FACULDADE DE ENGENHARIA
DA UNIVERSIDADE DO PORTO

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS PLANAS DE BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

ANTÓNIO ABEL RIBEIRO HENRIQUES

Dezembro de 1991

FACULDADE DE ENGENHARIA
DA UNIVERSIDADE DO PORTO

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS PLANAS DE BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

ANTÓNIO ABEL RIBEIRO HENRIQUES

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil

Dezembro de 1991

Publicação subsidiada pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica

Aos meus Pais

AGRADECIMENTOS

A realização do presente trabalho não teria sido possível sem a colaboração das pessoas que por diversas manifestações de interesse me conduziram a levar a bom termo a sua concretização. De forma particular, desejo agradecer reconhecidamente àquelas que deram os mais importantes contributos.

- Ao Professor Joaquim Figueiras pela empenhada orientação, colaboração, sugestões, ensinamentos e, muito especialmente, pelo incentivo no decurso da elaboração dos trabalhos desenvolvidos.

- Aos colegas da Faculdade de Engenharia, pelo convívio, amizade e sugestões, nomeadamente, ao Doutor Rui Póvoas pela sua análise crítica e troca de impressões, ao Eng. Paulo Cruz toda a sua camaradagem, ao Eng. Manuel Jorge e Eng. Fernando Dias pelas conversas amigas, ao Eng. António Arêde pelas óptimas ideias sugeridas, ao Eng. Ricardo Santos e Eng. Álvaro Azevedo pelas elucidações e assistência no domínio da informática e ao Eng. Joaquim Barros pela disponibilidade na troca de ideias.

- À Secção de Matemática e Física, particularmente, ao Professor Francisco Calheiros pelo incentivo e facilidades concedidas na parte final da elaboração deste trabalho.

- Aos amigos, pela amizade e companheirismo sempre reconfortantes.

- Ao Sr. Manuel Carvalho pelo empenho e cuidado na colaboração no trabalho de processamento de texto, ao Sr. Joaquim Andrade pela forma cuidada como realizou alguns dos desenhos aqui apresentados e a todo o pessoal auxiliar da Secção de Estruturas, pela disponibilidade sempre demonstrada.

- À Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, pelo apoio financeiro e ao Laboratório de Cálculo Automático do Centro de Engenharia Civil da Universidade do Porto, pela utilização dos meios informáticos disponíveis.

- Finalmente, à Anabela, pelo carinho e apoio recebidos e aos meus Pais, pela dedicação, afecto, paciência e compreensão na minha formação humana e técnica.

SUMÁRIO

No presente trabalho apresenta-se o desenvolvimento de modelos de análise não linear e de dimensionamento de estruturas de betão armado pré-esforçado sujeitas, essencialmente, a esforços de flexão. Recorrendo à técnica dos elementos finitos, os modelos referidos permitiram a obtenção dos códigos computacionais capazes de resolver problemas práticos de estruturas sujeitas a carregamentos quase estáticos e de curta duração.

Apresentam-se os dois tipos de elementos usados no presente modelo, o elemento de viga de três nós (para a discretização de zonas com comportamento típico de peça linear) e o elemento quadrático de Serendipity (para a discretização das restantes zonas). É ainda dado destaque à formulação desenvolvida no presente trabalho do elemento unidimensional curvo de cabo de pré-esforço e da modelação da zona de transição entre os elementos planos e os elementos de viga. A modelação da armadura de pré-esforço permite definir com rigor a sua contribuição para a rigidez global da estrutura e para o vector das forças nodais equivalentes.

É feita a descrição detalhada de um programa de cálculo automático desenvolvido para o dimensionamento das armaduras e verificação da segurança aos estados limites regulamentares, para este tipo de estruturas.

O modelo não linear é definido por um conjunto de relações constitutivas estabelecidas para cada um dos materiais componentes do betão estrutural e tem como objectivo caracterizar as principais causas da não linearidade apresentada pelas estruturas de betão armado pré-esforçado. Assim, são estabelecidos modelos que permitem descrever o comportamento não linear do betão não fendilhado (modelo elasto-plástico com endurecimento, baseado no critério de resistência definido no novo Código Modelo do CEB-MC90), a representação da fendilhação (modelo de fendilhação distribuída, que tem em conta os mecanismos de interacção betão-armaduras) e a modelação do comportamento elasto-plástico unidimensional do aço que constitui as armaduras. Especial atenção é dada à simulação das cargas e descargas nas respectivas relações constitutivas.

A implementação de técnicas correntes de resolução de problemas não lineares no modelo referido no parágrafo anterior, permitiu o desenvolvimento de um código computacional vocacionado para o estudo do traçado da resposta da estrutura até ao colapso e a avaliação do seu grau de segurança.

Finalmente, são apresentados e discutidos vários exemplos que permitem, por um lado, aferir os modelos numéricos desenvolvidos e, por outro lado, ilustrar a sua aplicabilidade.

ABSTRACT

This work deals with the development of models for the nonlinear analysis and design of plane reinforced and prestressed concrete frames, based on the finite element techniques. Regarding these models, computational codes were developed to solve structural problems under quasi-static short-term loading.

Three-noded isoparametric Timoshenko beam elements and eight-noded quadratic isoparametric elements of Serendipity family are used, the former to model zones with a typical flexural behaviour and the latter for modelling the descontinuity zones. The continuity and compatibility between these two different types of elements are guaranteed by a special transition zone. The prestressed tendons are simulated by unidimensional curved finite elements, being their contribution for the stiffness matrix and for the equivalent nodal forces adequately defined.

A detailed description of a computational model prepared for the practical design of prestressed concrete beams is presented. The model was developed for pre-design and verification of the serviceability and ultimate limit states (according to portuguese code).

The nonlinear formulation adopts different constitutive relations for each component of the composite material, making easier to define the principal causes of that nonlinearity. The behaviour of prestressed concrete frames is described taking into account the cracking (tension-stiffening model) and nonlinear behaviour of concrete (according to the new constitutive relations defined in Model Code CEB-MC90), and the nonlinear behaviour of the ordinary and prestressed steel. A special emphasis is given to the simulation of load-unload cycles.

The current nonlinear techniques and the model mencioned in the previous paragraph were used in the development of a computational code which traces up to failure the structural response, making possible to evaluate the degree of safety.

Finally, examples are presented to appraise the computational code and to ilustrate the applicability of the present models.

Índice do texto

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Pág.

1.1 - ASPECTOS GERAIS 1

1.2 - OBJECTIVOS E TEMAS ABORDADOS 2

1.3 - NOTAÇÕES 6

Capítulo 2

MODELO ESTRUTURAL COM BASE NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 - INTRODUÇÃO 7

2.2 - DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS DE VIGA 8

2.2.1 - Formulação do elemento de viga isoparamétrico de três nós de Timoshenko 8

2.2.1.1 - Hipóteses de base 9

2.2.1.2 - Geometria do elemento de três nós 10

2.2.1.3 - Campo de deslocamentos 11

2.2.1.4 - Definição do estado de deformação 12

2.2.1.5 - Definição do estado de tensão - relações constitutivas 13

2.2.1.6 - Discretização por camadas. Integração na espessura do elemento 13

2.2.1.7 - Equações de equilíbrio 15

Pág.

2.2.1.8 - Matriz de rigidez e vector das forças nodais do elemento 17

2.2.1.9 - Integração numérica 18

2.2.2 - Formulação de elementos unidimensionais de cabo de pré-esforço 19

2.2.2.1 - Geometria do cabo de pré-esforço 19

2.2.2.2 - Campo de deslocamentos 21

2.2.2.3 - Matriz de deformação 23

2.2.2.4 - Contribuição do elemento de cabo para os esforços internos no elemento de viga 24

2.2.2.5 - Matriz de rigidez 24

2.2.2.6 - Acção do pré-esforço 25

2.2.3 - Testes numéricos 25

2.3 - DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS PLANOS 31

2.3.1 - Elemento isoparamétrico quadrático de Serendipity 31

2.3.1.1 - Hipóteses de base 31

2.3.1.2 - Geometria do elemento de 8 nós de Serendipity 31

2.3.1.3 - Campo de deslocamentos 34

2.3.1.4 - Relações constitutivas 34

2.3.1.5 - Matriz de rigidez e vector das forças nodais do elemento 35

2.3.2 - Simulação das armaduras 36

2.3.2.1 - Formulação contínua 36

2.3.2.2 - Formulação discreta 38

2.4 - ASSOCIAÇÃO DOS ELEMENTOS DE VIGA AOS ELEMENTOS PLANOS. MODELAÇÃO DA ZONA DE TRANSIÇÃO 38

2.4.1 - Aspectos gerais 38

2.4.2 - Compatibilização dos campos de deslocamentos 40

2.4.3 - Matriz de rigidez e vector das forças nodais dos elementos planos na zona de transição 41

2.4.4 - Estado de tensão nos elementos planos na zona de transição 42

2.4.5 - Testes numéricos comparativos dos modelos de discretização 42

Pág.

2.5 - OBSERVAÇÕES FINAIS 45

2.6 - BIBLIOGRAFIA 45

Capítulo 3

PROGRAMA DE DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS E VERIFICAÇÃO AOS ESTADOS LIMITES REGULAMENTARES

3.1 - INTRODUÇÃO 49

3.2 - ESTRUTURA DO PROGRAMA DE CÁLCULO 49

3.3 - DIMENSIONAMENTO DE UMA VIGA DE BETÃO PRÉ-ESFORÇADO 52

3.3.1 - Bases de cálculo 52

3.3.2 - Dimensionamento do pré-esforço 55

3.3.2.1 - Generalidades 55

3.3.2.2 - Força de pré-esforço 56

3.3.2.3 - Traçado do cabo resultante. Fuso limite 57

3.3.2.4 - Processo automático de pré-dimensionamento da força de pré-esforço e traçado do fuso limite 58

3.3.3 - Perdas de pré-esforço 60

3.3.3.1 - Generalidades 60

3.3.3.2 - Perdas devidas ao atrito 61

3.3.3.3 - Perdas devidas à deformação instantânea do betão 61

3.3.3.4 - Perdas nos dispositivos de amarração 62

3.3.3.5 - Perdas diferidas 63

3.3.3.6 - Processo automático de cálculo de perdas de pré-esforço 66

3.3.4 - Verificação da segurança aos estados limites de utilização 66

3.3.4.1 - Generalidades 66

3.3.4.2 - Verificação aos estados limites de fendilhação 67

Pág.

3.3.4.3 - Verificação aos estados limites de deformação 68

3.3.4.4 - Processo automático de verificação da segurança aos estados limites de utilização 68

3.3.5 - Verificação da segurança aos estados limites últimos de resistência 69

3.3.5.1 - Generalidades 69

3.3.5.2 - Dimensionamento da armadura passiva de flexão 70

3.3.5.3 - Dimensionamento da armadura de esforço transverso 71

3.4 - VIGA CONTÍNUA DE DOIS VÃOS COM SECÇÃO VARIÁVEL 72

3.4.1 - Objectivo do exemplo 72

3.4.2 - Dados do problema 73

3.4.3 - Determinação do pré-esforço e da geometria do cabo 75

3.4.4 - Cálculo das perdas de pré-esforço 77

3.4.5 - Dimensionamento da armadura passiva 79

3.4.6 - Verificação da segurança da viga aos estados limites de utilização 81

3.4.7 - Sumário final 83

3.5 - OBSERVAÇÕES FINAIS 83

3.6 - BIBLIOGRAFIA 84

Capítulo 4

MODELO DE COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DO BETÃO ESTRUTURAL

4.1 - INTRODUÇÃO 85

4.2 - CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA MÁXIMA DO BETÃO 86

4.2.1 - Generalidades 86

4.2.2 - Caracterização dos estados de tensão 87

4.2.3 - Características essenciais das superfícies de resistência máxima 91

Pág.

4.2.4 - Formulação do critério de Ottosen 92

4.3 - COMPORTAMENTO DO BETÃO NÃO FENDILHADO 97

4.3.1 - Generalidades 97

4.3.2 - Critério de cedência 97

4.3.3 - Lei de fluxo ou de escoamento plástico 98

4.3.4 - Lei de endurecimento 102

4.4 - COMPORTAMENTO DO BETÃO FENDILHADO 105

4.4.1 - Generalidades 105

4.4.2 - Comportamento das zonas fendilhadas 107

4.4.3 - Formulação do modelo de fendilhação 110

4.4.3.1 - Efeito de interacção entre a armadura e o betão 110

4.4.3.2 - Formulação para os elementos de viga 115

4.4.3.3 - Formulação para os elementos planos 116

4.5 - COMPORTAMENTO DO BETÃO A UM ESTADO DE TENSÃO MULTIAXIAL 118

4.5.1 - Generalidades 118

4.5.2 - Modos de rotura do betão em ensaios biaxiais 119

4.5.3 - Estados de comportamento do betão 120

4.6 - COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO DAS ARMADURAS 121

4.6.1 - Generalidades 121

4.6.2 - Relações constitutivas 123

4.7 - OBSERVAÇÕES FINAIS 124

4.8 - BIBLIOGRAFIA 124

Capítulo 5

PROGRAMA DE ANÁLISE NÃO LINEAR

5.1 - INTRODUÇÃO 127

Pág.

5.2 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO - PCBEAM 128

5.2.1 - Generalidades 128

5.2.2 - Descrição dos módulos principais do programa 128

5.3 - TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES 135

5.3.1 - Generalidades 135

5.3.2 - Processos incrementais e iterativos 135

5.3.3 - Algoritmo de solução do tratamento do material 139

5.3.4 - Critérios de convergência 142

5.4 - ASSOCIAÇÃO DOS DOIS TIPOS DE DISCRETIZAÇÃO 144

5.5 - TESTES NUMÉRICOS DE CARGA E DESCARGA 146

5.6 - EXEMPLO NUMÉRICO: VIGAS DE LIN 149

5.7 - OBSERVAÇÕES FINAIS 163

5.8 - BIBLIOGRAFIA 164

Capítulo 6

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO PRÁTICA

6.1 - INTRODUÇÃO 165

6.2 - COMPORTAMENTO ATÉ À ROTURA COM VERIFICAÇÃO AOS ESTADOS LIMITES 166

6.3 - VIGA CONTÍNUA DE DOIS VÃOS COM SECÇÃO VARIÁVEL 170

6.3.1 - Objectivo da análise 170

6.3.2 - Dados do problema 170

6.3.3 - Resultados da análise 171

6.3.4 - Verificação da segurança 177

6.3.5 - Carga de colapso (pelo método das rótulas plásticas) 181

6.3.6 - Conclusões 182

Pág.

6.4 - VIGA PRÉ-ESFORÇADA DA NOVA PONTE DE MACAU 183

6.4.1 - Objectivos da análise 183

6.4.2 - Dados do problema 183

6.4.3 - Resultados da análise 187

6.4.4 - Verificação da segurança 205

6.4.5 - Conclusões 207

6.5 - OBSERVAÇÕES FINAIS 208

6.6 - BIBLIOGRAFIA 208

Capítulo 7

CONCLUSÕES E ORIENTAÇÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS

7.1 - CONCLUSÕES FINAIS 211

7.2 - ORIENTAÇÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS 215

Anexo

MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA DE DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS E VERIFICAÇÃO AOS ESTADOS LIMITES REGULAMENTARES - PREDIM

Índice de figuras

Capítulo 2

MODELO ESTRUTURAL COM BASE NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Pág.

Fig. 2.1 - Deformação de uma secção de viga. 9

Fig. 2.2 - Elemento de viga parabólico isoparamétrico. 10

Fig. 2.3 - Funções de forma de um elemento de três nós. 11

Fig. 2.4 - Deslocamentos num elemento de três nós. 11

Fig. 2.5 - Secção discretizada por camadas. 14

Fig. 2.6 - Convenção de sinais para os esforços. 14

Fig. 2.7 - Forças nodais equivalentes a uma carga uniformemente distribuída. 17

Fig. 2.8 - Integração com dois pontos de Gauss. 18

Fig. 2.9 - Definição da geometria do cabo com base em 7 pontos. 20

Fig. 2.10 - Definição das coordenadas curvilíneas do elemento de cabo. 21

Fig. 2.11 - Campo de deslocamentos do elemento. 22

Fig. 2.12 - Convenção de sinais para os esforços. 24

Fig. 2.13 - Malha de elementos finitos utilizada. 27

Fig. 2.14 - Representação esquemática dos testes numéricos. 28

Fig. 2.15 - Viga hiperestática. Diagramas de momentos flectores devidos ao pré-esforço. 30

Fig. 2.16 - Elemento isoparamétrico quadrático plano. 32

Fig. 2.17 - Funções de forma quadráticas (Serendipity). 33

Fig. 2.18 - Representação contínua da armadura passiva. 37

Pág.

Fig. 2.19 - Divisão de vigas em elementos de viga e elementos planos. 39

Fig. 2.20 - Ligação entre elementos planos e elementos de viga. 40

Fig. 2.21 - Associação dos graus de liberdade. 41

Fig. 2.22 - Viga simplesmente apoiada. Geometria, carregamento e propriedades dos materiais. 43

Fig. 2.23 - Viga simplesmente apoiada. Análises realizadas. 44

Capítulo 3

PROGRAMA DE DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS E VERIFICAÇÃO AOS ESTADOS LIMITES REGULAMENTARES

Fig. 3.1 - Segmento principal do programa de cálculo automático. 50

Fig. 3.2 - Variação dos diagramas de tensão numa secção pré-esforçada para vários-estádios de carga. 52

Fig. 3.3 - Domínio das soluções de pré-esforço (Diagrama de Magnel). 57

Fig. 3.4 - Fuso limite de uma viga simplesmente apoiada. 58

Fig. 3.5 - Subrotina de pré-dimensionamento do pré-esforço. 59

Fig. 3.6 - Perdas por escorregamento nos dispositivos de amarração. 62

Fig. 3.7 - Cálculo das perdas diferidas. 65

Fig. 3.8 - Subrotina de cálculo de perdas de pré-esforço. 66

Fig. 3.9 - Variação das tensões na secção mais desfavorável. Estado limite de descompressão. 67

Fig. 3.10 - Subrotina de verificação aos estados limites de utilização. 69

Fig. 3.11 - Diagrama simplificado de tensões e deformações. 71

Fig. 3.12 - Viga contínua de dois vãos com secção variável. Geometria, carregamento e malha de elementos finitos. 73

Fig. 3.13 - Traçados dos fusos limites. 76

Fig. 3.14 - Variação do pré-esforço ao longo das armaduras. 78

Fig. 3.15 - Momentos flectores de dimensionamento e resistentes. 79

Pág.

Fig. 3.16 - Dimensionamento da armadura passiva de flexão. 80

Fig. 3.17 - Diagramas de tensões para várias combinações de acções. 82

Capítulo 4

MODELO DE COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DO BETÃO ESTRUTURAL

Fig. 4.1 - Espaço de tensões de Haig-Westergaard. 88

Fig. 4.2 - Projecção da intersecção da superfície de resistência com os planos de desvio. 90

Fig. 4.3 - Interpretação física e geométrica de (ξ, r, θ) e $(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta)$. 91

Fig. 4.4 - Forma característica dos meridianos de tracção e de compressão. 93

Fig. 4.5 - Comparação do critério de Ottosen com resultados experimentais nos planos meridianos: círculos abertos, Balmer (compressão); círculos a cheio, Richard (compressão); quadrados, Richard (tracção); cruzes, Kupfer (tracção). 94

Fig. 4.6 - Comparação do critério de Ottosen com os testes biaxiais de Kupfer (1969, 1973). 95

Fig. 4.7 - Representação das superfícies de cedência nos planos de desvio. 99

Fig. 4.8 - Representação unidimensional das relações constitutivas do betão definidas no presente modelo. 102

Fig. 4.9 - Relações constitutivas, para várias classes de betão, definida pelo presente modelo. 104

Fig. 4.10 - Resposta do betão à tracção. 106

Fig. 4.11 - Direcção de fendilhação. 107

Fig. 4.12 - Interacção entre um varão nervurado e o betão envolvente. 108

Fig. 4.13 - Diagramas de tensões no betão traccionado. 108

Fig. 4.14 - Representação esquemática da distribuição de tensões entre fendas. 109

Pág.

Fig. 4.15 - Contribuição da armadura na transmissão da força de corte através da fenda. 109

Fig. 4.16 - Transferência de esforços de corte por engrenagem entre as faces da fenda. 110

Fig. 4.17 - Direcção de fendilhação. 111

Fig. 4.18 - Diagrama de retenção de tensões de tracção para o betão fendilhado. 112

Fig. 4.19 - Influência do desvio da direcção das armaduras relativamente à direcção de fendilhação (coeficiente de correcção do parâmetro ϵ_m). 114

Fig. 4.20 - Coeficiente de retenção da rigidez ao corte no betão fendilhado. 115

Fig. 4.21 - Configurações admitidas para a fendilhação. 117

Fig. 4.22 - Modelo de comportamento uniaxial do betão. 118

Fig. 4.23 - Modos de rotura em provetes sujeitos a tensões biaxiais. 119

Fig. 4.24 - Regiões de comportamento do betão numa representação em estados de tensão biaxiais. 120

Fig. 4.25 - Diagrama tensão-deformação uniaxial do aço macio. 122

Fig. 4.26 - Diagrama tensão deformação uniaxial do aço duro. 122

Fig. 4.27 - Diagrama tensões-deformações trilinear para o aço. 123

Capítulo 5

PROGRAMA DE ANÁLISE NÃO LINEAR

Fig. 5.1 - Fluxograma do programa PCBEAM. 129

Fig. 5.2 - Processo incremental e iterativo na solução não linear de um problema unidimensional. Método de Newton-Raphson. 138

Fig. 5.3 - Método de Newton-Raphson modificado na primeira iteração. 138

Fig. 5.4 - Método de Newton-Raphson modificado na segunda iteração. 138

Fig. 5.5 - Determinação das tensões de acordo com as relações constitutivas dos materiais. 141

Pág.

Fig. 5.6 - Associação de dois elementos planos de 4 nós com um elemento de viga de 3 nós. 144

Fig. 5.7 - Testes de carga e descarga em provetes de betão armado. Condições de carga. 147

Fig. 5.8 - Diagrama tensão-extensão no betão na direcção normal ao plano da fenda. Sequência do teste: plastificação / abertura / fecho. 147

Fig. 5.9 - Diagrama tensão-extensão no betão na direcção normal ao plano da fenda. Sequência do teste: plastificação / abertura / fecho / plastificação / abertura. 148

Fig. 5.10 - Diagrama tensão-extensão no betão na direcção normal ao plano da fenda. Sequência do teste: plastificação / abertura / fecho / plastificação / abertura. 148

Fig. 5.11 - Geometria das vigas e cargas aplicadas. 151

Fig. 5.12 - Malhas de elementos finitos. 151

Fig. 5.13 - Viga de Lin A (nível de carga: $F = 170 KN$). 153

Fig. 5.14 - Viga de Lin B (nível de carga: $F = 185 KN$). 154

Fig. 5.15 - Curvas força-deslocamento a meio vão. 156

Fig. 5.16 - Curvas força-reacção nos apoios das extremidades. 157

Fig. 5.17 - Curvas força-aumento do pré-esforço. 158

Fig. 5.18 - Diagramas de tensões para $F = 0$ e $F = 155,6 KN$ (viga A). 160

Fig. 5.19 - Diagramas de tensões para $F = 0$ e $F = 155,6 KN$ (viga B). 161

Fig. 5.20 - Diagramas de tensões. 162

Capítulo 6

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO PRÁTICA

Fig. 6.1 - Traçado esquemático da resposta de uma estrutura de betão sujeita a um carregamento monotónico crescente. 166

Pág.

Fig. 6.2 - Diagramas tensões-extensões para o aço das armaduras ordinária e de pré-esforço. 171

Fig. 6.3 - Resposta deformacional da viga pré-esforçada. 172

Fig. 6.4 - Distribuição das tensões principais no betão para vários níveis de carregamento. 175

Fig. 6.5 - Estado do betão para um coeficiente de majoração de acções igual a 1,5. 178

Fig. 6.6 - Estado do betão para um coeficiente de majoração de acções igual a 2,28 (próximo do colapso). 179

Fig. 6.7 - Configuração de colapso (método das rótulas plásticas). 181

Fig. 6.8 - Geometria da viga pré-esforçada (viga V.4). 185

Fig. 6.9 - Pormenor da distribuição da armadura (desenho do projecto). 185

Fig. 6.10 - Características geométricas e condições de apoio consideradas na análise da viga pré-esforçada. 186

Fig. 6.11 - Diagramas tensões-extensões para o aço das armaduras ordinária (A400) e de pré-esforço (A1665 de 0,6"). 189

Fig. 6.12 - Deformada da viga pré-esforçada. Aplicação do pré-esforço. 189

Fig. 6.13 - Distribuição das tensões principais no betão. Aplicação do pré-esforço. 189

Fig. 6.14 - Distribuição das extensões plásticas equivalentes no betão. Aplicação do pré-esforço. 190

Fig. 6.15 - Deformada da viga pré-esforçada. Betonagem da laje. 190

Fig. 6.16 - Deformada da viga pré-esforçada. Combinação frequente de acções. 190

Fig. 6.17 - Distribuição das tensões principais no betão. 193

Fig. 6.18 - Configuração da fendilhação. 194

Fig. 6.19 - Deformada da viga pré-esforçada. 194

Fig. 6.20 - Distribuição das tensões principais no betão. 195

Fig. 6.21 - Configuração da fendilhação. 196

Fig. 6.22 - Configuração da fendilhação e identificação das armaduras plastificadas. Acções majoradas de $\gamma = 2,30$. 196

Fig. 6.23 - Distribuição das extensões plásticas equivalentes no betão. 196

Pág.

Fig. 6.24 - Curvas carga-deslocamentos. 200

Fig. 6.25 - Curvas carga-tensões normal nas camadas a meio vão. 200

Fig. 6.26 - Curvas carga-tensões nas armaduras. 201

Fig. 6.27 - Diagramas de tensões na secção a meio vão. 202

Anexo

MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA DE DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS E VERIFICAÇÃO AOS ESTADOS LIMITES REGULAMENTARES - PREDIM

Fig. A.1 - Posicionamento da armadura traccionada. A.7

Índice de quadros

Capítulo 2

MODELO ESTRUTURAL COM BASE NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Pág.

Quadro 2.1 - Pontos de integração de Gauss-Legendre. 19

Quadro 2.2 - Propriedades mecânicas dos materiais. 26

Quadro 2.3 - Resultados dos testes numéricos. 30

Quadro 2.4 - Resultados dos deslocamentos verticais da viga simplesmente apoiada. 44

Capítulo 3

PROGRAMA DE DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS E VERIFICAÇÃO AOS ESTADOS LIMITES REGULAMENTARES

Quadro 3.1 - Propriedades mecânicas dos materiais. Unidades: MPa. 74

Capítulo 4

MODELO DE COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DO BETÃO ESTRUTURAL

Quadro 4.1 - Parâmetros do material. 95

Quadro 4.2 - Valores da função λ. 96

Capítulo 5

PROGRAMA DE ANÁLISE NÃO LINEAR

Pág.

Quadro 5.1 - Propriedades mecânicas dos materiais (Vigas de Lin). 150

Quadro 5.2 - Níveis de carga que conduzem ao início da fendilhação e ao colapso. 152

Quadro 5.3 - Viga A: deslocamentos verticais a meio vão e reacções nos apoios de extremidade. 155

Quadro 5.4 - Viga B: deslocamentos verticais a meio vão e reacções nos apoios de extremidade. 155

Capítulo 6

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO PRÁTICA

Quadro 6.1 - Propriedades mecânicas dos materiais (B40; A400; A1665). Unidades: MPa. 184

Quadro 6.2 - Perdas de pré-esforço nos cabos de pré-esforço (%). 187

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 - ASPECTOS GERAIS

A adopção de soluções estruturais cada vez mais arrojadas e ao mesmo tempo mais económicas, envolvendo técnicas progressivamente mais complexas, conduzem à necessidade de utilizar modelos que descrevam o mais realisticamente possível o comportamento estrutural durante as várias fases da construção dando assim ao projectista, de uma forma rápida e fiável, um valor adequado da segurança revelada pela estrutura em estudo.

Na análise e dimensionamento de estruturas de betão armado e pré-esforçado, são conhecidas as limitações exibidas pelos métodos clássicos baseados no modelo de comportamento elástico linear dos seus materiais. A adopção frequente de simplificações, como resultado de modelos menos adequados para representar a resposta estrutural, pode conduzir a um agravamento no custo da construção, sobretudo quando se lida com casos pouco correntes. As insuficiências dos métodos clássicos mencionados são reconhecidas na actual regulamentação portuguesa através da aceitação de técnicas de análise plástica limite, de forma a avaliar com mais rigor o respectivo grau de segurança. No entanto, tal análise enferma ainda de algumas limitações, nomeadamente, a descrição do comportamento da estrutura durante a vida da obra, não definindo, por exemplo, o que se passa durante a sua fase de serviço. Para atender a isto, o *Comité Euro-International du Béton* na versão do seu mais recente modelo-código (CEB-FIP Model Code 1990) estabelece o método de análise não linear como sendo a solução de referência a adoptar, embora aceitando a utilização de métodos simplificados alternativos, atrás referidos.

Na Mecânica Estrutural, os problemas de análise e de dimensionamento consistem na determinação da distribuição de tensões e de deslocamentos na estrutura. As equações regentes do fenómeno são estabelecidas tendo em conta a geometria da peça, as acções actuantes, as condições de apoio e as propriedades dos materiais constituintes. O progresso observado nestes últimos anos dos meios informáticos e o uso de relações constitutivas mais elaboradas tornaram o Método dos Elementos Finitos numa técnica preferencial na resolução dessas equações e no desenvolvimento de modelos de análise não linear, como mostram os inúmeros trabalhos apresentados nas últimas décadas sobre esta matéria. De

facto, ao permitir usar uma modelação do comportamento mecânico dos materiais que descreva com grande rigor a resposta global da estrutura desde o início do carregamento até ao colapso, este método tornou-se numa poderosa ferramenta no projecto de estruturas.

