sen}(h\omega t)$$

$$g(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(B_h - jC_h) \cdot \exp(jh\omega t) + \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(B_h + jC_h) \cdot \exp(-jh\omega t) \right) \right) \quad (1.12)$$

Considerando a amplitude complexa do termo harmónico \underline{A}_h , tal que:

$$\underline{A}_h = \frac{1}{2}(B_h - jC_h) \quad \text{e} \quad \underline{A}_h^* = \frac{1}{2}(B_h + jC_h) \quad (1.13)$$

resulta,

$$g(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \underline{A}_h \cdot \exp(jh\omega t) + \sum_{h=1}^{\infty} \underline{A}_h^* \cdot \exp(-jh\omega t) \quad (1.14)$$

Atendendo a que os coeficientes da exponencial positiva e da exponencial negativa são números conjugados, \underline{A}_h e \underline{A}_h^* , eles podem ser combinados numa série dupla infinita:

$$\left\| \right. \quad g(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\underline{A}_h \cdot \exp(jh\omega t)) \quad (1.15)$$

Trata-se da *forma exponencial da série de Fourier* que aproxima a função periódica $g(t)$. O coeficiente complexo da série, \underline{A}_h , é determinado por:

$$\left\| \right. \quad \underline{A}_h = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cdot \exp(-jh\omega t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2}(B_h - jC_h) & \Leftarrow h > 0 \\ \frac{1}{2}(B_h + jC_h) & \Leftarrow h < 0 \\ A_0 & \Leftarrow h = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Esta representação exponencial da série de Fourier apresenta algumas vantagens, como sejam: uma apresentação simples; a possibilidade de determinar os coeficientes a partir de uma integração, (1.16); e a incorporação dos ângulos de esfasamento do harmónico como ângulos de fase (phase) φ_h dos termos harmónicos na amplitude complexa \underline{A}_h , porque $\underline{A}_h = (A_h/2) \cdot \exp(j\varphi_h)$.

Desde que, para cada termo harmónico, seja conhecido o coeficiente complexo \underline{A}_h , é possível determinar os coeficientes reais da representação trigonométrica da série de Fourier. Basta atender às expressões (1.13),

$$B_h = \underline{A}_h + \underline{A}_h^* \quad ; \quad C_h = \underline{A}_h - \underline{A}_h^* \quad ; \quad A_0 = \underline{A}_0 = \underline{A}_0^* \quad (1.17)$$

Não deve ser atribuído qualquer significado físico aos harmónicos positivos e aos harmónicos negativos, assim como às respectivas frequências positivas e frequências negativas. Trata-se, apenas, da determinação de dois coeficientes complexos conjugados, \underline{A}_h e \underline{A}_h^* , cuja soma e cuja diferença permitem determinar (1.17) os coeficientes reais, A_0 , B_h e C_h .

Quando se pretende utilizar a notação simbólica na expressão da série de Fourier para uma função periódica $g_k(t_k)$ definida num número finito N de pontos de amostragem, $k = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, a expressão da série é:

$$\left\| \right. \quad g_k(t_k) = \sum_{h=0}^M \underline{A}_h \cdot \exp(jh\omega t_k) \quad (1.18)$$

e, para os coeficientes complexos da série de Fourier,

$$\left\| \right. \quad \underline{A}_h = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k(t_k) \cdot \exp(-jh\frac{2\pi}{N}k) \quad (1.19)$$

A notação simbólica, ou a representação das grandezas sinusoidais por números complexos, permite interpretar as expressões analíticas obtidas para a série de Fourier.

Uma grandeza periódica com variação sinusoidal pode ser representada por um número complexo \underline{G} , formado por uma parte real a , e por uma parte imaginária b afectada pelo operador $j = \sqrt{-1}$; assim $\underline{G} = a + jb$. Esta grandeza pode, ainda, ser representada por um fasor, $\underline{G} = |\underline{G}| \cdot \exp(j\varphi)$, ou $\underline{G} = |\underline{G}| \angle \varphi$, em que $|\underline{G}|$ é a amplitude do fasor e φ é o seu ângulo de fase.

A representação geométrica de $\exp(j\varphi)$ é um fasor unitário, $|\exp(j\varphi)| = 1$, que tem uma direcção angular φ . A representação simbólica de uma grandeza sinusoidal é um fasor girante que roda, com uma pulsação tal que é $\omega = 2\pi f$ no domínio do tempo, ou com uma velocidade angular ω no domínio do espaço, e tem um ângulo de fase, ou uma orientação, φ no instante inicial ($t = 0$): $\underline{S} = (S \cdot \exp(j\varphi)) \cdot \exp(j\omega t)$.

A expressão (1.15), ou a expressão (1.18), mostra que a função periódica $g(t)$ é representada por uma soma de componentes sinusoidais, através dos respectivos fasores girantes, com pulsação, ou velocidade angular, variável $h\omega$.

Uma componente qualquer de ordem h , determinada pela expressão (1.16), ou (1.19), mostra que se a função $g(t)$ contém uma componente que roda com uma pulsação $h\omega$, a sua multiplicação pelo fasor unitário $\exp(-jh\omega t)$ anula a rotação dessa componente da função, de forma que ela pode ser integrada, ou somada, em ordem ao tempo ou ao espaço, obtendo-se um valor finito. As outras componentes, de ordem diferente de h , continuarão a rodar mesmo depois da multiplicação pelo fasor unitário $\exp(-jh\omega t)$ e a integração, ou o somatório, efectuada em ordem ao tempo, ou em ordem ao espaço, terá um resultado nulo.

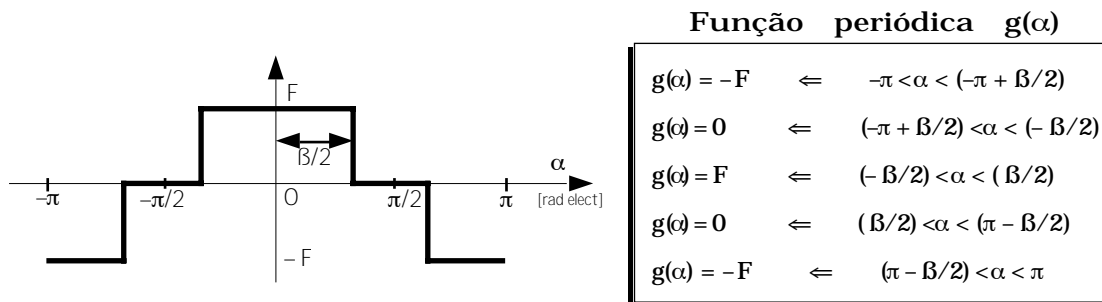
Desta forma, a expressão (1.10), ou (1.15), permite extrair, consecutivamente, da função representativa de uma grandeza física a componente sinusoidal correspondente a uma frequência múltipla, hf , da frequência da função original.

A posição do fasor girante representativo da grandeza física em qualquer momento, ou em qualquer posição, pode ser obtida somando os fasores parciais que resultam da multiplicação dos valores \underline{A}_h pelos respectivos fasores unitários $\exp(jh\omega t)$.

1.4 Exemplo de Aplicação

No estudo dos enrolamentos das máquinas eléctricas, surge a necessidade de conhecer o conteúdo de harmónicos da forma de onda da força magnetomotriz, que se distribui no entreferro da máquina, e que é criada por um determinado tipo de enrolamento. Recorre-se à análise harmónica para efectuar esse tipo de estudo.

Exemplo_1.4-1 — No caso das máquinas eléctricas de corrente contínua o enrolamento indutor envolve polos salientes, com uma expansão polar que se desenvolve com um entreferro constante. Quando a bobina indutora é percorrida por uma corrente eléctrica contínua I , mediante certas simplificações, admite-se que cria uma força magnetomotriz que se distribui no espaço do entreferro da máquina com uma forma de onda quase-quadrada, com uma amplitude F e com uma largura polar igual a β .



Esta forma de onda é representada por uma função do ângulo espacial α , expresso em radianos eléctricos, e que tem um período igual a 2π rad. elect.. É $g(\alpha) = g(\alpha + 2\pi)$. A respectiva expressão analítica, no intervalo $[-\pi, \pi]$ é a de uma função definida por partes.

Atendendo a que a função $g(\alpha)$ possui um número finito de pontos de descontinuidade, ao longo do período 2π , ela pode ser desenvolvida em série de Fourier.

ANÁLISE — Trata-se de uma função periódica para a qual se verifica que $g(\alpha) = -g(-\alpha + \pi)$; o seu desenvolvimento em série de Fourier apenas possui termos de ordem ímpar. Não contém termo contínuo que é considerado um termo de ordem par, $h = 0$. Tratando-se de uma função par, porque se verifica que $g(\alpha) = g(-\alpha)$, a série de Fourier só tem termos em *coseno*. Assim, a forma geral do desenvolvimento em série de Fourier é:

$$g(\alpha) = \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} B_h \cdot \cos(h\alpha) \quad \text{em que } h \text{ é um número inteiro ímpar.}$$

Desta análise resulta que apenas é necessário determinar os coeficiente B_h .

DETERMINAÇÃO dos COEFICIENTES — Como é conhecida a expressão analítica para a função $g(\alpha)$, pode-se determinar o valor de B_h recorrendo à expressão (1.5).

$$B_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\alpha) \cdot \cos(h\alpha) \, d\alpha \quad \text{para } h = 1, 3, 5, \dots \quad (1.5)$$

Como a função $g(\alpha)$ está definida por partes, apenas é necessário determinar alguns B_h em alguns intervalos do domínio; nos outros intervalos o valor do integral (1.5) é nulo.

$$B_h = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi+\beta/2} -F \cdot \cos(h\alpha) \, d\alpha + \int_{-\beta/2}^{\beta/2} F \cdot \cos(h\alpha) \, d\alpha + \int_{\pi-\beta/2}^{\pi} -F \cdot \cos(h\alpha) \, d\alpha \right]$$

ou,

$$B_h = \frac{4F}{\pi h} \cdot \text{sen}\left(\frac{h\beta}{2}\right)$$

Assim, a expressão geral do desenvolvimento em série de Fourier da forma de onda da força magnetomotriz é:

$$g(\alpha) = \sum_{h=1,3,5,\dots} \left(\frac{4F}{\pi h} \cdot \text{sen}\left(\frac{h\beta}{2}\right) \right) \cdot \cos(h\alpha) \quad \text{para } h \text{ ímpar}$$

Desta expressão sobressai um resultado importante para este estudo da distribuição espacial de força magnetomotriz naquele tipo de máquina eléctrica: *a amplitude dos termos harmónicos decresce com a sua ordem*. Por isso, dentro de um critério lógico, apenas são considerados, para estudo, alguns dos termos do desenvolvimento da função periódica em série de Fourier. Desprezam-se os outros termos harmónicos.

1.5 Elementos de Análise Harmónica

No exemplo apresentado foi possível, mediante certas condições simplificativas sobre o circuito magnético da máquina eléctrica, escrever um expressão analítica para a função periódica representativa da grandeza física em estudo. Nem sempre isso é possível. Frequentemente, apenas está disponível um conjunto de valores da grandeza periódica, retirados de um seu oscilograma, ou obtidos a partir dos sensores de um sistema de recolha de dados. Existe a necessidade de conhecer formas de tratar esses dados e de conhecer os meios para os obter.

1.5.1 Métodos do Processamento Digital de Sinal

Actualmente, a análise harmónica é efectuada recorrendo a métodos, algoritmos e aparelhagem desenvolvidos com a aplicação dos modernos conceitos de Processamento Digital de Sinal, essencialmente de Análise do Sinal. Foram, assim, abandonados os meios — tabelas, escantilhões, transformadores, analisadores mecânicos, etc.. — para análise harmónica de grandezas de que não se conhecia a expressão analítica, mas que era possível gravar experimentalmente sob a forma de diagramas (oscilogramas).

A possibilidade de converter uma grandeza de variação contínua numa grandeza com representação digital através de conversores A/D (analógico-digital), e de depois tratar essa sucessão discreta de valores com meios digitais, tornou possível o desenvolvimento de um conjunto de métodos de tratamento, que permitem resolver, comodamente, um problema de análise harmónica.

As grandezas físicas, com variação no tempo, ou no espaço, podem ter uma variação qualquer num intervalo limitado. Considerando que se repetem para além desse intervalo, pode-se utilizar a análise harmónica no seu estudo. Mas, a sua função representativa pode só ser definida num número finito de pontos, especialmente, em pontos equidistantes. Como a transformada de Fourier é utilizada para a transformação de uma função definida no domínio do tempo para o domínio da frequência, e uma série de Fourier de uma função limitada e discreta é um caso especial da transformada de Fourier, então o estudo da Transformada Discreta de Fourier, (DFT), e da forma rápida de a processar através da Transformada Rápida de Fourier (FFT), tornam-se importantes.

Uma grandeza física com variação limitada no tempo $g(t)$, ou no espaço, pode ser considerada uma função periódica, caracterizada por um período T , igual à amplitude do intervalo de definição da função, desde que se considere que a função se repete para além desse intervalo de definição

Generalizando os resultados obtidos no estudo da série de Fourier a uma função em que o período tende para infinito, $T \rightarrow \infty$, é possível encontrar uma expressão correspondente a (1.16), que transforma a função, representativa da grandeza, $g(t)$, numa função contínua da frequência $\underline{G}(f)$, tal que:

$$\underline{G}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt \quad (1.20)$$

A função periódica $\underline{G}(f)$ é a *Transformada de Fourier* da função $g(t)$, e representa a densidade espectral da função $g(t)$, ou, simplesmente, o *espectro* de $g(t)$. Trata-se de uma quantidade complexa, com uma parte real, $G_{\text{Re}}(f)$, e uma parte imaginária, $G_{\text{Im}}(f)$, tal que: $\underline{G}(f) = G_{\text{Re}}(f) + j G_{\text{Im}}(f)$.

Existe uma *Transformada Inversa de Fourier* que é dada pela expressão:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{G}(f) \cdot \exp(j2\pi ft) df = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{G}(f) \cdot \exp(j\omega t) df \quad (1.21)$$

Uma das propriedades da Transformada de Fourier que tem aplicação na Análise do Sinal é: a transformada de Fourier do produto de duas funções no domínio do tempo é igual à convolução (\otimes) das transformadas individuais das funções,

$$\begin{aligned} x(t) \times \underline{X}(f) & \quad y(t) \times \underline{Y}(f) \\ x(t) \cdot y(t) & \times \underline{X}(f) \otimes \underline{Y}(f) \end{aligned}$$

Através de um sistema físico adequado, e num intervalo limitado, a função representativa de uma grandeza pode ser convertida numa função discreta no tempo, ou no espaço, formando, então, uma sucessão de N valores $g_k(t_k)$, correspondentes a uma série de valores discretos e equidistantes de tempo, ou de espaço. Note-se que, para a função periódica, ou considerada periódica, limitada $g(t)$, é $g(0) = g(t_N)$.

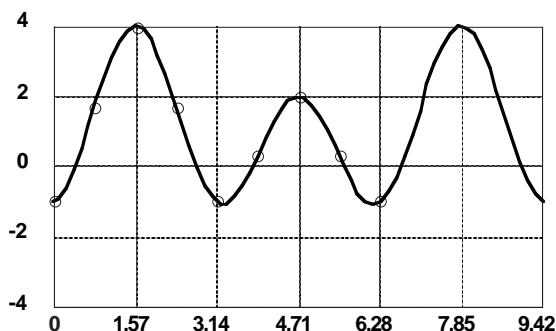
k	0	1	2	...	$N - 1$
t_k	0	$\Delta t = T/N$	$2 \cdot \Delta t$...	$(N-1) \cdot \Delta t$
$g_k(t_k)$	$g_k(0)$	$g_k(\Delta t)$	$g_k(2 \cdot \Delta t)$...	$g_k((N-1) \cdot \Delta t)$

$$g(t) \approx g_k(t_k) \quad \text{com } t_k = k \cdot \Delta t \quad \text{e } k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

A grandeza física, representada pela função limitada $g(t)$, é amostrada ao fim de cada intervalo de tempo Δt , por isso tem uma frequência de amostragem $f_a = 1/\Delta t$. Assim, por amostragem, a função limitada no domínio do tempo $g(t)$ torna-se uma função discreta no domínio do tempo $g_k(t_k)$, que é considerada periódica com um período de N pontos de amostragem; a frequência de $g_k(t_k)$ é $f = 1/N$.