A importância da história do carregamento, através de sucessivas cargas e descargas, as geometrias e as condições de apoio apresentadas pela maioria das estruturas pré-esforçadas, tornam os métodos tradicionais inadequados, apresentando-se a utilização dos modelos não lineares, muitas vezes, como a única alternativa credível de avaliação rigorosa do grau de segurança.

A complexidade de certas peças pré-esforçadas exige a utilização de modelos que traduzam de forma adequada não só as irregularidades descritas no parágrafo anterior, mas também tenham em conta as grandes variações do comportamento dos materiais. Devem ainda representar convenientemente a acção do pré-esforço e a respectiva armadura.

Começando por definir uma formulação elástica linear, com aplicação no dimensionamento de peças de betão armado pré-esforçado e verificação aos estados limites definidos na regulamentação portuguesa, o presente trabalho tem como objectivo principal desenvolver modelos não lineares de análise e a obtenção dos respectivos códigos computacionais.

1.2 - OBJECTIVOS E TEMAS ABORDADOS

O objectivo principal deste trabalho é, como já se referiu, o desenvolvimento de modelos computacionais de análise e dimensionamento de peças de betão armado pré-esforçado que tenham em conta o comportamento não linear do betão e do aço, a fendilhação do betão e os mecanismos de interacção betão-armaduras. Pretende-se deste modo, obter um procedimento apropriado que permita definir com rigor o comportamento da estrutura ao longo da história do carregamento, nomeadamente, em fase de serviço e próximo da rotura. Assim, os modelos desenvolvidos têm como meta serem adequados aos problemas práticos de um projecto de estruturas e permitir uma fácil e completa interpretação dos resultados obtidos.

Apresentando-se como um método numérico bastante potente, o Método dos Elementos Finitos revela-se um processo excelente para atingir os objectivos referidos. Tendo sido usada a formulação dos deslocamentos deste método, a resolução das equações de equilíbrio não lineares é realizada por um procedimento incremental de cargas com uma correcção iterativa dos resíduos em cada ciclo de cálculo. O modelo numérico apresentado considera carregamentos quase estáticos e de curta duração.

Especial destaque é aqui dado à modelação das armaduras de pré-esforço, ao modelo elasto-plástico de comportamento do betão estrutural (baseado no Código Modelo CEB-MC90) e à ligação de elementos finitos planos a elementos finitos de viga.

Em suma, os objectivos fundamentais são os seguintes :

- Estudo dos elementos finitos adoptados e desenvolvimento de uma formulação apropriada de discretização das armaduras ordinárias e de pré-esforço, assim como a definição de um elemento de viga que atenda às irregularidades que a geometria das peças possam apresentar.

- Desenvolvimento de um programa de cálculo automático de dimensionamento das armaduras e verificação da segurança aos estados limites regulamentares de estruturas pré-esforçadas. Recorrendo à formulação elástica linear do elemento de viga referido, pretende-se criar um procedimento rápido e de fácil utilização neste tipo de dimensionamento.

- Desenvolvimento de um modelo não linear que caracterize com rigor o comportamento mecânico dos materiais estruturais, onde as causas mais importantes que conduzem à não linearidade sejam devidamente tratadas.

- De acordo com as formulações referidas, desenvolver um modelo computacional versátil e de fácil interpretação, de maneira a ser possível implementar novas opções através de futuras investigações.

- Estudo de exemplos de aplicação prática, permitindo mostrar as potencialidades e aplicabilidade dos programas de cálculo automático desenvolvidos.

Cada um dos objectivos descritos nos pontos anteriores correspondem, sensivelmente, a um Capítulo do presente trabalho, tendo o cuidado de se apresentar testes e exemplos comparativos que permitam avaliar a fiabilidade das formulações apresentadas. Nos parágrafos que se seguem é feita uma descrição sumária de cada um destes capítulos.

Capítulo 1

Capítulo introdutório onde se faz a apresentação sumária dos objectivos que se pretendem alcançar e dos capítulos que compõem o presente trabalho.

Capítulo 2

Descreve-se a formulação elástica linear do elemento de viga isoparamétrico de três nós de Timoshenko e do elemento isoparamétrico quadrático de Serendipity, baseado no Método dos Elementos Finitos. É feita referência aos desenvolvimentos efectuados para a análise de peças de betão armado pré-esforçado sujeitas, essencialmente, a esforços de flexão, para além de uma discretização por camadas ao longo da espessura do elemento de viga. É destacada a formulação de elementos unidimensionais de cabo de pré-esforço, desenvolvida para modelar a respectiva armadura. É ainda dado destaque à solução obtida para realizar a associação dos dois tipos de elementos referidos, de forma a actuarem simultaneamente na discretização de uma estrutura. A modelação da zona de transição entre estes elementos é definida através da compatibilização dos campos de deslocamentos. São ainda apresentados e discutidos testes numéricos comparativos entre as diferentes formulações e respectivas soluções analíticas.

Capítulo 3

Sendo o dimensionamento das armaduras e a verificação da segurança aos estados limites regulamentares um processo sistemático e muitas vezes demorado, é definido um procedimento conveniente que, recorrendo ao elemento de viga descrito no Capítulo anterior, permite fazer o dimensionamento da força de pré-esforço e definir o traçado da respectiva armadura através da imposição de valores limites de tensões para os estados limites de utilização, o cálculo das perdas de pré-esforço ao longo das armaduras, a determinação da armadura ordinária através de um cálculo à rotura aos estados limites últimos de resistência e, finalmente, a verificação aos estados limites de utilização da estrutura assim dimensionada. De acordo com os procedimentos definidos, criou-se um modelo computacional que permite a obtenção rápida de resultados, assim como a sua fácil interpretação através de um processamento gráfico. De forma a avaliar a potencialidade e eficácia do programa de cálculo automático, apresenta-se o dimensionamento das armaduras de uma viga contínua pré-esforçada com secção variável.

Capítulo 4

Apresenta-se um modelo numérico para a análise de estruturas de betão sujeitas a um carregamento quase estático e de curta duração. Sendo o betão um material altamente não linear e com um comportamento complexo, é dada especial atenção

à sua modelação. Na presente solução, considera-se o betão estrutural como um material compósito, constituído por betão e por armaduras de aço, admitindo a existência de aderência perfeita entre estes materiais e para os quais se estabelece modelos constitutivos diferentes. No betão definem-se dois estados de comportamento distintos, caracterizados, fundamentalmente, pela compressão e tracção. Quando sujeito a um estado de tensão multiaxial, tal comportamento é definido em função das suas componentes. Associado a esses estados típicos, definem-se dois modos distintos de fractura: o esmagamento por compressão e a fendilhação por tracção. Para o betão não fendilhado, as relações constitutivas são obtidas por aplicação das leis elasto-plásticas com endurecimento (com base na lei do escoamento plástico) ao critério proposto por Ottosen, adoptado também pelo novo código do CEB-MC90. Por sua vez, a formação das fendas é representada por um modelo de fendilhação distribuída que tem em conta os mecanismos de interacção betão-armaduras (diagrama de retenção de tensões de tracção e de corte). A resposta do aço é aproximada por um modelo de comportamento elasto-plástico unidimensional, idealizado de acordo com um diagrama trilinear que relaciona tensões com deformações.

Capítulo 5

É descrita a estrutura do modelo computacional de análise não linear de peças de betão armado pré-esforçado, que inclui os elementos finitos e os modelos formulados nos capítulos anteriores. São também apresentadas as técnicas correntes de resolução de problemas não lineares através da descrição do processo incremental e iterativo, baseado no método de Newton-Raphson, de resolução das equações de equilíbrio do problema, assim como do algoritmo de solução do tratamento do material que permite determinar o estado de tensão instalado. Complementarmente, são definidos os critérios de convergência associados a estes procedimentos. Apresentam-se e discutem-se testes de carregamento alternado de forma a verificar a adequação do programa à descrição de sucessivas cargas e descargas, de importância fundamental na análise não linear de estruturas pré-esforçadas. Finalmente, é realizado um estudo comparativo de um exemplo de vigas pré-esforçadas, cujos resultados são comparados com os obtidos por outros autores.

Capítulo 6

Define-se uma metodologia adequada à verificação da segurança aos estados limites regulamentares, designadamente os estados limites de utilização e os estados limites últimos de resistência, através de modelos de análise não linear. A aplicabilidade do modelo computacional desenvolvido é ilustrada e discutida através de dois exemplos distintos. No primeiro exemplo, faz-se o estudo do comportamento e da segurança da viga pré-esforçada dimensionada no Capítulo 3 pelo programa aí descrito. Pretende-se assim averiguar o grau de segurança da solução de dimensionamento apresentado pelo programa referido. O segundo exemplo, visa estudar uma viga pré-esforçada que apresenta descontinuidades na sua geometria. É assim possível mostrar as potencialidades do modelo de discretização com dois tipos de elementos (planos e de viga) actuando simultaneamente.

Capítulo 7

Neste Capítulo são apresentadas sumariamente as conclusões mais importantes registadas ao longo do presente trabalho e ainda algumas sugestões para futuros desenvolvimentos.

1.3 - NOTAÇÕES

Os símbolos utilizados ao longo do texto são definidos logo na sua primeira aparição, sendo o seu significado redefinido sempre que lhe seja atribuído diferente sentido, de forma a que haja uma identificação precisa.

A notação indicial (ou tensorial) é adoptada principalmente na descrição de sistemas contínuos, definindo a notação simbólica (ou vectorial) os sistemas discretos. Assim, na notação indicial consideram-se apenas índices inferiores, adoptando-se a convenção usual relativa à utilização de índices repetidos na representação de somatórios. As matrizes e os vectores são identificados por símbolos sublinhados ($\underline{A}$ ou $\underline{a}$, por exemplo) ou, ainda, através da utilização de parêntesis rectos ou chavetas ([A] ou {a}).

Refira-se ainda que são usados somente tensores cartesianos nas formulações apresentadas, beneficiando das simplificações daí decorrentes.

Capítulo 2

MODELO ESTRUTURAL COM BASE NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Uma análise detalhada do comportamento estrutural é possível com a utilização de modelos numéricos que fornecem uma plataforma para a compreensão do funcionamento das estruturas e para o seu dimensionamento.

Na Mecânica Estrutural, tal como em outros domínios, apesar da complexidade da geometria, das acções, das propriedades dos materiais e das ligações ao exterior da estrutura, a resolução aproximada das equações diferenciais regentes do fenómeno através do Método dos Elementos Finitos (MEF) é possível de uma forma relativamente simples, com recurso a pequenos meios informáticos.

No presente Capítulo descreve-se o processo de análise linear elástica de peças de betão armado pré-esforçado, com base na formulação dos deslocamentos do MEF. Assim, os deslocamentos dos pontos nodais que discretizam a estrutura são as incógnitas do problema, sendo as relações geométricas (relações entre os deslocamentos e as deformações), as relações constitutivas (relações entre as tensões e as deformações) e as equações diferenciais regentes do fenómeno (equações de equilíbrio), estabelecidas no domínio do elemento. Não pretendendo dar uma descrição detalhada desta técnica, apresentam-se as expressões genéricas conducentes à formulação das equações resolventes do problema através do MEF, podendo ser complementada com a consulta de livros de texto apropriados (Zienkiewicz, 1977; Bathe, 1982; Hinton, 1977 e 1981; Reddy, 1985).

No presente trabalho, a análise de peças de betão armado pré-esforçado é realizada recorrendo a elementos de viga de Timoshenko. A discretização ao longo do seu eixo longitudinal é feita por elementos de viga isoparamétricos de três nós, enquanto que a discretização ao longo da sua espessura faz-se por camadas, sendo de salientar neste contexto as obras de Hinton (1977), Owen (1980), Onn (1984) e Figueiras (1983). A discretização por camadas, em vez de regras clássicas de Gauss ou de Simpson (utilização de vários pontos), apresenta vantagens em problemas com singularidades. O seu emprego teve por objectivo considerar os diferentes comportamentos dos materiais que constituem o elemento, sendo por isso usada para simular a armadura ordinária, através da inserção de camadas de aço entre as camadas de betão que constituem esse elemento.

A importância da armadura de pré-esforço, quanto ao seu comportamento distinto e quanto à sua geometria peculiar, torna essencial a elaboração de um elemento particular que a descreva convenientemente.

Diferentes formulações têm sido utilizadas para simular os cabos das armaduras pré-esforçadas, quer admitindo um troço recto no interior do elemento e tomando de forma aproximada a sua contribuição para a rigidez do elemento, como foi apresentado por Onn (1984), Kang (1977 e 1980) e Scordelis (1983), quer considerando um traçado curvo mas tendo em conta apenas as forças nodais equivalentes (Bouberguig, 1984 e Calvi, 1987). Na formulação desenvolvida (Henriques, 1988) e aqui apresentada admite-se um traçado curvo contínuo do cabo, sendo contabilizada a sua contribuição para a matriz de rigidez da estrutura e para o vector das forças nodais equivalentes, através de elementos curvos unidimensionais. O pré-esforço é introduzido por uma deformação inicial constante ou variável de ponto para ponto.

Nas zonas onde as vigas têm um comportamento que se afasta do comportamento típico de peça linear, como por exemplo as zonas de aplicação de cargas ou de ancoragem do pré-esforço, o elemento de viga pode revelar-se como uma aproximação pouco realista. Nestas situações, essas zonas são discretizadas por elementos planos e as restantes por elementos de viga. Desta forma, consegue-se obter um processo de resolução menos volumoso e, consequentemente, mais rápido que uma discretização completa por elementos planos.

Devido à sua simplicidade e desempenho, dentre os elementos quadráticos para estados planos, foi usado o elemento isoparamétrico de oito nós de Serendipity, considerado originalmente por Ahmad (1970). Na secção 2.3 apresenta-se este elemento e a simulação das armaduras que lhe está associada, com destaque para a formulação contínua de armaduras distribuidas e a formulação discreta de armaduras isoladas.

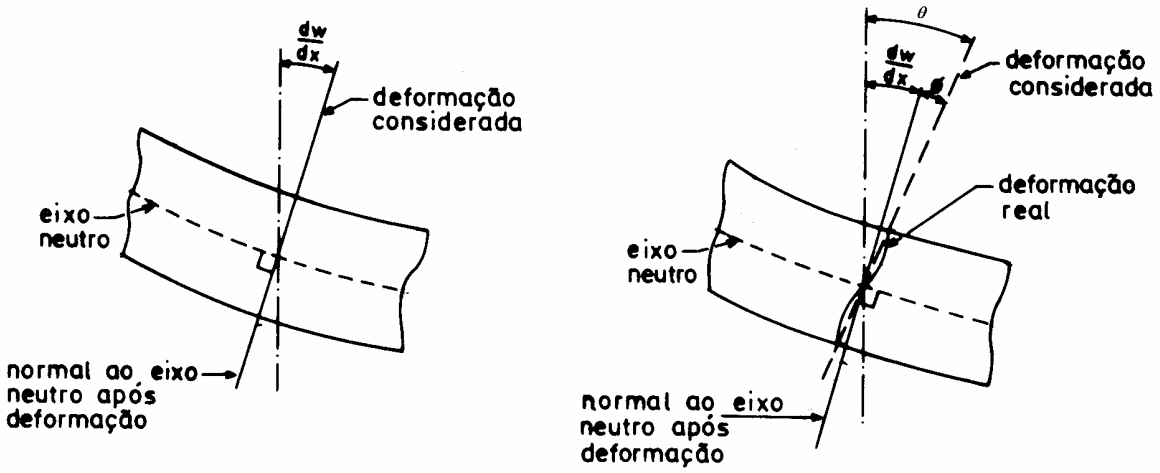
Finalmente, na secção 2.4 define-se a forma de associação dos elementos de viga com os elementos planos. É dado relevo à modelação da zona de transição entre estes elementos, através da compatibilização dos campos de deslocamentos.

2.2 - DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS DE VIGA

2.2.1 - Formulação do elemento de viga isoparamétrico de três nós de Timoshenko

2.2.1.1 - Hipóteses de base

O elemento de viga de Timoshenko consiste num elemento finito isoparamétrico de uma dimensão, tendo como particularidade importante o facto de considerar a deformação por esforço transverso, além daquela devida à flexão, o que não acontece com os elementos de viga baseados na hipótese de Navier-Bernoulli (figura 2.1).



a) Elemento de viga de Navier-Bernoulli. b) Elemento de viga de Timoshenko.

Fig. 2.1 - Deformação de uma secção de viga.

As hipóteses em que se baseia o elemento de viga de Timoshenko são as seguintes:

- as deformações são pequenas comparadas com as dimensões da viga;
- as secções normais ao eixo neutro antes da deformação permanecem planas, mas não necessariamente normais ao eixo neutro (contrariamente ao que acontece na hipótese de Navier-Bernoulli), após a deformação;
- as tensões normais ao eixo neutro são desprezáveis.

Assim, a secção de viga, inicialmente perpendicular ao eixo neutro, tomará a posição que a figura 2.1b mostra, definida por:

$$\theta = \frac{dw}{dx} + \phi \qquad (2.1)$$

sendo θ a rotação total da secção, w o deslocamento vertical devido à flexão, dw/dx a rotação devida à mesma flexão e ϕ a distorção provocada pelo esforço transverso.

2.2.1.2 - Geometria do elemento de três nós

O elemento de viga de três nós é definido pela sua linha média, por um nó em cada extremidade e por um nó intermédio.

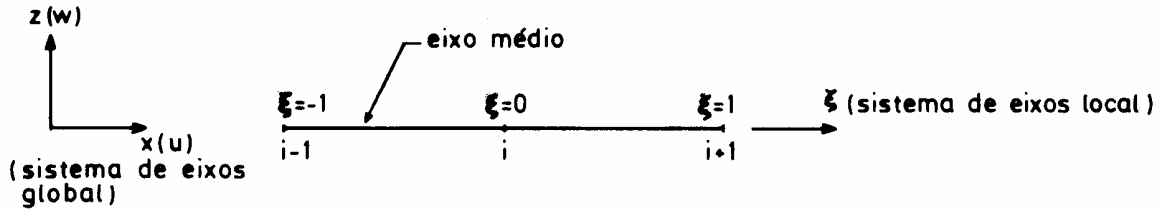


Fig. 2.2 - Elemento de viga parabólico isoparamétrico.

Na figura 2.2 são identificados os dois sistemas coordenados usados na formulação deste elemento:

- sistema de eixos global (x, z);
- sistema de eixos local (ξ).

O sistema de eixos local permite definir as funções de forma do elemento, $N_i(\xi)$, determinadas a partir das funções interpoladoras de Lagrange.

Para o elemento de três nós a função de interpolação é de segundo grau, sendo as funções de forma dadas por:

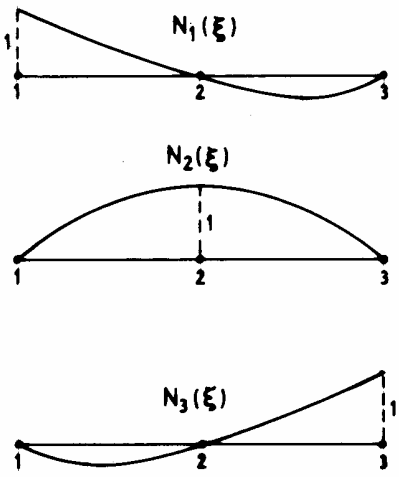
$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{3} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \qquad (2.2)$$

como as coordenadas locais tomam os valores $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ e $\xi_3 = 1$, então as funções $N_i(\xi)$ estão associadas com cada um destes nós da forma que a figura 2.3 apresenta.

A parametrização isoparamétrica assim definida, permite determinar as coordenadas globais de qualquer ponto pertencente ao elemento, a partir das correspondentes coordenadas locais, da seguinte forma:

$$x(\xi) = N_1(\xi) \cdot x_1 + N_2(\xi) \cdot x_2 + N_3(\xi) \cdot x_3 = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi) \cdot x_i \qquad (2.3.a)$$

$$z(\xi) = N_1(\xi) \cdot z_1 + N_2(\xi) \cdot z_2 + N_3(\xi) \cdot z_3 = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi) \cdot z_i \qquad (2.3.b)$$



$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \qquad (2.4)$$

$$N_2(\xi) = (1 - \xi) \cdot (1 + \xi) \qquad (2.5)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (1 + \xi) \qquad (2.6)$$

Fig. 2.3 - Funções de forma de um elemento de três nós.

2.2.1.3 - Campo de deslocamentos

O campo de deslocamentos é completamente definido através dos deslocamentos (horizontais e verticais) e da rotação do eixo médio da viga (ver figura 2.4).

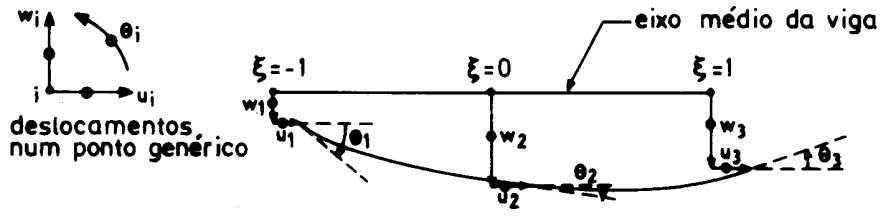


Fig. 2.4 - Deslocamentos num elemento de três nós.

Tendo presente a independência entre os deslocamentos e as rotações, atendendo à segunda hipótese formulada para o elemento de viga de Timoshenko (ver secção 2.2.1.1), a determinação destas grandezas num ponto genérico do eixo médio da viga é feita a partir do conhecimento das rotações e deslocamentos dos pontos nodais e utilizando as funções de forma descritas em 2.2.1.2.

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix}^{méd}_{(\xi)} = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi) \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \qquad (2.7)$$

Enquanto que os deslocamentos verticais e as rotações de qualquer ponto, pertencente ou não ao eixo médio da viga, permanecem iguais às correspondentes grandezas definidas na expressão (2.7), os deslocamentos horizontais são definidos pela seguinte relação:

$$u(\xi) = u^{méd}(\xi) - z(\xi) \cdot \mathrm{tg}\,\theta^{méd}(\xi) \cong u^{méd}(\xi) - z(\xi) \cdot \theta^{méd}(\xi) \qquad (2.8)$$

2.2.1.4 - Definição do estado de deformação

Atendendo à hipótese que considera serem desprezáveis as tensões normais ao eixo neutro da viga ($\sigma_z = 0$), o estado de deformação do elemento de viga é definido através da componente de deformação axial, ϵ_x, e pela componente de distorção, γ_{xz}, devida ao esforço transverso.

Considerando que $(u, w, \theta)^T$ representa o vector dos deslocamentos num ponto genérico do eixo médio da viga, o vector das deformações será definido, para pequenos deslocamentos, por:

$$\underline{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} - z\dfrac{\partial \theta}{\partial x} \\ \theta - \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad (2.9)$$

As derivadas parciais dos deslocamentos são definidas através das funções de forma e dos deslocamentos dos pontos nodais.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \cdot J^{-1} \cdot u_i \qquad (2.10.a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \cdot J^{-1} \cdot w_i \qquad (2.10.b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \cdot J^{-1} \cdot \theta_i \qquad (2.10.c)$$

sendo $dN_i(\xi)/d\xi$ as derivadas das funções de forma em ordem à coordenada local ξ e J o Jacobiano de transformação do sistema de eixos local no sistema de eixos global,

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dN_i}{d\xi} \cdot x_i \qquad (2.11)$$

Assim, as componentes de deformação podem ser obtidas directamente dos deslocamentos dos pontos nodais da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i(\xi)}{\partial x} & \cdot & -z \cdot \dfrac{\partial N_i(\xi)}{\partial x} \\ \cdot & -\dfrac{\partial N_i(\xi)}{\partial x} & N_i(\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}_{i=1,2,3} \qquad (2.12.a)$$

ou, condensadamente,

$$\{\epsilon\} = [B] \cdot \{a_e\} \qquad (2.12.b)$$

onde $[B]$ é uma matriz com a dimensão 2x9, correntemente designada de matriz de deformação do elemento.

2.2.1.5 - Definição do estado de tensão - relações constitutivas

Como por hipótese foram consideradas desprezáveis as tensões normais ao eixo neutro da viga ($\sigma_z = 0$), o estado de tensão pode ser representado pela componente axial na direcção do eixo da viga, σ_x, e pela componente transversal τ_{xz}.

A relação entre tensões e deformações no domínio elástico será:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \cdot \\ \cdot & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \qquad (2.13)$$

onde E é o módulo de elasticidade e G é o módulo de distorção, que pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \upsilon) \cdot \alpha} \qquad (2.14)$$

em que υ é o coeficiente de Poisson e α é um parâmetro de correcção do corte que no caso de secções rectangulares toma, em geral, o valor de 1,2.

A expressão (2.13) pode ser escrita de uma forma condensada,

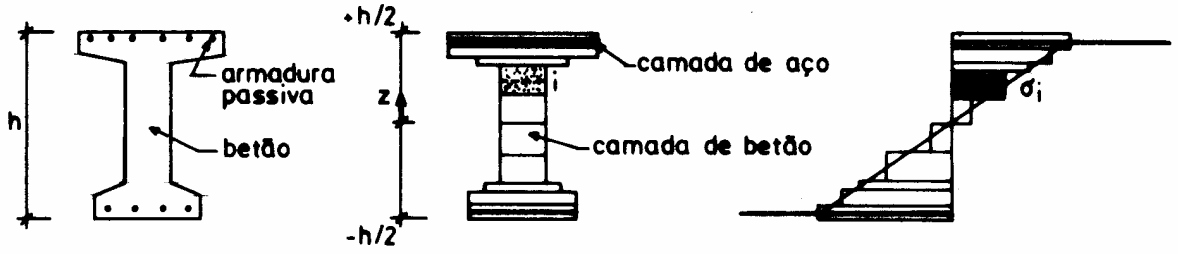
$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\} \qquad (2.15)$$

onde $[D]$ representa a matriz constitutiva do material.

2.2.1.6 - Discretização por camadas. Integração na espessura do elemento

Na discretização por camadas o elemento é dividido em faixas ao longo da espessura. As camadas podem ser constituídas por diferentes materiais e com diferentes dimensões,

sendo compatibilizadas através de um campo de deslocamentos contínuo. Cada camada contém um ponto de amostragem na superfície média (o ponto médio), admitindo-se constante a distribuição das tensões na respectiva espessura (aproximação rectangular).

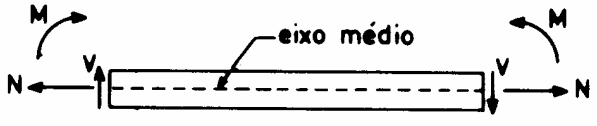


a) Secção real. b) Discretização por camadas. c) Distribuição das tensões.

Fig. 2.5 - Secção discretizada por camadas.

A integração ao longo das camadas é realizada com base na regra do ponto médio, onde a contribuição de cada camada é definida através do seu ponto representativo (figura 2.5).

Este método de integração dá resultados bastante aceitáveis, desde que seja adoptado um número de camadas apropriado ao problema em estudo. Nos casos correntes de estruturas laminares de betão armado, seis a dez camadas é suficiente.



Esforços no elemento:
N - Esforço axial;
M - Momento flector;
V - Esforço transverso.

Fig. 2.6 - Convenção de sinais para os esforços.

No estudo de problemas em análise não linear física (ver Capítulo 4), este método fornece resultados mais aproximados se forem consideradas camadas de menor espessura junto das fibras extremas, onde a não linearidade mais influencia o comportamento da estrutura.

Os esforços nas secções são obtidos integrando, ao longo da espessura, as componentes do correspondente estado de tensão.

- Esforço axial,

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA \cong \sum_{i=1}^{nc} \sigma_x^i \cdot b_i \cdot t_i \tag{2.16}$$

- Esforço transverso,

$$V = \int_A \tau_{xz} \cdot dA \cong \sum_{i=1}^{nc} \tau_{xz}^i \cdot b_i \cdot t_i \tag{2.17}$$

- Momento flector,

$$M = \int_A z \cdot \sigma_x \cdot dA \cong \sum_{i=1}^{nc} z_i \cdot \sigma_x^i \cdot b_i \cdot t_i \tag{2.18}$$

em que A é a área da secção e b_i, t_i e z_i são, respectivamente, a largura, a espessura e a coordenada do ponto médio da camada i relativamente ao eixo médio da viga.

2.2.1.7 - Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio podem ser estabelecidas de uma forma simples através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, que ocorre da consideração do corpo em estudo sujeito a dois estados de tensão completamente independentes:

- Sob a acção de um sistema de forças exteriores (forças de superfície t e forças de volume b), desenvolve-se um estado de tensão interna σ que satisfaz as equações de equilíbrio.
- Sob a acção de um outro sistema de forças desenvolvem-se deslocamentos virtuais a^* e deformações virtuais ϵ^* compatíveis.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece como condição necessária e suficiente para que um corpo esteja em equilíbrio sob a acção do sistema de forças exteriores, que numa deformação virtual do corpo, compatível com as ligações ao exterior e infinitamente pequena, o trabalho virtual realizado pelas forças exteriores é igual ao trabalho virtual de deformação.

O trabalho das forças exteriores é dado por:

$$\delta w = \int_S \{a^*\}^T \cdot t \cdot dS + \int_V \{a^*\}^T \cdot b \cdot dV \tag{2.19}$$

No caso presente, a solicitação exterior é constituída por cargas uniformemente distribuidas, p, na superfície da peça, e por cargas concentradas, F, nos nós da sua malha de discretização, sendo o trabalho realizado por este sistema de forças definido por:

$$\delta w = \int_S \{a^*\}^T \cdot p \cdot dS + \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot a_{e_i}^* \tag{2.20}$$

em que a_e^* representa os deslocamentos virtuais nos pontos nodais do elemento.