Exemplo_1.5.1-1 — A forma de onda de uma grandeza periódica, no espaço do entreferro de uma máquina eléctrica rotativa, com período $T = 2\pi$ rad. elect., está representada na figura. Uma sucessão discreta de $N = 8$ valores distintos da função, (com $\Delta\alpha = 2\pi/8 = \pi/4$), é:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	(8)
α_k	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	(2π)
$g_k(\alpha_k)$	-1	1,707	4	1,707	-1	0,293	2	0,293	(-1)



No entanto, existe um conjunto vasto de funções periódicas que, para uma mesma amostragem, podem gerar a função discreta $g_k(t_k)$; basta, apenas, que todas tenham o mesmo valor que a função $g(t)$ nos N pontos de amostragem t_k , e que tenham valores diferentes nos restantes pontos intermédios do seu domínio. Mas, se a função $g(t)$ for limitada, e se os pontos de amostragem estiverem suficientemente próximos, então os valores da função $g(t)$, nos pontos de amostragem, especificam univocamente a função $g(t)$, que poderá ser reconstruída a partir da amostragem $g_k(t_k)$.

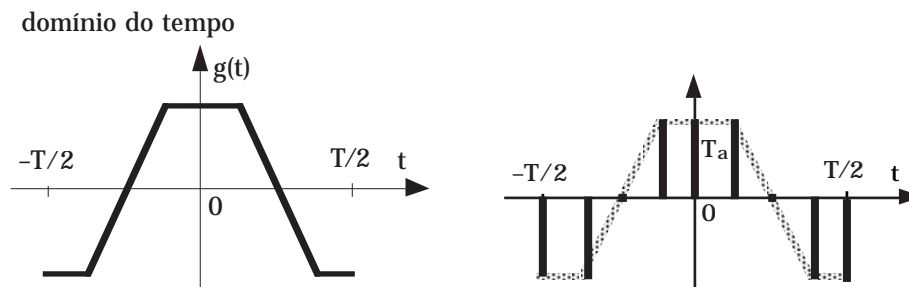


Fig. 1.2 – Amostragem de uma função periódica

Recorrendo a conceitos da Análise do Sinal, pode-se considerar que a amostragem da função $g(t)$, com transformada de Fourier $\underline{G}(2\pi f)$, consiste na sua multiplicação por uma função periódica de impulsos $p(t)$, a *função de amostragem*, cujo período é o tempo entre dois impulsos e coincide com o período de amostragem T_a , e a frequência de $p(t)$ que é dada pela frequência de amostragem $f_a = 1/T_a$.

Assim, no domínio do tempo é:

$$g_k(t_k) = g(t) \cdot p(t) \quad \text{com} \quad p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) \quad \text{e} \quad \delta(t) \text{ é a função de Dirac}$$

a função amostra $g_k(t_k)$ é um conjunto de impulsos equidistantes com amplitude igual ao valor da função $g(t)$ no ponto k .

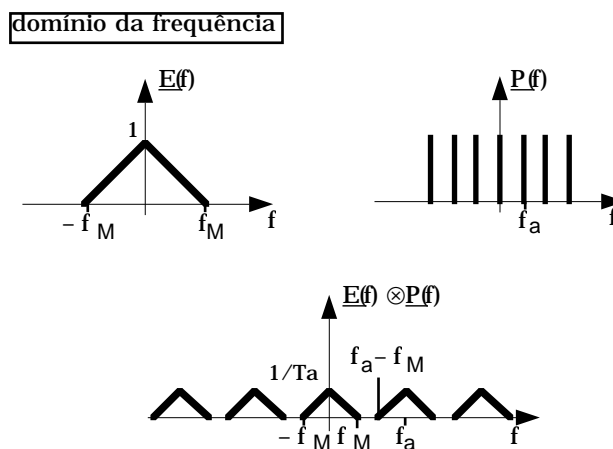
$$g_k(t_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT_a) \cdot \delta(t - kT_a) \tag{1.22}$$

Trata-se de uma *modulação em amplitude de impulsos* da função periódica $g(t)$ pela função de impulsos $p(t)$, o que atendendo ao teorema da convolução (\otimes) permite escrever que a transformada de Fourier do produto das duas funções, $g(t) \cdot p(t) = g_k(t_k)$, é dada pela expressão:

$$\underline{G}_k(2\pi f) = \frac{1}{2\pi} \left[\underline{G}(2\pi f) \otimes \frac{2\pi}{T_a} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi f - k2\pi f_a) \right) \right] = \frac{1}{T_a} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{G}(2\pi f - k2\pi f_a) \right) \tag{1.23}$$

A função $\underline{G}_k(2\pi f)$ e consiste numa soma de réplicas deslocadas da função $\underline{G}(2\pi f)$ afectadas por uma factor de escala $1/T_a$. Consideram-se réplicas funções com uma representação com igual andamento ao da função matriz, mas afectadas por um factor de escala.

Exemplo-1.5.1-2 — Considerando, apenas para exemplificar, uma função $e(t)$, que não é uma função periódica, mas que tem como expressão gráfica da sua transformada de Fourier (1.20), $\underline{E}(f)$ um triângulo com altura unitária num domínio limitado em banda $-f_M \leq f \leq f_M$, considerando que a transformada de Fourier da função de amostragem $p(t)$ é $\underline{P}(f) = (1/T_a) \cdot \sum_k \delta(f - (k/T_a))$, que é também uma função de impulsos, a transformada de Fourier da função $e_k(t_k)$ obtém-se considerando a convolução da função $\underline{E}(f)$ com a transformada de Fourier $\underline{P}(f)$: $\underline{E}_k(f) = \underline{E}(f) \otimes \underline{P}(f)$.



Note-se que a função $e_k(t_k)$ é uma função discreta no domínio dos tempo. A função $\underline{E}_k(f)$ é uma função periódica no domínio da frequência.

Para que na transformada de Fourier da função discreta $g_k(t_k)$ não exista sobreposição das diferentes réplicas, e a função original possa ser obtida com a aplicação da transformada inversa de Fourier, é necessário que se verifique que $f_M < (f_a - f_M)$, ou que $f_a > 2f_M$. O valor da frequência limite $f_a = 2f_M$, que tem de ser excedido pela frequência de amostragem, designa-se por *valor de Nyquist*.

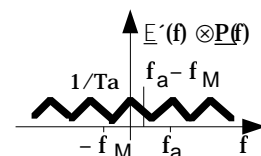
Este resultado encontra-se expresso no *Teorema da Amostragem*, que estabelece:

“Seja a função $g(t)$ com uma representação limitada em banda no domínio das frequências,
tal que $G(f) = 0$ para $|f| > f_M$.

Então $g(t)$ fica univocamente determinada pela sua função de amostragem $g_k(t_k)$, se $f_a > 2 \cdot f_M$ ”.

Para que o conjunto de valores discretos no domínio da frequência represente univocamente a transformada de Fourier da função dada, eles têm de representar exactamente um período no domínio do tempo e no domínio da frequência; terão, assim, de existir N pontos de amostragem no domínio do tempo e N pontos de amostragem no domínio da frequência. Assim, o número máximo de termos harmónicos será de $M = (N - 1)$, porque $h \in \{0, 1, \dots, M = N-1\}$.

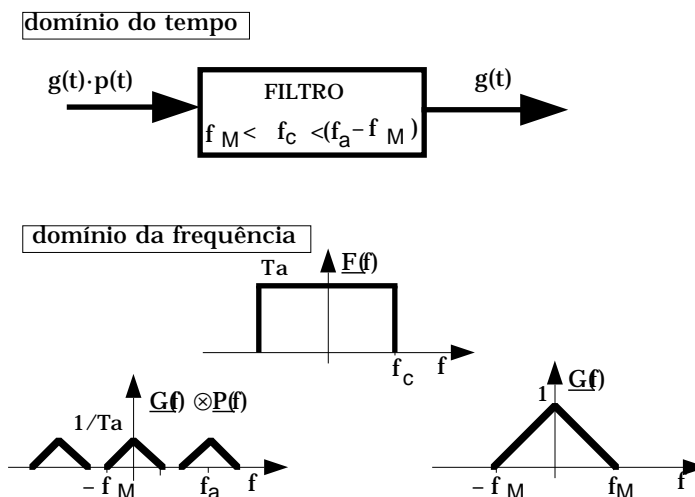
Quando é efectuada a amostragem de uma função com uma frequência f_a que não obedece ao teorema da amostragem, $f_a < 2f_M$, ocorre um fenómeno designado por “*aliasing*”, que no domínio da frequência, consiste na distorção da transformada de Fourier $G_k(f)$ de uma função amostrada $g_k(t_k)$ por sobreposição das diferentes réplicas da transformada de Fourier $G(f)$ da função no tempo $g(t)$. Torna-se, por isso, impossível reconstruir a função original $g(t)$ através do tratamento da função resultante da transformada inversa de Fourier (1.21) de $G_k(f)$.



O *teorema da amostragem* tem dois resultados muito importantes para a conversão da representação analógica de uma grandeza numa representação digital (A/D), ou da representação digital em analógica (D/A):

- * é somente necessário reter, ou armazenar, alguns (N) valores (amostras) da função $g(t)$, representativa da grandeza física, numa função amostra $g_k(t_k)$, para determinar uma réplica da função contínua $G(f)$ representativa da transformada de Fourier da função original $g(t)$;
- * se a amostragem for efectuada de tal forma que não ocorra aliasing, isto é, obedecendo ao teorema da amostragem com $f_a > 2 \cdot f_M$, então esses valores de amostragem $g_k(t_k)$ podem ser devidamente tratados para se obter a reconstrução da função original $g(t)$, representativa da grandeza física.

Para reconstruir a função original $g(t)$, a partir da função amostrada $g_k(t_k)$, e efectuar uma conversão digital-analógica (D/A), utiliza-se um filtro passa baixo, com um ganho de T_a , e uma frequência de corte f_c superior a f_M e inferior a $(f_a - f_M)$.



A utilização da transformada de Fourier permitiu obter uma função $G_k(f)$ no domínio da frequência, que não pode ter um tratamento digital rápido dos respectivos valores, se estes forem muitos (∞). Para aproveitar a possibilidade de estudar uma grandeza física periódica contínua através do tratamento digital de uma função discreta, que resulta de uma amostragem da função que representa a grandeza no domínio do tempo, é necessário que exista, também, a possibilidade de a transformada de Fourier da função ser amostrada no domínio da frequência, aparecendo, assim uma representação nesse domínio, efectuada por um conjunto de valores discretos, que poderão, também, ser tratados digitalmente.

Considerando uma função periódica discreta representativa de uma grandeza num espaço limitado de tempo, $g_k(t_k)$ tal que $g_k(t_k) = g_k(t_{k+N})$, resultante de uma amostragem em N pontos do domínio; ela pode ser representada por uma série de Fourier, (1.18):

$$g_k(t_k) = \sum_{h=0}^{M=N-1} A_h \cdot \exp(jh(2\pi/N)k)$$

Um tratamento analítico cuidado, e as simplificações inerentes à periodicidade da função exponencial, permitem chegar à definição da *Transformada Discreta de Fourier* (DFT) para funções do tempo, ou do espaço, limitadas:

$$G_h = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(t_k) \cdot \exp(-jh(\frac{2\pi}{N})k) \tag{1.24}$$

Definindo a função $W = \exp(-j2\pi/N)$, a expressão da transformada discreta de Fourier pode tomar a forma:

$$G_h = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(t_k) \cdot W^{hk} \tag{1.25}$$

a que se pode dar uma forma matricial

$$\{G_h\} = [W^{hk}] \cdot \{g_k(t_k)\} \tag{1.26}$$

Um dos aspectos importantes desta transformação é que admite uma transformação inversa; é a *Transformada Discreta Inversa de Fourier* (IDFT):

$$g_k(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} G_h \cdot \exp(jh(\frac{2\pi}{N})k) \tag{1.27}$$

ou

$$g_k(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} G_h \cdot W^{-hk} \tag{1.28}$$

A transformada discreta de Fourier de uma função discreta periódica, é um conjunto de valores complexos discretos e periódicos; $G_h = G_{hRe} + j G_{hIm}$. É possível estabelecer uma relação entre os valores da transformada discreta de Fourier (DFT) de um função e a amplitude dos termos harmónicos B_h ou C_h , através da definição (1.13) da amplitude complexa do termo harmónico A_h .

Atendendo a (1.18) e (1.24), é $G_h = G_{hRe} + j G_{hIm} = N \cdot A_h = N \cdot ((1/2)(B_h - jC_h))$.

$$B_h = (2/N) \cdot G_{hRe} \qquad C_h = -(2/N) \cdot G_{hIm} \tag{1.29}$$

Fica, assim, estabelecida uma forma de proceder à análise harmónica de uma função periódica representativa de uma grandeza física. Determinada uma amostragem com N pontos da função periódica $g(t)$ num domínio limitado do tempo, com um valor para N que satisfaça o teorema da amostragem, determina-se a transformada discreta de Fourier (DFT) da função amostra $g_k(t_k)$, e depois, atendendo às expressões (1.29) determina-se a amplitude dos coeficientes dos termos harmónicos da série de Fourier.

Exemplo_1.5.1-3 — Para a função amostra apresentada no exemplo_1.5.1-1, e recorrendo a um meio de cálculo numérico que permita a utilização directa de números complexos e, portanto da expressão (1.25), (máquina de calcular ou computador), determinam-se os valores para a respectiva Transformada Discreta de Fourier (DFT).

k	0	1	2	3	4	5	6	7
α_k	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
$g_k(\alpha_k)$	-1	1,707	4	1,707	-1	0,293	2	0,293
h	0	1	2	3	4	5	6	7
DFT	8	-j 4	-8	0	0	0	-8	j 4

Com os valores da DFT da função da grandeza da física, é possível calcular (1.29) a amplitude dos termos harmónicos da respectiva série de Fourier representativa da função.

$$\begin{aligned}
 h=0 \quad A_0 = B_0/2 = (1/N) \cdot G_0 \quad \text{ou} \quad A_0 = (1/8) \cdot 8 = 1 \\
 h=1 \quad B_1 = (2/N) \cdot G_{1Re} \quad \text{ou} \quad B_1 = (2/8) \cdot 0 = 0 \quad C_1 = (-2/N) \cdot G_{1Im} \quad \text{ou} \quad C_1 = (2/8) \cdot 4 = 1 \\
 h=2 \quad B_2 = (2/N) \cdot G_{2Re} \quad \text{ou} \quad B_2 = -(2/8) \cdot 8 = -2 \quad C_2 = (-2/N) \cdot G_{2Im} \quad \text{ou} \quad C_2 = (-2/8) \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

A expressão da série de Fourier é : $g(t) = 1 + \text{sen}(\alpha) - 2 \cdot \text{cos}(2 \cdot \alpha)$, como se pode verificar !...

A Transformada Discreta de Fourier (DFT) goza de várias propriedades e de algumas características que se tornam interessantes para a sua aplicação, como as propriedades inerentes à simetria. Assim, quando a função discreta representativa de uma grandeza física $g_k(t_k)$ é Real, demonstra-se que é $G(h) = G^*(-h)$, ou como $G(h)$ é periódica de período N, $G(h) = G^*(-h) = G^*(N-h)$, então,

a parte real é *par* $G_{h\text{Re}}(h) = G_{h\text{Re}}(N-h)$,

a parte imaginária é *ímpar* $G_{h\text{Im}}(h) = -G_{h\text{Im}}(N-h)$.

Devido a estas relações, também se verifica que, sendo $G_h = |G_h| \angle \arg(G_h)$, é:

$$|G_h| = |G_{(N-h)}| \quad \arg(G_h) = -\arg(G_{(N-h)})$$

Quando a função amostrada constitui uma sucessão de valores Reais, a parte real da transformada de Fourier é simétrica, em torno da frequência correspondente a $h = N/2$, e a parte imaginária é anti-simétrica.

Exemplo 1.5.1-4 — No caso do exemplo anterior como $g_k(t_k)$ é uma função real, $N = 8$ e $N/2 = 4$, verifica-se que:

$$\underline{G}(h) = \underline{G}^*(N-h) \quad \text{para } h = 0, 1, 2, 3, 4$$

e, também, atendendo às expressões (1.13), e a que $\underline{A}_h = (1/N) \cdot \underline{G}_h$,

$$B_h - jC_h = 2 \cdot A_h = (2/N) \cdot \underline{G}_h = (2/N) \cdot \underline{G}^*(N-h) = (2/N) \cdot G_{(N-h)\text{Re}} - j (2/N) \cdot G_{(N-h)\text{Im}}$$

por exemplo,

$$h = 1 \quad B_1 = (2/N) \cdot G_{(8-1)\text{Re}} \quad \text{ou} \quad B_1 = (2/8) \cdot 0 = 0 \quad C_1 = (2/N) \cdot G_{(8-1)\text{Im}} \quad \text{ou} \quad C_1 = (2/8) \cdot 4 = 1$$

A expressão matricial (1.25) de definição da transformada discreta de Fourier, apresenta um conjunto de operações algébricas que tornaria muito elevado o trabalho computacional para a sua determinação, quando o número de pontos de amostragem N é elevado ($N \geq 2^8$). Demonstra-se que a determinação dos valores \underline{G}_h para o caso de uma função amostrada, num conjunto de N pontos, por N valores complexos, envolve a execução de N^2 multiplicações complexas, e de $(N^2 - N)$ adições complexas.