Pela expressão (2.7) obtém-se os deslocamentos virtuais a^* a partir dos deslocamentos a_e^*:

$$\{a^*\} = [N]^T \cdot \{a_e^*\} \tag{2.21}$$

onde $[N]$ representa as funções de forma do elemento.

Substituindo em (2.20), obtém-se:

$$\delta w = \{a_e^*\}^T \cdot \int_S [N]^T \cdot p \cdot dS + \{a_e^*\}^T \cdot \{F\} \tag{2.22}$$

O trabalho das forças interiores é dado por:

$$\delta U = \int_V \{\epsilon^*\}^T \cdot \sigma \cdot dV \tag{2.23}$$

Atendendo às expressões (2.12b), (2.15) e (2.21), pode-se então escrever:

$$\delta U = \{a_e^*\}^T \cdot \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \cdot \{a_e\} \tag{2.24}$$

Igualando as expressões dos trabalhos das forças exteriores e interiores,

$$\{a_e^*\}^T \cdot \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \cdot \{a_e\} = \{a_e^*\}^T \cdot \int_S [N]^T \cdot p \cdot dS + \{a_e^*\}^T \cdot \{F\} \tag{2.25}$$

e, como o campo de deslocamentos é arbitrário, resulta que

$$\int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \cdot \{a_e\} = \{F\} + \int_S [N]^T \cdot p \cdot dS \tag{2.26}$$

ou condensadamente

$$[k_e] \cdot \{a_e\} = \{f_e\} \tag{2.27}$$

designando-se

$$[k_e] = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \tag{2.28}$$

por matriz de rigidez do elemento e

$$\{f_e\} = \{F\} + \int_S [N]^T \cdot p \cdot dS \tag{2.29}$$

por vector das forças nodais do elemento. Estas forças são estaticamente equivalentes às forças que solicitam o elemento.

2.2.1.8 - Matriz de rigidez e vector das forças nodais do elemento

Num elemento de viga, o integral que permite calcular a matriz de rigidez, expressão (2.28), reduz-se a um integral de linha. No caso de elementos isoparamétricos unidimensionais, o seu cálculo toma a seguinte forma:

$$[k_e] = \int_{-1}^{1} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot A \cdot \frac{dx}{d\xi} \cdot d\xi \qquad (2.30)$$

sendo $dx/d\xi$ o Jacobiano de transformação definido na expressão (2.11).

Utilizando o mesmo processo, calculam-se as forças nodais equivalentes a uma carga uniformemente distribuída p (figura 2.7),

$$\{f_e^p\} = \int_{-1}^{1} [N]^T \cdot p \cdot \frac{dx}{d\xi} \cdot d\xi \qquad (2.31)$$

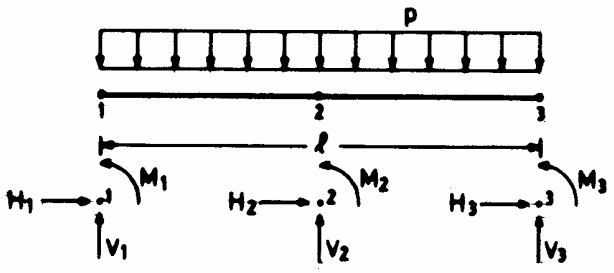


Fig. 2.7 - Forças nodais equivalentes a uma carga uniformemente distribuída.

No caso das forças serem aplicadas nos nós, o vector das forças nodais é identificado com cada uma das respectivas componentes.

2.2.1.9 - Integração numérica

A determinação da matriz de rigidez e do vector das forças nodais envolvem o cálculo de integrais. Estes integrais só em casos muito simples podem ser efectuados analíticamente de um modo fácil, por isso se recorre a técnicas de integração numérica, nomeadamente a de Gauss-Legendre.

A quadratura de Gauss-Legendre permite uma integração exacta de qualquer polinómio de grau não superior a $(2 \cdot n - 1)$, para n pontos de Gauss.

A integração Gaussiana de uma função $\phi(\xi)$, com ξ assumindo valores entre -1 e 1, é obtida como o somatório dos produtos do valor da função em determinados pontos ξ_i (pontos de Gauss) por um correspondente coeficiente a_i (pesos associados aos pontos de Gauss).

$$I_n = \int_{-1}^{1} \phi(\xi) \cdot d\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \phi(\xi_i) \qquad (2.32)$$

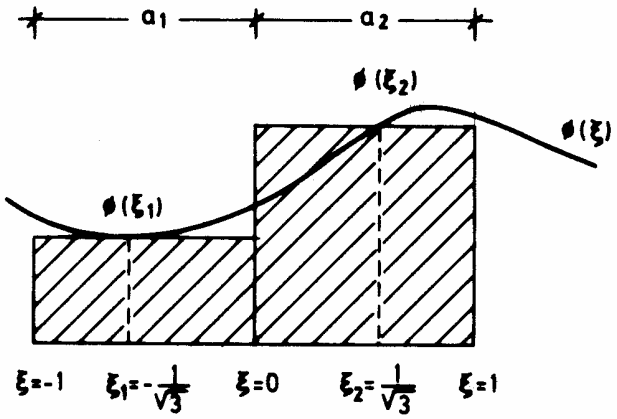


Fig. 2.8 - Integração com dois pontos de Gauss.

A regra de integração completa num elemento de viga de três nós consiste numa quadratura com três pontos de Gauss. Os resultados obtidos com esta regra revelam a ocorrência de comportamentos demasiadamente rígidos à medida que a razão vão/espessura da viga aumenta, devido a uma sobrevalorização da parcela de rigidez de corte, designada na literatura inglesa especializada por *shear locking* (Zienkiewicz, 1971; Delgado, 1986).

Devido a esta dificuldade, privilegia-se a utilização de uma regra de integração reduzida com dois pontos de Gauss. A regra de integração selectiva é também uma alternativa a adoptar quando se verifica a tendência para a formação de mecanismos espúrios. Na técnica de integração selectiva, a parcela de flexão é integrada com a regra normal (três pontos de Gauss) e a parcela de corte é determinada através da regra de integração reduzida (dois pontos de Gauss).

No quadro que se segue apresenta-se a posição e o peso de cada ponto de Gauss para ordens de integração de dois e três pontos de Gauss.

Quadro 2.1 - Pontos de integração de Gauss-Legendre

Pontos de Gauss n	Posição ξ_i	Peso α_i
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1.0
3	0,0 $\pm\sqrt{3/5}$	8/9 5/9

De notar que as posições dos pontos de integração na regra de Gauss-Legendre coincidem com as raízes dos polinómios de Legendre.

2.2.2 - Formulação de elementos unidimensionais de cabo de pré-esforço

2.2.2.1 - Geometria do cabo de pré-esforço

Conhecidas as excentricidades de um certo número de pontos do cabo de pré-esforço, o respectivo traçado ao longo da peça é definido com o auxílio das funções interpoladoras de Lagrange (figura 2.9):

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) \cdot z_i \qquad (2.33)$$

onde $z(x)$ é a excentricidade do cabo (relativamente ao eixo da viga) na abcissa x, $L_i(x)$ representa as funções interpoladoras de Lagrange definidas na expressão (2.2) e z_i define as excentricidades dos pontos do cabo previamente fixadas.

A coordenada curvilínea, r, do elemento é definida a partir das coordenadas curvilíneas, r_i, dos pontos nodais do elemento, usando as funções de forma definidas na secção 2.2.1.2.

$$r(\xi) = N_1(\xi) \cdot r_1 + N_2(\xi) \cdot r_2 + N_3(\xi) \cdot r_3 = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi) \cdot r_i \qquad (2.34)$$

As coordenadas curvilíneas, r_i, dos pontos nodais do elemento são definidas da seguinte forma:

$$r_1 = 0 \qquad (2.35.a)$$

$$r_2 = s_{12} \qquad (2.35.b)$$

$$r_3 = s_{13} \qquad (2.35.c)$$

sendo s_{12} o comprimento do cabo entre os pontos nodais 1 e 2 do elemento e s_{13} o comprimento do cabo entre os pontos nodais 1 e 3 do elemento (figura 2.10).

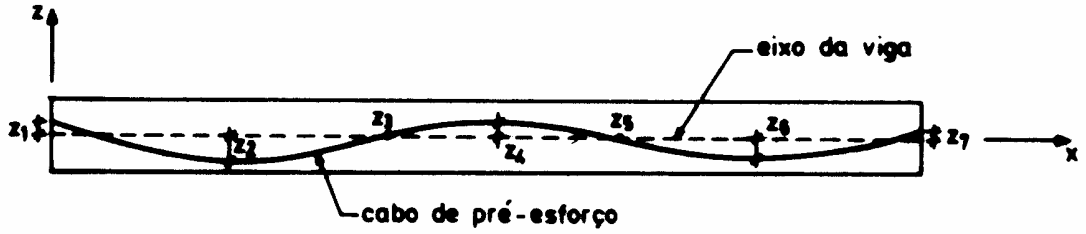


Fig. 2.9 - Definição da geometria do cabo com base em 7 pontos.

Os comprimentos s_{ij} são calculados pelo integral:

$$s_{ij} = \int_i^j |d\underline{r}(\xi)| \qquad (2.36)$$

em que $\underline{r}(\xi)$ é o vector de posição representativo da geometria do elemento de cabo, definido por:

$$\underline{r}(\xi) = x(\xi) \cdot \underline{i} + z(\xi) \cdot \underline{k} \qquad (2.37.a)$$

e

$$d\underline{r}(\xi) = \frac{dx(\xi)}{d\xi} \cdot d\xi \cdot \underline{i} + \frac{dz(\xi)}{d\xi} \cdot d\xi \cdot \underline{k} \qquad (2.37.b)$$

Substituindo em (2.36) resulta:

$$s_{ij} = \int_i^j \left[\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dz(\xi)}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot d\xi \qquad (2.38)$$

sendo $dx(\xi)/d\xi$ e $dz(\xi)/d\xi$ definidos de uma forma idêntica à expressão (2.11).

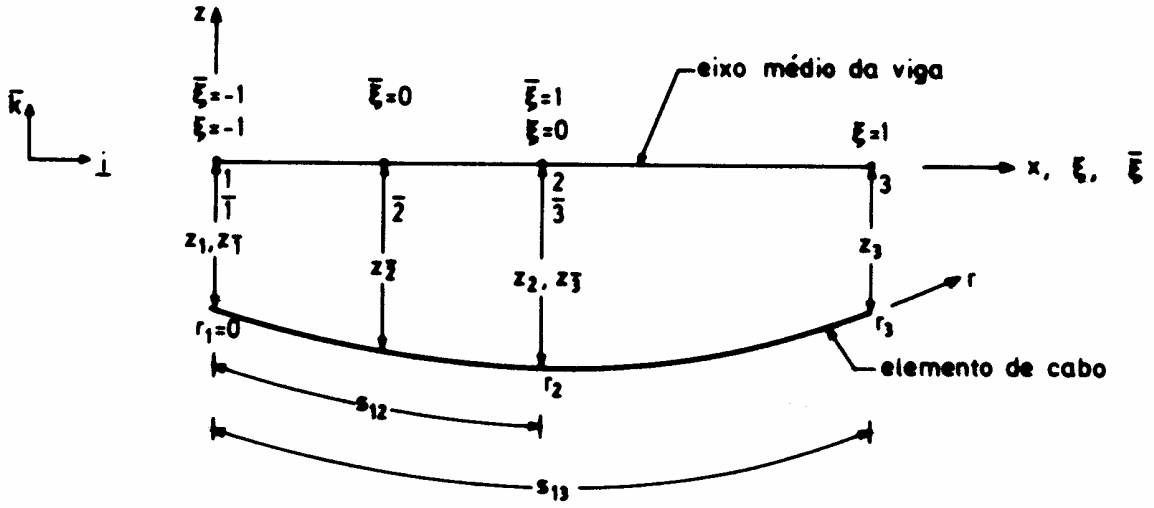


Fig. 2.10 - Definição das coordenadas curvilíneas do elemento de cabo.

Enquanto que na determinação de s_{13} se considera a coordenada local ξ associada aos três pontos nodais no elemento de viga, no cálculo de s_{12} é conveniente considerar uma nova coordenada local $\bar{\xi}$ (ver figura 2.10) associada a três pontos nodais cujas coordenadas globais são:

$$x(\bar{\xi}=-1) = x(\xi=-1) \quad ; \quad z(\bar{\xi}=-1) = z(\xi=-1) \qquad (2.39.a)$$

$$x(\bar{\xi}=0) = \frac{x(\xi=-1)+x(\xi=0)}{2} \quad ; \quad z(\bar{\xi}=0) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi=-1/2)\cdot z_i \qquad (2.39.b)$$

$$x(\bar{\xi}=1) = x(\xi=0) \quad ; \quad z(\bar{\xi}=1) = z(\xi=0) \qquad (2.39.c)$$

2.2.2.2 - Campo de deslocamentos

O comportamento da armadura de pré-esforço é caracterizado pela sua rigidez axial, por isso, o seu campo de deslocamentos é definido pela componente axial de deslocamentos u'.

As componentes horizontal e vertical dos deslocamentos num ponto do cabo são definidas pelas expressões (2.7) e (2.8) (figura 2.11).

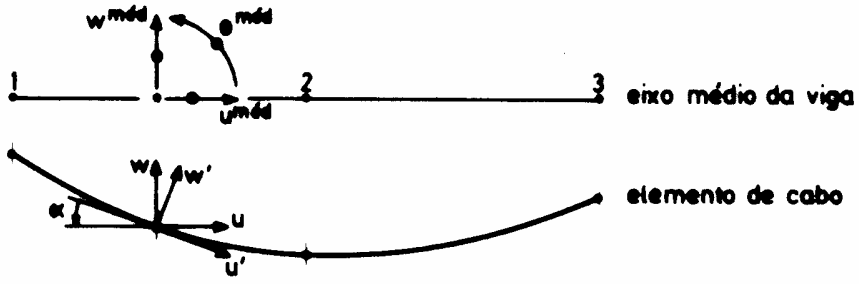


Fig. 2.11 - Campo de deslocamentos do elemento.

A partir do campo de deslocamentos (u, w) obtém-se a componente axial do deslocamento do cabo, u', através de uma simples transformação,

$$u' = u \cdot \cos\alpha + w \cdot \operatorname{sen}\alpha \tag{2.40}$$

em que α é a inclinação do cabo relativamente a um eixo horizontal.

Atendendo às expressões (2.7) e (2.8), u' é definido em função das componentes de deslocamento dos pontos nodais do elemento de viga,

$$u'(\xi) = [N_i(\xi) \cdot \cos\alpha(\xi) \quad N_i(\xi) \cdot \operatorname{sen}\alpha(\xi) \quad -z(\xi) \cdot N_i(\xi) \cdot \cos\alpha(\xi)] \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \end{bmatrix}_{i=1,2,3} \tag{2.41.a}$$

ou condensadamente,

$$u'(\xi) = \underline{T}_p(\xi) \cdot \underline{a}_e \tag{2.41.b}$$

sendo $\underline{T}_p(\xi)$ a matriz de transformação dos deslocamentos do elemento de cabo, com a dimensão de 1x9, para um elemento de três nós.

O ângulo α é definido pela seguinte expressão:

$$\alpha = arctg\left(\frac{dz}{dx}\right) \tag{2.42}$$

em que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dr} \tag{2.43}$$

e

$$\frac{dr}{d\xi} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \cdot r_i \tag{2.44}$$

sendo as coordenadas curvilíneas, r_i, nos pontos nodais definidas pelas expressões (2.35).

2.2.2.3 - Matriz de deformação

Como só interessa considerar a rigidez axial, então a deformação é traduzida pela extensão na direcção longitudinal ao traçado do cabo, ϵ_p,

$$\epsilon_p = \frac{du'}{dr} = \frac{du'}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dr} \tag{2.45}$$

sendo $dr/d\xi$ definido pela expressão (2.44) e $du'/d\xi$ pela seguinte relação:

$$\frac{du'}{d\xi} = \frac{d\underline{T}_p(\xi)}{d\xi} \cdot \underline{a}_e \tag{2.46}$$

Assim, a expressão (2.45) pode ser escrita na seguinte forma condensada:

$$\epsilon_p = \underline{B}_p \cdot \underline{a}_e \tag{2.47}$$

onde $\underline{B}_p$ representa a matriz de deformação do elemento de cabo.

Para configurações correntes das armaduras de pré-esforço, as curvaturas são muito pequenas comparadas com as derivadas das funções de forma $dN_i(\xi)/d\xi$, por isso, os valores de $d\alpha(\xi)/d\xi$ são considerados desprezáveis. Neste caso, a matriz $\underline{B}_p$ é definida da seguinte forma:

$$\underline{B}_p = \left[\frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \cdot \cos\alpha \quad \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \cdot \operatorname{sen}\alpha \quad -\frac{dz(\xi)}{d\xi} \cdot N_i(\xi) \cdot \cos\alpha - z(\xi) \cdot \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \cdot \cos\alpha \right] \cdot \frac{d\xi}{dr}_{i=1,2,3} \tag{2.48}$$

A matriz $\underline{B}_p$ tem a dimensão de 1x9, para um elemento de três nós.

2.2.2.4 - Contribuição do elemento de cabo para os esforços internos no elemento de viga

O esforço axial, N_p, no cabo produzido pela deformação ϵ_p, traduz-se nas seguintes componentes de esforços, relativamente ao eixo médio da viga:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ z \cdot \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \cdot N_p \tag{2.49}$$

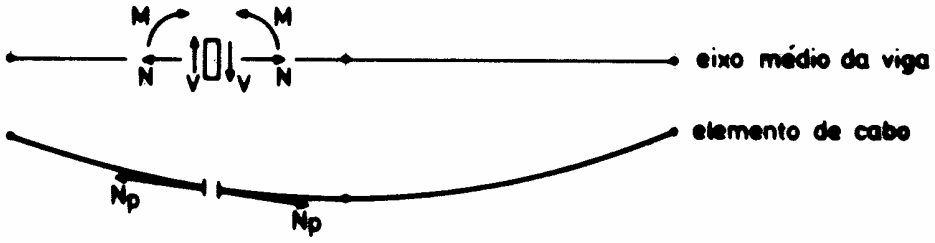


Fig. 2.12 - Convenção de sinais para os esforços.

O esforço axial N_p é definido por:

$$N_p = E_p \cdot A_p \cdot \epsilon_p \tag{2.50}$$

sendo A_p e E_p a área da secção transversal do cabo e o seu módulo de elasticidade, respectivamente.

2.2.2.5 - Matriz de rigidez

Usando um raciocínio idêntico ao da secção 2.2.1.7, a matriz de rigidez do elemento de cabo tem a seguinte expressão:

$$\underline{k}_{pe} = \int_{l_p} \underline{B}_p^T \cdot E_p \cdot \underline{B}_p \cdot A_p \cdot dl \tag{2.51}$$

onde l_p representa o comprimento do troço de cabo contido no elemento.

Escrevendo o integral de linha da relação (2.51) em termos de coordenadas locais ξ, vem:

$$\underline{k}_{pe} = \int_{-1}^{1} \underline{B}_p^T \cdot E_p \cdot \underline{B}_p \cdot A_p \cdot \frac{dr}{d\xi} \cdot d\xi \qquad (2.52)$$

sendo o seu cálculo efectuado por integração numérica, como se viu na secção 2.2.1.9.

A expressão (2.52) define a contribuição da armadura de pré-esforço para a matriz de rigidez do elemento de viga.

2.2.2.6 - Acção do pré-esforço

A contribuição da armadura de pré-esforço para o vector das forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado na estrutura, é considerada da seguinte forma:

$$\underline{F}_{pe} = \int_{l_p} \underline{B}_p^T \cdot \sigma_p \cdot A_p \cdot dl \qquad (2.53)$$

sendo

$$\sigma_p = E_p \cdot \epsilon_p \qquad (2.54)$$

A determinação do integral é efectuada, como é habitual, por integração numérica.

A acção do pré-esforço, P_o, é modelada através da consideração de uma deformação inicial, ϵ_{po}, dada pela seguinte expressão:

$$\epsilon_{po} = \frac{P_o}{E_p \cdot A_p} \qquad (2.55)$$

Substituindo esta deformação inicial, imposta à armadura de pré-esforço, nas expressões (2.53) e (2.54), obtém-se as forças nodais equivalentes ao pré-esforço aplicado, sendo adicionadas às forças nodais devidas à solicitação exterior.

2.2.3 - Testes numéricos

Nesta secção são apresentados e discutidos alguns testes numéricos que permitem avaliar a formulação dos elementos de viga, com discretização por camadas, e a modelação do pré-esforço, que integram o presente modelo estrutural. Embora não seja objectivo efectuar um estudo exaustivo, os testes apresentados, apesar da sua simplicidade, representam os casos mais típicos de análise estrutural de vigas pré-esforçadas.

São consideradas duas vigas de secção constante sujeitas a um pré-esforço constante ao longo da respectiva armadura, uma simplesmente apoiada com um vão de 20m e a outra hiperestática com dois vãos de 10m. Para a primeira viga foram estudados três casos distintos: i) armadura de pré-esforço com excentricidade constante; ii) armadura de pré-esforço com dois troços rectos e simétricos; iii) armadura de pré-esforço com uma geometria parabólica, sendo nula a excentricidade nos extremos da viga e máxima a meio vão. Na segunda viga apresenta-se somente um caso: armadura de pré-esforço com excentricidade constante.

Para cada um dos testes apresentados são realizadas duas análises numéricas distintas: uma primeira análise na qual as vigas são discretizadas em elementos de viga isoparamétricos de três nós de Timoshenko, divididos em camadas ao longo da sua espessura, cuja eficácia se pretende avaliar; e, uma segunda análise, na qual o efeito do pré-esforço é modelado através da aplicação de cargas externas equivalentes de acordo com o procedimento sobejamente conhecido sob a designação de método das cargas equivalentes, sendo os deslocamentos, as reacções nos apoios e os esforços na estrutura determinados pela teoria da elasticidade a partir das acções assim definidas.

Devido à simetria da geometria das vigas e da acção, é apenas analisada metade da estrutura, sendo discretizada em quatro elementos de viga de 2,5m de comprimento e dividida em oito camadas de 0,15m ao longo da sua espessura, como se pode ver na figura 2.13. No Quadro 2.2 apresenta-se as propriedades mecânicas dos materiais que constituem a viga.

Sendo identificados, respectivamente, pelas letras A, B, C e D, os quatro testes numéricos realizados são apresentados esquematicamente na figura 2.14. Para além da força de pré-esforço, P_o, de 1200 KN instalada em toda a extensão da armadura, foram consideradas as seguintes acções: um momento flector constante, M, ao longo do vão de 1200 KN.m, nos casos A e D; uma força concentrada, F, a meio vão de 239,7 KN, no caso B; uma carga uniformemente distribuída, p, ao longo do vão de 24 KN/m, no caso C. Na figura 2.14 apresenta-se também as cargas externas equivalentes à acção do pré-esforço (identificadas pelo índice p) usadas no método das cargas equivalentes, e ainda as expressões que permitem calcular os valores das flechas, δ, a meio vão.

Quadro 2.2 - Propriedades mecânicas dos materiais.

BETÃO		ARMADURA DE PRÉ-ESFORÇO	
Módulo de Young:	$E_c = 29GPa$	Módulo de Young:	$200GPa$
Coeficiente de Poisson:	$\nu = 0$	Área da secção:	$10cm^2$
Área da secção:	$0,40 \times 1,20m^2$	Força de pré-esforço:	$1200KN$

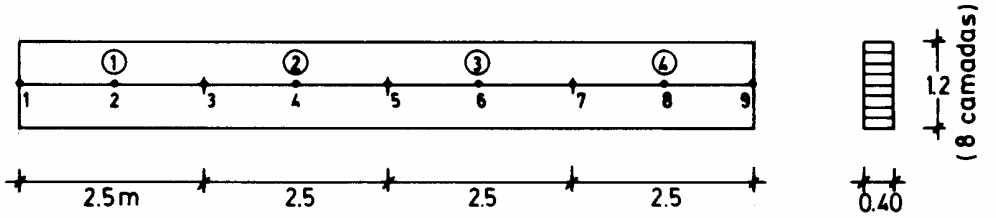
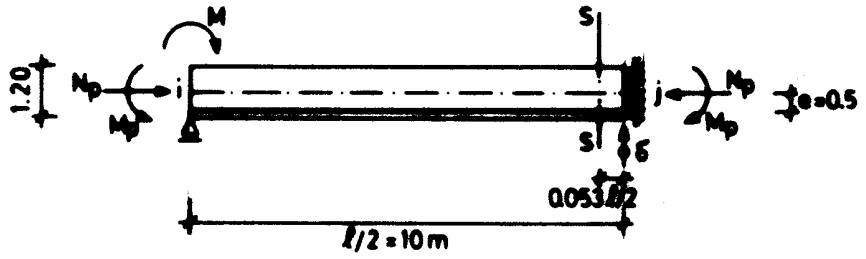


Fig. 2.13 - Malha de elementos finitos utilizada.

Em todos os testes efectuados verificou-se uma coincidência total dos resultados obtidos pelas duas análises atrás caracterizadas, no que diz respeito a reacções nos apoios e esforços na estrutura. No Quadro 2.3 apresenta-se os resultados correspondentes a essas duas análises, para cada um dos quatro testes efectuados. São assim indicados os valores das flechas a meio vão, das reacções nos apoios (coincidentes com os valores dos esforços na estrutura, na secção correspondente) e dos esforços no betão na secção S-S referenciada na figura 2.14.

A análise do Quadro 2.3 permite verificar a excelente concordância entre as flechas obtidas por ambas as análises e uma vez que essa concordância foi total nas restantes grandezas apresentadas, confirma-se assim a validade da presente formulação. Note-se ainda que em todos os casos testados se verificou, na discretização por elementos de viga, uma resposta ligeiramente mais flexível, em termos de deslocamentos. Esta constatação já seria de esperar uma vez que na solução analítica não se considera o efeito do esforço transverso no cálculo das flechas, embora se verifique nos casos apresentados uma diferença praticamente desprezável.

Refira-se que uma malha de elementos finitos bastante grosseira pode conduzir a resultados menos correctos, aproximando-se dos valores analíticos quanto mais refinada for essa malha. Assim, é de salientar a necessidade de escolher uma discretização que obedeça a uma solução de compromisso entre a exactidão de resultados e os custos de cálculo, isto é, há todo o interesse de adoptar uma malha de elementos finitos que permita ao mesmo tempo obter resultados próximos dos analíticos e exiga o menor tempo de cálculo possível. Para atender a estes aspectos deve-se utilizar uma discretização mais refinada nas zonas onde há variações significativas da geometria da estrutura, das acções e dos esforços (ou tensões).



- Acções :
  - Pré-esforço: $P_o = 1200KN$
  - Momento constante: $M = 1200KN.m$

- Método das cargas equivalentes :

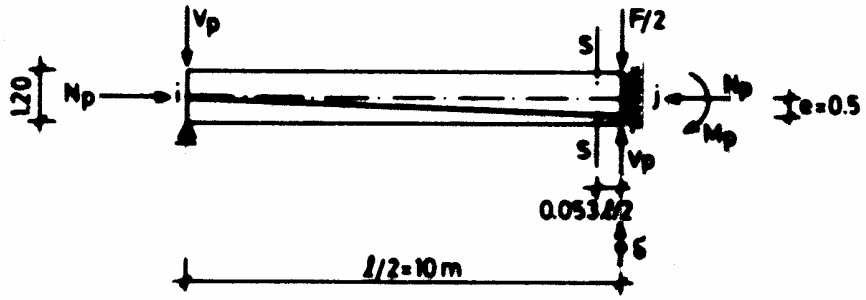
$N_p = P_o = 1200KN$

$M_p = P_o \cdot e = 600KN.m$

- Flecha a meio vão

$\delta = \frac{l^2}{8EI} \cdot M$

a) TESTE A - Viga simplesmente apoiada com armadura de pré-esforço com excentricidade constante.



- Acções :
  - Pré-esforço: $P_o = 1200KN$

$\alpha = tg^{-1}\frac{e}{l/2} = 2,862°$

  - Força concentrada: $F = 239,7KN$

- Método das cargas equivalentes :

$N_p = P_o \cdot \cos\alpha = 1198,5KN$

$V_p = P_o \cdot \text{sen}\,\alpha = 59,9KN$

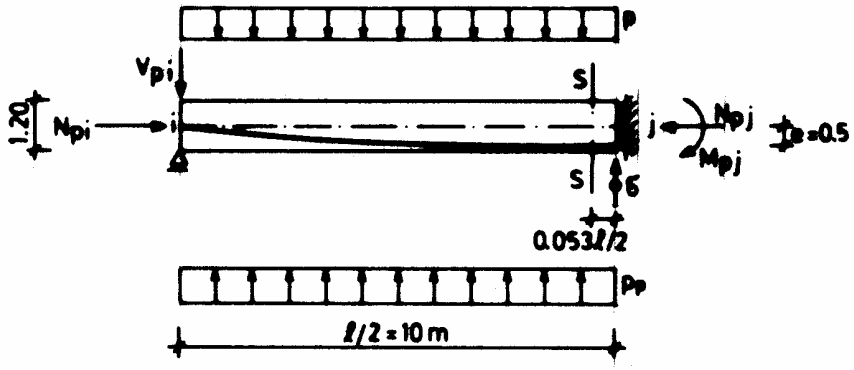
$M_p = N_p \cdot e = 599,3KN.m$

- Flecha a meio vão

$\delta = \frac{l^2}{12EI} \cdot M$

b) TESTE B - Viga simplesmente apoiada com armadura de pré-esforço com inclinação constante.

Fig. 2.14 - Representação esquemática dos testes numéricos.