No entanto, foi desenvolvido um outro tipo de algoritmo, baseado na possibilidade de reduzir a determinação da transformada discreta de Fourier de um conjunto de N valores à determinação de duas transformadas discretas de Fourier de dois conjuntos de $N/2$ valores e depois em combiná-las para obter o resultado da transformação total. O resultado é uma substancial diminuição das operações necessárias para determinar a transformada discreta de Fourier de uma função discreta e uma diminuição do erro de arredondamento associado aquele vasto conjunto de operações.

Foi esta redução do número de operações, para $(N \cdot \log_2 N)$ operações, que tornou possível o tratamento de grandes amostragens de dados (imagem, voz, ...), e o desenvolvimento do Processamento Digital de Sinal. O primeiro algoritmo foi publicado por Cooley & Tukey em 1965, mas é muito elevado o número de trabalhos científicos e de variações do algoritmo, que é possível consultar.

Programa para FFT

```

Programa FFT_1
DEFINT i-n
DIM xre(1024), xim(1024), wre(1024), wim(1024)
CALL LERDADOS(N,xre(), xim())
CALL SENCOS(N,wre(),wim())
CALL FFT_ctr(N, xre(),xim(),wre(),wim())
CALL IMPRIME_resultados(N, xre(), xim())
END

```

Algoritmo de Cooley & Tukey para FFT

```

SUB FFT_ctr(N, xre(1),xim(1),wre(1),wim(1)) STATIC
  i = 1      !%* Andar
  WHILE i < N
    j = 0      !%* Grupo
    WHILE j < i
      k = 0      !%* Borboleta
      Km = N/(2*i)
      WHILE k < Km
        CALL INDI(N,i,j,k,k1,k2,kw)
        CALL CALBOR(k1,k2,kw,xre(),xim(),wre(),wim())
      k = k + 1
      WEND
    j = j + 1
    WEND
  i = 2*i
  WEND
  CALL BITREV(N,xre(),xim())
END SUB

SUB INDI(N,i,j,k,k1,k2,kw) STATIC
  k1 = N*(j/i) + k
  k2 = k1 + N/(2*i)
  kw = k * i
END SUB

SUB CALBOR(k1,k2,kw,xre(1),xim(1),wre(1),wim(1)) STATIC
  Tre = xre(k1)-xre(k2) : Tim = xim(k1)-xim(k2)
  xre(k1) = xre(k1)+xre(k2) : xim(k1) = xim(k1)+xim(k2)
  xre(k2) = wre(kw)*Tre-wim(kw)*Tim : xim(k2) = wre(kw)*Tim+wim(kw)*Tre
END SUB

SUB BITREV(N,xre(1),xim(1)) STATIC
  j = N/2 : im = N - 2
  FOR i = 1 TO im
    IF i <= j THEN
      SWAP xre(i),xre(j)
      SWAP xim(i),xim(j)
    END IF
    k = N/2
    WHILE j >= k
      j = j-k : k = k/2
    WEND
    j = j+k
  NEXT
END SUB

Sub SENCOS(N,wre(1),wim(1)) STATIC
  pi = 3.141592654: im = N/2-1
  bet = 2*pi/N
  FOR i = 1 TO im
    alf = i*bet
    wre(i) = COS(alf) : wim(i) = - SIN(alf)
  NEXT
END SUB

```

O algoritmo de Cooley & Tukey aqui apresentado, encontra-se em apêndice à publicação [F. O. Restivo, 1990] citada na bibliografia.

Existe um tipo de algoritmo análogo para a determinação, mais rápida da transformada discreta inversa de Fourier; trata-se da Transformada Rápida Inversa de Fourier — IFFT.

Ao algoritmo para determinação da transformada rápida de Fourier FFT estão, normalmente, associadas as operações: determinação do espectro, que é a que interessa a um estudo de análise harmónica; convolução de duas séries de valores representando dois sinais; correlação de duas série temporais de valores. Todas estas operações podem ser efectuadas por aplicação directa da transformada de Fourier, mas, os algoritmos de determinação da transformada rápida de Fourier FFT permitem um volume e uma velocidade de cálculo que impõem o tratamento digital daquelas operações.

Exemplo_1.5.1-4 — Na resolução do problema de análise harmónica da função $g_k(t_k)$ definida no Exemplo_1.5.1-1, que é uma função real, com $N = 8$ e $N/2 = 4$, é possível utilizar a transformada rápida de Fourier FFT, através do algoritmo computacional de Cooley & Tukey apresentado. Para isso é necessário criar o subprograma LERDADOS seguinte:

```

SUB LERDADOS(N,xre(1),xim(1)) STATIC
  pi = 3.141592654
  N = 8
  teta = 2*pi/N
  FOR k=1 TO N
    tetk = (k-1)*teta
    xre(k) = 1 + SIN(tetk) - 2*COS(2*tetk)    '!%* função geradora de dados
    xim(k) = 0
  NEXT
END SUB

```

Os resultados obtidos, que coincidem com o valor da transformada discreta de Fourier DFT, obtida por outros meios de cálculo, no Exemplo_1.5.1-3, permitem efectuar as operações indicadas nas expressões (1.29), que também podem fazer parte do programa de cálculo. O resultado final são os coeficientes da função geradora de dados $g_k(t_k)$, utilizada no subprograma LERDADOS.

A única diferença na resolução deste problema pelo método do Exemplo_1.5.1-3, ou pelo método aqui apresentado seria na velocidade de processamento se $N \geq 2^8$.

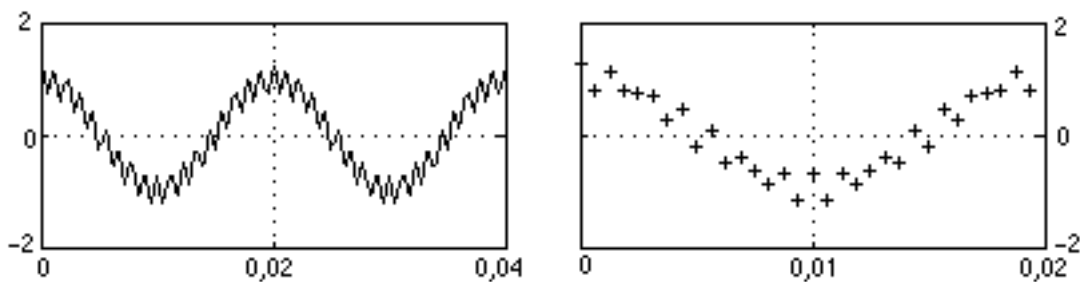
A utilização do algoritmo de Cooley & Tukey, directamente, na análise harmónica de uma função discreta de valores Reais, não permite poupar posições de memória do computador — as posições referentes à matriz $xim(k)$ que são todas nulas — nem permite diminuir o número de operações envolvendo esses valores nulos. Por isso, foram desenvolvidos outros algoritmos destinados à determinação da transformada de Fourier de funções reais, e formas de aproveitar as simetrias da transformada rápida de Fourier (FFT) de uma função discreta Real, para poupar posições de memória.

A aplicação da transformada rápida de Fourier (FFT) requer alguns cuidados devidos aos erros que podem ser cometidos. Por isso, a aplicação da transformada rápida de Fourier (FFT) na análise harmónica, como em outras aplicações, requer certos cuidados:

- a frequência de amostragem deve ser escolhida com um valor superior ao valor de Nyquist, para evitar o problema de aliasing;
- deve-se evitar o problema de perda (“leakage”) devido à utilização de uma função amostra que não representa um número inteiro de períodos da função amostrada; provoca esta dificuldade a truncatura da função original no domínio do tempo;

- devido à transformada rápida de Fourier (FFT) ser uma função discreta, só os termos harmónicos com frequências representadas exactamente nos seus pontos de discretização estão representadas nos seus verdadeiros valores. Se na função original existirem harmónicos com um valor de frequência intermédio aos valores correspondentes aos pontos de discretização da transformada rápida de Fourier (FFT), então o valor da amplitude desses termos harmónicos não estará correcto.

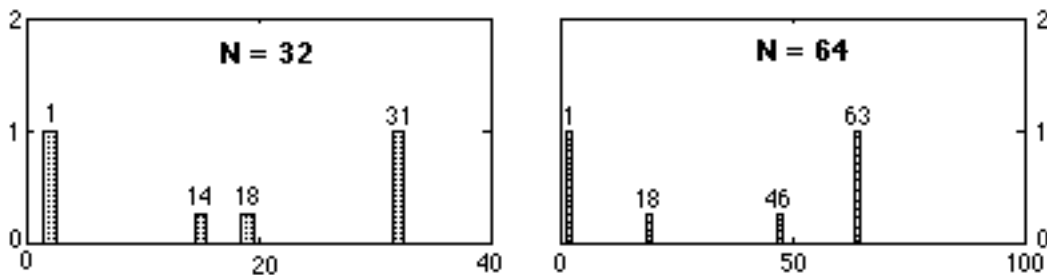
Exemplo_1.5.1-5 — Considerando uma forma de onda resultante da sobreposição de uma onda sinusoidal de frequência industrial (50 Hz) com uma onda sinusoidal com uma amplitude igual a (1/4) da amplitude da onda fundamental e com uma frequência de 900 Hz, pretende-se efectuar a análise harmónica de um período, 0,02 s, desta forma de onda através da aplicação de um dos algoritmos da transformada rápida de Fourier (FFT).



Começando por escolher $N = 32$, o que não satisfaz o teorema da amostragem,

$$f_a = 1/T_a \quad f_a = N/T = 1600 \text{ Hz} \quad \text{mas } f_a > 2 \cdot f_M > 2 \cdot 900 \quad f_a > 1800 \text{ Hz}$$

e aplicando o algoritmo para a FFT, verifica-se que surgem harmónicos de 1ª ordem ($h = 1$) e de 14ª ordem ($h = 14$) (!... "aliasing" ...!).



Escolhendo $N = 64$, o que já satisfaz o teorema da amostragem,

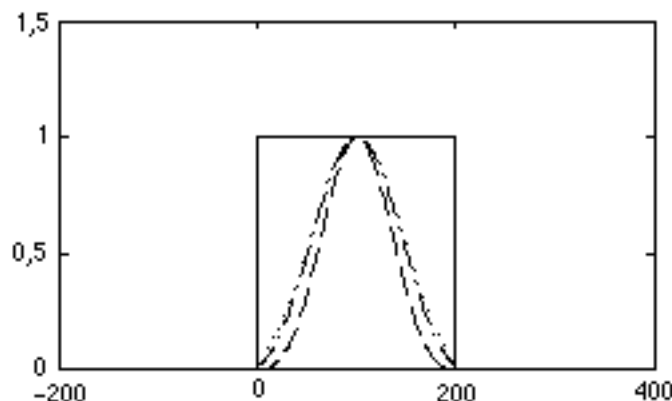
$$f_a = 1/T_a \quad f_a = N/T = 3200 \text{ Hz} \quad \text{e } f_a > 2 \cdot f_M > 2 \cdot 900 \quad f_a > 1800 \text{ Hz}$$

e aplicando o algoritmo para a FFT, verifica-se que surgem harmónicos de 1ª ordem ($h = 1$) e de 18ª ordem ($h = 18$), o que está correcto.

Para que o problema de perda ("leakage") não ocorra é necessário que a truncatura da sequência de valores da função amostrada $g_k(t_k)$ na função de tempo original $g(t)$ contenha um número inteiro de períodos. Isto é, a função original terá de ser amostrada através de uma janela ("window"), aparentemente rectangular, que ocupa um número inteiro de períodos da função.

Aparece, assim, o conceito de janela (window function) que permite limitar a função a amostrar a uma parte do domínio no tempo. Este conceito é muito importante no

Processamento Digital de Sinal, onde existem um conjunto de diferentes janelas, com as suas expressões próprias e com propriedades específicas e bem adaptadas a diversas operações.



1.5.2 Análise Harmónica Computacional

O conhecimento elementar de alguns métodos numéricos permite obter rapidamente um programa de computador eficaz, com possível utilização nos casos em que se pode amostrar um número N de valores da função periódica representativa da grandeza física em estudo, num conjunto discreto, e não muito elevado ($12 < N < 64$) de pontos equidistantes. O número de pontos N deve ser, maior do que o número de coeficientes M a determinar.

O programa de computador mais simples para a análise harmónica de uma função discreta, representada por um número N de pontos não muito elevado, deverá permitir o cálculo dos coeficientes da série de Fourier através da utilização das expressões (1.10) e (1.11).

```

Programa para Série de Fourier      FOURIER_1

DEFINT h, k
DIM xre(32), B(32), C(32)
pi = 3.141592653#
CALL LERDADOS(N,M, xre())
teta = 2*pi/N
FOR h = 0 TO M-1
  FOR k = 1 TO N
    tetk=h*teta*(k-1)
    B(h)=B(h)+xre(k)*COS(tetk)           '!%*   expressão (1.10)
    C(h)=C(h)+xre(k)*SIN(tetk)         '!%*   expressão (1.11)
  NEXT
  B(h) = (2/N)*B(h)   :   C(h)=(2/N)*C(h)
NEXT
B(0) = B(0)/2           '!%*   expressão (1.9)
CALL IMPRIME(N,M,B(),C())
END

```

O resultado deste programa apresenta uma acumulação de erros devida, essencialmente, à determinação do valor das funções trigonométricas pelas subrotinas do compilador. No entanto, é um programa simples e para uma pequena amostragem não é lento !

Neste programa FOURIER_1 um grande volume de trabalho é executado pelo computador na determinação do valor das funções trigonométricas através da sua série

representativa. Pode-se evitar esse trabalho, atendendo a que os intervalos entre os pontos de amostragem são equidistantes. Podem-se estabelecer fórmulas de recorrência para o cálculo dos valores de $\text{sen}((h+1)\cdot\theta)$ e $\text{cos}((h+1)\cdot\theta)$, baseado nas expressões da trigonometria,

$$\begin{aligned}\text{cos}((h+1)\cdot\theta) &= \text{cos } \theta * \text{cos } h\theta - \text{sen } \theta * \text{sen } h\theta \\ \text{sen}((h+1)\cdot\theta) &= \text{cos } \theta * \text{sen } h\theta + \text{sen } \theta * \text{cos } h\theta\end{aligned}\quad (1.30)$$

em que apenas é necessário determinar o valor de $\text{sen } \theta$ e de $\text{cos } \theta$, visto que $\text{cos}(0) = 1$ e $\text{sen}(0) = 0$.

Também se podem obter expressões de recorrência para as expressões (1.10) e (1.11), atendendo à definição de uma sequência de novos coeficientes U_k , a partir da expressão:

$$U_{k,h} = 2 \cdot U_{k-1} \cdot \text{cos } h\theta - U_{k-2} + g_{(N-k+2)}(t_{(N-k+2)}) \quad (1.31)$$

com $U_1 = 0$, e $U_2 = g_N(t_N)$

Surgem, assim, as fórmulas de recorrência para a expressão dos coeficientes da série de Fourier:

$$B(h) = (2/N) \cdot (g_1 + U_N \cdot \text{cos}(h\theta) - U_{N-1}) \quad (1.32)$$

$$C(h) = (2/N) \cdot (U_N \cdot \text{sen}(h\theta)) \quad (1.33)$$

```

Programa para Série de Fourier          FOURIER_2

DEFINT h, k
DIM xre(32), B(32), C(32), U(32)
pi = 3.141592653#
CALL LERDADOS(N,M, xre())
teta = 2*pi/N
c1 = COS(teta)      :      s1 = SIN(teta)
U(1) = 0           :      U(2) = xre(N)
coh = 1           :      seh = 1           '!%* para teta = 0 é cos(0) = 1 e sen(0) = 0
FOR h = 0 TO M-1
  FOR k = 3 TO N
    U(k) = 2*coh*U(k-1)-U(k-2)+xre(N-k+2)   '!%* expressão (1.31)
  NEXT
  B(h) = (2/N)*(xre(1)+U(N)*coh-U(N-1))     '!%* expressão (1.32)
  C(h)=(2/N)*(U(N)*seh)                     '!%* expressão (1.33)
  q = c1*coh-s1*seh                          '!%* fórmulas de recorrência (1.30)
  seh=c1*seh+s1*coh
  coh=q
NEXT
B(0) = B(0)/2                                '!%* expressão (1.9)
CALL IMPRIME(N,M,B(),C())
END

```

Outras expressões, como as que já foram apresentadas em 1.5.1, podem também ser programadas. No entanto, é necessário uma análise prévia para que a representação simples que apresentam, como a expressão (1.25), mesmo quando programada numa linguagem de alto nível que admita variáveis complexas, como a linguagem FORTRAN, não se traduza por um volume de cálculo elevado, mas que não está directamente indicado.

Um problema especial surge com as linguagens (por exemplo, FORTRAN) em que o compilador não permite que o índice de uma matriz seja nulo, ($A(0) \supset e^r 0$). Por isso, utiliza-se a seguinte fórmula para a transformada discreta de Fourier (DFT):

$$G(h+1) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(k+1) \cdot W^{kh}$$

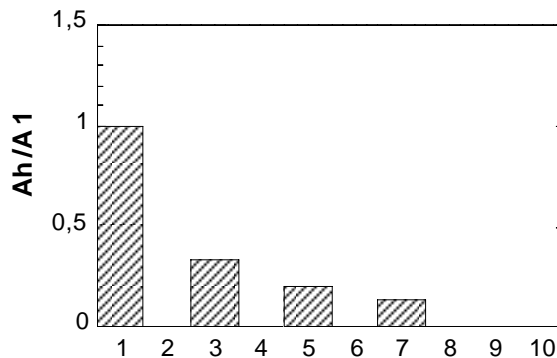
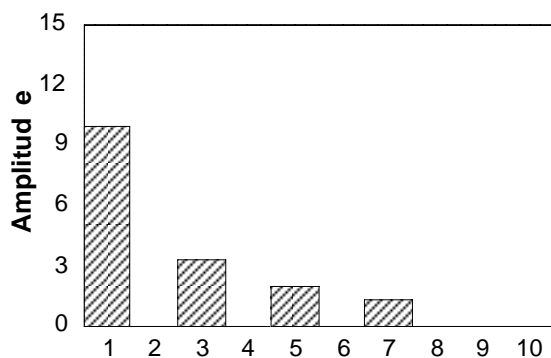
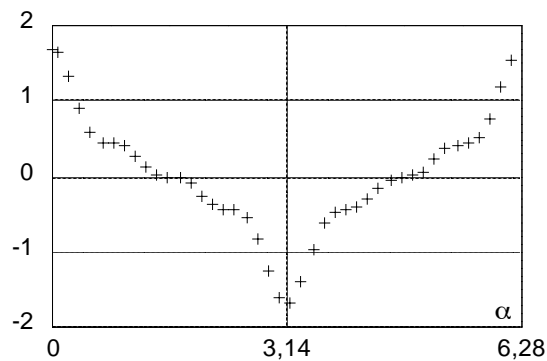
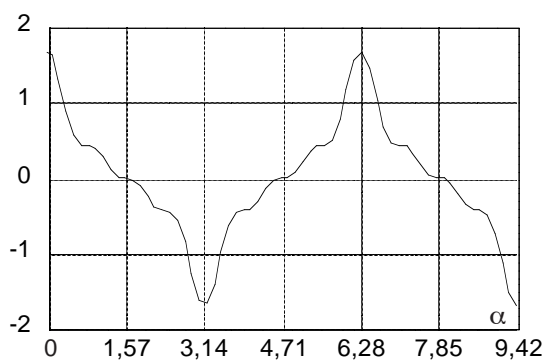
em que são tomados valores de h até $h+1$, e de k até $k+1$, porque estes índices só podem tomar valores de 1 até N , em lugar de 0 até $N-1$.

Nos problemas de programação da análise harmónica devem incluir-se, também, os problemas de apresentação dos resultados. Faz-se a apresentação dos resultados, normalmente sobre a forma de uma tabela,

```

*** Análise Harmónica de uma Função ***
Nº de pontos de amostragem = N
Nº de harmónicos = M
*** Resultados ***
A(0) = +1
B(1) = 0                C(1) = 1
B(2) = -2              C(2) = 0
    
```

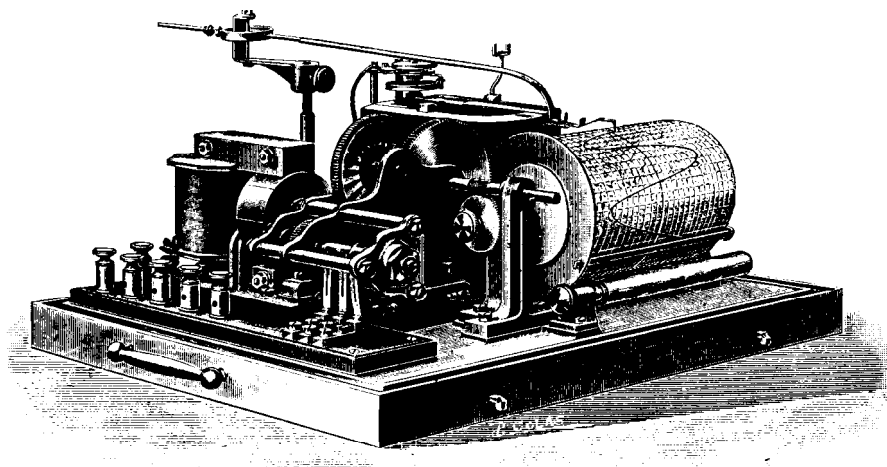
ou, através de um gráfico: espectro em amplitude, espectro de fase, $20 \cdot \log(A_h/A_1)$, ... Existem diversos tipos de gráficos utilizáveis, habitualmente, em análise harmónica: gráficos com escalas lineares; gráficos semi-logarítmicos; gráficos de barras; gráficos 3-D, ... etc.



1.5.3 Medidas em Análise Harmónica

Associado à análise harmónica da forma de onda de uma grandeza física existe a necessidade de visualizar essa forma de onda e de determinar um conjunto de medidas sobre a grandeza ou sobre o resultado da sua actuação. Por isso, desde os primórdios do estudo das grandezas periódicas que existem sistemas de registo da forma de onda dessas grandezas, como o comprova a figura representativa de um ondógrafo d' Hospitalier (1912).

Entretanto, outros aparelhos de registo foram aparecendo. Actualmente são de salientar os aparelhos digitais, que permitem o registo e englobam, também, o tratamento da informação contida nas seqüências de valores que formam a amostra da forma de onda da grandeza física em estudo.

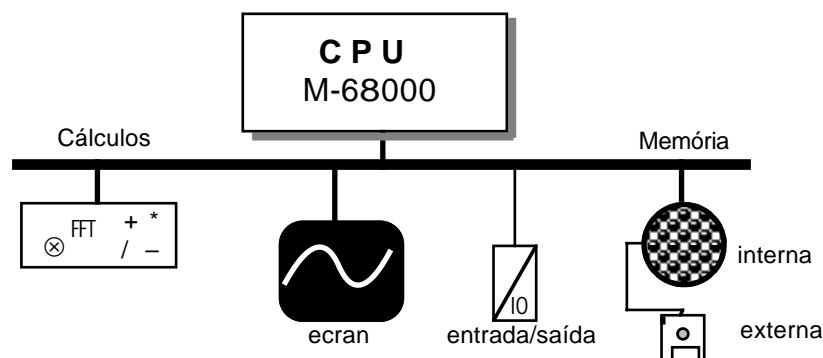


A utilização de sistemas de medida digitais para análise harmónica tem algumas vantagens: aumenta as possibilidades de repetição; aumenta a consistência da medida, reduzindo as implicações de ligeiras oscilações do valor da frequência fundamental; transfere para o aparelho a escolha da frequência de amostragem face à frequência máxima presente.

Entre os aparelhos digitais capazes de efectuarem o registo dos valores de uma grandeza, desde que traduzidos num sinal de tensão eléctrica, de efectuarem medidas dessa grandeza, de efectuarem a análise harmónica da grandeza e de reconstruir a forma de onda original a partir dos valores amostrados, estão os actuais osciloscópios. Com estes aparelhos podem-se efectuar medidas ou analisar grandezas com um comportamento transitório tal, que torna impraticável a utilização dos aparelhos convencionais.

O princípio de funcionamento destes aparelhos baseia-se nos métodos do Processamento Digital de Sinal, já ligeiramente apresentados em 1.5.1, e que na sua forma mais avançada constituem ferramentas precisas e rápidas para Análise do Sinal.

Um osciloscópio moderno, dotado de funções de análise harmónica, é constituído por um sistema de admissão de dados, por um gravador de forma de onda, por um sistema de análise de sinal, por um sistema de visualização de forma de onda e por um sistema de controlo digital que supervisiona o funcionamento do aparelho e que é comandado por um microprocessador (tipo M-68000) actuando sob um sistema operativo multitarefa.



Com um osciloscópio deste tipo é possível efectuar, rapidamente, a análise harmónica de um sinal. Tipicamente, um osciloscópio deste tipo possui dois canais de entrada, e tem a possibilidade de gravar, sobre a forma digital, os valores amostrados das grandezas de entrada nos dois canais. Sobre as formas de onda armazenadas pode ser efectuada uma análise harmónica, ou, outros tratamentos numéricos, quase sempre envolvendo a utilização da transformada rápida de Fourier (FFT).

Para que estejam correctos os resultados da aplicação dos algoritmos residentes, envolvendo a transformada rápida de Fourier (FFT), é necessário que o osciloscópio seja preciso numa ampla *banda dinâmica*, que é a menor amplitude do sinal de entrada capaz de ser registrada à saída do conversor analógico-digital (A/D). A unidade em que se exprime é o decibel, e a norma IEEE-519 aconselha uma gama de 60 dB; o que significa que é possível observar um termo harmónico de amplitude unitária num sinal com uma amplitude de mil unidades $\{20 \cdot |\log(1/1000)|\}$. Também a *frequência de amostragem* máxima que o osciloscópio dispõe deve ser de 10 kHz, embora sejam comuns frequências de amostragem de 100 kHz.

Torna-se interessante, e, actualmente, isso é oferecido na maioria dos osciloscópios com funções para análise harmónica, dispor da possibilidade de ligar, directamente ou através de um meio de transporte de dados, o osciloscópio a um computador permitindo um mais profundo tratamento, ou mais amplo armazenamento, dos dados recolhidos.

A análise dos valores da forma de onda armazenada através da transformada rápida de Fourier (FFT) exige, como já foi apresentado em 1.5.1, alguns cuidados na interpretação dos resultados face à forma como os dados são recolhidos e tratados. É importante notar que a análise harmónica com a transformada rápida de Fourier (FFT) não é efectuada em tempo real; os dados são recolhidos e armazenados e só depois é que são tratados. Os dados formam um conjunto discreto de valores, pelo que os valores intermédios somente podem ser extrapolados. Na aplicação da transformada rápida de Fourier (FFT) presume-se que durante a amostragem não há variação da amplitude do sinal no tempo, e que, portanto, não há variação das características do sinal analisado, amplitude, frequência, etc...; o resultado final será uma média dos valores reais se, durante a amostragem, houver variação das características do sinal.

Também a forma de efectuar a amostragem tem de obedecer a certas regras: o número de amostras (N) tem de ser uma potência inteira de dois ($N = 2^n$); para que a frequência de um dado harmónico seja identificável é necessário que a frequência de amostragem do sinal seja maior do que o dobro da frequência do harmónico; tem de ser incluído um número inteiro de períodos do sinal, as frequências a observar devem pertencer ao conjunto discreto de valores obtidos na transformada rápida de Fourier (FFT).

Exemplo_1.5.3-1 — Quando se pretende estudar a forma de onda da corrente de alimentação de um motor de indução trifásico, ligado à rede eléctrica (50 Hz), é de prever que os harmónicos presentes terão frequências que são múltiplos inteiros da frequência industrial.

Para efectuar uma análise harmónica correcta, utilizando a transformada rápida de Fourier (FFT), é necessário que:

- a) – o número de pontos de amostragem seja uma potência de dois (2^n);
- b) – deverão ser amostrado um número inteiro de períodos do sinal;
- c) – a frequência de amostragem obedeça ao teorema de amostragem. Pressupondo que o harmónico

de maior ordem era o de 15ª ordem, ($h = 15$), deveria ser $f_a > 2 \cdot (15 \times 50) > 1,5 \text{ kHz}$, ou $T_a < 667 \mu\text{s}$.

A penúltima imposição é a mais difícil de cumprir porque depende dos valores impostos pelo construtor para a frequência de amostragem. Se um valor possível fosse de 20 kHz, ($T_a = 50 \mu\text{s}$) e a amostragem tivesse 1024 pontos (2^{10}), seriam amostrados 2,56 ciclos; o que poderia ser a melhor situação oferecida pelo osciloscópio!...

A frequência de amostragem de 20 kHz permitiria estudar o harmónico de frequência $f_M = 5 \text{ kHz}$, ou seja o 100º harmónico, o que é muito, relativamente ao máximo previsto: harmónico de 15ª ordem.

A frequência mínima observável seria 19,53 Hz (= 20000/1024), o que não permitia observar correctamente os harmónicos principais: ($N = 3 \text{ } \varnothing \text{ } 58,5 \text{ Hz}$), ($N = 5 \text{ } \varnothing \text{ } 97,6 \text{ Hz}$), ($N = 8 \text{ } \varnothing \text{ } 156,3 \text{ Hz}$), ...!

Essencialmente, o desenvolvimento de osciloscópios capazes de proceder à análise harmónica das grandezas de entrada correspondeu à dotação do tradicional osciloscópio com meios computacionais capazes de permitirem uma análise digital do sinal. Actualmente, também se pode dotar um computador com meios capazes de permitirem uma recolha digital do sinal, e com programas capazes de efectuarem muitas das funções, comuns ou avançadas, próprias da Análise de Sinal.

Para efectuar um armazenamento nos sistemas de memória do computador, são utilizados cartões de recolha de dados dotados de vários canais de entrada de sinal analógico sobre a forma de uma tensão, conversores analógicos--digitais (A/D) permitindo uma conversão até à centena de milhar de amostras por segundo, contadores, conversores digitais--analógicos (D/A) de saída, vários canais de saída, etc...

O pacote de programas, que hoje se apresenta sobre uma forma que permite uma muito fácil interacção homem--máquina, apresenta vários conjuntos de funções envolvendo várias rotinas.

Funções de Entrada/Saída

entrada e saída dos canais a alta velocidade; configuração e controlo do relógio de saída
ler e escrever para um sistema de armazenagem ou de impressão; ler ou escrever valores

Funções Manipulação dos Dados

operações de leitura e gravação; operações de movimentação dos dados;
operações aritméticas; operações de álgebra matricial;
cálculo de FFT em matriz de inteiros, ou complexos em precisão simples ou dupla
cálculo de derivada de uma matriz; cálculo da convolução de duas matrizes de dados

Funções Gráficas

desenhar eixos lineares, ou eixos com escala logarítmica
desenho de histograma, ou desenhar função x-y, ou desenhar gráficos 3-D;

etc,...

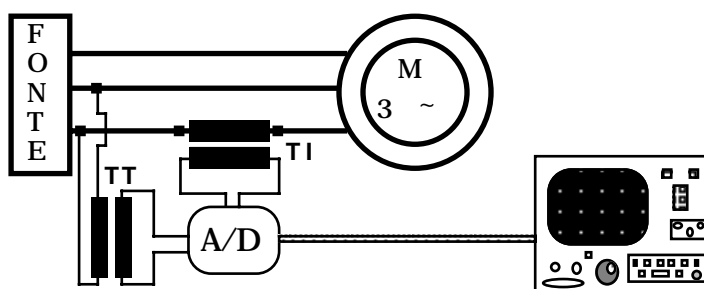
Existe, também, um tipo de aparelho electrónico que integrando um sistema de medida de tensão, um sistema de medida de corrente e um sistema de medida de potência eléctrica trifásica permite fazer uma análise das formas de onda das principais grandezas características de uma rede eléctrica.

Este tipo de aparelho, através da análise harmónica de valores de tensão e de corrente eléctrica amostrados, permite caracterizar as grandezas eléctricas não sinusoidais em estudo na rede.