- Acções:
  - Pré-esforço: $P_o = 1200KN$

    $\alpha_i = 5,711°$

    $\alpha_j = 0,0°$
  - Carga uniforme: $p = 24KN/m$

- Método das cargas equivalentes:

  $N_{pi} = P_o \cdot \cos\alpha_i = 1194,0KN$; $N_{pj} = P_o \cdot \operatorname{sen}\alpha_j = 1200KN$

  $V_{pi} = P_o \cdot \operatorname{sen}\alpha_i = 119,4KN$

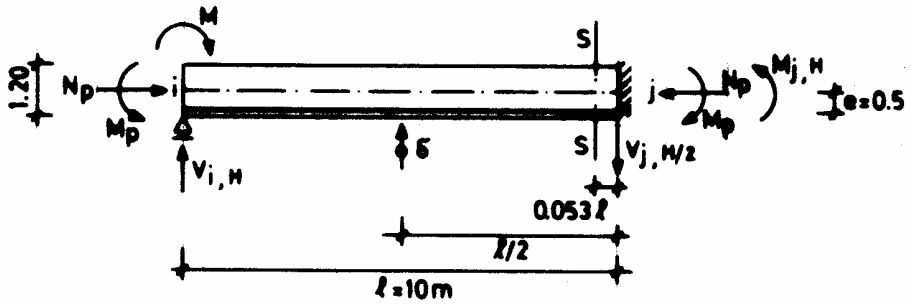
  $M_{pj} = N_{pj} \cdot e = 600KN.m$

  $p_p = \frac{8M_{pj}}{\ell^2} = 12KN/m$

- Flecha a meio vão

  $\delta = \frac{5p\ell^4}{384EI}$

c) TESTE C - Viga simplesmente apoiada com armadura de pré-esforço com geometria parabólica.



- Acções :
  - Pré-esforço: $P_o = 1200KN$

    $M_{j,H} = \frac{3}{2}P_o \cdot e = 900KN.m$

    $V_{i,H} = \frac{V_{j,H}}{2} = \frac{M_{j,H}}{\ell} = 90KN$

    $M_{j,p} = M_{j,H} - M_p = 300KN.m$
  - Momento constante: $M = 1200KN.m$

- Método das cargas equivalentes :

  $N_p = P_o = 1200KNN$

  $M_p = P_o \cdot e = 600KN.m$

- Flecha a meio vão

  $\delta = \frac{\ell^2}{32EI} \cdot M$

d) TESTE D - Viga hiperestática com armadura de pré-esforço com excentricidade constante.

Fig. 2.14 - Representação esquemática dos testes numéricos (continuação).

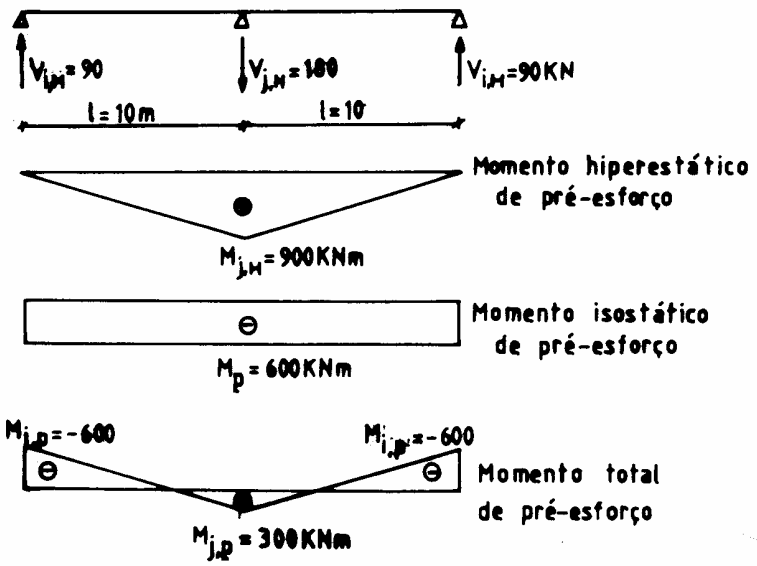


Fig. 2.15 - Viga hiperestática. Diagramas de momentos flectores devidos ao pré-esforço.

Quadro 2.3 - Resultados dos testes numéricos.

TESTE	ACÇÃO	Deslocamentos, $\delta(m)$		Reacções (KN; KN.m)		Esforços (KN; KN.m)		
		Cargas equiv.	Presente análise	V_i	M_j	N_x	V_{xz}	M_x
A	M	- 0,03488	- 0,03489	0,0	- 1200,0	0,0	0,0	1200,0
	P_o	0,01744	0,01720	0,0	0,0	- 1200,0	0,0	- 600,0
	$M + P_o$	- 0,01744	- 0,01769	0,0	- 1200,0	- 1200,0	0,0	600,0
B	F	- 0,02322	- 0,02371	119,8	- 1198,5	0,0	119,8	1135,2
	P_o	0,01161	0,01169	0,0	0,0	- 1198,5	- 59,9	- 567,6
	$F + P_o$	- 0,01161	- 0,01202	119,8	- 1198,5	- 1198,5	59,9	567,6
C	p	- 0,02906	- 0,02945	240,0	- 1200,0	0,0	12,7	1196,7
	P_o	0,01453	0,01451	0,0	0,0	- 1200,0	- 6,3	- 598,3
	$p + P_o$	- 0,01453	- 0,01494	240,0	- 1200,0	- 1200,0	6,3	598,4
D	M	- 0,00218	- 0,00223	- 179,4	597,4	0,0	- 179,4	- 489,9
	P_o	0,00109	0,00110	89,7	- 897,1	- 1200,0	89,7	245,0
	$M + P_o$	- 0,00109	0,00113	- 89,7	- 299,7	- 1200,0	- 89,7	- 244,9

Os resultados relativos à viga hiperestática indicados no Quadro 2.3, em conjunto com as expressões referidas na figura 2.14d) e os diagramas representados na figura 2.15, permitem verificar que, na presente formulação, as reacções nos apoios indentificam as

reacções hiperestáticas de pré-esforço (referidas pelo índice H), sendo os esforços totais de pré-esforço em cada secção resultantes das contribuições das correspondentes componentes hiperestáticas e isostáticas, definidos pelos esforços instalados no betão na secção em referência.

Resumindo, saliente-se as principais conclusões:

- a excelente concordância dos resultados obtidos pelas duas análises permitiram confirmar a validade da formulação proposta.
- A adopção de uma discretização grosseira pode conduzir a resultados errados, sendo por isso de importância crucial a adopção de uma malha de elementos finitos que forneça resultados correctos no menor tempo de cálculo possível.
- A presente modelação do pré-esforço tem em conta, intrinsecamente, o efeito hiperestático de pré-esforço.

2.3 - DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS PLANOS

2.3.1 - Elemento isoparamétrico quadrático de Serendipity

2.3.1.1 - Hipóteses de base

O elemento de 8 nós de Serendipity é um elemento finito isoparamétrico quadrático plano caracterizado por possuir os seus nós localizados na fronteira. Atendendo à natureza dos problemas a estudar no presente trabalho, é necessário ter em conta as seguintes hipóteses:

- as deformações são pequenas comparadas com as dimensões da peça;
- a componente do estado de tensão normal ao plano do elemento é nula em todo o seu domínio.

Ao permitir deslocamentos relativos entre os nós, no plano do elemento, a deformação por corte é considerada neste elemento.

2.3.1.2 - Geometria do elemento de 8 nós de Serendipity

O elemento de 8 nós de Serendipity é definido pelo plano médio da peça, com quatro nós de canto e quatro nós intermédios.

Na figura 2.16 são identificados os dois sistemas coordenados utilizados na formulação deste elemento:

- um referencial global (de orientação livre), definido pelo sistema de eixos coordenados (OXZ), que serve de base à definição da geometria, das variáveis nodais generalizadas (forças e deslocamentos) e da matriz de rigidez global; e,
- um referencial local, definido pelo sistema de eixos curvilíneo ($O\xi\eta$), que constitui o referencial base para a definição das funções de forma do elemento.

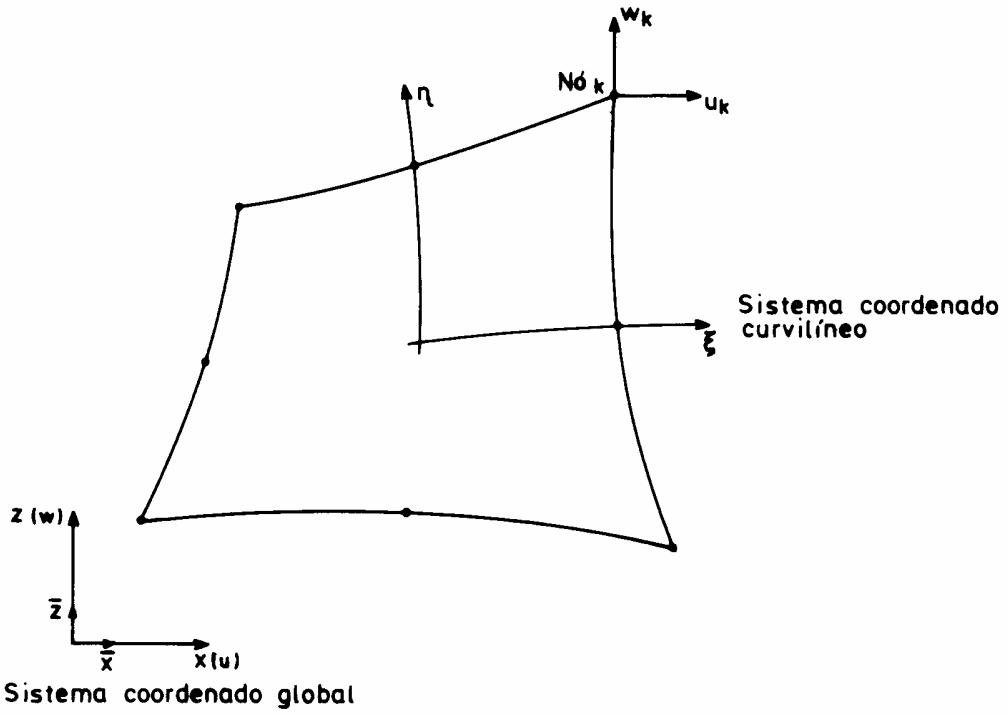


Fig. 2.16 - Elemento isoparamétrico quadrático plano.

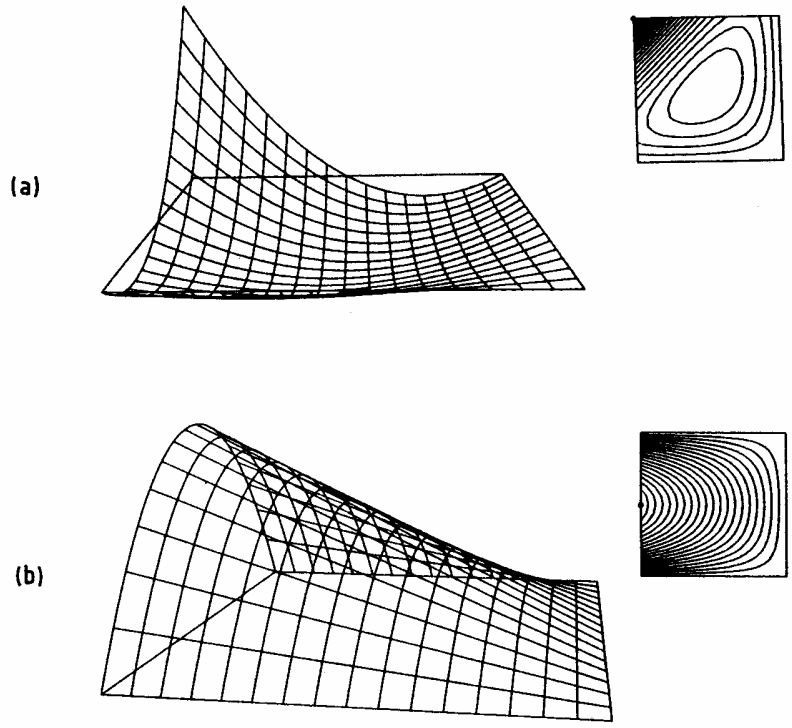


Fig. 2.17 - Funções de forma quadráticas (Serendipity): a) nó de canto; b) nó intermédio.

As funções de forma utilizadas no elemento de Serendipity para os 8 nós da fronteira são:

- nós de canto

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi\xi_i) \cdot (1 + \eta\eta_i) \cdot (\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \qquad (2.56)$$

- nós intermédios

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2} \cdot (1 + \xi\xi_i) \cdot (1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} \cdot (1 + \eta\eta_i) \cdot (1 - \xi^2) \qquad (2.57)$$

onde (ξ_i, η_i) representam as coordenadas curvilíneas do nó em consideração.

Tratando-se de um elemento isoparamétrico, as coordenadas cartesianas (x, z) de um ponto qualquer do elemento podem ser obtidas a partir das coordenadas cartesianas (x_i, z_i) dos 8 pontos nodais.

$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} \begin{bmatrix} N_i & \cdot \\ \cdot & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ z_i \end{Bmatrix} \qquad (2.58)$$

2.3.1.3 - Campo de deslocamentos

O campo de deslocamentos deste elemento plano é caracterizado pelas componentes de deslocamento, horizontal e vertical (u, w), dos nós que constituem o plano médio da peça.

Usando uma relação análoga à (2.58), o campo de deslocamentos (u, w) é definido em função do vector dos deslocamentos nodais do elemento (u_i, w_i), com base nas funções de forma N_i,

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} \begin{bmatrix} N_i & \cdot \\ \cdot & N_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} \tag{2.59}$$

2.3.1.4 - Relações constitutivas

Tendo presente as hipóteses das pequenas deformações e da componente de tensão normal ao plano do elemento ser nula $(\sigma_y = 0)$, conforme se viu na secção (2.3.1.1), as três componentes, de interesse, do estado de deformação em problemas de estado plano de tensão são expressas pela relação:

$$\underline{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} [B_i] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} \tag{2.60}$$

sendo a matriz de deformação do elemento definida para o nó i por:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \cdot \\ \cdot & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

As derivadas cartesianas das funções de forma, contidas em (2.61), são definidas através da relação:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{2.62}$$

onde $[J]$ é a matriz do Jacobiano, definida por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

cujas componentes podem ser obtidas através da relação (2.58).

O estado de tensão é representado pelo vector

$$\underline{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_z \quad \tau_{xz}\}^T \tag{2.64}$$

sendo as componentes de tensão relacionadas com as correspondentes componentes de deformação ϵ_x, ϵ_z e γ_{xz}, através da matriz constitutiva do material, $\underline{D}$, da seguinte forma:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\epsilon} \tag{2.65}$$

sendo $\underline{D}$ expressa, para um material elástico e isotrópico, por:

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & \cdot \\ \upsilon & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

onde υ e E designam o coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade do material.

2.3.1.5 - Matriz de rigidez e vector das forças nodais do elemento

A matriz de rigidez, $\underline{K}_e$, e o vector das forças nodais, $\underline{f}_e$, do elemento plano de espessura constante, t, vêm definidos pelas relações usuais:

$$\underline{K}_e = \int_S \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot t \cdot dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot t \cdot |\underline{J}| \cdot d\xi \cdot d\eta \tag{2.67}$$

$$\underline{f}_e = \int_S \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot t \cdot dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot t \cdot |\underline{J}| \cdot d\xi \cdot d\eta \tag{2.68}$$

onde $|\underline{J}|$ designa o determinante da matriz do Jacobiano.

Como habitualmente, a quantificação das expressões (2.67) e (2.68) é efectuada por integração numérica. Na presente formulação, estas integrações são realizadas de uma forma análoga à indicada na secção 2.2.1.9.

Considerando a função genérica $\phi(\xi,\eta)$ definida para o domínio do elemento, o integral desta função estendido ao volume do elemento (idêntico aos integrais definidos em (2.67) e (2.68)), expresso por:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi(\xi,\eta)\cdot d\xi \cdot d\eta \qquad (2.69)$$

pode ser obtido por integração numérica através da expressão:

$$I = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \phi(\xi_i,\eta_j)\cdot a_i \cdot a_j \qquad (2.70)$$

onde (ξ_i,η_i) designam as coordenadas curvilíneas dos pontos de integração, a_i e a_j representam os factores de peso correspondentes e n designa a regra de integração utilizada (nxn).

Devido aos problemas de *shear-locking* que a integração completa (3x3) pode apresentar (embora sejam, geralmente, pouco relevantes em estados planos de tensão), privilegia-se a utilização de uma regra de integração reduzida (2x2).

2.3.2 - Simulação das armaduras

2.3.2.1 - Formulação contínua

Na representação contínua das armaduras (Póvoas, 1985 e 1991) considera-se o aço distribuído ao longo do domínio do elemento em malhas ortogonais com uma determinada orientação (figura 2.18).

Esta representação é sobretudo aconselhável quando há uma distribuição uniforme das armaduras no elemento (armaduras em malha em paredes , estribos em vigas, etc.).

A consideração de aderência perfeita entre o aço e o betão é traduzida num único campo de deslocamentos no domínio do elemento.

Neste modelo de representação, a contribuição da armadura para a determinação da matriz de rigidez e para a formação do vector das forças nodais equivalentes do elemento é definida pelas relações (2.67) e (2.68), após algumas transformações adequadas. Assim,

na presença de armaduras contínuas, a matriz constitutiva $\underline{D}$ expressa em (2.67) representa a contribuição dos dois materiais (betão e aço) contidos no elemento. Para tal, adiciona-se à matriz constitutiva do betão a matriz $[D_s]$ da armadura, dada pela seguinte expressão:

$$[D_s] = [T_s]^T \cdot [\overline{D}_s] \cdot [T_s] \qquad (2.71.a)$$

com

$$[T_s] = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha_s & \operatorname{sen}^2\alpha_s & \operatorname{sen}\alpha_s \cdot \cos\alpha_s \\ \operatorname{sen}^2\alpha_s & \cos^2\alpha_s & -\operatorname{sen}\alpha_s \cdot \cos\alpha_s \end{bmatrix} \qquad (2.71.b)$$

e

$$[\overline{D}_s] = \frac{1}{t} \cdot \begin{bmatrix} t_{s_1} E_{s_1} & \cdot \\ \cdot & t_{s_2} E_{s_2} \end{bmatrix} \qquad (2.71.c)$$

sendo α_s o ângulo que define a orientação da malha do elemento (figura 2.18), t_{s_1} e t_{s_2} as espessuras equivalentes da armadura em cada direcção e E_{s_1} e E_{s_2} os correspondentes módulos de elasticidade.

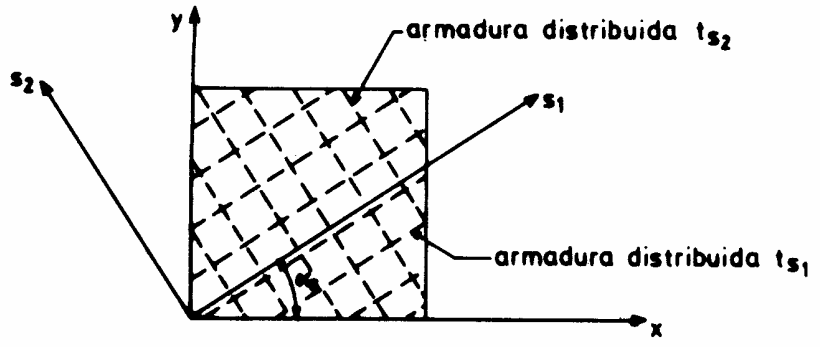


Fig. 2.18 - Representação contínua da armadura passiva.

Analogamente, a contribuição das armaduras para as forças internas no elemento é dada pelo vector resultante da transformação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x,s} \\ \sigma_{z,s} \\ \tau_{xz,s} \end{Bmatrix} = [T_s]^T \cdot \begin{Bmatrix} t_{s_1} \cdot \sigma_{s_1} \\ t_{s_2} \cdot \sigma_{s_2} \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{t} \qquad (2.72)$$

onde t é a espessura do elemento e σ_{s_1} e σ_{s_2} são as tensões instaladas nas armaduras, obtidas através da aplicação das relações constitutivas para o aço sobre as extensões, dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{s_1} \\ \epsilon_{s_2} \end{Bmatrix} = [T_S] \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.73}$$

2.3.2.2 - Formulação discreta

Esta formulação permite a representação de armaduras isoladas através da consideração de elementos unidimensionais inseridos no elemento plano (Póvoas, 1991). Desenvolvida originalmente com o objectivo de modelar armaduras de pré-esforço, a formulação discreta permite considerar também a contribuição da armadura para a rigidez e para as forças nodais equivalentes do elemento que a contém.

Considerando também a aderência perfeita entre o aço e o betão e tendo ainda em conta o comportamento eminentemente axial da armadura, a formulação discreta é análoga à apresentada na secção 2.2.2 para os elementos unidimensionais de cabo de pré-esforço adaptando-a para o campo de deslocamentos dos elemento planos.

2.4 - ASSOCIAÇÃO DOS ELEMENTOS DE VIGA AOS ELEMENTOS PLANOS. MODELAÇÃO DA ZONA DE TRANSIÇÃO

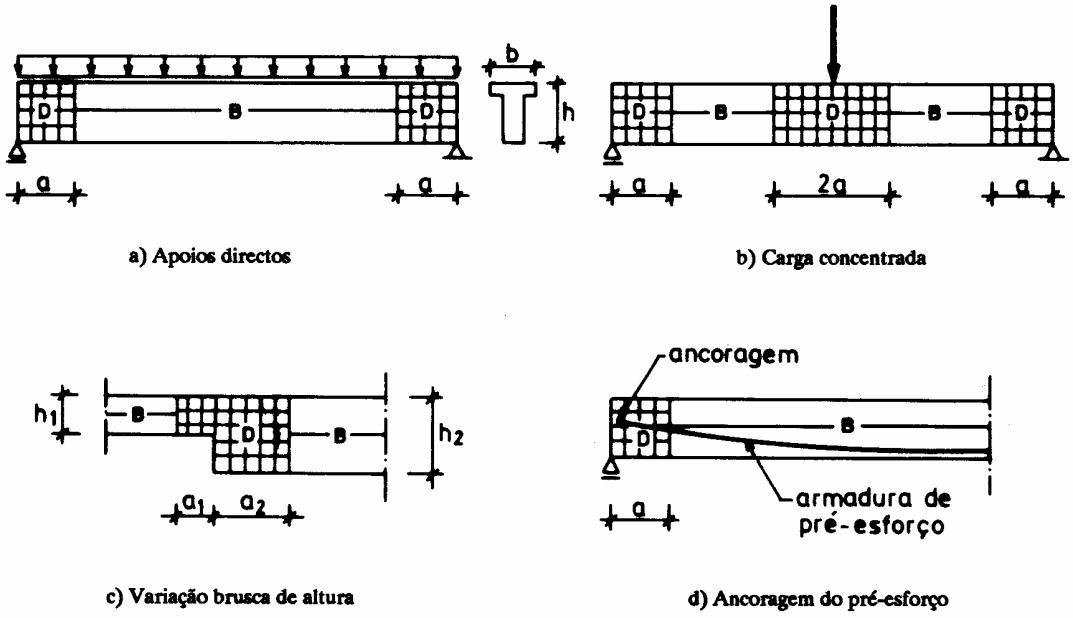
2.4.1 - Aspectos gerais

A incapacidade dos elementos de viga modelarem correctamente as zonas de descontinuidade conduz à necessidade de usar elementos que melhor as descrevam. Ao permitir uma distribuição não linear de tensões na secção transversal da peça, os elementos planos permitem estudar com mais perfeição as zonas onde não se verifica o comportamento de peça linear, nomeadamente, nós de pórticos, zonas de amarração e ancoragem de pré-esforço, apoios directos, cargas concentradas, variações bruscas de altura e todas as zonas que se afastam do comportamento tipo de flexão.

Recorrendo aos dois tipos de elementos mencionados, será possível proceder à modelação de uma viga de forma a ter em conta as suas peculiaridades. Desta forma, usando uma discretização menos volumosa (em termos de cálculo) que a discretização por elementos planos em toda a extensão, consegue-se fazer o seu estudo de forma bastante satisfatória.

A discretização em elementos planos deve ser prolongada de um comprimento tal que a transição com os elementos de viga se faça numa secção com um comportamento típico de flexão. A figura 2.19 fornece informações sobre a divisão em elementos finitos de diferentes tipos e a amplitude que os elementos planos devem tomar em vigas com zonas onde não se verifica o comportamento de peça linear (Schlaich, 1987).

Quando se aplica uma acção a uma viga, a deformação da secção do elemento de viga de Timoshenko dá-se por um movimento de corpo rígido em função das três componentes de deslocamento (horizontal, vertical e rotação) no ponto do eixo médio e com a condição de deformação nula na linha normal ao eixo neutro (variação nula de deslocamentos verticais). A secção de um elemento plano sujeita à mesma acção, pelo contrário, pode apresentar variação de deslocamentos verticais e um campo de deslocamentos independente das suas componentes do eixo médio.

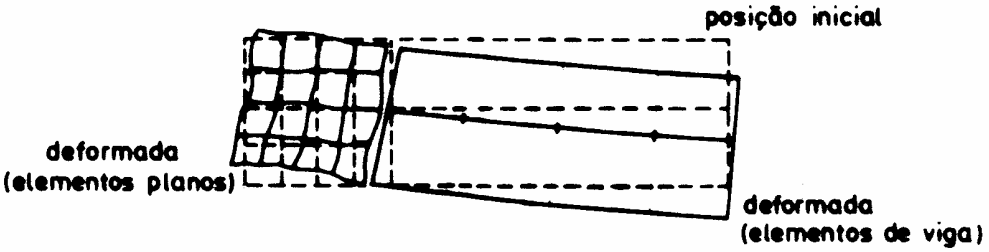


$$a = \max\{b, h\}$$

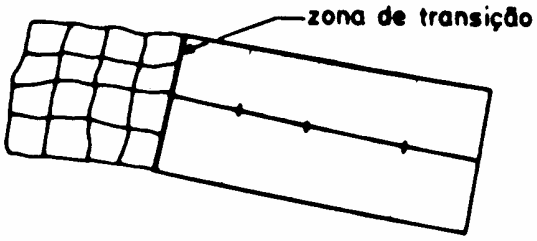
B - discretização em elementos de viga;
D - discretização em elementos planos;
b,h - largura e altura da secção, respectivamente;
a - maior valor entre b e h.

Fig. 2.19 - Divisão de vigas em elementos de viga e elementos planos.

A ligação entre os dois tipos de discretização é possível impondo na secção de transição o campo de deslocamentos do elemento de viga (figura 2.20). Assim, mediante um agrupamento conveniente das matrizes de rigidez e do vector das forças nodais dos elementos, tendo em conta a hipótese formulada para a secção de transição, poderá aplicar-se a metodologia habitual dos elementos finitos.



a) Deformadas em elementos planos e elementos de viga.



b) Compatibilização dos deslocamentos na zona de transição.

Fig. 2.20 - Ligação entre elementos planos e elementos de viga.

2.4.2 - Compatibilização dos campos de deslocamentos

Tendo sido admitida, em 2.4.1, a hipótese de a secção de transição se manter recta após a deformação, os graus de liberdade dos nós k contidos nessa secção estão associados com os graus de liberdade do nó j pertencente ao eixo médio da viga (figura 2.21), pela relação (Faria, 1988):

$$\begin{Bmatrix} u_k \\ w_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -z_k \\ \cdot & 1 & x_k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u'_j \\ w'_j \\ \theta'_j \end{Bmatrix} \tag{2.74}$$

pode-se assim estabelecer que

$$\{a_k\} = [T_{k,j}] \cdot \{a'_j\} \tag{2.75}$$

Assemblando as diversas submatrizes do tipo $[T_{k,j}]$ (associadas com os nós na secção de transição) com as submatrizes identidade de dimensão 2 (associadas aos restantes nós do elemento plano) numa única matriz $[T]$, é possível relacionar os vectores de deslocamentos nodais do elemento de oito nós na zona de transição:

$$\{a\} = [T] \cdot \{a'\} \tag{2.76}$$

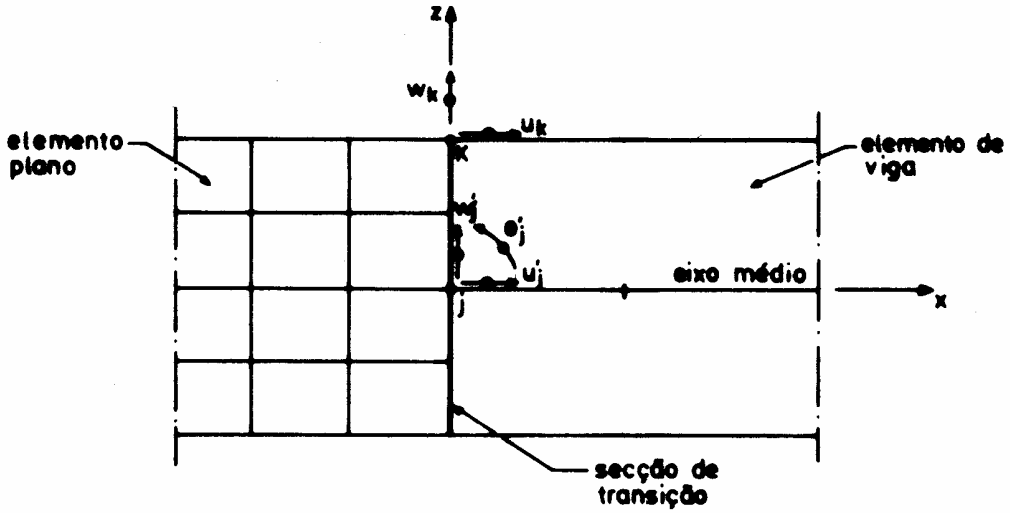


Fig. 2.21 - Associação dos graus de liberdade.

2.4.3 - Matriz de rigidez e vector das forças nodais dos elementos planos na zona de transição

Uma vez que o campo de deslocamentos dos elementos planos na zona de transição é diferente dos restantes, as expressões que permitem calcular a matriz de rigidez e o vector das forças nodais do elemento, vistas na secção 2.3.1.5, têm que sofrer transformações.