Para além destes aparelhos de registo, de análise e de medida existe um outro

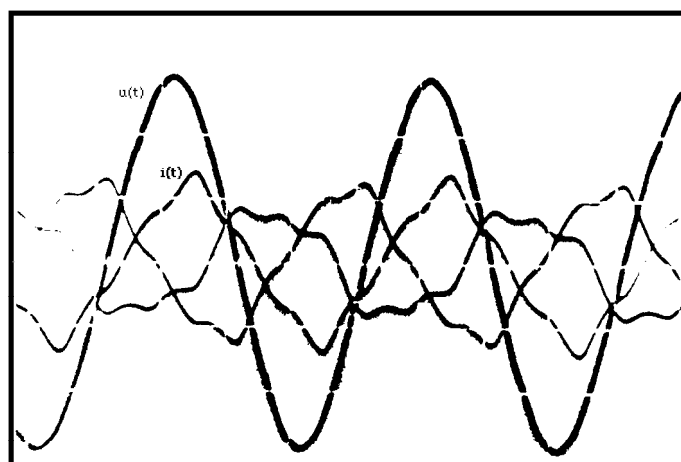
conjunto de aparelhos auxiliares para análise harmónica. Trata-se dos sistemas tradutores das outras grandezas físicas em grandezas eléctricas, e dos aparelhos capazes de condicionar as características do sinal à características dos aparelhos de medida. Neste último conjunto de aparelhos encontram-se os transformadores de medida, que para além das suas características de precisão habituais devem ter uma saída sem distorção nas altas frequências e não devem alterar(!) o esfasamento na grandeza em estudo.

Um cuidado especial a ter nos estudos de análise harmónica é que os aparelhos de medida eléctricos, habitualmente utilizados em laboratório, destinam-se a funcionar apenas a uma frequência definida; normalmente a frequência da rede. Por isso, deve existir o máximo cuidado na interpretação das respectivas leituras quando no sistema em estudo existem grandezas eléctricas não sinusoidais.



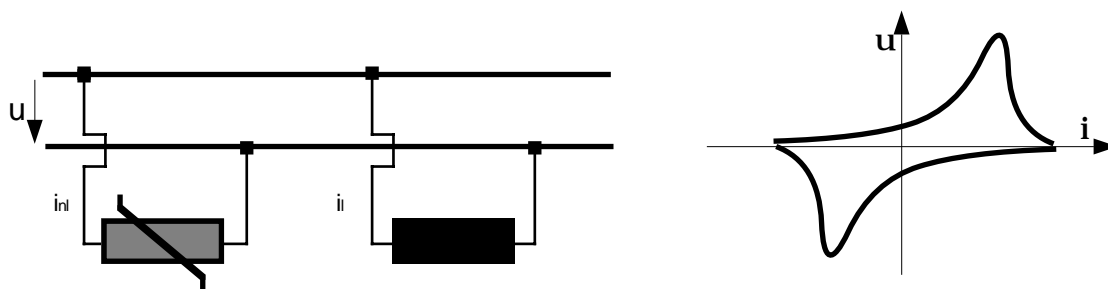
2. Grandezas Periódicas Não Sinusoidais

A presença de grandezas eléctricas não sinusoidais nos circuitos eléctricos origina graves problemas no funcionamento de um conjunto vasto de aparelhagem que pode estar ligada a esse circuito, e provoca um aumento do consumo de energia. Estas consequências obrigam a uma caracterização do conteúdo em termos harmónicos das grandezas eléctricas, ou magnéticas, presentes nos circuitos, através da respectiva análise harmónica; obrigam a uma caracterização das diferentes grandezas físicas com andamento não sinusoidal; e obrigam a um reconhecimento dos factores responsáveis pelo aparecimento dos harmónicos e, também, à compreensão dos seus processos de actuação.



Corrente de magnetização num transformador trifásico em estrela sem o neutro ligado (Yy)

Quando num circuito eléctrico existe um componente com parâmetros não lineares, a forma de onda da corrente eléctrica é não sinusoidal, mesmo quando a tensão de alimentação é sinusoidal. No entanto, a queda de tensão provocada pela corrente eléctrica não sinusoidal é também não sinusoidal e, se o seu valor for considerável, a tensão de alimentação ficará com uma forma não sinusoidal.



Mas não é apenas a existência de cargas com características não lineares a causa do estudo de grandezas com andamento não sinusoidal. A consideração de grandezas não sinusoidais no estudo das Máquinas Eléctricas, está relacionada com o projecto de enrolamentos, com os problemas de desenho e de saturação do circuito magnético, com a alimentação por conversores electrónicos de potência, etc... Nesse tipo de estudo podem existir duas atitudes fundamentais: ou se pretende estudar as causas da produção de harmónicos pela máquina eléctrica, ou se pretende estudar as consequências para o funcionamento da máquina eléctrica da existência de grandezas com formas de onda ricas em termos harmónicos.

Em qualquer daquelas situações é necessário caracterizar as grandezas físicas através dos seus valores típicos (médio, eficaz ...), ou caracterizar a distorção das formas de onda da grandeza, ou inserir o estudo na caracterização de sistemas eléctricos monofásicos ou polifásicos.

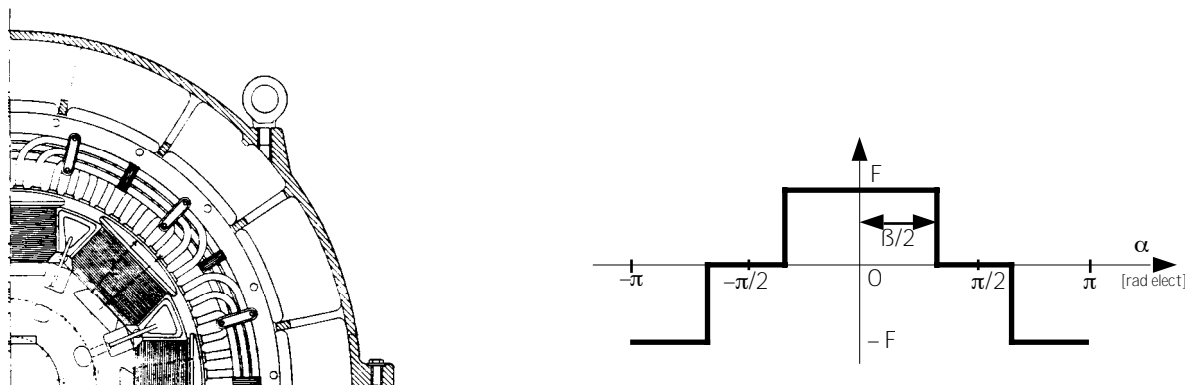
A importância destes conceitos para o estudo das Máquinas Eléctricas pode ser demonstrada pela referência a um conjunto vasto de estudos já efectuados e onde estão apontadas as consequências do andamento não sinusoidal de algumas grandezas características das máquinas eléctricas.

2.1 Origem dos Harmónicos

Embora nos estudo geral dos harmónicos nos sistemas de energia se faça referência a um aumento, contemporâneo, das fontes de harmónicos, no estudo das máquinas eléctricas as preocupações com a origem dos harmónicos recaem sobre um conjunto limitado de fontes.

Atendendo ao princípio de funcionamento das máquinas eléctricas, uma grandeza que tenha uma distribuição não sinusoidal no espaço, pode originar o aparecimento de uma grandeza distorcida no domínio do tempo; por isso, é, também, importante o estudo dos harmónicos espaciais de certas grandezas características do funcionamento das máquinas eléctricas.

As fontes destes harmónicos espaciais estão relacionadas com a distribuição do enrolamento nas ranhuras da máquina, com a existência dessas ranhuras, ou com o desenho do circuito magnético, que devido à sua anisotropia introduz amplas variações, no espaço, dos parâmetros característicos do circuito magnético.



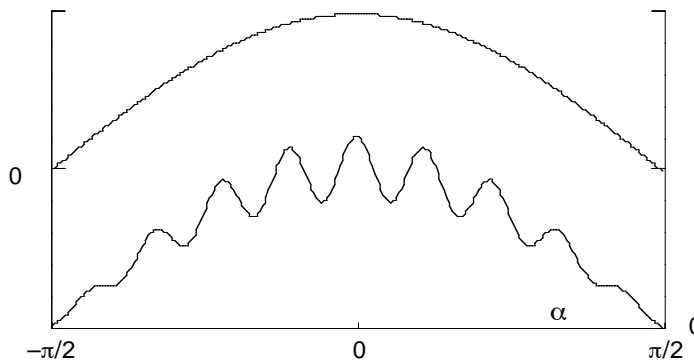
$$F(\alpha) = \sum_{h=1,3,5,\dots} \left(\frac{4F}{\pi h} \cdot \text{sen}\left(\frac{h\cdot\beta}{2}\right) \right) \cdot \cos(h\alpha)$$

A existência de uma distribuição não sinusoidal de força magnetomotriz no espaço do entreferro de uma máquina síncrona de pólos salientes, é a fonte dos harmónicos que aparecem na expressão espacial do fluxo magnético indutor, e é a fonte dos harmónicos que aparecem na variação no tempo da força electromotriz gerada: $E = \sum_h E_h \cdot \text{sen}(h\omega t)$ com h ímpar. No entanto, a aplicação dos conhecimentos sobre Teoria dos Enrolamentos para Máquinas de Corrente Alternada permite o projecto de máquinas síncronas em que a forma de onda da força electromotriz gerada tem uma distorção, caracterizada pelo *factor harmónico telefónico* (FHT), inferior ao valor imposto pelas normas da Comissão Electrotécnica Internacional (FHT < 5 % em CEI-34-1.A).

Também a forma de onda da distribuição da força magnetomotriz num motor de indução trifásico, devido à colocação dos respectivos enrolamentos estatóricos, não é sinusoidal. Os termos harmónicos vão ser responsáveis pelo aparecimento de diversos campos girantes de força magnetomotriz, que geram forças electromotrizes de frequência múltipla da frequência fundamental das grandezas eléctricas rotóricas. Essa frequência rotórica fundamental depende da velocidade instantânea do motor. Como o circuito eléctrico rotórico está curto-circuitado, nele vão circular correntes eléctricas de forma de onda distorcida pela presença de harmónicos. O campo magnético de reacção do induzido, também terá uma forma de onda distorcida, assim como as forças electromotrizes de reacção que são geradas no enrolamento estatórico.

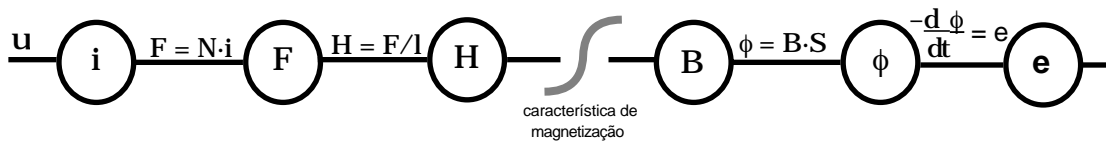
Generalizando, verifica-se que a colocação das bobinas dos enrolamentos das máquinas eléctricas, a *distribuição do enrolamento*, é responsável pelo aparecimento de formas de onda de grandezas magnéticas, com desenvolvimento espacial não sinusoidal, que devido ao princípio de funcionamento da máquina eléctrica dão origem ao aparecimento de grandezas eléctricas com variação não sinusoidal no domínio do tempo. Dentro deste tipo de fonte de harmónicos encontra-se, também, a produção dos harmónicos pela modulação da onda fundamental, devido à variação brusca das propriedades do circuito magnético, com as

ranhuras existentes na periferia do circuito magnético, onde são colocados os condutores eléctricos: *harmónicos de ranhura*.

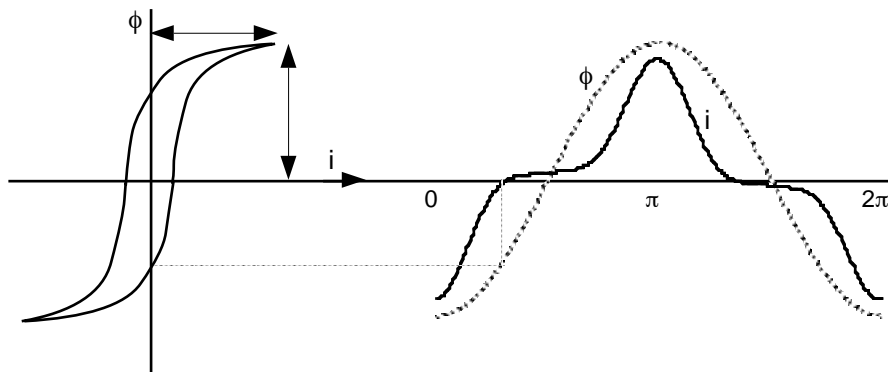


efeito das ranhuras ($b' = 3; m = 3$)

Um caso típico de geração de harmónicos em grandezas com variação no domínio do tempo, na área científica das Máquinas Eléctricas, diz respeito ao comportamento das grandezas eléctricas dos circuitos eléctricos que envolvem núcleos de material ferromagnético, como, por exemplo, os transformadores. Neste caso, devido ao carácter não linear de variação do fluxo magnético indutor com a corrente eléctrica, ilustrado na característica de magnetização do material, apesar da forma de onda da tensão de alimentação do circuito ser sinusoidal a corrente eléctrica de magnetização possui termos harmónicos.



No caso mais geral em que a característica de magnetização do material é representada por um ciclo histerético, a corrente de magnetização além de possuir termos harmónicos, está esfasada (ligeiramente), relativamente ao fluxo magnético, de um pequeno ângulo: o *ângulo de atraso magnético*.



Quando a característica de magnetização é não linear, mas é considerada unívoca, desprezando-se, portanto, as perdas no ferro, e quando apenas existe uma curva de magnetização que a cada valor da corrente eléctrica faz corresponder um, e só um, valor para o

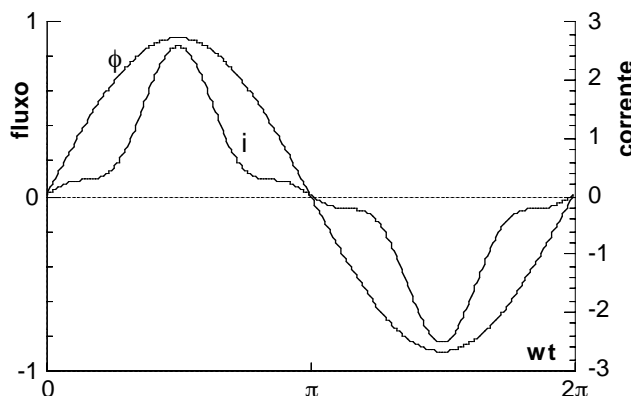
fluxo magnético, então a corrente eléctrica de magnetização ainda se apresenta distorcida, mas não existe esfasamento entre a corrente eléctrica e o fluxo magnético.

Exemplo_2.1-1 — Considerando que a curva característica das propriedades magnéticas $i(\phi)$ do material ferromagnético do núcleo de um transformador monofásico é aproximada pela equação $i = 0,622 \cdot \phi + 5,343 \cdot \phi^9$, pretende-se determinar a composição em termos harmónicos da corrente eléctrica de magnetização quando o fluxo magnético tem um andamento sinusoidal, no tempo, dado por $\phi = 0,9 \cdot \text{sen}(\omega t)$.

Um simples programa de computador permite determinar, para cada instante do tempo t , o valor do fluxo magnético ϕ ; para esse valor, e através da expressão que relaciona o fluxo magnético com a corrente eléctrica de magnetização, determina-se o valor da corrente i no instante t . Uma análise harmónica de $i_k(t_k)$, com o programa FOURIER_1 permite determinar o conteúdo em termos harmónicos da corrente de magnetização.

Como é de prever o terceiro harmónico é o harmónico mais importante para a forma de onda da corrente eléctrica.

$$i_1 = 1,58 \cdot \text{sen}(\omega t) \quad \{100\% \} \quad i_3 = -0,68 \cdot \text{sen}(3\omega t) \quad \{43\% \} \quad i_5 = 0,29 \cdot \text{sen}(5\omega t) \quad \{18,4\% \}$$



Para além dos harmónicos temporais criados pela característica não linear de uma carga com enrolamentos envolvendo um núcleo de material ferromagnético, ainda podem surgir outras situações com este tipo de carga que provocam o aparecimento de harmónicos. É o caso de a carga estar inserida num sistema de cargas desequilibradas, ou quando é introduzida, por um sistema rectificador, uma componente contínua.

Quando no circuito eléctrico existem cargas não lineares constituídas por conversores electrónicos de potência — rectificadores, onduladores, cicloconversores, ... — então as máquinas eléctricas intercaladas nesse circuito são submetidas a um regime anormal de alimentação, porque as grandezas de alimentação, tensão e corrente, são grandezas periódicas não sinusoidais. Em algumas destas situações, também a frequência de alimentação base (ou fundamental) pode ser diferente da frequência industrial.

Hoje, devido a uma importância crescente, e a uma ampla utilização, os conversores electrónicos, principalmente os que possuem elementos semicondutores com comutação forçada, tornaram-se os responsáveis pela introdução de termos harmónicos nas formas de onda das grandezas eléctricas dos sistemas de energia. Esta situação obriga a um estudo aprofundado do funcionamento das máquinas eléctricas nesse regime de alimentação, baseado numa caracterização precisa dos termos harmónicos componentes dessas formas de onda distorcidas.