Como já se viu anteriormente, o equilíbrio ao nível do elemento é definido pela expressão:

$$[K]\cdot\{a\}=\{f\} \tag{2.77}$$

sendo $[K]$ e $\{f\}$ a matriz de rigidez e o vector das forças nodais do elemento, respectivamente.

Substituindo (2.76) em (2.77) resulta:

$$[K]\cdot[T]\cdot\{a'\}=\{f\} \tag{2.78}$$

Pré-multiplicando ambos os membros desta equação por $[T]^T$, obtém-se:

$$[T]^T\cdot[K]\cdot[T]\cdot\{a'\}=[T]^T\cdot\{f\} \tag{2.79}$$

ou ainda,

$$[K']\cdot\{a'\}=\{f'\} \tag{2.80}$$

sendo

$$[K']=[T]^T\cdot[K]\cdot[T] \tag{2.81}$$

a matriz de rigidez do elemento plano na zona de transição e

$$\{f'\}=[T]^T\cdot\{f\} \tag{2.82}$$

o seu vector das forças nodais.

Dado que a matriz $[T]$ não é quadrada, a dimensão de $[K']$ e $\{f'\}$ passa a ser diferente da dimensão 16 (para um elemento de oito nós) que possuía antes da modificação expressa em (2.81). Num elemento de oito nós, se três deles estiverem contidos na secção de transição, a sua dimensão será 13.

2.4.4 - Estado de tensão nos elementos planos na zona de transição

Na formulação dos elementos finitos, o estado de tensão nos pontos de Gauss é calculado em função da resposta da estrutura, em termos de deslocamentos, referida aos nós que definem a discretização da malha. De acordo com a metodologia aqui adoptada, a resposta da estrutura expressa em termos dos deslocamentos $\{a'\}$ dos nós independentes terá que ser adequadamente transformada no vector dos deslocamentos $\{a\}$ relativo a todos os nós da estrutura.

Uma vez conhecidas as componentes de deslocamentos em todos os nós do elemento é possível determinar o correspondente estado de tensão através das expressões definidas na secção 2.3.1.4.

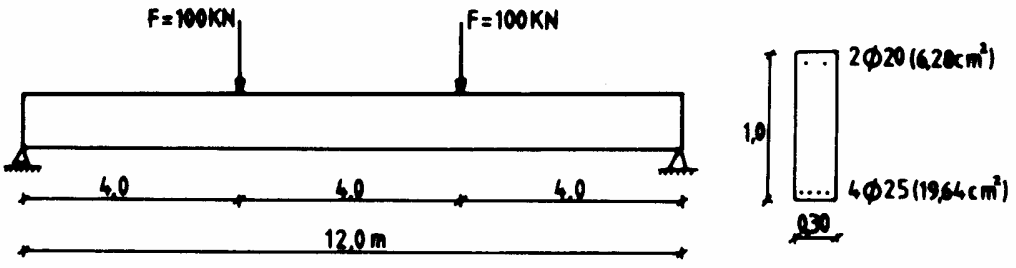
2.4.5 - Testes numéricos comparativos dos modelos de discretização

Tendo como objectivo ilustrar a validade da presente modelação da zona de transição entre elementos finitos de viga e elementos finitos planos, foi estudada uma viga simplesmente apoiada sujeita a um carregamento simétrico (ver figura 2.22) e com um comportamento mecânico elástico e linear. A resposta da estrutura, em termos de deslocamentos, foi determinada a partir de três análises distintas, correspondendo a cada

uma delas três diferentes discretizações: somente por elementos de viga (descritos em 2.2), somente por elementos planos (descritos em 2.3) e recorrendo simultâneamente a esses dois tipos de elementos (de acordo com o que foi descrito em 2.4).

A viga de betão armado, com um vão de 12m, é constituída por um betão da classe B25 e por uma armadura ordinária da classe A400 (REBAP, 1983), sendo a sua secção transversal caracterizada por uma geometria rectangular (0,30 x 1,00m²) com 4 varões de 25mm na face inferior e 2 varões de 20mm na face superior. Aos terços do vão da viga encontram-se aplicadas duas forças concentradas de 100 KN.

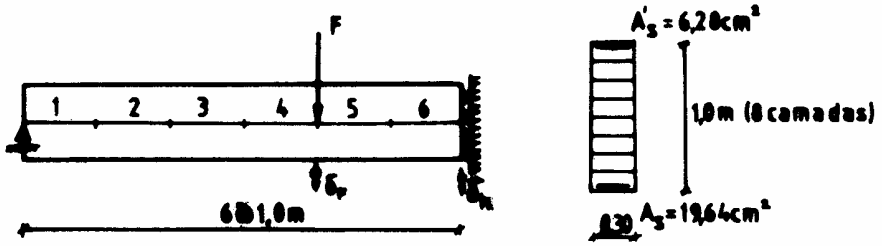
Devido à simetria da geometria da estrutura e do carregamento, nas análises que se seguem foi somente estudada metade da viga. Numa primeira análise, designada por *análise A*, usaram-se seis elementos de viga na discretização longitudinal de metade do vão, tendo a discretização ao longo da altura sido feita por oito camadas de betão de igual espessura (0,125m) e duas camadas de aço de 19,64 cm², a 4cm da face inferior, e de 6,28cm², a 4cm da face superior, respectivamente. A segunda análise (*análise B*) foi realizada usando 18 elementos planos dispostos em seis intervalos de 1m ao longo do vão e três intervalos (0,30 + 0,40 + 0,30m) ao longo da altura, sendo a armadura discretizada por elementos unidimensionais inseridos nos elementos planos que contêm as faces superior e inferior. Finalmente, numa última análise (*análise C*), a estrutura foi discretizada em dois blocos de elementos planos e em dois blocos de elementos de viga. Para definir a extensão de cada um desses blocos foi tido em conta as informações contidas na figura 2.19, mantendo os elementos as grandezas dos seus correspondentes das análises *A* e *B*. Assim, o primeiro bloco, com a extensão de 1m, é composto por três elementos planos dispostos ao longo da altura, o segundo bloco (com 2m) por dois elementos de viga, o terceiro bloco (também com 2m) por seis elementos planos e, finalmente, o quarto bloco (com 1m) por um elemento de viga. Na figura 2.23 encontram-se ilustradas as malhas para cada uma das três análises atrás mencionadas.



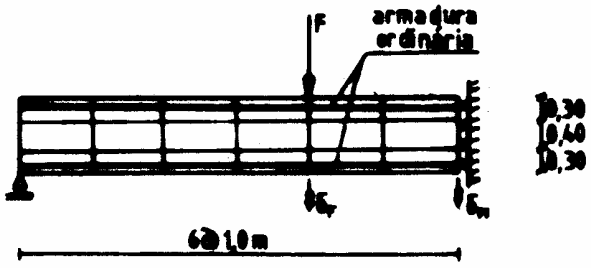
Betão B25 : $E_c = 29GPa$

Aço A400 : $E_s = 200GPa$

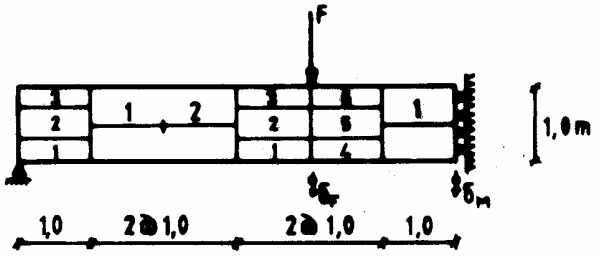
Fig. 2.22 - Viga simplesmente apoiada. Geometria, carregamento e propriedades dos materiais.



a) Malha de elementos finitos para a *análise A*.



b) Malha de elementos finitos para a *análise B*.



c) Malha de elementos finitos para a *análise C*.

Fig. 2.23 - Viga simplesmente apoiada. Análises realizadas.

Quadro 2.4 - Resultados dos deslocamentos verticais da viga simplesmente apoiada.

Deslocamentos verticais (m)	Análise A	Análise B	Análise C	Solução analítica
a meio vão, δ_M	0,007596	0,007532	0,007561	0,007361
sob a força, δ_F	0,006623	0,006576	0,006583	0,006401

Os resultados obtidos para os deslocamentos verticais, a meio vão e sob a força, nas três análises referidas podem ser comparados com a solução analítica, baseada na teoria da elasticidade, através do Quadro 2.4.

Como primeira observação do Quadro 2.4 pode-se apontar, apesar de não terem sido usadas discretizações muito refinadas, a excelente concordância dos resultados obtidos pelas três análises com a solução analítica, realçando-se aqueles relativos à análise *C*, cuja validade se pretendia verificar. Observa-se que a resposta da análise com elementos finitos foi ligeiramente mais flexível que a obtida analiticamente, devido às razões já apontadas na secção 2.2.3. Por sua vez, constata-se ainda nestes testes deslocamentos ligeiramente maiores na análise com elementos de viga (*análise A*) que na análise com elementos planos (*análise B*). Note-se ainda que a resposta da análise que considera simultâneamente os dois tipos de elementos (*análise C*), como seria de esperar, apresenta valores intermédios àqueles obtidos pelas análises *A* e *B*, o que confirma a validade da presente modelação da zona de transição.

Embora já fosse de esperar, saliente-se que nas três análises efectuadas se obtiveram resultados completamente iguais, no que diz respeito a reacções nos apoios e esforços na estrutura, aos obtidos pela teoria da elasticidade, o que, em conjunto com o que atrás se escreveu, permite concluir favoravelmente àcerca da adequação da presente modelação.

2.5 - OBSERVAÇÕES FINAIS

Foi apresentado de uma forma sucinta o processo de análise linear elástica de peças de betão armado pré-esforçado, no âmbito do método dos elementos finitos, que serviu de base ao desenvolvimento dos modelos computacionais.

Foram referidos alguns aspectos particulares da formulação do elemento de viga isoparamétrico de três nós de Timoshenko associado a uma discretização por camadas ao longo da espessura e do elemento isoparamétrico quadrático de Serendipity, adoptados no presente modelo estrutural. Especial destaque é aqui dado à formulação de elementos curvos unidimensionais de simulação da armadura de pré-esforço.

Neste capítulo é ainda dado realce à forma de associação entre os dois tipos de elementos mencionados e, em especial, à modelação da zona de transição entre eles.

Finalmente, são apresentados alguns testes numéricos que permitem aferir a validade e eficácia do modelo computacional desenvolvido.

2.6 - BIBLIOGRAFIA

Ahmad, S.; Irons, B. M. e Zienkiewicz, O. C. (1970) - Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements - Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2, p.p. 419-451.

ASCE Commitee on Concrete and Masonry Structures (1981), Task Commitee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures - A State-of-the-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, Capítulos 1 e 3.

Bathe, K. J. (1982) - Finite Element Procedures in Engineering Analysis - Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Bouberguig, A. (1983) - Calcul Static des Coques Nervurées et Précontraintes - Thèse de doctorat, Ec. Pol. Féd. Lausanne.

Calvi, G. M. e Gobetti, A. (1987) - Numerical Models for the Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Frames - IABSE Colloquium, Delft, p.p. 229-236.

Delgado, R. M. (1986) - O Método dos Elementos Finitos na Análise Dinâmica de Barragens Incluindo a Interacção Sólido-Liquido - Tese de doutoramento, Faculdade de Engenharia, Porto.

Faria, R. M. C. M. (1988) - Análise Numérica de Barragens Abóbada sujeitas à Acção Sísmica - Tese de Mestrado, Univ. do Porto.

Figueiras, J. A. (1983) - Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells - Ph. D. Thesis, C/Ph/72/83, Univ. College of Swansea.

Henriques, A. A. R. e Figueiras, J. A. (1988) - Modelo de Análise de Vigas Pré-Esforçadas - 2º Encontro Nacional sobre Estruturas Pré-Esforçadas, Porto.

Hinton, E. e Owen, D. R. J. (1977) - Finite Element Programming - Academic Press, London.

Hinton, E. e Owen, D. R. J. (1981) - An Introduction to Finite Element Computations - Pineridge Press Limited, Swansea, U. K..

Kang, Y. J. (1977) - Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames - Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, California.

Kang, Y. J. e Scordelis, A. C. (1980) - Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Frames - ASCE J. St. Div., Vol. 106 (2), p.p. 445-461.

Onn, C. C. (1984) - Nonlinear Analysis of Creep and Shrinkage Effects on Reinforced Concrete Beams - Master of Science Thesis, C/M/182/84, Swansea, U. K..

Owen, D. R. J. e Hinton, E. (1980) - Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice - Pineridge Press, Swansea, U. K..

Póvoas, R. H. C. F. (1985) - Modelo de Elementos Finitos para Análise de Estruturas Planas de Betão Armado - Tese de Mestrado, Univ. do Porto.

Póvoas, R. H. C. F. (1991) - Modelos Não-Lineares de Análise e Dimensionamento de Estruturas Laminares de Betão Incluindo Efeitos Diferidos - Tese de doutoramento, Univ. do Porto.

Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (1983), Decreto-Lei nº349-C/83, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa.

Reddy, J. N. (1985) - An Introduction to the Finite Element Method - McGraw-Hill.

Schlaich, J.; Schäfer, K. e Jennewein M. (1987) - Toward a Consistent Design of Structural Concrete - PCI Journal, Vol. 32 (3), p.p. 74-150.

Scordelis, A. C. (1983) - Analytical Models for Nonlinear Material, Geometrical and Time-Dependent Effects - International Symposium on Nonlinearity and Continuity in Prestressed Concrete, Vol. 2, M. Z. Cohn (ed.), p.p. 25-43.

Timoshenko, S. e Woinowsky-Krieger, S. (1985) - Theory of Plates and Shells - 2nd ed., McGraw-Hill.

Zienkiewicz, O. C. (1977) - The Finite Element Method - 3rd ed., McGraw-Hill, London.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. e Too, J. M. (1971) - Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells - Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 3, p.p. 275-290.

Capítulo 3

PROGRAMA DE DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS E VERIFICAÇÃO AOS ESTADOS LIMITES REGULAMENTARES

3.1 - INTRODUÇÃO

Todas as estruturas, e particularmente as estruturas pré-esforçadas, devem assegurar a sua função de resistência, durabilidade e adequada utilização corrente. Para atingir esses objectivos, o projectista recorre usualmente a processos sistemáticos de dimensionamento.

Visando tornar este procedimento mais rápido e menos fastidioso, foi criado um programa baseado num modelo numérico de dimensionamento das armaduras em vigas pré-esforçadas, complementado por uma verificação aos estados limites definidos na regulamentação portuguesa.

Recorreu-se ao método dos elementos finitos (formulação de deslocamentos) na determinação dos deslocamentos e dos esforços, baseado num comportamento elástico linear dos materiais. No dimensionamento da armadura de pré-esforço aos estados limites de utilização procedeu-se a uma análise elástica das tensões nas secções em fase fendilhada e não fendilhada, fazendo-se ainda um cálculo à rotura para o dimensionamento da armadura passiva aos estados limites últimos de resistência.

Finalmente, apresenta-se o dimensionamento das armaduras de uma viga contínua de dois vãos com secção variável, de forma a avaliar a potencialidade e a eficácia do programa.

3.2 - ESTRUTURA DO PROGRAMA DE CÁLCULO

O presente programa de cálculo encontra-se estruturado nas seguintes fases (ver figura 3.1):

- leitura dos dados relativos à geometria da peça, às propriedades dos materiais e às acções;
- cálculo dos deslocamentos e dos esforços usando o método dos elementos finitos;

- definição do valor do pré-esforço e da geometria das armaduras de pré-esforço, de acordo com os resultados obtidos;
- cálculo das perdas de pré-esforço (perdas instantâneas e perdas diferidas), de acordo com as expressões do REBAP, e definição do pré-esforço inicial e final;
- cálculo da armadura passiva necessária para verificar a segurança da estrutura aos estados limites últimos de resistência, através dum cálculo à rotura das tensões ao nível das secções (com a acção do pré-esforço já incluída);
- verificação aos estados limites de utilização de acordo com a regulamentação portuguesa, nomeadamente, o estado limite de descompressão para as combinações quase permanentes de acções, o estado limite de largura de fendas para as combinações frequentes e a tensão máxima de compressão no betão para as combinações raras, na verificação da segurança aos estados limites de fendilhação e, finalmente, a verificação do estado limite de deformação.

De forma a visualizar mais facilmente os resultados obtidos pelo programa, existem saídas gráficas das deformadas para as diversas combinações de acções, dos esforços (axiais, transversos e momentos flectores) ao longo da viga, das tensões em secções pretendidas, da variação do pré-esforço ao longo das armaduras e da distribuição da armadura passiva.

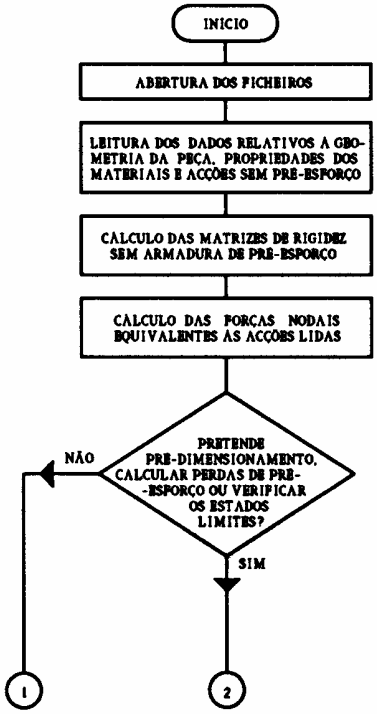


Fig. 3.1 - Segmento principal do programa de cálculo automático.

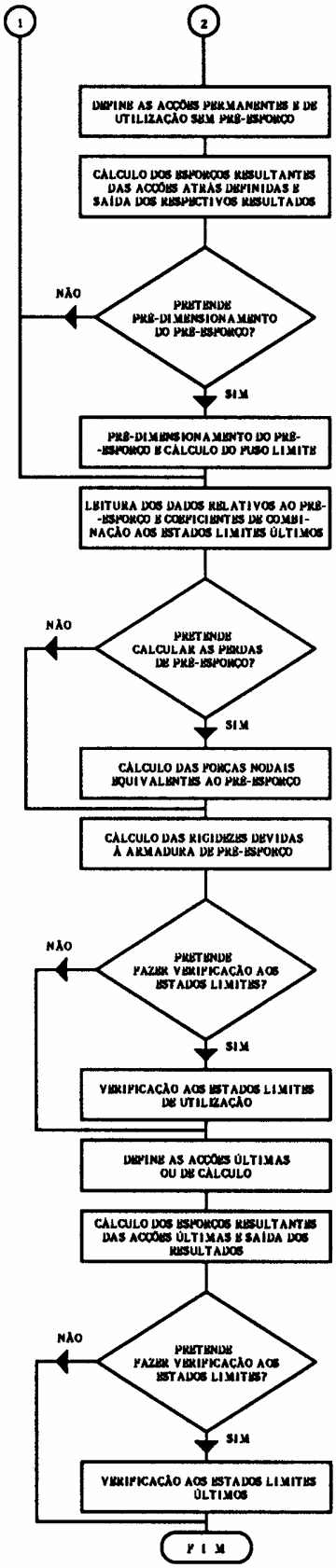
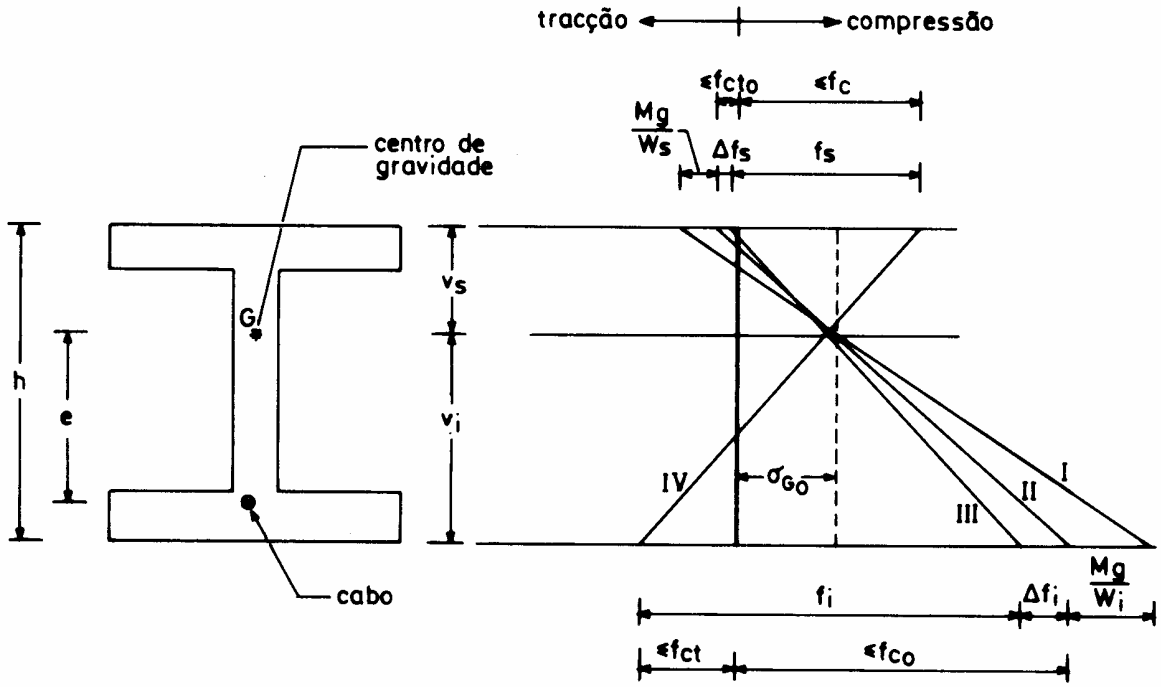


Fig. 3.1 - Segmento principal do programa de cálculo automático (continuação).

3.3 - DIMENSIONAMENTO DE UMA VIGA DE BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

3.3.1 - Bases de cálculo

O dimensionamento de uma viga de betão pré-esforçado, uma vez definidas as acções actuantes e as propriedades mecânicas dos materiais, consiste na determinação da geometria da peça e da quantidade de armadura de pré-esforço e passiva de forma a ser verificada a segurança em relação aos estados limites de utilização e aos estados limites últimos de resistência (Appleton, 1988; Leonhardt, 1979; Lin,1963; Nilson,1986; Pfeill, 1983; Thonier, 1985).



I - Variação de tensões devida à aplicação isolada do pré-esforço inicial, P_o, com uma excentricidade, e, relativamente ao centro de gravidade da secção.

II - Variação de tensões devida a P_oe ao momento flector, M_g, resultante das acções permanentes mobilizadas durante a aplicação do pré-esforço.

III - Variação de tensões devida ao pré-esforço final, P, (pré-esforço ao fim de um intervalo suficientemente longo para que as perdas diferidas se tivessem processado na totalidade) e ao momento flector M_g.

IV - Variação de tensões devida a Pe ao momento flector M resultante das restantes acções actuantes.

Fig. 3.2 - Variação dos diagramas de tensão numa secção pré-esforçada para vários estádios de carga.

A figura 3.2 representa uma secção genérica sujeita a um momento flector máximo, obtendo-se diferentes diagramas de tensões para os vários estádios de carga.

No diagrama I representa-se a variação de tensões devida à força de pré-esforço inicial, P_o, aplicada com a excentricidade, e, relativamente ao centro de gravidade da secção, actuando isoladamente.

No diagrama II actua, além da força P_o, o momento flector M_g devido às acções permanentes mobilizáveis no acto de pré-esforço. As tensões devidas a M_g são M_g/w_s e M_g/w_i, respectivamente na fibra superior e na fibra inferior (sendo w_s e w_i os módulos de flexão superior e inferior, respectivamente). Nesta fase de carga, a tensão de tracção na fibra superior é limitada pela tensão limite de tracção na fase inicial, f_{ct_o}, e a tensão de compressão na fibra inferior pela tensão limite de compressão na fase inicial f_{c_o}.

Em geral, é aceitável admitir que a totalidade das perdas diferidas de pré-esforço ocorrem antes da aplicação das cargas de serviço, uma vez que para estas cargas as tensões no betão são críticas após se ter processado todas as perdas de pré-esforço e não antes. Assim, são representadas no diagrama III as tensões que se desenvolvem quando há uma diminuição de pré-esforço de P_o para P, resultando numa variação de tensão em relação ao diagrama II de Δf_s na fibra superior e Δf_i na fibra inferior.

O diagrama IV resulta da aplicação de cargas adicionais (cargas permanentes não incluídas em M_g e a parcela de sobrecargas correspondente à combinação em causa), originando um momento flector M_q. A aplicação destas cargas originam uma variação de tensões f_s na fibra superior e f_i na inferior. O diagrama IV deverá estar limitado pela tensão limite de tracção na fase de carga, f_{ct}, na fibra inferior e pela tensão limite de compressão, f_c, na fibra superior.

Observando a figura 3.2 verifica-se que os módulos de flexão da secção da viga, terão que obedecer às seguintes condições:

$$w_s \geq \frac{M_q}{f_s} \qquad e \qquad w_i \geq \frac{M_q}{f_i} \tag{3.1}$$

Uma vez que a variação de tensão disponível para a carga a aplicar, M_q, é

$$f_s = f_{ct_o} - \Delta f_s - f_c \tag{3.2.a}$$

e

$$f_i = f_{ct} - f_{c_o} - \Delta f_i \tag{3.2.b}$$

então a definição dos módulos de flexão só é possível depois de conhecidos Δf_s e Δf_i.

Definindo a relação entre o pré-esforço inicial e final por,

$$R = \frac{P}{P_o} \tag{3.3}$$

a perda de pré-esforço será $(1 - R) \cdot P_o$, conduzindo a uma variação de tensões nas fibras, superior e inferior, igual às devidas ao pré-esforço inicial multiplicadas pelo factor $(1 - R)$.

$$\Delta f_s = (1 - R) \cdot \left(f_{ct_o} + \frac{M_g}{w_s} \right) \tag{3.4.a}$$

$$\Delta f_i = (1 - R) \cdot \left(-f_{c_o} + \frac{M_g}{w_i} \right) \tag{3.4.b}$$

Substituindo as expressões (3.2) e (3.4) nas expressões (3.1), obtém-se os seguintes módulos de flexão:

$$w_s \geq \frac{(1 - R) \cdot M_g + M_q}{R \cdot f_{ct_o} - f_c} \tag{3.5.a}$$

e

$$w_i \geq \frac{(1 - R) \cdot M_g + M_q}{f_{ct} - R \cdot f_{c_o}} \tag{3.5.b}$$

A posição do centro de gravidade da secção deve ser tal que verifique a seguinte igualdade:

$$I = w_s \cdot v_s = w_i \cdot v_i \tag{3.6}$$

sendo I o momento de inércia da secção e v_s e v_i as distâncias das fibras superior e inferior, respectivamente, ao centro de gravidade.

Considerando $h = v_s + v_i$ a altura total da secção, então:

$$\frac{v_s}{h} = \frac{w_i}{w_i + w_s} \tag{3.7}$$

Uma vez definida a geometria da secção de betão, é possível determinar a força de pré-esforço. Da figura 3.2 observa-se que a tensão inicial no betão ao nível do centro de gravidade é:

$$\sigma_{G_o} = f_{ct_o} - \frac{v_s}{h}(f_{ct_o} - f_{c_o}) \tag{3.8}$$

então, a força de pré-esforço inicial será:

$$P_o = A \cdot \left| \sigma_{G_o} \right| \tag{3.9}$$

sendo A a área da secção.

A excentricidade, e, com que a força de pré-esforço vai ser aplicada, deve produzir um momento flector, $P_o \cdot e$, que combinado com o momento flector M_g não conduza a tensões de tracção na fibra superior maiores do que f_{ct_o}.

$$\frac{P_o \cdot e}{w_s} = (f_{ct_o} - \sigma_{G_o}) + \frac{M_g}{w_s} \qquad (3.10)$$

Da expressão (3.10) obtém-se a máxima excentricidade para a secção de momento máximo,

$$e = e_{máx} = (f_{ct_o} - \sigma_{G_o}) \cdot \frac{w_s}{P_o} + \frac{M_g}{P_o} \qquad (3.11.a)$$

Considerando, alternativamente, como limitativa a tensão de compressão na fibra inferior, obtém-se:

$$e = e_{máx} = (\sigma_{G_o} - f_{c_o}) \cdot \frac{w_i}{P_o} + \frac{M_g}{P_o} \qquad (3.11.b)$$

As expressões (3.5) a (3.11) permitem seleccionar a secção de betão, a força de pré-esforço e respectiva excentricidade a adoptar no dimensionamento (de modo a satisfazer os limites especificados para as tensões), da forma apresentada na secção seguinte.

3.3.2 - Dimensionamento do pré-esforço

3.3.2.1 - Generalidades

O pré-dimensionamento da força de pré-esforço na origem e o traçado dos cabos de pré-esforço é realizado através da imposição, para estados limites de utilização, de determinados valores máximos de tensões. Assim, os limites de tensões aqui considerados são:

- não existência de tracções na fibra extrema que se encontra menos comprimida para os estados limites de descompressão;
- tensões de tracção não superiores ao valor médio da tensão de rotura do betão à tracção, f_{ctm}, correspondentes aos estados limites de largura de fendas;
- tensões de compressão não superiores ao valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão, f_{cd}, para as combinações raras de acções.

A determinação do pré-esforço é simplificada considerando, para o efeito, apenas os limites de tensões à tracção. Os limites de tensões à compressão serão posteriormente verificados, fazendo o estudo em secção fendilhada se necessário.

3.3.2.2 - Força de pré-esforço

De acordo com a secção 3.3.1 e com a figura 3.2, os limites de tracção a estabelecer são:

- durante a aplicação do pré-esforço, a tensão na fibra superior não deverá ultrapassar f_{ct_o},

$$-\frac{P_o}{A}+\frac{P_o \cdot e}{w_s}-\frac{M_g}{w_s} \geq -f_{ct_o} \qquad (3.12.a)$$

- na fase de carga, a tensão na fibra inferior não deverá ultrapassar f_{ct},

$$-\frac{P}{A}-\frac{P \cdot e}{w_i}+\frac{M_d}{w_i} \leq f_{ct} \qquad (3.12.b)$$

sendo $M_d = M_g + M_q$, o momento flector resultante de todas as acções actuantes, excepto as de pré-esforço.

Exprimindo as inequações (3.12) em função de $1/P$ e de e, obtém-se:

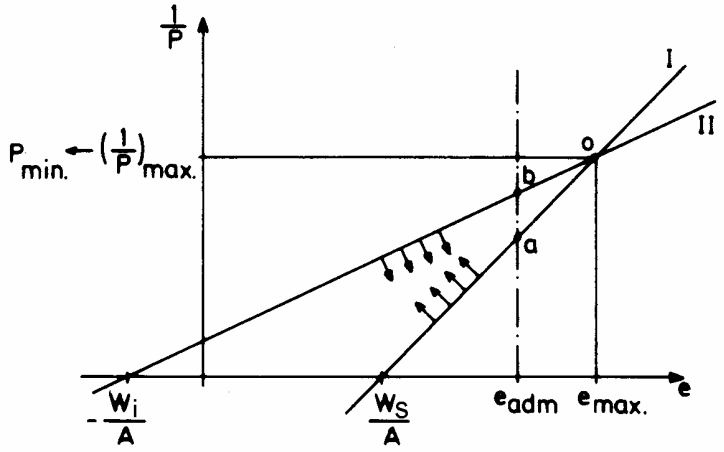
$$\frac{1}{P_o} \cdot (M_g + f_{ct_o} \cdot w_s) - e \geq -\frac{w_s}{A} \qquad (3.13.a)$$

$$\frac{1}{P} \cdot (M_d - f_{ct} \cdot w_i) - e \leq \frac{w_i}{A} \qquad (3.13.b)$$

Como se pode observar na figura 3.3, o ponto de intersecção, 0, das rectas contidas nas expressões (3.13.a) e (3.13.b), corresponde ao valor mínimo do pré-esforço e, tendo em conta a expressão (3.3), fica então:

$$P_{min} = \frac{(M_d - R \cdot M_g) - (f_{ct} \cdot w_i + R \cdot f_{ct_o} \cdot w_s)}{\frac{w_s + w_i}{A}} \qquad (3.14.a)$$

$$P_{o_{min}} = \frac{\left(\frac{M_d}{R} - M_g\right) - \left(\frac{f_{ct} \cdot w_i}{R} + f_{ct_o} \cdot w_s\right)}{\frac{w_s + w_i}{A}} \qquad (3.14.b)$$



I - domínio correspondente à expressão (3.13.a)
II - domínio correspondente à expressão (3.13.b)

Fig. 3.3 - Domínio das soluções de pré-esforço (Diagrama de Magnel).

Nos casos em que a excentricidade máxima, $e_{máx}$, correspondente ao P_{min}, excede a excentricidade admissível na secção, e_{adm}, a força de pré-esforço estará situada entre P^a e P^b.

$$P \geq P^a = \frac{(M_g + f_{ct_o} \cdot w_s) \cdot R}{\left(e_{adm} - \frac{w_s}{A}\right)} \qquad (3.15.a)$$

$$P \geq P^b = \frac{(M_d - f_{ct} \cdot w_i)}{\left(e_{adm} + \frac{w_i}{A}\right)} \qquad (3.15.b)$$

3.3.2.3 - Traçado do cabo resultante. Fuso limite

Uma vez determinada a força de pré-esforço e a excentricidade nas secções críticas, é necessário ainda definir a localização do cabo resultante em todo o comprimento, de forma a satisfazer os limites de tensões já mencionadas na secção 3.3.2.1.

Substituindo nas expressões (3.13) o valor da força de pré-esforço determinado, é possível definir um domínio ao longo do comprimento da viga (fuso limite) onde deverá estar localizado o cabo resultante para que as condições limites das tensões de tracção sejam satisfeitas.

$$e \leq e_s = \frac{M_g}{P_o} + \frac{w_s}{A} + f_{ct_o} \cdot \frac{w_s}{P_o} \qquad (3.16.a)$$

$$e \geq e_i = \frac{M_d}{P} - \frac{w_i}{A} - f_{ct} \cdot \frac{w_i}{P} \qquad (3.16.b)$$

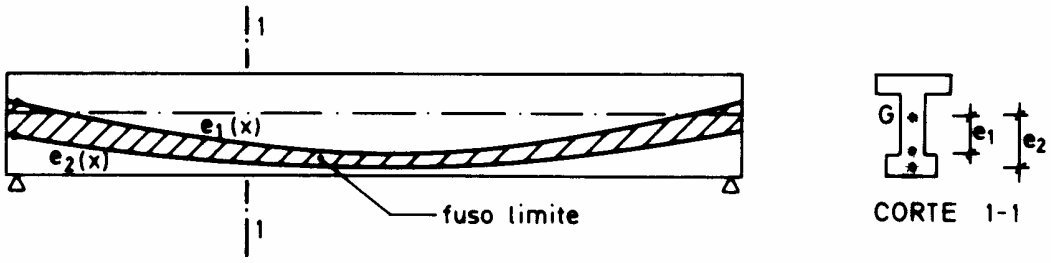


Fig. 3.4 - Fuso limite de uma viga simplesmente apoiada.

3.3.2.4 - Processo automático de pré-dimensionamento da força de pré-esforço e traçado do fuso limite

O procedimento automático de pré-dimensionar o pré-esforço utilizado no presente programa é baseado nas expressões definidas nesta secção. Nos parágrafos seguintes apresenta-se a forma sequencial de determinação do valor da força de pré-esforço e do traçado do fuso limite, completando-se a informação com a ilustração da subrotina respectiva (figura 3.5).

a) Cálculo do valor mínimo de pré-esforço

Esta força é dada em termos do seu valor final ou inicial a partir das expressões (3.14.a) ou (3.14.b), respectivamente.

b) Máxima excentricidade associada ao valor mínimo de pré-esforço

Uma vez conhecido o valor mínimo da força de pré-esforço, a localização do cabo resultante, a menos da limitação das excentricidades, é definida pelas expressões (3.16.a), para o limite superior, e (3.16.b) para o limite inferior.

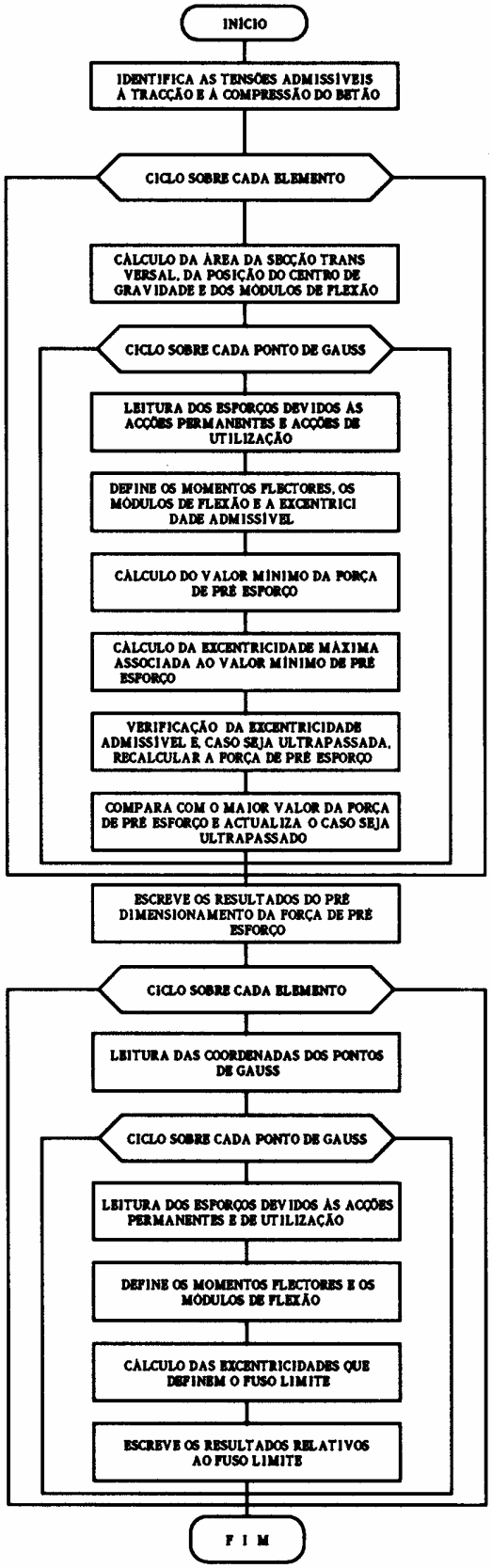


Fig. 3.5 - Subrotina de pré-dimensionamento do pré-esforço.

c) Verificação da excentricidade admissível

Neste ponto, verifica-se se os limites superior ou inferior do fuso ultrapassam as excentricidades admissíveis previamente fixadas. Nos pontos em que tal se verifique será necessário recalcular a força de pré-esforço da forma descrita seguidamente.

d) Força de pré-esforço correspondente à excentricidade admissível

Nos pontos com uma excentricidade pré-estabelecida, o valor da força de pré-esforço corresponderá a um termo intermédio definido no intervalo expresso em (3.15.a) e (3.15.b). Nos pontos para os quais o fuso limite não excede a excentricidade admissível, a força continuará a ser dada pelas expressões (3.14).

e) Traçado do fuso limite

Uma vez definido o pré-esforço na origem, de acordo com os pontos anteriores, o traçado do fuso limite é determinado a partir das expressões (3.16).

3.3.3 - Perdas de pré-esforço

3.3.3.1 - Generalidades

As perdas de pré-esforço traduzem a diminuição no tempo e ao longo das armaduras de pré-esforço, das forças instaladas nessas armaduras.

Logo após a aplicação do pré-esforço na armadura, verifica-se uma diminuição da força instalada devido às perdas instantâneas, dando origem ao pré-esforço inicial, $P_o(x)$. As perdas instantâneas processam-se antes (nas armaduras pré-tensionadas) e durante a transferência das forças, dos dispositivos de aplicação do pré-esforço para os dispositivos de amarração da peça, sendo classificadas nos seguintes grupos:

- perdas instantâneas devidas a atritos entre a armadura e as baínhas (geralmente desprezáveis nas armaduras pré-tensionadas);
- perdas instantâneas devidas à deformação instantânea do betão;
- perdas instantâneas nos dispositivos de amarração;
- perdas que antecedem a transferência do pré-esforço nas armaduras pré-tensionadas, nomeadamente, a retracção do betão e a relaxação do aço de pré-esforço.

A variabilidade das propriedades do betão e do aço ao longo do tempo conduz a uma diminuição do pré-esforço, resultante das perdas diferidas que se processam num período de vários anos. Assim, o pré-esforço ao fim de um período de tempo, t, obtém-se do pré-esforço inicial deduzindo-lhe as perdas diferidas que se processam nesse período.

As perdas diferidas são classificadas em dois grupos:

- perdas por fluência e retracção do betão;
- perdas por relaxação do aço de pré-esforço.

3.3.3.2 - Perdas devidas ao atrito

Os cabos de pré-esforço, que compõem as armaduras pós-tensionadas, ao serem esticados durante a operação de aplicação do pré-esforço oferecem uma determinada resistência devida ao atrito nos pontos de contacto com a baínha.

Estas perdas são quantificadas pela expressão:

$$\frac{\Delta\sigma_{po,fr}(x)}{\sigma_{P_o}} = 1 - \exp[-\mu \cdot (\beta + k \cdot x)] \qquad (3.17)$$

onde $\Delta\sigma_{po,fr}(x)$ designa a perda de tensão por atrito na secção da armadura de coordenada x, σ_{P_o} é a tensão correspondente ao pré-esforço na origem, μ representa o coeficiente de atrito entre a armadura de pré-esforço e a baínha, β indica o somatório dos valores absolutos (em radianos) dos ângulos de desvio do traçado da armadura ao longo da distância x, e k representa o desvio angular parasita por unidade de comprimento.

Nas armaduras pré-tensionadas, as perdas por atrito verificam-se sobretudo em zonas de mudança de direcção de cabos curvos, sendo, em geral, bastante inferiores às verificadas nas armaduras pós-tensionadas.

3.3.3.3 - Perdas devidas à deformação instantânea do betão

Nas armaduras pré-tensionadas há uma perda de pré-esforço quando os esforços nos cabos são transferidos para o betão, devida ao encurtamento instantâneo do betão. Esta perda, $\Delta\sigma_{po,e}(x)$, é dada por:

$$\Delta\sigma_{po,e}(x) = -\frac{E_p}{E_{c,j}} \cdot \sigma_c(x) \qquad (3.18)$$

onde E_p e $E_{c,j}$ são, respectivamente, os módulos de elasticidade da armadura de pré-esforço e do betão com a idade que possui quando lhe é aplicado o pré-esforço e $\sigma_c(x)$ é a tensão de compressão (negativa) no betão, na secção x, calculada ao nível do centro mecânico da armadura de pré-esforço, resultante do pré-esforço aplicado e de outras acções permanentes actuantes.

Nas armaduras pós-tensionadas, o encurtamento elástico do betão verifica-se antes de se proceder à ancoragem do cabo. Quando toda a armadura é esticada e ancorada simultaneamente, não existe perda por deformação instantânea do betão. No entanto, quando esta operação não é simultânea há que considerar perdas deste tipo como resultado da ordem pela qual os cabos são pré-esforçados.

Se $\sigma_c(x)$ englobar o pré-esforço do número total n de armaduras, a perda que um cabo provoca nos anteriormente ancorados vale $(-E_p/E_{c,j}\cdot\sigma_c(x)/n)$. Nos casos em que as armaduras sejam iguais e se situem relativamente próximas umas das outras, a perda média devido à deformação instantânea do betão é dada por:

$$\Delta\sigma_{po,e} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{E_p}{E_{c,j}}\cdot\sigma_c(x) \qquad (3.19)$$

3.3.3.4 - Perdas nos dispositivos de amarração

Estas perdas são devidas a um escorregamento das armaduras de pré-esforço no sentido inverso ao inicialmente verificado, quando se transfere a força instalada nos macacos para o sistema de ancoragem.

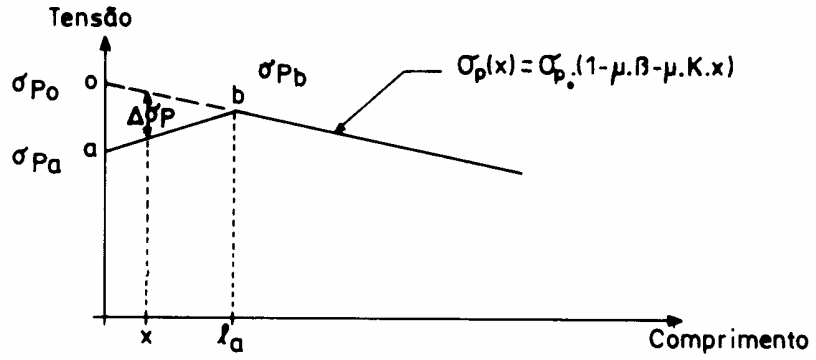


Fig. 3.6 - Perdas por escorregamento nos dispositivos de amarração.

As perdas nos dispositivos de amarração repercutem-se numa região adjacente à ancoragem numa extensão l_a.

Sendo a equação da recta da figura 3.6 definida aproximadamente (aceitável para valores do expoente, da expressão (3.17), inferiores a 0,3) por:

$$\sigma_p(x) = \sigma_{p_o} \cdot (1 - \mu \cdot \beta - \mu \cdot k \cdot x) \tag{3.20}$$

e sendo Δl_a o escorregamento total na ancoragem dado por:

$$\Delta l_a = \int_0^{l_a} \frac{\Delta \sigma_p}{E_p} \cdot dx \tag{3.21}$$

Devido à simetria das inclinações dos segmentos $\overline{ab}$ e $\overline{bo}$ (figura 3.6), então:

$$\sigma_{p_o} - \sigma_{p_a} = 2 \cdot (\sigma_{p_o} - \sigma_{p_b}) = 2 \cdot \Delta p \cdot a \cdot \sigma_{p_o} \tag{3.22.a}$$

com

$$\Delta p = \mu \cdot \beta_1 + \mu \cdot k \tag{3.22.b}$$

sendo β_1 o ângulo β por unidade de comprimento.

A variação de tensão $\Delta \sigma_p$ na abcissa x é:

$$\Delta \sigma_p = (\sigma_{p_o} - \sigma_{p_a}) \cdot \frac{l_a - x}{l_a} = 2 \cdot \sigma_{p_o} \cdot \Delta p \cdot (a - x) \tag{3.23}$$

Substituindo esta expressão na (3.21), obtém-se uma relação entre o escorregamento total na ancoragem e o comprimento l_a afectado por esse escorregamento,

$$l_a = \left(\frac{E_p \cdot \Delta l_a}{\sigma_{p_o} \cdot \Delta p} \right)^{1/2} \tag{3.24}$$

A perda de pré-esforço, numa extensão l_a, será então de:

$$\Delta \sigma_{po,a}(x) = \Delta \sigma_{po} \cdot \frac{l_a - x}{l_a} \tag{3.25}$$

onde $\Delta \sigma_{po}$ é a variação de tensão na origem resultante descontado das perdas das perdas instantâneas devidas ao atrito.

3.3.3.5 - Perdas diferidas

A variação no tempo das propriedades dos materiais que constituem as estruturas pré-esforçadas traduz-se numa perda significativa de tensão nas armaduras de pré-esforço.

Entre os fenómenos transitórios (no tempo) destacam-se, pela sua importância na determinação das perdas diferidas, a retracção e fluência do betão e a relaxação das armaduras de pré-esforço.

A retracção é um fenómeno que provoca o encurtamento do betão e consequentemente da armadura de pré-esforço, originando uma perda de tensão na mesma.

Por efeito da fluência há um aumento da deformação no tempo para acções constantes com carácter de permanência. Devido à natureza de compressão dessas acções ao nível das armaduras de pré-esforço, o betão sofre um encurtamento conduzindo a uma perda de tensão nessas armaduras.

A relaxação do aço é a perda de tensão que se verifica na armadura traccionada sob elongamento constante.

A quantificação das perdas diferidas devidas aos fenómenos atrás descritos, supondo que as armaduras de pré-esforço estão suficientemente próximas de forma a que possam ser assimiladas a uma única armadura, é feita de modo aproximado pela seguinte expressão:

$$\Delta\sigma_{pt,\,s+c+r}(x) = -\frac{\epsilon_{cs}(t,t_o)\cdot E_p + \alpha\cdot\psi_c(t,t_o)[\sigma_{c,g}(x)+\sigma_{c,po}(x)] - \Delta\sigma_{p,\,t-t_o,r}(x)}{1-\alpha\cdot\frac{\sigma_{c,po}(x)}{\sigma_{po}(x)}\cdot\left[1+\frac{\psi_c(t,t_o)}{2}\right]} \qquad (3.26)$$

em que:

t_o - idade do betão à data em que foi aplicado o pré-esforço;

t - idade do betão à data em que se pretende determinar as perdas de pré-esforço;

$\epsilon_{cs}(t,t_o)$ - extensão devida à retracção livre do betão entre as idades t_o e t (sinal negativo para encurtamento);

E_p - módulo de elasticidade da armadura de pré-esforço;

$\alpha = \frac{E_p}{E_{c,28}}$ - coeficiente de homogeneização aço-betão, considerando valores do módulo de elasticidade do betão aos 28 dias;

$\psi_c(t,t_o)$ - coeficiente de fluência na idade t, correspondente à aplicação da tensão na idade t_o;

$\sigma_{c,g}(x)$ e $\sigma_{c,po}(x)$ - tensões no betão na secção x, calculadas ao nível da armadura de pré-esforço, devidas às acções permanentes (com exclusão do pré-esforço) e ao pré-esforço inicial, respectivamente (sinal negativo para compressão);

$\sigma_{po}(x)$ - tensão na armadura de pré-esforço, na secção x, devida ao pré-esforço inicial (sinal positivo);

$\Delta\sigma_{p,t-t_o,r}(x)$ - perda de tensão na armadura de pré-esforço, na secção x, devida à relaxação entre t_o e t, calculada para uma tensão inicial dada por:

$$\sigma_p(x) = \sigma_{po+g}(x) - 0,3 \cdot \Delta\sigma_{pt,s+c+r}(x) \qquad (3.27)$$

sendo $\sigma_{po+g}(x)$ a tensão na armadura devida ao pré-esforço inicial e às outras acções permanentes actuantes a partir da idade t_o.

$$\Delta\sigma_{p,t-t_o,r} = \begin{cases} \Delta p_r \cdot \dfrac{\sigma_p(x) - 0,5 \cdot f_{puk}}{0,20 \cdot f_{puk}} \cdot \sigma_p(x) & ; \text{ se } \sigma_p(x) \geq 0,5 \cdot f_{puk} \\ 0 & ; \text{ se } \sigma_p(x) < 0,5 \cdot f_{puk} \end{cases} \qquad (3.28)$$

Δp_r - valor de relaxação a tempo infinito, expresso em percentagem da tensão inicial, sendo de 15% para aços de relaxação normal e 6% para aços de baixa relaxação;

f_{puk} - tensão de rotura característica da armadura de pré-esforço.

Uma vez que a expressão (3.26) é implícita, o seu cálculo é feito iterativamente da forma apresentada na figura 3.7:

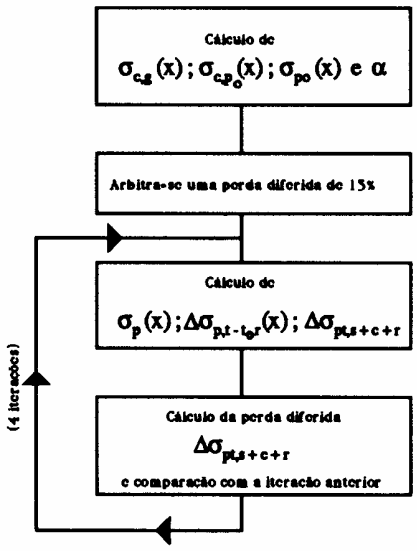


Fig. 3.7 - Cálculo das perdas diferidas.

3.3.3.6 - Processo automático de cálculo de perdas de pré-esforço

A sistematização do cálculo de perdas de pré-esforço no presente programa é ilustrada na figura 3.8.

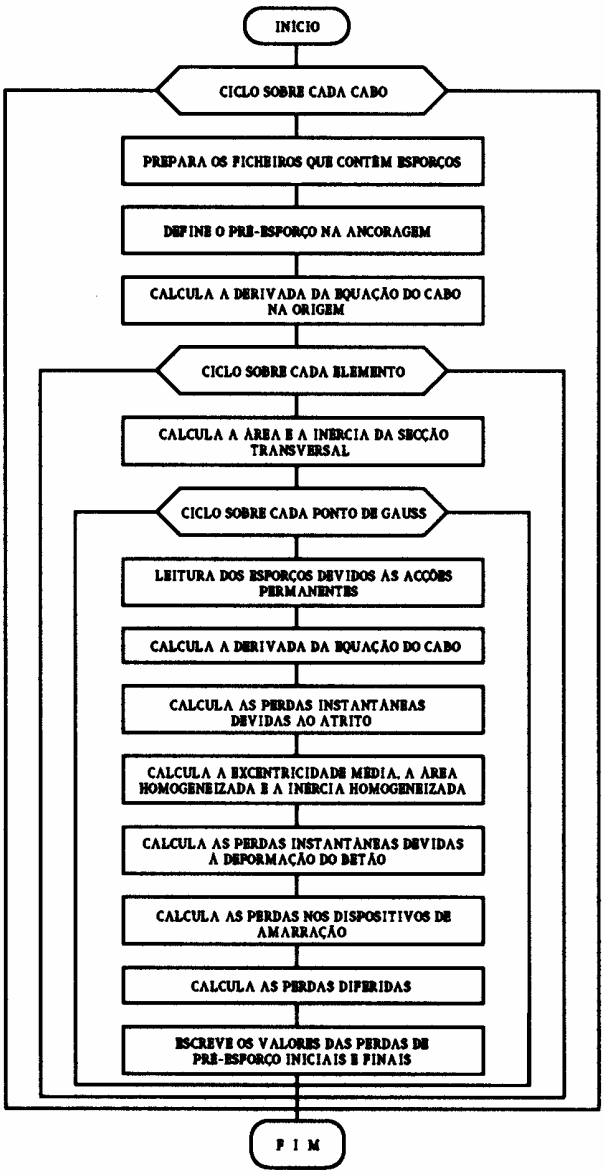


Fig. 3.8 - Subrotina de cálculo de perdas de pré-esforço.

3.3.4 - Verificação da segurança aos estados limites de utilização

3.3.4.1 - Generalidades

A segurança aos estados limites de utilização é controlada em termos de parâmetros que definem a fendilhação e a deformação nas estruturas para os estados limites de muito

curta duração, de curta duração e de longa duração, definidos de acordo com o RSA (1983).

3.3.4.2 - Verificação aos estados limites de fendilhação

O controle à fendilhação é realizado através da verificação da segurança ao estado limite de descompressão ou ao estado limite de largura de fendas, consoante a combinação de acções em questão. Esta verificação deve ser complementada por uma verificação de tensão máxima de compressão no betão, para as combinações raras de acções, de forma a evitar a fendilhação longitudinal no betão ou a deformação excessiva devida à fluência.

Para o estado limite de descompressão exige-se que não existam tracções ao nível da fibra extrema menos comprimida (figura 3.9).

i) Tensões na aplicação do pré-esforço ii) Tensões a longo prazo

Fig. 3.9 - Variação das tensões na secção mais desfavorável. Estado limite de descompressão.

No cálculo das tensões admite-se um comportamento elástico perfeito dos materiais e consideram-se as secções em fase não fendilhada.

O estado limite de largura de fendas é verificado através da comparação do valor máximo especificado e o valor característico da largura das fendas, w_k, calculado em função do valor médio da largura de fendas, w_m, através da seguinte expressão:

$$w_k = 1,7 \cdot w_m \tag{3.29}$$

onde,

$$w_m = s_{rm} \cdot \epsilon_{sm} \tag{3.30}$$

sendo s_{rm} e ϵ_{sm} a distância média entre fendas e a extensão média da armadura, respectivamente, calculadas do seguinte modo:

$$s_{rm} = 2 \cdot \left(c + \frac{s}{10} \right) + \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\phi}{\rho_r} \tag{3.31}$$

e

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left[1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0,4 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \tag{3.32}$$

onde as variáveis incluídas têm os significados correntes (REBAP, 1983).

O valor da extensão média das armaduras não deve ser considerado inferior a $0,4 \cdot \sigma_s / E_s$.

A verificação complementar da tensão máxima de compressão no betão é feita admitindo um comportamento elástico perfeito dos materiais e considerando a secção fendilhada ou não, consoante existam ou não tensões de tracção superiores ao valor médio da tensão de rotura do betão à tracção simples.

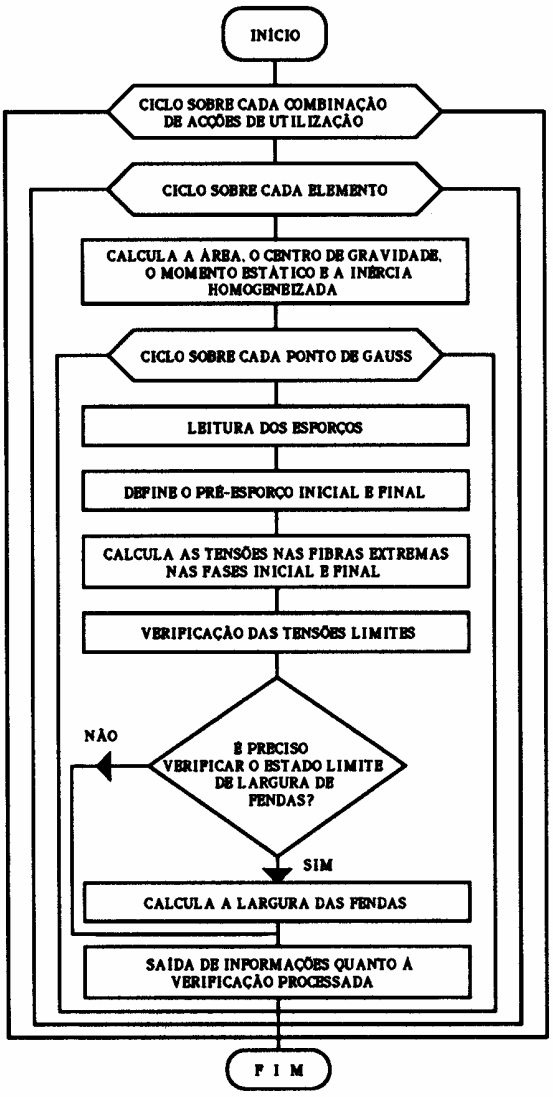
O valor desta tensão é limitado a $1,0 \cdot f_{cd}$, em que f_{cd} é o valor de cálculo da tensão de rotura à compressão do betão.

3.3.4.3 - Verificação aos estados limites de deformação

A análise da deformada da estrutura, através do presente programa de cálculo, permite a verificação da segurança ao estado limite de deformação em fase não fendilhada, uma vez que admite somente comportamento elástico linear para os materiais. O uso de um programa de análise não linear, como adiante se verá, permite conhecer de forma realista o comportamento da estrutura em fase fendilhada.

3.3.4.4 - Processo automático de verificação da segurança aos estados limites de utilização

A figura 3.10 ilustra o procedimento adoptado no presente programa para a verificação aos estados limites de utilização.