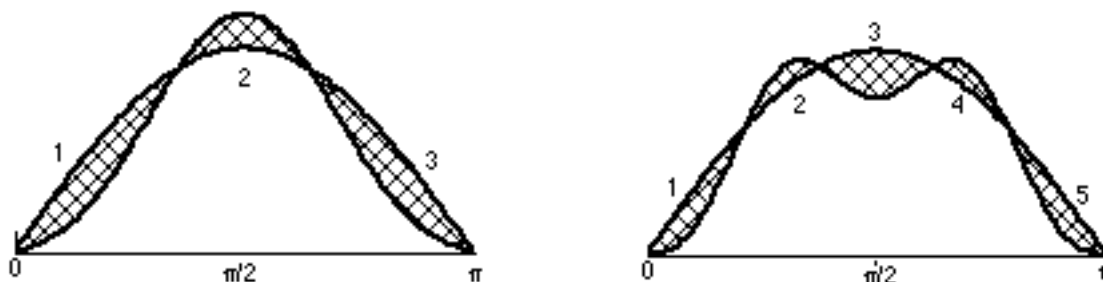
2.2 Caracterização da Distorção

A presença de termos harmónicos na forma de onda de uma grandeza traduz-se por

uma distorção, ou alteração, dessa forma relativamente à onda sinusoidal. Existem vários critérios para caracterizar essa distorção.

Um primeiro critério, com carácter expedito, permite detectar qual o termo harmónico mais importante na forma de onda distorcida. Nessa detecção utiliza-se uma meia arcada de senoide que limita a mesma área que a correspondente a meio período da forma de onda distorcida.

O número de áreas compreendidas entre a arcada de senoide e a onda distorcida, indica a ordem do termo harmónico de maior importância.



Além desta regra empírica, mas de grande utilidade, existe um conjunto de definições relativas aos valores característicos das grandezas periódicas que são utilizados na definição dos factores que caracterizam a distorção de uma grandeza não sinusoidal.

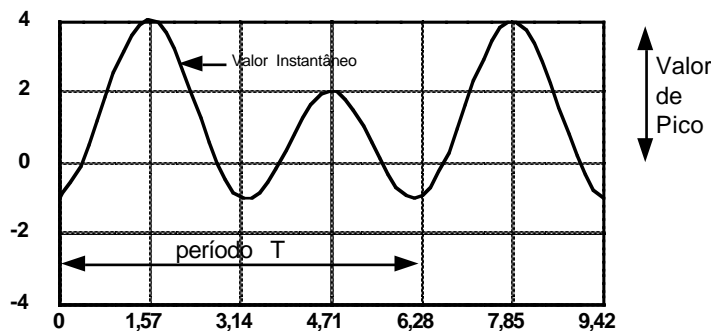
Numa forma de onda periódica não sinusoidal são referidas as seguintes características importantes:

Período — T — intervalo mínimo da variável independente (tempo, espaço) no fim do qual a grandeza periódica se reproduz identicamente.

Alternância — conjunto de valores da grandeza na parte do período em que têm o mesmo sinal.

Ciclo — conjunto de valores assumidos por uma grandeza durante um período.

Frequência — $f = 1/T$ [Hz] — número de vezes que a grandeza assume as mesmas características numa unidade de tempo; o seu valor é dado pelo inverso do período quando este está expresso em unidades de tempo.



Também são característicos os seguintes valores,

Valor Instantâneo — (expresso em letra minúscula) — valor da grandeza para um dado valor da variável independente.

Valor de Pico (valor de vértice) — G_m — valor máximo instantâneo da grandeza num dado intervalo.

Valor Médio — G_a — é definido, no domínio do tempo, por $G_a = (1/T) \cdot \int_0^T g(t) dt$

Valor Eficaz (valor médio quadrático) — (expresso por uma letra maiúscula) — é definido

$$\text{por } G = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T g^2(t) dt}.$$

Valor Médio Absoluto (valor médio rectificado) — G_r — é definido pela expressão

$$G_r = (1/T) \cdot \int_0^T |g(t)| dt.$$

Quando aplicadas a uma grandeza *puramente sinusoidal* estas definições permitem determinar que o valor médio é nulo, que o valor eficaz é $G = G_{ef} = G_m/\sqrt{2}$, e que o valor médio absoluto é $G_r = G_m \cdot (2/\pi)$.

É através do valor médio que se pode caracterizar uma grandeza periódica.

Grandeza periódica alternada pura — é uma grandeza periódica com valor médio nulo.

Grandeza periódica pulsatória — é uma grandeza periódica com valor médio diferente de zero.

Grandeza periódica ondulada — é uma grandeza pulsatória que tem sempre o mesmo sinal.

Para as grandezas periódicas não sinusoidais utilizam-se os seguintes factores que caracterizam a distorção da forma de onda

Factor de Forma (FF) — é a razão entre o valor eficaz (ou valor médio quadrático) e o valor médio absoluto da grandeza.

$$FF = \sqrt{\frac{\frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) dt}{\frac{1}{T} \int_0^T |g(t)| dt}}$$

Factor de Pico (ou factor de vértice) — é a razão entre o valor máximo da grandeza e o seu valor eficaz (ou valor médio quadrático).

$$\text{Factor de Pico} = \frac{G_{\max}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) dt}}$$

Quando aplicados a uma grandeza puramente sinusoidal estas definições permitem determinar os valores $FF = 1,111$ e o factor de vértice = 1,41.

Se uma grandeza periódica não sinusoidal está representada pelo seu desenvolvimento em série de termos harmónicos, série de Fourier, o seu valor médio quadrático resulta da aplicação da definição, à série de funções trigonométricas

representativa da função. Atendendo às condições de ortogonalidade, resulta uma expressão da forma:

$$G = \sqrt{G_0^2 + G_1^2 + G_2^2 + \dots + G_n^2 + \dots} = \sqrt{\sum_h G_h^2}$$

assim, o valor eficaz de uma grandeza periódica qualquer é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados dos valores eficazes dos harmónicos e do termo contínuo.

Factor de Distorção (FDH) (ou factor harmónico) — é a razão entre o valor médio quadrático (ou valor eficaz) de todos os termos harmónicos e o valor médio quadrático (ou valor eficaz) do termo fundamental (frequentemente exprime-se em percentagem).

$$\text{Factor de Distorção} = \frac{\sqrt{\sum_{h \neq 1} G_h^2}}{G_1}$$

Note-se que nesta definição (IEEE-519, § 2.1) o denominador da razão é o valor eficaz do termo fundamental, enquanto que outros autores adoptam uma definição (CEI-05, 05-02-120), em que o denominador é o valor eficaz da grandeza não sinusoidal. Como valor máximo para a ordem do harmónico, utiliza-se $h = 50$.

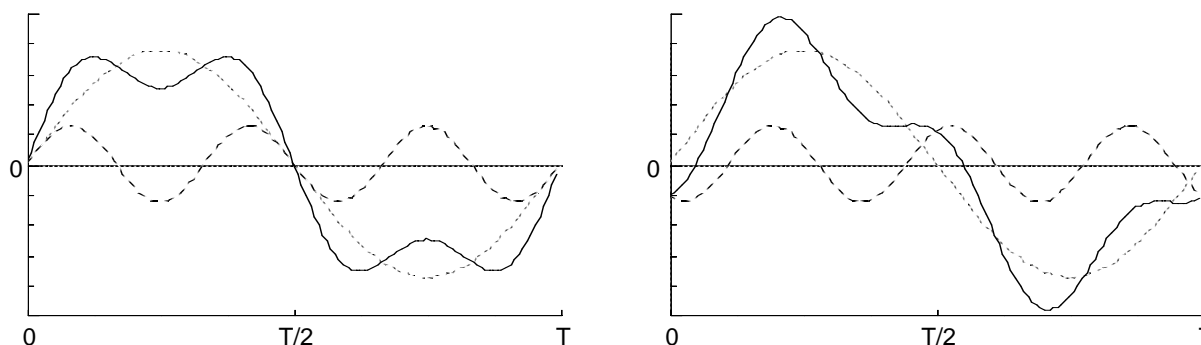
A norma CEI 34-1.A, que se aplica a máquinas eléctricas síncronas, define um factor harmónico telefónico (FHT), que é utilizado para caracterizar a forma de onda da tensão em circuito aberto de uma máquina síncrona.

Factor Harmónico Telefónico — FHT — é a razão entre o valor eficaz (ou valor médio quadrático) ponderado de todos os termos harmónicos e o valor eficaz da tensão nos terminais da máquina. Exprime-se em percentagem. É calculado numa gama de frequências de 0 a 5 kHz.

$$\text{FHT} = \left(\frac{\sqrt{\sum_{h=1}^n G_h^2 \cdot \lambda_h^2}}{U} \right) \cdot 100\%$$

O valor λ_h do factor de ponderação para os diferentes termos harmónicos, ou para as diferentes frequências, que entra em consideração com a sensibilidade do ouvido humano às diferentes frequências dos termos harmónicos; é fornecido por uma tabela, ou por um gráfico: $f = 150 \text{ Hz} \rightarrow \lambda = 0,00665$, $f = 750 \text{ Hz} \rightarrow \lambda = 0,895$, ... etc.

Estes factores apenas consideram o valor eficaz da grandeza ou do seus termos harmónicos. Podem não dar uma informação muito clara sobre a forma de onda da grandeza, ou sobre a respectiva distorção. Como exemplo, e considerando duas ondas compostas de um termo fundamental e de um terceiro harmónico, quando este está esfasado de um quarto de período, a forma de onda é muito diferente da forma de onda correspondente à situação em que o terceiro harmónico está em fase com o termo fundamental.



No domínio das Máquinas Eléctricas, frequentemente, ocorre a necessidade de substituir o estudo de uma grandeza pela grandeza sinusoidal que melhor a aproxima. Considerando que a grandeza periódica não sinusoidal $g = \sum_h G_h \cdot \text{sen}(h\omega t - \varphi_h)$ deve ser aproximada pela grandeza sinusoidal $g_s = GS \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi)$, e utilizando um critério de aproximação que minimiza o quadrado da diferença de área entre as curvas representativas das duas funções,

$$E = (1/T) \cdot \int_0^T (g - g_s)^2 dt = GS^2 + G_1^2 - 2 \cdot GS \cdot G_1 \cos(\varphi - \varphi_1) + \sum_{h \neq 1} G_h^2$$

Determinando o mínimo, $(\partial E / \partial GS) = 0$ e $(\partial E / \partial \varphi) = 0$, atendendo às condições de ortogonalidade, resulta que:

$$GS = G_1 \quad \text{e} \quad \varphi = \varphi_1$$

Portanto, dentro do critério adoptado, o termo fundamental, $G_1 \angle \varphi_1$, é a função sinusoidal que melhor aproxima a grandeza não sinusoidal.

Este critério de aproximação, apesar de justificado, não apresenta grandes vantagens quando se pretendem estudar os efeitos das grandezas periódicas não sinusoidais. Então é preferível substituir a grandeza por outra que produza os mesmos efeitos. Atendendo ao significado físico do valor eficaz de uma grandeza sinusoidal (por exemplo da corrente eléctrica) é preferível adoptar como substituto da grandeza não sinusoidal uma grandeza sinusoidal que tenha o mesmo valor eficaz daquela outra grandeza.

$$\text{Se } i(t) = \sum_h I_h \cdot \cos(h\omega t) \quad \leftrightarrow \quad I_{\text{ef}} = \sqrt{\sum_h (I_h / \sqrt{2})^2}$$

$$i_s(t) = \sqrt{2} \cdot I_{\text{ef}} \cdot \cos(\omega t)$$

Exemplo-2.2-1 — Um exemplo divulgado de um ensaio em vazio de um transformador (200/100 V; 50 Hz) fornece os seguintes valores numéricos,

$$U_0 = 200V \quad I_0 = 1,36 A \quad P_{00} = 29,0 W$$

a análise harmónica da corrente eléctrica em vazio produziu o resultado,

$$i_0(t) = 1,69 \cdot \text{sen}(\omega t - 83^\circ) + 0,79 \cdot \text{sen}(3\omega t - 84^\circ) + 0,17 \cdot \text{sen}(5\omega t - 84^\circ) + \dots$$

desprezando-se os termos harmónicos de ordem superior a 5.

O factor de distorção da corrente eléctrica em vazio é

$$\text{Factor Distorção} = (\sqrt{(0,79/\sqrt{2})^2 + (0,17/\sqrt{2})^2}) / (1,69/\sqrt{2}) = 0,273 \quad \text{ou } 27,3 \%$$

O valor eficaz para esta corrente eléctrica não sinusoidal é,

$$I_0 = \sqrt{(1,69/\sqrt{2})^2 + (0,79/\sqrt{2})^2 + (0,17/\sqrt{2})^2} = 1,33 A$$

Este valor é suficientemente próximo do valor eficaz lido, durante o ensaio, no amperímetro. Já o valor eficaz do termo fundamental, $1,69/\sqrt{2} = 1,19 A$, se afasta mais do valor lido, devido à existência de harmónicos de ordem "elevada" ($h = 5$).

2.3 Grandezas Eléctricas Não Sinusoidais

As máquinas eléctricas, como unidades electromecânicas de conversão de energia,

são caracterizadas por variadas grandezas físicas: mecânicas, magnéticas e eléctricas, Todas essas grandezas podem ter uma variação não sinusoidal no tempo, ou no espaço, mas, devido aos seus problemas específicos, e à sua importância, torna-se necessário caracterizar as grandezas eléctricas periódicas com variação não sinusoidal.

2.3.1 Sistemas Monofásicos

Quando num sistema eléctrico apenas existe uma tensão alternada simples, as diversas grandezas eléctricas inerentes ao circuito formam um sistema monofásico de grandezas. Devido a vários fenómenos, estas grandezas podem não ter um comportamento sinusoidal, e por isso têm de ser caracterizadas de uma forma particular.

TENSÃO

Devido à máquina em que é gerada, ou a quedas de tensão no circuito eléctrico, a tensão de alimentação de um circuito eléctrico monofásico pode ser não sinusoidal. Nessa situação é importante conhecer o valor eficaz da tensão,

$$U_{ef} = \sqrt{\sum_h U_h^2}$$

e o factor de distorção FDH,

$$\text{Factor de Distorção} = \left(\frac{\sqrt{\sum_{h \neq 1} U_h^2}}{U_1} \right) \cdot 100 \%$$

considerando-se que h varia até $h = 50$, ou até um valor tal que $U_h = 0,01 \cdot U_1$.

Exemplo_2.3.1-1 — Numa rede eléctrica monofásica, que tem intercalado um conversor electrónico de potência, foi medido o conteúdo de harmónicos na tensão eléctrica que se encontra expresso no quadro seguinte:

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U_h \%$	100	0	0,22	0,15	2,2	0	0,94	0,14	0

Para esta tensão de alimentação o valor eficaz é $U_{ef} = 100,029$ V, e o factor de distorção é $FDH = 2,41 \%$.

Uma determinada instalação eléctrica pode admitir um valor para o factor de distorção da tensão que depende do equipamento que integra a instalação e da sensibilidade desse equipamento a uma alimentação com uma onda de tensão distorcida. Para um sistema de energia geral, e no âmbito da média tensão (2,4 ÷ 60 kV), admite-se 5 % como limite para o factor de distorção da tensão. No âmbito da alta tensão (≥ 115 kV), admite-se 1,5 % como limite para o factor de distorção da tensão.

CORRENTE ELÉCTRICA

O estudo de uma corrente eléctrica não sinusoidal permite caracterizar fisicamente o conceito de valor eficaz de uma corrente eléctrica não sinusoidal.

Considerando um corrente eléctrica sinusoidal verifica-se que o valor eficaz da corrente eléctrica é o valor que teria um corrente eléctrica contínua que circulando numa mesma carga óhmica libertasse a mesma quantidade de calor, por efeito Joule,

$$i = I_m \cdot \text{sen}(\omega t) \rightarrow W = P \cdot T = R \cdot \int_0^T i^2 dt = (1/2) \cdot R \cdot I_m^2 \cdot T = R \cdot I^2 \cdot T \Rightarrow I = I_m / \sqrt{2} = I_{ef}$$

No caso de uma corrente eléctrica não sinusoidal, o valor eficaz do termo fundamental e o valor eficaz dos termos harmónicos da corrente eléctrica originariam, individualmente, as perdas de potência por efeito Joule na resistência R ,

$$P = R \cdot I_1^2 + R \cdot I_1^2 + R \cdot I_1^2 + \dots = R \cdot (I_1^2 + I_1^2 + I_1^2 + \dots) = R \cdot I^2 \Rightarrow I = \sqrt{I_1^2 + I_1^2 + I_1^2 + \dots} = I_{ef}$$

Também a definição de outros factores, (FDH), pode ser aplicada a uma corrente eléctrica para determinar o respectivo valor. Para além disso, no estudo da desclassificação dos transformadores devido ao aquecimento extra provocado pela forma de onda não sinusoidal da corrente eléctrica, aparece um novo factor, o *Factor-K*, que traduz a influência dos harmónicos de mais elevada ordem nas perdas adicionais por correntes de Foucault. Estas perdas de energia são proporcionais ao quadrado da intensidade da corrente eléctrica e ao quadrado da sua frequência.