A determinação do valor característico da largura de fendas é processada do seguinte modo:

a) Determinação do eixo neutro:
   1) determinação do momento estático da área do betão comprimido;
   2) determinação do momento estático da armadura traccionada;
   3) determinação do eixo neutro igualando 1) a 2).

b) Determinação da tensão σ_s no aço
   1) determinação da área e do momento de inércia da secção activa do betão;
   2) determinação da posição da armadura relativamente ao eixo neutro;
   3) determinação da tensão na armadura através da fórmula de flexão composta.

c) Determinação da extensão no aço, $\epsilon_s = \sigma_s / E_s$.

d) Determinação das extensões, ϵ_1 e ϵ_2, ao nível inferior e superior da área do betão envolvente da armadura.

e) Determinação da área, $A_{c,r}$, do betão traccionado envolvente da armadura.

f) Determinação de $s_{r,m}$ pela expressão (3.31).

g) Determinação da tensão de tracção, $\sigma_{s,r}$, da armadura que leva ao início da fendilhação.
   1) determinação do momento de inércia total em secção não fendilhada;
   2) determinação do momento flector que provoca o início da fendilhação;
   3) determinação de $\sigma_{s,r}$ pela fórmula de flexão composta de acordo com 1) e 2).

h) Determinação de $\epsilon_{s,m}$ pela expressão (3.32).

i) Determinação de w_k pela expressão (3.29).

Fig. 3.10 - Subrotina de verificação aos estados limites de utilização.

3.3.5 - Verificação da segurança aos estados limites últimos de resistência

3.3.5.1 - Generalidades

A verificação da segurança aos estados limites últimos de resistência em secções de peças em betão pré-esforçado solicitadas por esforços normais, faz-se de acordo com a

expressão geral:

$$S_d \leq R_d \tag{3.33}$$

onde S_d e R_d representam os valores de cálculo do esforço actuante e do esforço resistente, respectivamente.

No presente programa de cálculo, esta verificação consiste na determinação da armadura passiva que é necessária adicionar à armadura de pré-esforço, previamente calculada, de forma a obter ao nível da secção um esforço resistente (momento flector resistente, M_{rd}) que obedeça à condição (3.33).

3.3.5.2 - Dimensionamento da armadura passiva de flexão

Uma vez conhecida a secção de betão e a armadura de pré-esforço, é preciso determinar, através de um cálculo à rotura, a quantidade de armadura passiva necessária para verificar a segurança aos estados limites últimos de resistência.

No dimensionamento da armadura passiva à rotura não se considera a resistência à tracção do betão, sendo as relações tensões-extensões de cálculo em compressão deste material definidas pelo diagrama simplificado de tensões rectangular (bloco rectangular de tensões). Considera-se um diagrama constante numa altura de $0,8x$, sendo x a distância do eixo neutro à fibra mais comprimida, com uma tensão de $0,85 f_{cd}$ (figura 3.11) e com uma extensão de rotura de 0,35% . Nas armaduras, o diagrama de cálculo que relaciona as tensões com as extensões apresenta, depois da zona elástica, um patamar de cedência com uma extensão (variação de extensão no caso de armaduras de pré-esforço) de rotura de 1% .

O cálculo da armadura passiva é feita através da determinação do equilíbrio dos esforços representados na figura 3.11 (Marques, 1986; Lima, 1985).

Equação de equilíbrio de translação:

$$N_c + N_p + N_s = 0 \tag{3.34.a}$$

ou seja,

$$\int_{\text{área comprimida}} \sigma_c \cdot dA_c + \sigma_p \cdot A_p + \sigma_s \cdot A_s = 0 \tag{3.34.b}$$

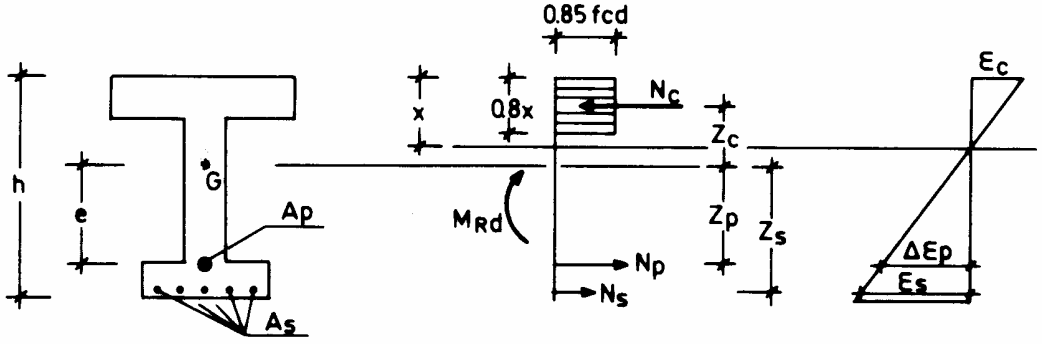
Equação de equilíbrio de momentos flectores:

$$M_{Rd} = N_c \cdot Z_c + N_p \cdot Z_p + N_s \cdot Z_s \tag{3.35.a}$$

ou seja,

$$M_{Rd} = \int_{\text{área comprimida}} \sigma_c \cdot Z_c \cdot dA_c + \sigma_p \cdot A_p \cdot Z_p + \sigma_s \cdot A_s \cdot Z_s \qquad (3.35.b)$$

Considerando que a rotura se dá pelo betão ($\epsilon_c = 0,35\%$) e que M_{Rd} terá que ser pelo menos igual ao valor de cálculo do momento flector actuante, M_{sd}, restam então duas incógnitas, a posição do eixo neutro, x, e a área da armadura passiva, A_s, que são determinadas pelas equações de equilíbrio (3.34) e (3.35).



h- altura total da secção;
e- excentricidade da armadura de pré-esforço, relativamente ao centro de gravidade da secção;
G- centro de gravidade da secção;
x- posição do eixo neutro relativamente à fibra mais comprimida;
A_p- área da armadura de pré-esforço;
A_s- área da armadura passiva;
f_{cd}- valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão;
M_{Rd}- valor de cálculo do momento flector resistente da secção;
N_c, N_p e N_s - esforços axiais no betão, na armadura de pré-esforço e na armadura passiva, respectivamente;
Z_c, Z_p e Z_p - posição dos esforços N_c, N_p e N_s, respectivamente, relativamente ao centro de gravidade da secção;
ϵ_c- extensão no betão comprimido da fibra extrema;
ϵ_s- extensão da armadura passiva;
$\Delta\epsilon_p$ - variação da extensão da armadura de pré-esforço, sendo a extensão total, ϵ_p, dessa armadura obtida pela soma de $\Delta\epsilon_p$ com a extensão inicial, ϵ_{po}, verificada durante a aplicação do pré-esforço ($\epsilon_p = \Delta\epsilon_p + \epsilon_{po}$).

Fig. 3.11 - Diagrama simplificado de tensões e deformações.

3.3.5.3 - Dimensionamento da armadura de esforço transverso

A armadura de esforço transverso é dimensionada de forma que o valor de cálculo do esforço transverso resistente, V_{Rd}, obedeça à condição (3.33).

Baseada na Teoria de Mörsch, a determinação de V_{Rd} é realizada pela expressão:

$$V_{Rd} = V_{cd} + V_{wd} \tag{3.36}$$

em que V_{cd} é o termo corrector da teoria de Mörsch e V_{wd} traduz a resistência das armaduras de esforço transverso segundo a mesma teoria. Estas duas grandezas são quantificadas da seguinte forma (REBAP, 1983):

$$V_{cd} = \tau_1 \cdot b_w \cdot d \cdot \alpha_{cd} \tag{3.37}$$

com

$$\alpha_{cd} = \min\left\{2 \;;\; \left(1 + \left|\frac{M_o}{M_{sd}}\right|\right)\right\} \tag{3.38}$$

e

$$V_{wd} = 0,9 \cdot d \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{syd} \cdot (1 + \operatorname{cotg}\alpha) \cdot \operatorname{sen}\alpha \tag{3.39}$$

onde as variáveis incluídas têm os significados correntes.

O momento de descompressão, M_o, é o momento que aplicado à secção anularia a tensão de compressão resultante do esforço normal actuante de cálculo e de pré-esforço de cálculo, na fibra extrema da secção que, por acção exclusiva de M_{sd}, ficaria traccionada. Logo, o momento M_o será dado por:

$$M_o = \frac{P}{A} \cdot w + P \cdot e \tag{3.40}$$

sendo P o pré-esforço de cálculo, A a área da secção homogeneizada, w o módulo de flexão relativamente à fibra em questão e e a excentricidade da armadura de pré-esforço.

3.4 - VIGA CONTÍNUA DE DOIS VÃOS COM SECÇÃO VARIÁVEL

3.4.1 - Objectivo do exemplo

Tendo como objectivo mostrar a potencialidade e a versatilidade do programa de cálculo automático descrito no presente capítulo, apresenta-se o dimensionamento das armaduras, ordinárias e de pré-esforço, da viga contínua de dois vãos representada na figura 3.12. É ainda dado destaque à verificação da segurança aos estados limites, definidos na regulamentação portuguesa, efectuada automaticamente pelo programa. De forma a

avaliar a fiabilidade do dimensionamento efectuado, apresenta-se no Capítulo 6 o estudo do traçado da resposta da estrutura até ao colapso tendo em conta o comportamento não linear material, através do programa de análise não linear apresentado no Capítulo 5.

3.4.2 - Dados do problema

Apresentando uma secção variável ao longo do vão, a presente viga foi discretizada por doze elementos de viga, com um padrão de camadas apresentado na figura 3.12. O betão utilizado é o da classe B35, cujas propriedades mecânicas, conjuntamente com os aços que compõem as armaduras a dimensionar, se encontram sumarizadas no Quadro 3.1.

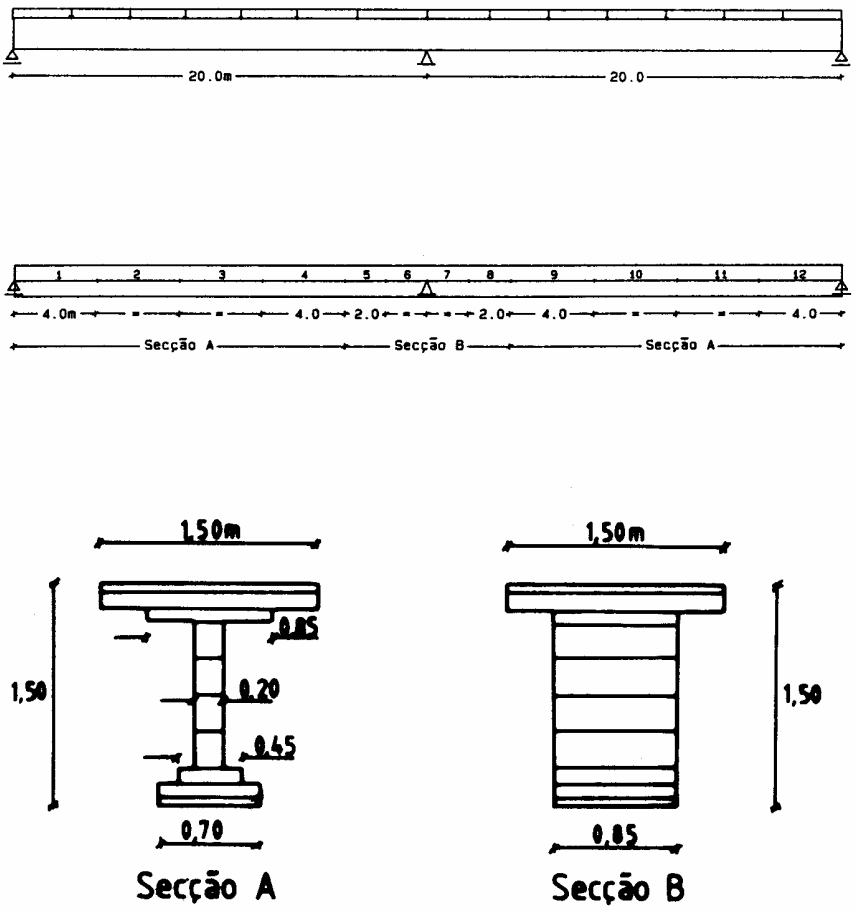


Fig. 3.12 - Viga contínua de dois vãos com secção variável. Geometria, carregamento e malha de elementos finitos.

Quadro 3.1 - Propriedades mecânicas dos materiais. Unidades: MPa.

BETÃO (B35)	Mód. Young:	$E_c = 32000$	Coef. fluência:	$\psi = 2,30$
	Coef. Poisson:	$\nu = 0,20$	Ten. corte:	$\tau_1 = 0,85$
	Ten. rot. comp.:	$f_{cd} = 20,0$		$\tau_2 = 6,0$
	Ten. rot. tracção:	$f_{ctm} = 2,8$	Ext. retrac.:	$\epsilon_{cs} = -0,0002$
AÇO (Arm. ord.: A400; Arm. pré-esf.: A1600)	Mod. Young:	$E_s = 200000$		$E_p = 200000$
	Ten. cedência:	$f_{syd} = 348$		$f_{puk} = 1800$
	Relaxação:			6%
	Coef. atrito:			$\mu = 0,20$
	Desv. angular:			$K = 0,01/m$
	Escorregamento:			$\Delta = 5mm$

As acções actuantes na viga em estudo são simuladas por cargas uniformemente distribuídas ao longo do seu vão, tendo em conta o seguinte:

- durante a aplicação do pré-esforço as acções permanentes mobilizáveis atingem o valor de 30 KN/m;
- as acções permanentes totais têm o valor de 60 KN/m; e,
- as sobrecargas de utilização atingem os 50 KN/m.

O dimensionamento das armaduras é realizado em fases sucessivas, sendo elas as seguintes:

i) uma vez definida a geometria longitudinal e transversal da viga, as condições de apoio, o carregamento e as propriedades mecânicas dos materiais, é calculada a força de pré-esforço e definido o traçado do fuso limite.

O utilizador é chamado a intervir para definir o valor do pré-esforço a aplicar na ancoragem e a geometria da respectiva armadura.

ii) Prosseguindo com o cálculo, segue-se a determinação das perdas de pré-esforço e a consequente definição do pré-esforço inicial e final em cada secção.

iii) Nesta altura é feito um cálculo à rotura para o dimensionamento da armadura passiva aos estados limites últimos de resistência. Mais uma vez, o utilizador terá que intervir neste processo para definir, de acordo com os resultados obtidos, os diâmetros dos varões a utilizar, o seu número e a sua dispensa ao longo do vão.

iv) Finalmente, com a armadura (passiva e de pré-esforço) totalmente caracterizada, é feita uma verificação da segurança da estrutura aos estados limites de utilização.

Nas secções seguintes são apresentados e discutidos os resultados obtidos em cada uma das fases atrás descritas.

3.4.3 - Determinação do pré-esforço e da geometria do cabo

Tendo sido admitido um ambiente moderadamente agressivo, a determinação do pré-esforço e do traçado do fuso limite é feita impondo a não existência de tracções para as combinações quase permanentes de acções ($\psi_2 = 0,2$) e valores característicos de largura de fendas que não ultrapassem 0,1mm para as combinações frequentes de acções ($\psi_1 = 0,4$).

No cálculo do pré-esforço é tido em conta valores admissíveis para as excentricidades do cabo, de forma a assegurar um recobrimento mínimo de 0,07m da armadura de pré-esforço, admitindo-se ainda perdas máximas de pré-esforço da ordem dos 12,5% para perdas iniciais e de 30% para perdas totais. Embora este último valor seja relativamente alto para casos correntes, ele justifica-se atendendo à geometria da viga.

Na figura 3.13 apresenta-se os fusos limites e a geometria do cabo adoptada para combinações quase permanentes e frequentes de acções, para dois casos distintos. Assim, atendendo aos resultados obtidos para a força de pré-esforço, no primeiro diagrama é ilustrado o caso em que se aplica a mesma força de pré-esforço em toda a extensão da viga com o valor de 5000 KN e no segundo diagrama considera-se um pré-esforço de 5000 KN na zona junto ao apoio central, englobando os elementos 5 a 8, e nas restantes zonas de 2500 KN.

Refira-se que os eixos de ordenada zero, representados na figura 3.13, não correspondem às linhas que passam pelo centro de gravidade das secções mas sim pelo seu eixo médio. De facto, o centro de gravidade da secção *A* encontra-se 0,16m acima deste eixo, enquanto que na secção *B* se encontra 0,05m acima. Esta chamada de atenção é importante quando se está a analisar a acção do pré-esforço, uma vez que o seu efeito será tanto maior quanto maiores forem as excentricidades.

Os limites superiores dos fusos limites apresentam uma quebra nas zonas vizinhas da transição da secção do tipo *A* para a secção do tipo *B*. Isto deve-se ao facto de nessas duas secções, além das suas áreas não serem iguais, os centros de gravidade situarem-se a níveis diferentes. Como a linha que passa pelo centro de gravidade da secção *B* se encontra abaixo da correspondente linha da secção *A* então na secção de transição, para manter o mesmo efeito de pré-esforço, é necessária uma maior excentricidade em *A* do que em *B*. No segundo desenho essa quebra é ainda maior visto que a força de pré-esforço na secção *A* é metade daquela aplicada em *B*.

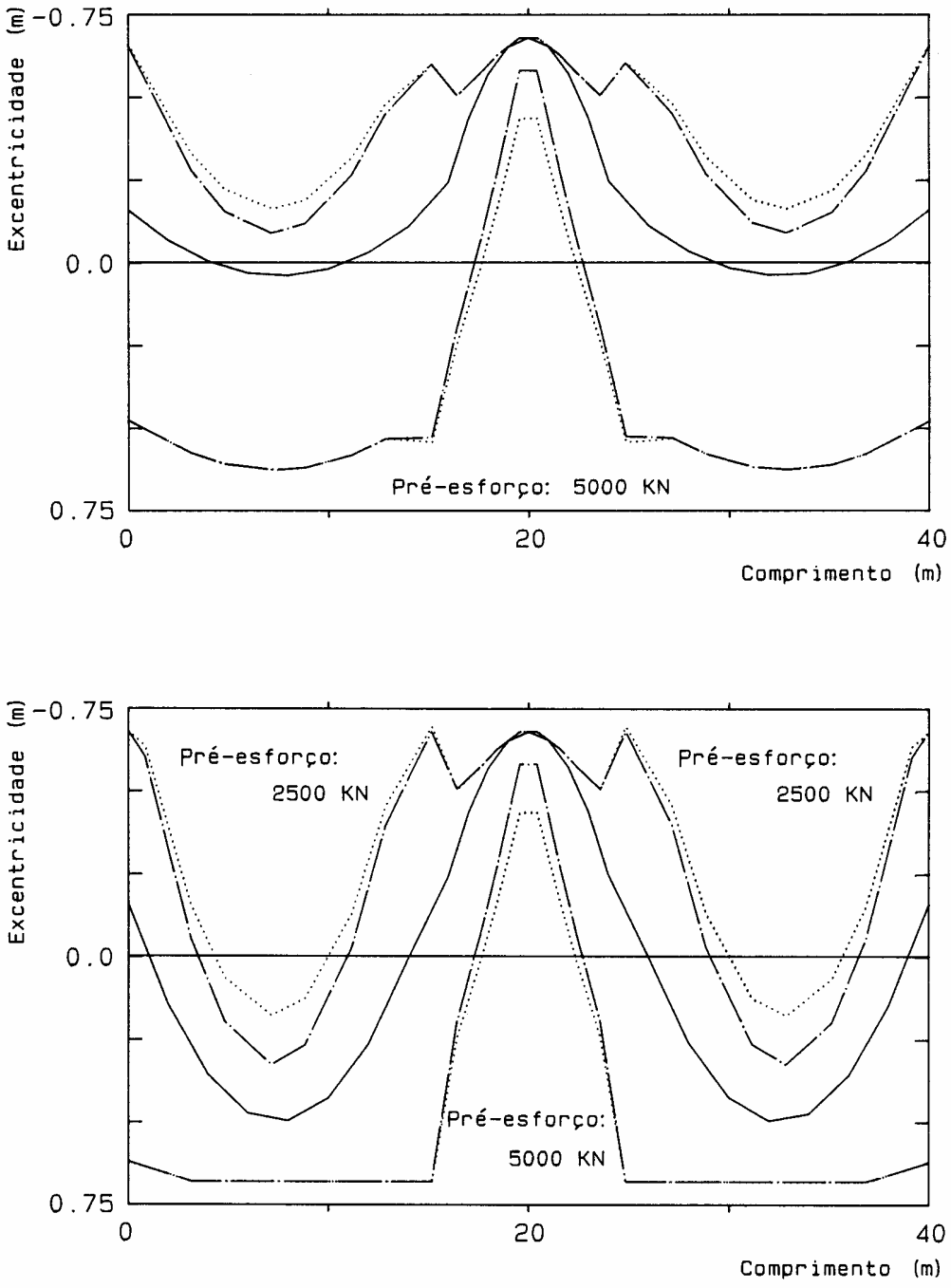


Fig. 3.13 - Traçados dos fusos limites.

Observa-se ainda que os fusos limites devidos às combinações frequentes são mais apertados que aqueles devidos às combinações quase permanentes (traduzindo-se isso numa menor gama de soluções para o primeiro caso) visto ser mais restritivo. Constata-se, no entanto, que em ambos os casos o fuso tende para a excentricidade admissível junto ao apoio central, diminuindo bastante a possibilidade de escolha das excentricidades nessa secção, o que permite concluir que foi essa zona a responsável pela imposição do valor do pré-esforço de 5000 KN.

Verifica-se no primeiro diagrama da figura 3.13 que nas zonas que se afastam do apoio central não haveria necessidade de usar um pré-esforço de 5000 KN, uma vez que não chega a ser preciso grandes excentricidades para verificar as restrições enunciadas no início desta secção. Como alternativa, foi considerado um pré-esforço de 2500 KN nessas zonas, como já atrás se mencionou. Como consequência, o segundo diagrama dessa figura, correspondente a esta solução, evidencia uma descida acentuada nos limites superiores dos fusos nas zonas de meio vão permanecendo praticamente inalteráveis junto ao apoio central.

Embora a segunda solução exiga menor quantidade de armadura de pré-esforço que a primeira, conduz, no entanto, a maiores perdas de pré-esforço devidas ao atrito, já que a sua geometria apresenta maiores desvios angulares ao longo do seu comprimento. Dado que a viga apresenta um grande comprimento, 40m, estas perdas podem tomar valores bastante significativos, eventualmente maiores que aqueles admitidos no pré-dimensionamento. Por isso, foi adoptada a primeira solução, através da aplicação de um pré-esforço de 5000 KN na ancoragem situada na extremidade esquerda. Outra opção seria aplicar o pré-esforço nas duas extremidades, metade do valor total em cada uma, evitando-se assim grandes perdas instantâneas na extremidade direita da viga. No entanto, dado que esse pré-esforço é exigido com maior necessidade junto ao apoio central e uma vez que aí as perdas são idênticas à solução adoptada, esta hipótese foi preterida.

Atendendo aos resultados obtidos, adoptou-se uma armadura de pré-esforço com uma área de 40 cm^2 e com uma geometria (ver figura 3.13) definida pelos seguintes pontos: nas extremidades o cabo situa-se 0,16m acima do eixo médio da viga; nas secções localizadas a 7,5m dos extremos situa-se 0,05m abaixo desse eixo e sobre o apoio central situa-se 0,68m acima do mesmo eixo.

3.4.4 - Cálculo das perdas de pré-esforço

Tendo sido efectuado o pré-dimensionamento da armadura de pré-esforço, segue-se o cálculo das respectivas perdas, nomeadamente, as instantâneas e as diferidas.

Sabendo que o pré-esforço inicial é obtido do pré-esforço na ancoragem descontando-lhe as perdas instantâneas e que o pré-esforço final é, por sua vez, resultante do pré-esforço inicial deduzindo-lhe as perdas diferidas, e sabendo ainda, neste caso, que essa força é totalmente aplicada na extremidade esquerda, apresenta-se na figura 3.14 a variação do pré-esforço ao longo do comprimento da viga.

Analisando a curva que caracteriza o pré-esforço inicial, é possível observar o efeito do escorregamento da armadura no dispositivo de amarração, traduzido numa maior perda junto à ancoragem (cerca de 9,0%) que vai diminuindo gradualmente numa extensão de cerca de 12,8m correspondente ao comprimento afectado por esse escorregamento. Nas zonas vizinhas ao apoio central verifica-se uma maior variação das perdas instantâneas, devida à maior curvatura aí apresentada pelo cabo, atingindo na secção desse apoio um valor de 11,9%. Devido ao grande comprimento do cabo, as perdas instantâneas na extremidade oposta à de aplicação do pré-esforço atingem um valor considerável, da ordem dos 22,5%.

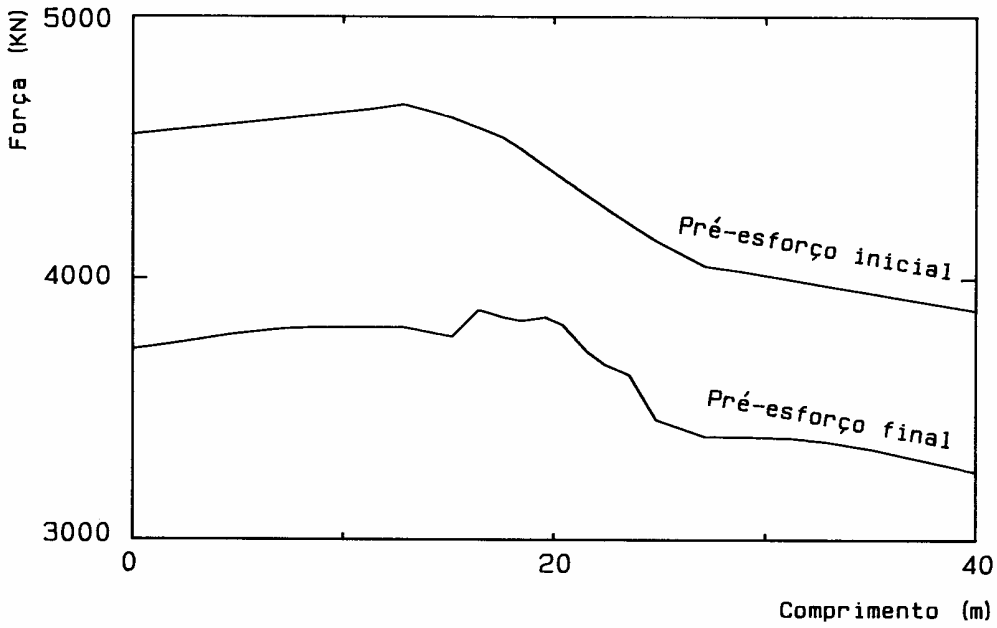


Fig. 3.14 - Variação do pré-esforço ao longo das armaduras.

A curva que traduz a variação do pré-esforço final ao longo da armadura permite constatar a existência de menores perdas diferidas nas zonas caracterizadas pela secção do tipo *B* que nas restantes. De facto, a maior área de betão nessas zonas traduz-se pela redução do efeito de fluência, conduzindo a perdas diferidas da ordem dos 11 a 14% na

vizinhança do apoio central e da ordem dos 12 a 16% em zonas mais afastadas. Assim, verificaram-se perdas totais de 25,3% na secção de ancoragem, de 23,0% no apoio central e de 34,9% na extremidade direita.

Como nota final, refira-se que as perdas de pré-esforço são recalculadas quando se define a armadura passiva a introduzir na estrutura. Por isso, as variações do pré-esforço apresentadas na figura 3.14 têm em conta as armaduras passivas determinadas na secção seguinte.

3.4.5 - Dimensionamento da armadura passiva

Neste exemplo é também apresentado o dimensionamento da armadura passiva de flexão aos estados limites últimos de resistência.

Na figura 3.15 ilustram-se os momentos flectores de dimensionamento, obtidos através da consideração de combinações de acções e coeficientes de segurança, de 1,5 (ou 1,35 se considerar com rigor os valores adoptados) para as acções permanentes, 1,5 para as sobrecargas e de 1,0 para o pré-esforço, especificados no RSA (1983) para os estados limites últimos de resistência. São ainda representados, nas zonas de interesse, os momentos flectores resistentes, considerando somente a área de betão e a armadura de pré-esforço em cada secção.

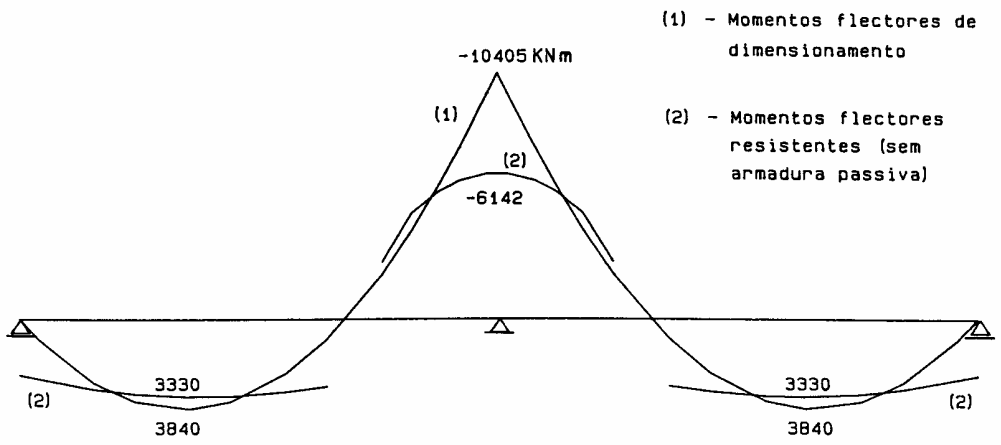


Fig. 3.15 - Momentos flectores de dimensionamento e resistentes.