Factor-K — valor que dá uma informação sobre a importância das perdas suplementares nos transformadores devido à forma não sinusoidal da corrente eléctrica de carga (ANSI/IEEE C57.110 - 1986). É determinado por:

$$\text{Factor-K} = \sum_{h=1}^{h=h_{\max}} h^2 \cdot I_h^2(\text{pu})$$

nesta expressão h é a ordem do termo harmónico, e $I_h(\text{pu})$ é o valor eficaz do termo harmónico h da corrente, reduzido ao valor eficaz nominal da corrente de carga.

Exemplo_2.3.1-2 — Um transformador, com uma corrente eléctrica nominal de 1200 A, absorve uma corrente de carga com um valor eficaz de 1 pu e com a seguinte composição harmónica,

h	1	5	7	11	13	17	19
$I_h(\text{pu})$	0,978	0,171	0,108	0,044	0,028	0,015	0,0098
$h^2 \cdot I_h^2$	0,957	0,731	0,571	0,234	0,133	0,065	0,035
Factor-K							2,726

Utilizando a definição de Factor-K pode-se determinar esse valor: Factor-K = 2,7.

IMPEDÂNCIA

No estudo dos circuitos eléctricos considera-se que estes são constituídos por um conjunto qualquer de resistências, indutâncias e condensadores. Com a consideração do conceito de impedância complexa \underline{Z} , é possível estudar os diferentes circuitos. Os elementos dos circuitos ficam caracterizados pela respectiva impedância.

$$\text{resistência } \boxed{} \quad \underline{Z} = R$$

A resistência eléctrica de um circuito é representada por um elemento passivo que dissipa em calor toda a energia eléctrica que recebe. A sua impedância complexa é puramente óhmica, $\underline{Z} = R$ ou $\underline{Z} = R \angle 0^\circ$. Considera-se que uma resistência R é uma dipolo linear, mas nos estudos envolvendo ondas periódicas não sinusoidais, como podem existir harmónicos de ordem elevada, aquela consideração é altamente conservadora. Para frequências elevadas, harmónicos de ordem superior a 19ª (950 Hz), faz-se sentir o efeito pelicular nos condutores eléctricos, e nessa situação o valor da resistência R do circuito é alterado, deixando a seu comportamento de ser linear.


indutância  $Z = j\omega L$

O elemento que num circuito é responsável pelo aparecimento do efeito de um campo magnético é uma indutância. Materialmente traduz-se por uma bobina de fio condutor sem resistência eléctrica enrolado em torno de um núcleo de material não ferromagnético, caracterizado pela sua indutância L , e com uma impedância complexa dada por $Z = j\omega L$ ou $Z = \omega L / +90^\circ$, em que $X = \omega L$ é a reactância (indutiva).

A reactância de uma bobina depende da frequência da tensão de alimentação, $X = 2\pi \cdot f \cdot L$. Para uma tensão periódica não sinusoidal o valor da reactância aumenta com o valor da ordem do harmónico.

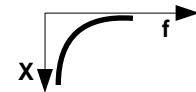


Quando a bobina de fio condutor está enrolada sobre um núcleo de material ferromagnético, a sua característica deixa de ser linear, e torna-se a origem de harmónicos de saturação na forma de onda da corrente eléctrica no circuito, mesmo quando a tensão de alimentação é sinusoidal.

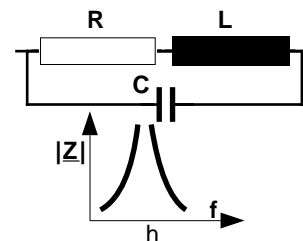
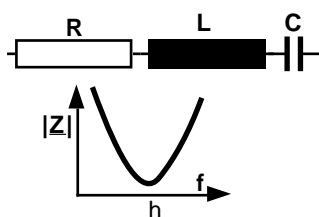
condensador  $Z = -j/\omega C$

O elemento que num circuito é responsável pelo aparecimento do efeito de um campo eléctrico é um condensador. Materialmente traduz-se por dois condutores eléctricos separados por um dieléctrico, caracterizado pela sua capacidade C , e com uma impedância complexa dada por $Z = -j/\omega C$ ou $Z = (1/\omega C) / -90^\circ$, em que $X = 1/\omega C$ é a reactância (capacitiva).

A reactância de um condensador depende da frequência da tensão de alimentação, $X = 1/(2\pi \cdot f \cdot C)$. Para uma tensão periódica não sinusoidal o valor da reactância capacitiva diminui com o valor da ordem do harmónico.



Nas redes eléctricas que envolvem máquinas eléctricas estão sempre presentes bobinas com resistência e indutâncias, que, frequentemente e por comodidade de estudo, se consideram lineares (!..). Podem, também existir bancos de condensadores (por exemplo, para correcção do factor de potência da instalação), o que forma circuitos com os três tipos de elementos básicos: *circuitos RLC*. Para este tipo de circuitos pode ocorrer uma situação em que para determinada frequência, a *frequência de ressonância*, coincidente com determinada ordem do termo harmónico, a impedância total do circuito eléctrico atinge um valor extremo, porque o valor da reactância indutiva iguala o valor da reactância capacitiva, $\omega L = 1/\omega C$. Ocorre, então, uma situação de *ressonância* do circuito eléctrico.



Conforme o circuito eléctrico pode ocorrer um caso de ressonância num circuito RLC série, ou num circuito RLC paralelo. No caso de “ressonância série” a impedância total do circuito reduz-se, somente, ao valor da resistência para a frequência de ressonância do

circuito, $f_r = (1/2\pi) \cdot \sqrt{1/LC}$, com o conseqüente aumento da amplitude da corrente eléctrica e a queda de tensão nos elementos do circuito.

No caso da “ressonância em paralelo” a ressonância também ocorre para um valor da frequência de ressonância dado por $f_r = (1/2\pi) \cdot \sqrt{1/LC}$, mas a impedância do circuito torna-se muito elevada, pelo que a corrente eléctrica na malha é muito superior à corrente eléctrica da alimentação do circuito.

Exemplo_2.3.1-3 — Para uma bobina, sem núcleo ferromagnético, inserida numa rede eléctrica de corrente alternada, pode-se considerar que a sua resistência eléctrica é desprezável face ao valor da reactância indutiva, e que existe uma capacidade distribuída entre as espiras da bobina equivalente à capacidade de um condensador ligado em paralelo com a bobina. O circuito eléctrico equivalente a esta bobina, dentro destas condições de estudo, é um circuito RLC paralelo.

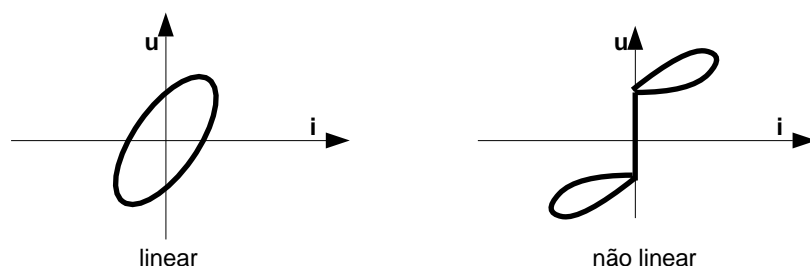
Para a frequência fundamental da rede, 50 Hz, a reactância indutiva tem o valor $X_{L1} = 0,8 \Omega$, e a reactância capacitiva $X_{C1} = -36,3 \Omega$. A impedância do conjunto é $Z_1 = 0,82 \Omega$.

Para o harmónico de 7ª ordem, $f_7 = 350$ Hz, a reactância indutiva tem o valor $X_{L7} = 5,6 \Omega$, e a reactância capacitiva $X_{C7} = -98,93 \Omega$. A impedância do conjunto é $Z_7 = -98,9 \Omega$.

Como a amplitude do termo fundamental da corrente eléctrica que passa na bobina é de 1 A, a queda de tensão na bobina para o termo fundamental é de 0,82 V, mas para o 7ª harmónico essa queda de tensão é de $(1/7) \cdot (-98,93) = -14,1$ V; nesta situação a corrente eléctrica no condensador é de 2,67 A.

Assim, uma situação de ressonância de um circuito eléctrico pode traduzir-se pelo aparecimento de sobretensões harmónicas ou de sobrintensidades harmónicas, que ponham em risco o funcionamento das máquinas eléctricas.

Existe, ainda, um vasto conjunto de aparelhos que se comportam como uma carga não linear nos circuitos eléctricos em que estão inseridos. A forma de onda da corrente eléctrica que os alimenta é rica em termos harmónicos, o que provoca uma queda de tensão, nessa carga, rica em termos harmónicos. Tal situação pode ser suficiente para provocar a distorção da tensão de alimentação do circuito. O carácter não linear de uma carga é representada pela curva característica de variação dos valores instantâneos $u(i)$. No caso de uma carga linear essa curva característica é uma elipse.



Lei de Ohm

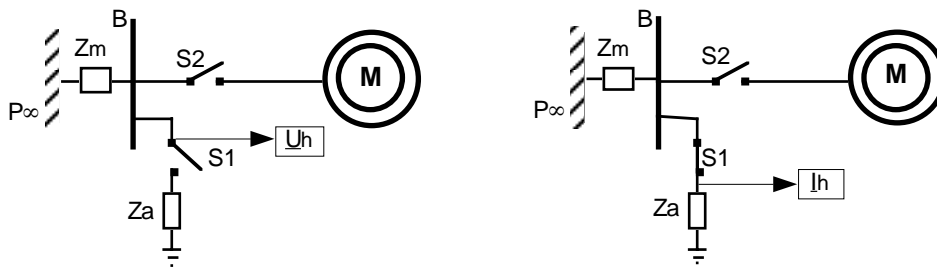
No estudo dos circuitos eléctricos monofásicos em que as grandezas eléctricas têm um andamento não sinusoidal pode ser utilizada a Lei de Ohm, desde que as características do circuito permitam a aplicação do teorema da sobreposição, e as medidas estejam referidas à mesma grandeza (ou seja, medidas nas mesmas condições). Na utilização da forma simbólica da

Lei de Ohm, para um determinado termo harmónico h , é importante a consideração do respectivo esfasamento (phase), φ_h .

$$\underline{U}_h = \underline{Z}_h \cdot \underline{I}_h$$

Por isso, nos estudos dos circuitos eléctricos que envolvem a utilização da Lei de Ohm é importante conhecer a amplitude e o esfasamento dos harmónios: $\underline{G}_h = G_h \angle \varphi_h$.

Exemplo_2.3.1-4 — No circuito eléctrico figurado, e com a técnica de medida usada, não era possível utilizar, directamente, a Lei de Ohm para determinar as componentes harmónicas da impedância



Medindo os termos harmónicos da tensão em vazio V_{B0h} , e medindo os termos harmónicos da corrente eléctrica, através da queda de tensão na impedância Z_a , não é possível utilizar os valores obtidos para determinar a impedância para os termos harmónicos da rede eléctrica, Z_m , a montante do barramento B, porque se alterou a grandeza de referência V_B .

2.3.2 Sistemas Polifásicos

Um sistema polifásico de grandezas eléctricas é um conjunto de m grandezas periódicas, com a mesma frequência, em que duas grandezas consecutivas estão esfasadas, entre si, de um valor múltiplo de $(1/m)$ do período (por exemplo, $2\pi/3$ para o sistema trifásico $m = 3$)

No estudo das grandezas periódicas não sinusoidais polifásicas, um dos aspectos importantes é que num sistema polifásico de ordem m , os termos harmónicos de ordem múltipla de m , $h = n \cdot m$, estão em fase, porque o ângulo de fase, $h \cdot (\omega t \pm (2\pi/m))$, entre cada duas fases do sistema difere de um múltiplo inteiro de 2π radianos; $(h \cdot \omega t \pm (n \cdot m \cdot 2\pi/m))$.

Para o sistema trifásico, em que os ângulos de fase para cada fase são $(\omega t + 0)$, $(\omega t - (2\pi/3))$, e $(\omega t - (4\pi/3))$, os harmónicos de ordem múltipla de três são sínfásicos. $(h \cdot \omega t \pm (h \cdot 2\pi))$. Como essa é também uma das características de um sistema homopolar de componentes simétricas, pode-se caracterizar o comportamento daqueles harmónicos como um “comportamento homopolar” (!...).

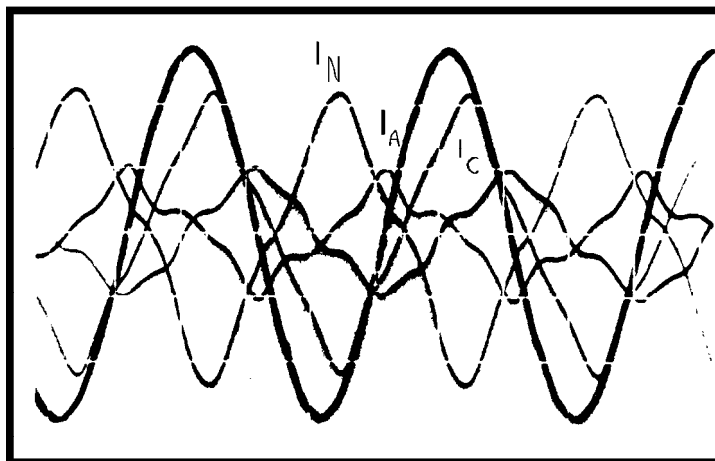
h	R	S	T	Sistema
1	$\angle 0$	$\angle 2\pi/3$	$\angle 4\pi/3$	directo
2	$\angle 0$	$\angle 4\pi/3$	$\angle 8\pi/3 \equiv \angle 2\pi/3$	inverso
3	$\angle 0$	$\angle 6\pi/3 \equiv \angle 0$	$\angle 12\pi/3 \equiv \angle 0$	homopolar
4	$\angle 0$	$\angle 8\pi/3 \equiv \angle 2\pi/3$	$\angle 16\pi/3 \equiv \angle 4\pi/3$	directo
5	$\angle 0$	$\angle 10\pi/3 \equiv \angle 4\pi/3$	$\angle 20\pi/3 \equiv \angle 2\pi/3$	inverso
6	$\angle 0$	$\angle 12\pi/3 \equiv \angle 0$	$\angle 24\pi/3 \equiv \angle 0$	homopolar

Os outros termos harmónicos formam um sistema de grandezas com um ordem de sucessão directa, ou com uma ordem de sucessão inversa.

Conforme o tipo de ligação das diferentes fases do sistema trifásico, assim pode variar o conteúdo em termos harmónicos. No caso de uma ligação em que os termos harmónicos sínclicos não podem circular, os termos harmónicos com uma ordem múltipla do número de fases do sistema estão ausentes da forma de onda da corrente eléctrica respectiva.

Ligação em Estrela (Y)

Neste tipo de ligação os harmónicos sínclicos da corrente eléctrica só podem circular nas fases da estrela se estiver ligado o neutro da ligação em estrela. Nesse caso $I_R + I_S + I_T = I_{h3} = I_N$; senão $I_R + I_S + I_T = 3 \cdot I_{h3} = 0$.



Corrente de magnetização num transformador em estrela com o neutro ligado (Yoy)

Ligação em Triângulo (D)

Neste tipo de ligação os harmónicos sínclicos da corrente eléctrica podem sempre circular na malha do triângulo. Nesse caso, só existirão harmónicos sínclicos nas grandezas da fase. Nos valores compostos das correntes, corrente na linha, os termos harmónicos anulam-se porque aqueles valores resultam da diferença dos valores em duas fases; deixa, também, de se verificar a relação *grandezo composta* = $\sqrt{3}$ *grandezo simples*.

Ligação em Zigue-zague (Z)

Neste tipo de ligação os harmónicos sínclicos da corrente eléctrica só podem circular nas fases do zigue-zague se estiver ligado o neutro da ligação. Se o fluxo indutor contiver aquele tipo de harmónicos eles apenas existirão nas forças electromotrizes que se desenvolvem nos enrolamentos parcelares. Como a tensão simples resulta da diferença de duas tensões parcelares, aqueles harmónicos não existem nas tensões simples.

Exemplo_2.3.2-1 — Numa ligação trifásica, uma grandeza composta é $\sqrt{3}$ o valor da grandeza simples. Quando a grandeza é periódica e não sinusoidal há sempre um diferença entre o valor da grandeza simples e da grandeza composta devido à mudança do ângulo de esfasamento, ou à sequência de fases, presente no termo harmónico.

Para o harmónico de ordem geral h a grandeza composta, formada pela diferença de duas grandezas simples; isto é

$$G_{RS} = G_R - G_S = G_{mh} \cdot \text{sen}(h \cdot \omega t) - G_{mh} \cdot \text{sen}(h \cdot \omega t - h \cdot 2\pi/3) =$$

$$G_{RS} = 2G_{mh} \cdot \cos(h \cdot \omega t - h \cdot \pi/3) \cdot \sin(h \cdot \pi/3)$$

O valor eficaz desta grandeza composta determina-se, e é $2G_{efh} \cdot \sin(h\pi/3)$.

Para $h = 3, 6, 9, \dots$, o valor eficaz da grandeza composta anula-se.

2.3.3 Potência Eléctrica

O estudo da potência associada às grandezas eléctricas periódicas não sinusoidais é difícil, devido à falta de definições precisas para os conceitos envolvidos, e à discussão científica em curso sobre este assunto devido ao carácter insatisfatório das definições até agora apresentadas.

Para um circuito monofásico, onde está aplicada uma tensão periódica não sinusoidal de valor $u(t) = \sum_h \sqrt{2} \cdot U_h \cdot \cos(h\omega t + \varphi_h)$,

e uma corrente eléctrica $i(t) = \sum_h \sqrt{2} \cdot I_h \cdot \cos(h\omega t + \phi_h)$

é possível definir as seguintes grandezas relativas à análise energética do sistema eléctrico.

Potência Instantânea — $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ — é o produto do valor instantâneo da tensão pelo valor instantâneo da corrente eléctrica.

Esta potência obedece ao Princípio de Conservação da Energia, o que implica que a potência instantânea total do sistema eléctrico é a soma das potências instantâneas dos vários elementos componentes.

Potência Activa — [W] — a potência activa num instante t define-se como o valor médio da potência instantânea,

$$P = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(t) \cdot i(t) dt$$

O cálculo deste integral permite obter como resultado final que a potência activa do circuito é dada por,

$$P = \sum_{h=0}^M U_h \cdot I_h \cdot \cos(\varphi_h - \phi_h) = \sum_{h=0}^M U_h \cdot I_h \cdot \cos\theta_h$$

Como resultado da integração efectuada podem retirar-se duas conclusões simplificativas:

- o valor médio da potência duma tensão contínua com uma corrente alternada sinusoidal é nulo;
- o valor médio da potência eléctrica de dois sistemas alternados de frequência diferente é nulo.

A potência aparente é uma grandeza com significado físico, que obedece, também, ao Princípio de Conservação da Energia, e com uma definição universalmente aceite.

Já as restantes grandezas têm uma definição que, nos últimos anos, tem sido contestada, devido, a não possuírem existência física, devido à sua utilidade, ou devido às dificuldades com os respectivos aparelhos de medida...

Potência Aparente — [VA] —

Na apresentação de uma definição para a potência aparente de um circuito, considera-

-se que a tensão e a corrente eléctrica são grandezas periódicas com períodos diferentes. A potência aparente nos terminais de entrada do sistema eléctrico será dada por,

$$S = \frac{1}{T_u} \int_{t-T_u/2}^{t+T_u/2} u^2(t) dt \cdot \frac{1}{T_i} \int_{t-T_i/2}^{t+T_i/2} i^2(t) dt$$

Efectuando as respectivas operações, e considerando que $h = n$ representam os harmónicos comuns à onda de tensão e à onda de corrente, $h = m$ os harmónicos que apenas existem na onda de tensão e $h = p$ os harmónicos que apenas existem na onda de corrente eléctrica, resulta que:

$$S = \left(\sum_1^n U_n^2 + \sum_1^m U_m^2 \right) \cdot \left(\sum_1^n I_n^2 + \sum_1^p I_p^2 \right)$$

Assim, a potência aparente (S) pode ser decomposta, analiticamente, em três componentes: a Potência Activa Aparente (S_R); a Potência Reactiva Aparente (S_X); a Potência de Distorção (ou potência deformante) (S_D).

$$\text{Potência Activa Aparente} \quad S_R^2 = \sum_1^n U_n^2 \cdot \sum_1^n I_n^2 \cdot \cos^2 \theta_n$$

$$\text{Potência Reactiva Aparente} \quad S_X^2 = \sum_1^n U_n^2 \cdot \sum_1^n I_n^2 \cdot \sin^2 \theta_n$$

$$\text{Potência de Distorção} \quad S_D^2 = \sum_1^n U_n^2 \cdot \sum_1^p I_p^2 + \sum_1^m U_m^2 \cdot \left(\sum_1^n I_n^2 + \sum_1^p I_p^2 \right)$$

Para estas grandezas verifica-se que a *potência aparente* (S) satisfaz a equação $S^2 = S_R^2 + S_X^2 + S_D^2$, [VA].

Note-se que $S_R^2 \neq P^2$, e que a potência activa aparente e a potência reactiva aparente podem estar associadas as duas correntes eléctricas fictícias i_R e i_X , que circulam, respectivamente, num ramo puramente óhmico e num ramo puramente indutivo de um circuito eléctrico equivalente à carga.

$$i_R = \sqrt{2} \sum_1^n (I_n \cdot \cos \theta_n) \cdot \cos(n \omega t + \phi_n) \quad i_X = \sqrt{2} \sum_1^n (I_n \cdot \sin \theta_n) \cdot \sin(n \omega t + \phi_n)$$

A potência aparente total S é uma grandeza que não tem significado físico; é apenas um valor que representa a capacidade de transferência de energia da carga a que está afectada.

Depois de admitida a decomposição da potência aparente nas suas três componentes, pode-se estabelecer a definição de potência reactiva de um sistema eléctrico. Esta grandeza é muito importante porque permite definir os parâmetros dos sistemas de correcção do factor de potência para sistemas eléctricos percorridos por grandezas eléctricas periódicas não sinusoidais, e caracterizados por um determinado factor de potência.

Factor de Potência — λ — em qualquer circuito eléctrico, com grandezas eléctricas periódicas de qualquer forma, define-se o factor de potência pelo factor que deve multiplicar a potência aparente para se obter a potência activa.

$$\lambda = (\text{Potência Activa}) / (\text{Potência Aparente})$$

A potência reactiva define-se da seguinte forma:

Potência Reactiva — [var] — definida para sistemas com grandezas eléctricas periódicas não sinusoidais como o valor de

$$S_X^2 = \sum_1^n U_n^2 \cdot \sum_1^n I_n^2 \cdot \text{sen}^2 \theta_n$$

Será este valor que se procurará compensar com uma instalação para correcção do factor de potência. Tal valor não pode ser inteiramente compensado com condensadores, se a tensão de alimentação da instalação também for não sinusoidal. No entanto, o valor da potência reactiva pode ser reduzido, desse modo, a um valor mínimo $S_{X_{\min}}$.

Exemplo_2.3.3-1 — Uma carga eléctrica não linear monofásica é alimentada por uma tensão periódica não sinusoidal $u(t)$, nela circula uma corrente periódica não sinusoidal $i(t)$:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 200 \cdot \text{sen}(\omega t) + \sqrt{2} \cdot 200 \cdot \text{sen}(2\omega t + 30^\circ) + \sqrt{2} \cdot 20 \cdot \text{sen}(3\omega t + 45^\circ) \text{ V,}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 20 \cdot \text{sen}(\omega t - 45^\circ) + \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \text{sen}(2\omega t - 60^\circ) + \sqrt{2} \cdot 20 \cdot \text{sen}(4\omega t - 60^\circ) \text{ A}$$

A potência activa absorvida pelo circuito é:

$$P = U_1 I_1 \cos \phi_1 + U_2 I_2 \cos \phi_2 = 4560,7 \text{ W}$$

As componentes da potência aparente são:

$$S_R = \sqrt{(U_1^2 + U_2^2) \cdot (I_1^2 \cos^2(\phi_1) + I_2^2 \cos^2(\phi_2))} = 4690,4 \text{ VA}$$

$$S_X = \sqrt{(U_1^2 + U_2^2) \cdot (I_1^2 \text{sen}^2(\phi_1) + I_2^2 \text{sen}^2(\phi_2))} = 4242,6 \text{ VA}$$

$$S_D = \sqrt{(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) \cdot (I_1^2 + I_2^2 + I_4^2)} = 2870,5 \text{ VA}$$

A potência aparente da carga é: $S = \sqrt{S_R^2 + S_X^2 + S_D^2} = 6954,5 \text{ VA}$

O factor de potência que a instalação apresenta é:

$$\lambda = P / S = 0,656 \text{ i}$$

Nos sistemas polifásicos, o valor da potência instantânea, potência activa, e potência reactiva são representados pela soma algébrica das respectivas grandezas para cada fase, quando as tensões estão definidas relativamente ao mesmo ponto de referência (o ponto neutro).

2.3.4 Medidas Eléctricas

Nos estudos que envolvem grandezas eléctricas periódicas não sinusoidais existe, também, a necessidade de conhecer o valor dessas grandezas. Utiliza-se para isso aparelhagem de medida, e auxiliar, em diversas montagens, mas é necessário atender a que:

- ✘ os aparelhos de medida, e os auxiliares, construídos para grandezas sinusoidais dão um *valor de medida errado* quando utilizados com grandezas periódicas não sinusoidais; normalmente esses aparelhos destinam-se a funcionar apenas a uma frequência (a frequência da rede);
- ✘ para fornecerem uma boa precisão na medida efectuada com grandezas periódicas não sinusoidais os aparelhos deveriam ter uma *gama de frequência* que atingisse o 20º harmónico;
- ✘ o princípio de funcionamento do aparelho — electrodinâmico, electrónico, digital — pode ser uma causa de melhoria da qualidade da medida, mas esta depende, sempre, do conceito de grandeza eléctrica

utilizado;

- ✘ seria necessário construir aparelhos que permitissem entrar em consideração com as *novas definições* para algumas grandezas (potência, factor de potência, ..) em regime periódico não sinusoidal;
- ✘ a situação de erro de medida agrava-se quando existe *desequilíbrio de cargas* no sistema eléctrico.

3. Consequências das Grandezas Periódicas Não Sinusoidais

A presença de grandezas com andamento sinusoidal de frequência elevada — os harmónicos — em sistemas eléctricos caracterizados por grandezas periódicas não sinusoidais, é responsável pelo aparecimento de um conjunto elevado de problemas capazes de alterarem, ou de impedirem, o cabal funcionamento de uma máquina eléctrica.

Um dos principais problemas está associado às *perdas de energia* que as grandezas com termos harmónicos provocam, e que se traduzem sempre por uma degradação de energia em calor. Esta situação, que leva ao aquecimento das máquinas eléctricas, obriga a estudos profundos sobre o aquecimento, e sobre o arrefecimento das máquinas eléctricas. Também, num esforço para compreender a razão da existência destas perdas são feitos estudos sobre os materiais e sobre o seu comportamento eléctrico, mecânico e térmico.

Outros problemas inerentes à presença de termos harmónicos dizem respeito à *interferência*, indutiva ou capacitiva, *com as redes de telecomunicações*, o que pode depender das ligações da máquina eléctrica utilizada.

No âmbito da agressão ambiental, há que entender aos problemas de *ruído e vibrações* causados pelas máquinas eléctricas; o que, na actual estado evolutivo da sociedade, é considerado prejudicial. Nessa situação, aspectos construtivos vários e a presença de termos harmónicos espaciais, e temporais, em algumas grandezas características, são responsáveis pela criação de situações de comportamento das máquinas eléctricas com difícil resolução técnica.

Mas, hoje, é sobretudo devido à presença de termos harmónicos nas grandezas eléctricas características das redes eléctricas de alimentação, que nas máquinas eléctricas ocorrem *problemas de funcionamento*, que se traduzem por um comportamento segundo características de funcionamento diferentes das previstas na sua fase de projecto. Para além do simples problema da *desclassificação* da capacidade das máquinas eléctricas que funcionam em redes eléctricas poluídas, existe o problema do aparecimento de grandezas parasitas, campos magnéticos, forças electromotrizes e binários, que contribuem para um funcionamento anormal da máquina.

Mesmo no caso em que as máquinas eléctricas são construídas para funcionarem ligadas a conversores electrónicos de potência, com elementos semicondutores em permanente comutação, existem problemas de compatibilização, que, para um bom funcionamento, obrigam a uma optimização dos parâmetros da máquina eléctrica face às restrições impostas pelo funcionamento do conversor electrónico. Para além disso, os aspectos construtivos da máquina têm de obedecer a cuidados muito especiais.

Se uma máquina eléctrica, como gerador de grandezas eléctricas não sinusoidais, tem as suas características limitadas por valores estabelecidos em diversas normas, o que obriga à

execução de um projecto e de uma construção muito cuidados, e por isso, só em situações muito especiais é que uma máquina eléctrica pode ser a causa de grandezas periódicas altamente distorcidas, já a situação da máquina eléctrica, como consumidor de grandezas eléctricas periódicas distorcidas é um problema contemporâneo grave e uma fonte de possíveis, ou já realizados, temas de investigação científica.

Perante uma situação de exploração das redes eléctricas que cada vez mais é caracterizada por alguns consumidores (industriais) serem fortes produtores de harmónicos existe a necessidade de estabelecer restrições que se traduzem no estabelecimento de regulamentação impondo valores limites para a distorção criada pelo consumidor no pontos de ligação, da sua rede, à rede geral (por exemplo: FDH < 1,6 %; 0,6 % do fundamental para os harmónicos ímpares, 1 % do fundamental para os harmónicos pares; ..). Existe, ainda, a possibilidade de restringir a distorção das formas de onda através da obrigação do pagamento dos diversos tipos de energia consumida, considerando realmente, na sua medida, as grandezas eléctricas periódicas não sinusoidais ...

Bibliografia

- André Angot; “*Compléments de Mathématiques*”, Masson et Cie., 1972
- ANSI/IEEE C57.110; “*IEEE Recommended Practice for Establishing Transformer Capability When Supplying Nonsinusoidal Load Currents*”, IEEE, 1986
- CEI-05; “*Vocabulaire Electrotechnique Internationale – Définitions Fondamentales*”, Comissão Electrotécnica Internacional, 1954
- CEI-34.1 A; “*Recommandations pour les Machines Électriques Tournantes — Irrégularités de la Forme d’Onde*”, Comissão Electrotécnica Internacional, 1965
- CEI-Handbook; “*Letter Symbols and Conventions*”, Comissão Electrotécnica Internacional, 1983
- J. Arrillaga et al.; “*Power System Harmonics*”, John Wiley, 1985
- B. W. Arden, K. N. Astill; “*Numerical Algorithms: Origins and Applications*”, Addison-Wesley, 1970
- E. Oran Brigham; “*The Fast Fourier Transform*”, Prentice-Hall, 1974
- E. A. Guillemin; “*The Mathematics of Circuit Analysis*”, MIT Press, 1949
- Francisco O. Restivo; “*Introdução ao Processamento Digital de Sinal*”, Aula-Conferência para Seminário/Projecto de Máquinas Eléctricas, DEEC-FEUP, 1990
- ANSI/IEEE-519; “*Harmonic Control and Reactive Compensation of Static Power Converter*”, ANSI/IEEE Standard 519, 1981
- IEEE Working Group; “*Power Systems Harmonics: an Overview*”, IEEE Trans. PAS-102, (8), p. 2455, 1983
- IEEE Working Group Report; “*Bibliography on Power Systems Harmonics*”, IEEE Trans. PAS-103, (9), p. 2460 & p. 2470, 1984
- Manuel Corrêa de Barros; “*Apontamentos para a Disciplina de Electrotecniã Teórica*”, AEFEP, 1971
- Carlos Castro Carvalho; “*Apontamentos para a Disciplina de Máquinas Eléctricas II*”, AEFEP, 1983
- Manuel Vaz Guedes; “*Corrente Alternada — Sistemas Polifásicos*”, AEFEP, 1991
- R. B. Randall; “*Frequency Analysis*”, Brüel & Kjær, 1987
- W. Shepherd P. Zakikhani; “*Suggested Definition of Reactive Power for Nonsinusoidal Systems*”, Proc. IEE, vol. 119, (9), p. 1361, 1972

– MVG.92 –