A meio vão, embora as diferenças entre os dois tipos de momentos flectores mencionados sejam pequenas, a área de betão e a armadura de pré-esforço são insuficientes para garantir a segurança aos estados limites últimos. Verifica-se ainda que essa insuficiência é ainda maior junto ao apoio central. Note-se que seria possível adoptar uma maior excentricidade do cabo a meio vão de forma a que o seu momento resistente fosse maior do que o de dimensionamento. A quantidade de armadura passiva a adicionar à armadura de pré-esforço já existente, de forma a verificar essa segurança, é ilustrada na figura 3.16. Os valores aí representados são proporcionais ao *deficit* de resistência que a figura 3.15 mostra. Tendo em conta os valores determinados procedeu-se à escolha do diâmetro dos varões e do seu número, assim como a respectiva dispensa ao longo do vão da forma que se apresenta na figura 3.16.

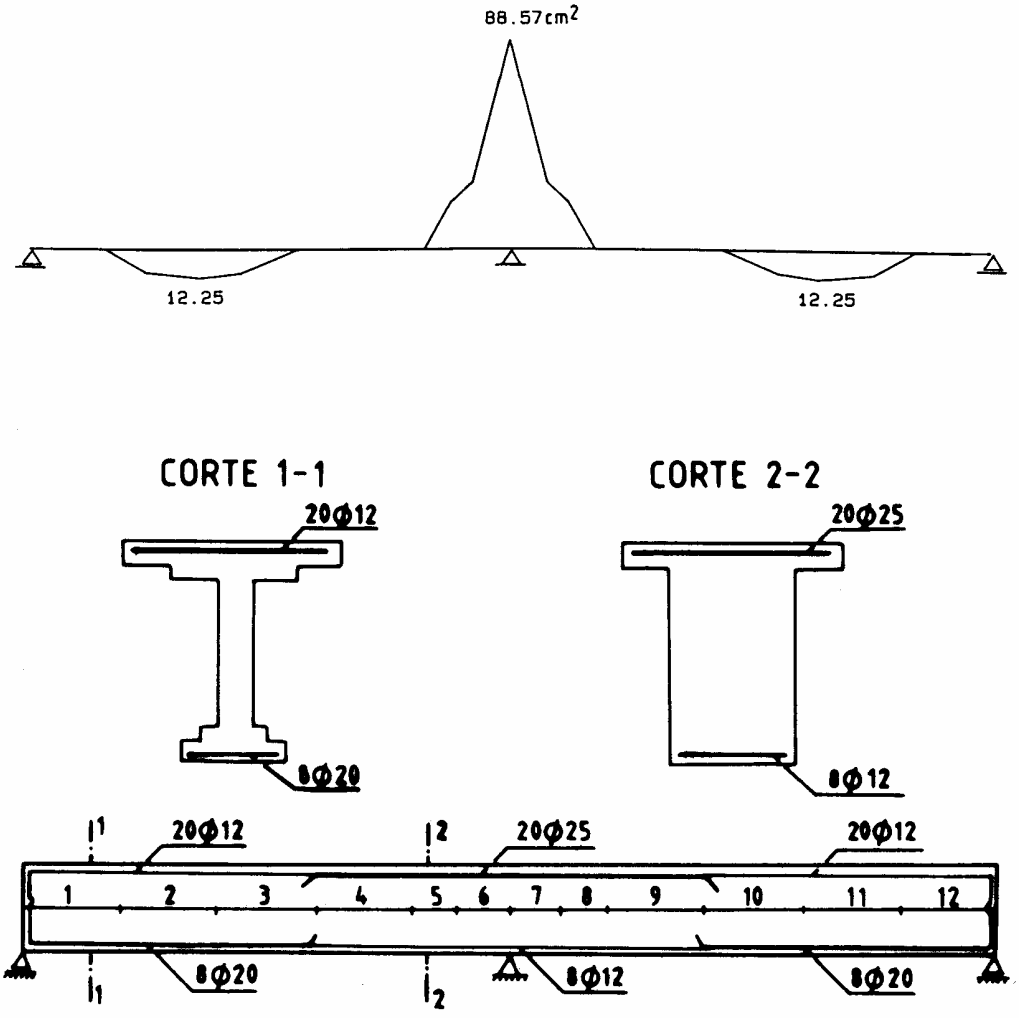


Fig. 3.16 - Dimensionamento da armadura passiva de flexão.

3.4.6 - Verificação da segurança da viga aos estados limites de utilização

A avaliação da segurança da viga pré-esforçada aos estados limites de utilização envolve a verificação da segurança aos estados limites de deformação e aos estados limites de fendilhação. Em síntese tem-se:

Estado limite de deformação

Sendo definido para a combinação frequente de acções ($\psi_1 = 0,4$), o valor da flecha máxima numa secção intermédia do segundo vão satisfaz a condição:

$$w_{máx} = 0,006m \leq \frac{L}{400} = 0,05m \qquad (3.41)$$

Esta verificação deverá ser considerada com algumas reservas, uma vez que se admitiu um comportamento elástico linear para os materiais. Sendo o betão um material com um comportamento altamente não linear em que a fluência e a retracção desempenham um papel fundamental, a verificação efectuada por este programa é imperfeita.

Refira-se que o estudo da presente viga, tendo em conta o comportamento não linear dos materiais e os efeitos diferidos no cálculo da flecha máxima, é apresentado no Capítulo 6 podendo aí ser feita uma verificação mais realista da deformação.

Estado limite de fendilhação

De acordo com o regulamento (REBAP, 1983), a verificação da segurança em relação ao estado limite de fendilhação é imposta pelas seguintes condições (para um meio moderadamente agressivo):

- ausência de tensões de tracção na estrutura (estado limite de descompressão) para a combinação quase permanente das acções ($\psi_2 = 0,2$);
- largura máxima de fendas, determinada para a combinação frequente das acções ($\psi_1 = 0,4$), inferior a 0,1mm;
- tensão máxima de compressão no betão inferior ao valor de cálculo da tensão de rotura à compressão (combinação rara de acções).

Na figura 3.17 apresenta-se os diagramas de tensões calculados em duas secções mais esforçadas, a secção A-A situada a meio vão do primeiro tramo da viga e a secção B-B situada junto ao apoio central. Para cada uma dessas secções são representados os

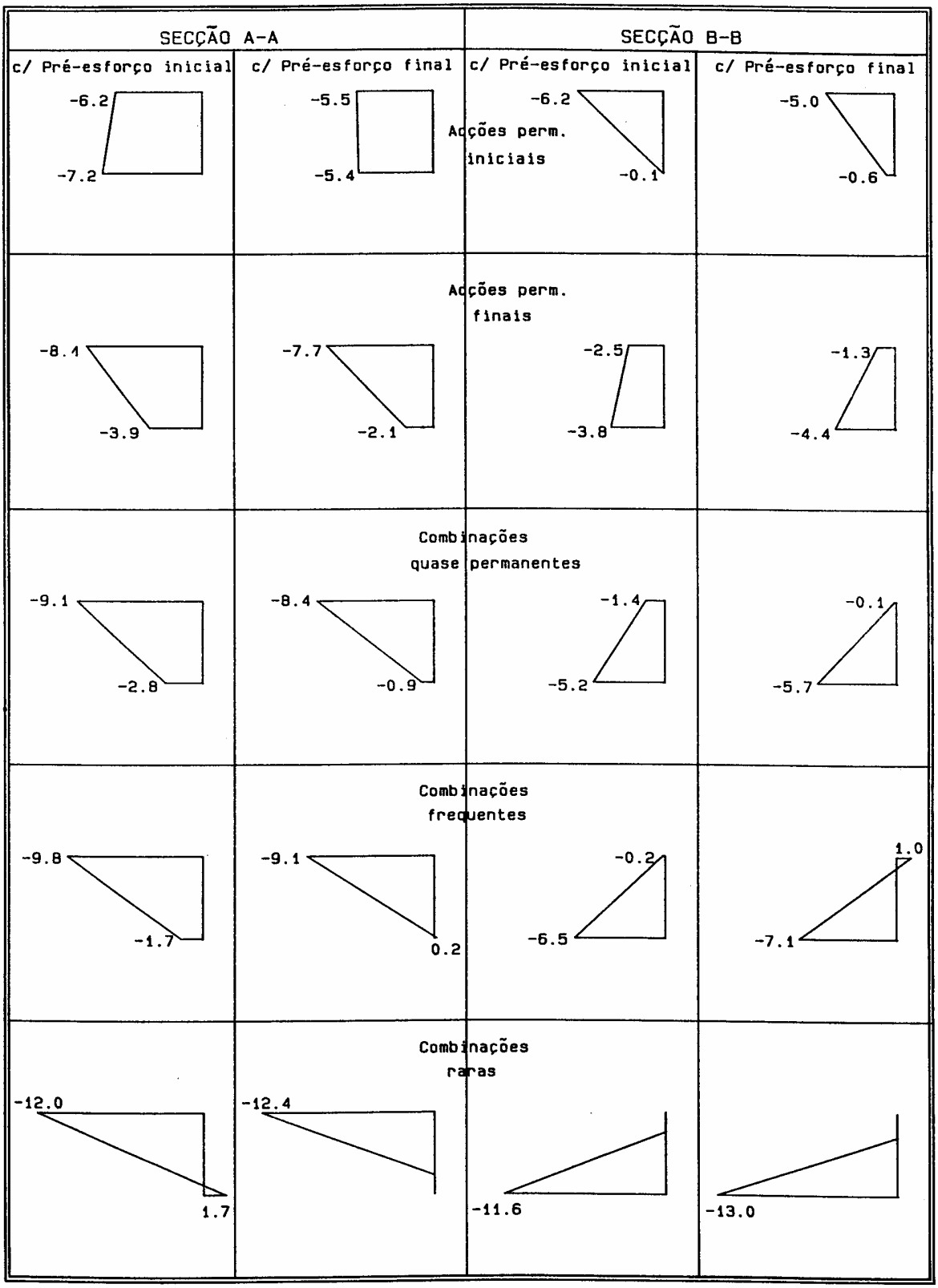


Fig. 3.17 - Diagramas de tensões para várias combinações de acções.

diagramas de tensões para as acções permanentes iniciais (mobilizadas no acto da aplicação do pré-esforço), para as acções permanentes finais e para as três combinações de acções atrás referidas. Para cada um desses cinco casos são consideradas duas hipóteses: o pré-esforço instalado é o inicial ou o final.

A análise desses diagramas permite observar a condição de ausência de tracções para a combinação quase permanente de acções, assim como durante a aplicação do pré-esforço, verificando-se a segurança ao estado limite de descompressão.

Para a combinação frequente de acções, as tensões de tracção máximas não atingiram o valor da tensão de rotura do betão à tracção, ficando por isso automaticamente verificado o estado limite de largura de fendas.

Finalmente, o cálculo das tensões em secção fendilhada ou não, caso ultrapassem ou não as tensões médias de rotura à tracção, para a combinação rara de acções, conduziram a uma tensão máxima de compressão de 13,0 MPa inferior ao valor máximo permitido de 20,0 MPa.

3.4.7 - Sumário final

Dada uma viga definida pela sua geometria e pelas características mecânicas do betão, foi determinada uma solução de betão armado pré-esforçado que melhor satisfaz, para o carregamento previamente definido, a regulamentação portuguesa (RSA, 1983; REBAP, 1983) para este tipo de estruturas.

O exemplo apresentado permitiu demonstrar a utilidade do presente modelo computacional no dimensionamento de vigas de betão armado pré-esforçado com secção qualquer, de acordo com o regulamento.

O estudo, da solução adoptada para a presente viga, recorrendo a um modelo de análise não linear com traçado de resposta até à rotura, apresentado no Capítulo 6, permite avaliar o grau de segurança do dimensionamento realizado.

3.5 - OBSERVAÇÕES FINAIS

No presente capítulo descreveu-se a estrutura do programa de cálculo automático de dimensionamento de armaduras (passivas e de pré-esforço) e de verificação aos estados limites regulamentares.

É aqui dado relevo à forma como se faz a determinação do pré-esforço, das respectivas perdas ao longo das armaduras e da verificação da segurança aos estados limites, apresentando-se ainda o dimensionamento da armadura passiva aos estados limites últimos de resistência.

Para avaliar a potencialidade e utilidade deste programa, apresenta-se ainda um exemplo de dimensionamento de uma viga contínua de dois vãos com secção variável.

3.6 - BIBLIOGRAFIA

Appleton, J. *et al.* (1988) - Dimensionamento de Estruturas de Betão Armado Pré-Esforçado - Betão Armado Pré-Esforçado, Vol. 2, Instituto Superior Técnico, Lisboa.

Leonhardt, F. (1979) - Construções de Concreto - Vol. 4, Editora Interciência, Rio de Janeiro, Brasil.

Lima, J. D.; Monteiro, V. e Mun, M. (1985) - Betão Armado: Esforços Normais e de Flexão (REBAP-83) - Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

Lin, T. Y. (1963) - Design of Prestressed Concrete Structures - 2nd Ed., John Wiley & Sons Inc., New York.

Marques, E. M. (1986) - Verificação da Segurança aos Estados Limites Últimos de Esforços Normais - Curso sobre Nova Regulamentação de Estruturas, Gabinete de Estruturas da Faculdade de Engenharia, Porto.

Nilson, A. H. e Winter, G. (1986) - Design of Concrete Structures - 10th Ed., McGraw-Hill International Editions.

Pfeill, W. (1983) - Concreto Protendido - Vols. 1, 2 e 3, 2ª Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, Brasil.

Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (1983), Decreto-Lei nº 349-C/83, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa.

Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes (1983), Decreto-Lei nº 235/83, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa.

Thonier, H. (1985) - Le Béton Précontraint aux États-Limites - Presses de l'École Nationale des Ponts e Chaussés, Paris.

Capítulo 4

MODELO DE COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DO BETÃO ESTRUTURAL

4.1 - INTRODUÇÃO

O uso de modelos menos adequados para representar o comportamento do betão é frequentemente um dos factores limitativos na análise estrutural. Por isso, a formulação de equações que traduzam os diversos factores que afectam os resultados desta análise são de importância fundamental.

Neste capítulo é apresentado um modelo numérico para a análise de estruturas de betão sujeitas a um carregamento quase estático e de curta duração. O comportamento estrutural é traçado até ao colapso tendo em conta os diferentes comportamentos dos materiais constituintes da estrutura (betão, armaduras ordinárias e de pré-esforço).

A importância fundamental dos dados obtidos por ensaios experimentais na formulação de modelos matemáticos do comportamento mecânico do betão exige que estes incluam: um critério de resistência máxima que caracterize a capacidade portante máxima do material para qualquer estado de tensão, um conjunto de relações tensões-deformações que define a sua resposta ao carregamento e um modelo de fendilhação que caracterize o aparecimento e a formação das fendas e a influência das armaduras na sua propagação.

Sendo o critério de resistência máxima do presente modelo baseado no critério proposto por Ottosen (1977) (adoptado também pelo novo Código Modelo do CEB, 1990 e 1991), a sua formulação é apresentada e são discutidas ainda as suas características e a sua concordância com os resultados experimentais obtidos a partir de ensaios uniaxiais, biaxiais e triaxiais. Embora seja um critério com um refinamento bastante superior aos obtidos pelas teorias clássicas (Rankine, Mohr-Coulomb, Huber-Mises, Drucker-Prager), a utilização de meios computacionais torna o seu uso simples.

No modelo desenvolvido (Henriques, 1990), o betão apresenta um comportamento não linear desde o estado de repouso (tanto em compressão como em tracção), tendo as relações constitutivas sido obtidas por aplicação das leis elasto-plásticas ao critério proposto por Ottosen e com uma lei de endurecimento baseada no novo Código Modelo do CEB (1990 e 1991).

São duas as causas que podem levar à quebra de resistência do betão: o amolecimento (*softening* na literatura inglesa especializada) devido à compressão e a fendilhação devida à tracção. Os mecanismos que surgem no betão fendilhado, devidos à interacção entre as armaduras e o betão envolvente, são apresentados e modelados de acordo com formulações apresentadas por vários autores, nomeadamente, Gilbert e Warner (1978), Floegl e Mang (1982), Figueiras (1983).

Uma vez que a fractura do betão é definida para os dois modos distintos mencionados, quando sujeito a um estado de tensão multiaxial há necessidade de definir se o comportamento do material se aproxima do comportamento tipo de compressão ou de tracção (estados de comportamento do betão). Recorrendo a resultados experimentais obtidos por Kupfer (1969) foram identificados os estados de comportamento do betão em função das componentes do estado de tensão, associando-os com os dois modos de fractura referidos.

A resposta do aço, que constitui as armaduras ordinárias e de pré-esforço, é aproximada por um modelo de comportamento elasto-plástico unidimensional, de acordo com um diagrama trilinear de tensões-deformações.

4.2 - CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA MÁXIMA DO BETÃO

4.2.1 - Generalidades

Quando sujeito a um estado de tensão multiaxial, a resistência máxima do betão não pode ser determinada somente a partir do conhecimento das suas componentes de tensão limites tomadas isoladamente (Gerstle, 1980; Kotsovos, 1978; Mills, 1970; Bresler, 1958; McHenry, 1958). Por exemplo, um betão caracterizado por uma resistência à compressão uniaxial, f_c, e ao corte puro, $0,080 \cdot f_c$, atingirá a rotura para uma tensão de compressão de $0,5 \cdot f_c$ se, simultaneamente, as tensões de corte tomarem aproximadamente o valor de $0,2 \cdot f_c$. Então, a resistência máxima do betão deverá ser definida através de uma adequada interacção entre as várias componentes do estado de tensão.

Os critérios de resistência máxima estabelecem os estados de tensão para os quais se atinge a capacidade portante máxima do betão, estando-lhes associados uma definição apropriada de fractura do material (CEB, 1983; Wastiels, 1981; Ottosen, 1977 e 1982; Póvoas, 1987; Liu, 1972; Gerstle, 1981). No betão, consideram-se em geral dois tipos de fractura: a fractura frágil por tracção e a fractura moderadamente dúctil por compressão.

O comportamento do betão depende de numerosos factores, nomeadamente, das propriedades físicas e mecânicas dos inertes e do cimento, assim como do tipo de carregamento. Devido a esta complexidade, os modelos matemáticos que estabelecem a resistência do betão são definidos em função de um certo número de parâmetros considerados fundamentais na caracterização aproximada das suas propriedades.

No presente modelo foi adoptado o critério proposto por Ottosen (1977) devido à sua boa concordância com resultados experimentais, sendo de salientar também a adopção deste critério na proposta relativa ao novo Código Modelo do CEB (1990 e 1991) (boletins de informação nº 203 a 205 de Julho de 1991).

4.2.2 - Caracterização dos estados de tensão

Os critérios de resistência máxima de materiais isotrópicos sujeitos a estados de tensão homogéneos são independentes do referencial que caracteriza essas tensões. Assim, a função representativa destes critérios pode ser definida à custa das tensões principais da seguinte forma:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{4.1}$$

Devido à dificuldade em fornecer uma explicação física e geométrica a partir das tensões principais, é usual exprimi-la em termos de combinação dos três invariantes principais de tensão I_1, J_2 e J_3, sendo I_1 o primeiro invariante do tensor das tensões e J_2, J_3 são o segundo e o terceiro invariante do tensor das tensões desvio. Acrescente-se ainda que qualquer função simétrica invariante do estado de tensão pode ser definida a partir dos três invariantes mencionados. Desta forma, a expressão (4.1) pode ser substituída pela seguinte relação:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \tag{4.2}$$

Os três invariantes principais de tensão são definidos pelas seguintes expressões:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{4.3}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \tag{4.4}$$

$$J_3 = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \tag{4.5}$$

onde $\underline{\sigma}$ e $\underline{s}$ representam, respectivamente, o tensor das tensões e o tensor das tensões desvio.

De forma a facilitar a interpretação física e geométrica dos invariantes de tensões I_1, J_2 e J_3 é comum relacioná-los com as componentes de tensões octaédrais.

Considerando um ponto genérico de um elemento sujeito a um estado de tensão, o plano que contém esse ponto e que faz ângulos iguais com as direcções principais de tensão é designado por plano octaedral. A tensão normal, σ_{oct}, a este plano (denominada por tensão normal octaedral) é igual à tensão média normal, σ_m,

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} \cdot I_1 = \sigma_m \tag{4.6}$$

e a sua tensão tangencial, τ_{oct} (denominada por tensão tangencial octaedral), é dada por:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot J_2} \tag{4.7}$$

A direcção da tensão tangencial octaedral é definida pelo ângulo de similaridade, θ, relacionado com o invariante J_3 pela seguinte relação:

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{2} \cdot J_3}{\tau_{oct}^3} \tag{4.8}$$

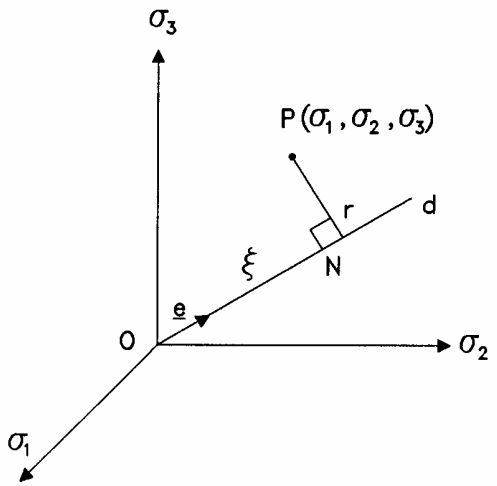


Fig. 4.1 - Espaço de tensões de Haig-Westergaard.

Na figura 4.1 apresenta-se uma representação do estado de tensão no ponto P, sendo as tensões principais, σ_1, σ_2 e σ_3, consideradas como coordenadas do espaço de tensão tridimensional, também designado por espaço de tensão de Haig-Westergaard. O estado de tensão é definido pelo vector $\overline{OP}$, podendo assim vários estados de tensão, correspondentes a diferentes pontos da peça e com diferentes direcções principais, serem representados pelo mesmo ponto P, desde que as suas tensões principais sejam iguais. O

interesse desta representação da geometria das tensões reside no facto de que para materiais isotrópicos as funções que definem o critério de resistência são independentes da orientação das tensões.

A diagonal d da figura 4.1, que define o eixo fazendo ângulos iguais com os três eixos coordenados, é designado por eixo hidrostático. Assim, o vector unitário, $\underline{e}$, da diagonal é expresso por:

$$\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1 \quad 1 \quad 1) \tag{4.9}$$

e é caracterizado por conter pontos com as tensões principais iguais ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) e as tensões de desvio nulas.

Os planos perpendiculares a d denominam-se de planos de desvio, sendo aquele que passa pela origem ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) chamado de plano π. As tensões nos pontos situados no plano π representam estados de corte puro onde a componente de tensão hidrostática é nula.

O vector $\overline{OP}$ representativo do estado de tensão no ponto P pode ser decomposto na sua parcela hidrostática, definida pelo vector $\overline{ON}$ ao longo do eixo hidrostático, e pela sua parcela de desvio, definida pelo vector $\overline{NP}$ ao longo do eixo de desvio.

O comprimento de $\overline{ON}$ é:

$$|\overline{ON}| = \xi = \overline{OP} \cdot \underline{e} = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1 \quad 1 \quad 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot I_1 \tag{4.10}$$

ou atendendo a (4.6),

$$\xi = \sqrt{3} \cdot \sigma_{oct} \tag{4.11}$$

sendo as componentes de $\overline{ON}$ definidas por:

$$\overline{ON} = (\sigma_m \quad \sigma_m \quad \sigma_m) = \frac{I_1}{3} \cdot (1 \quad 1 \quad 1) \tag{4.12}$$

então $\overline{NP}$ será:

$$\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON} = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3) - \frac{I_1}{3} \cdot (1 \quad 1 \quad 1) = (s_1 \quad s_2 \quad s_3) \tag{4.13}$$

e a parcela de desvio, r, virá:

$$r = \sqrt{|\overline{NP}|^2} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2 \cdot J_2} \tag{4.14}$$

atendendo à expressão (4.7),

$$r = \sqrt{3} \cdot \tau_{oct} \tag{4.15}$$

A interpretação geométrica do ângulo de similaridade θ pode ser feita de modo mais fácil à custa da representação do plano de desvio da forma apresentada na figura 4.2.

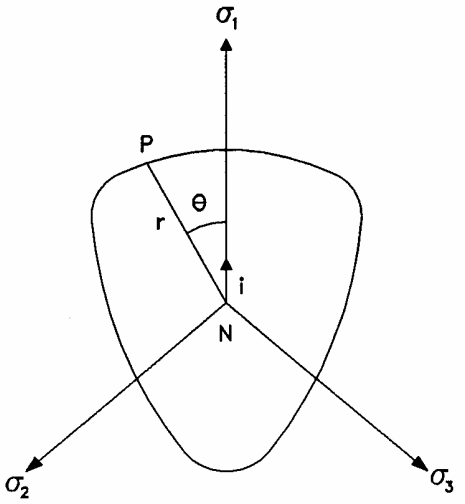


Fig. 4.2 - Projecção da intersecção da superfície de resistência com os planos de desvio.

Se o plano da folha corresponder ao plano de desvio, os eixos coordenados σ_1, σ_2 e σ_3 projectados neste plano farão iguais ângulos ($2\pi/3$ ou $120°$) entre si. Sendo o ângulo θ medido do eixo positivo σ_1 para o plano de desvio, o vector unitário, $\underline{i}$ contido na projecção do eixo σ_1 neste plano, tem como componente no sistema de eixos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$i = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2 \quad -1 \quad -1) \tag{4.16}$$

Atendendo à seguinte igualdade,

$$\overline{NP} \cdot \underline{i} = r \cdot \cos\theta \tag{4.17}$$

e às expressões (4.13), (4.14) e (4.16), o ângulo θ virá definido por:

$$\cos\theta = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{J_2}} \cdot (2 \cdot s_1 - s_2 - s_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{J_2}} \tag{4.18}$$

Se a classificação das tensões principais obedecer à seguinte condição:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \tag{4.19}$$

então virá que:

$$0° \leq \theta \leq 60° \tag{4.20}$$

Tendo em conta a seguinte relação trigonométrica:

$$\cos 3\theta = 4 \cdot \cos^3\theta - 3 \cdot \cos\theta \tag{4.21}$$

e a expressão (4.18), vem:

$$\cos 3\theta = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot J_3}{\tau_{oct}^3} \tag{4.22}$$

Desta forma, a superfície de resistência definida pela expressão (4.1) ou (4.2), pode ser convenientemente representada em função dos parâmetros ξ, r, θ, de acordo com as figuras 4.1 e 4.2, ou em função dos valores octaédrais σ_{oct}, τ_{oct}, θ, como se pode observar na figura 4.3.

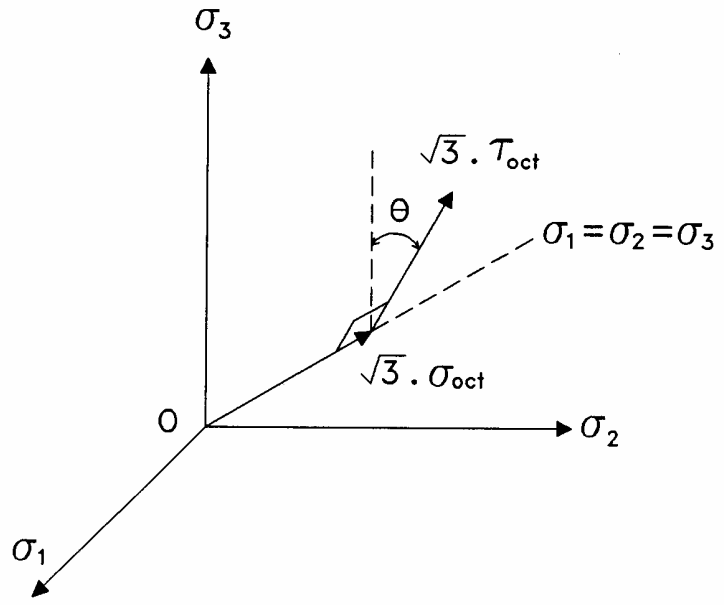


Fig. 4.3 - Interpretação física e geométrica de (ξ, r, θ) e $(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta)$.

4.2.3 - Características essenciais das superfícies de resistência máxima

As superfícies de resistência máxima, obtidas por considerações teóricas, devem apresentar determinadas características que estão de acordo com os resultados experimentais (Chen, 1982).

A forma dessas superfícies pode ser analisada de um modo fácil a partir da sua representação em planos de desvio ($\xi = const.$) e em planos meridianos que contêm o eixo hidrostático ($\theta = const.$).

Num material isotrópico, sendo arbitrários os eixos coordenados σ_1, σ_2, σ_3, basta caracterizar o comportamento nos meridianos $\theta = 0°$ a $\theta = 60°$ (respectivamente, de tracção e de compressão) para conhecer, por simetria, o comportamento nos outros sectores.

Resultados experimentais mostram que as curvas obtidas pela intersecção da superfície de resistência máxima com os planos de desvio, cuja forma genérica se ilustra na figura 4.2, deve apresentar as seguintes características:

- geometria convexa com curvaturas pouco acentuadas e simétrica relativamente ao eixo hidrostático;
- forma aproximadamente triangular para valores reduzidos da tensão hidrostática (tensões de tracção ou de compressão pouco elevadas), tomando progressivamente formas mais arredondadas para valores crescentes da tensão hidrostática (tensões de compressão elevadas).

Por sua vez, as curvas obtidas pela intersecção da superfície de resistência máxima com os planos meridionais, cuja forma genérica é apresentada na figura 4.4, devem possuir as seguintes características:

- depender da componente hidrostática de tensão;
- a sua geometria apresentar curvaturas pouco acentuadas e convexas;
- $r_t / r_c < 1$, designando os índices t e c, os correspondentes meridianos de tracção e compressão;
- o quociente r_t / r_c cresce com o aumento das tensões hidrostáticas;
- um carregamento puramente hidrostático em compressão, para valores correntes, não pode conduzir à rotura.

4.2.4 - Formulação do critério de Ottosen

O critério de Ottosen (1977), desenvolvido de forma a satisfazer resultados experimentais e as características apresentadas no ponto anterior, é expresso em função dos três invariantes I_1, J_2 e $\cos 3\theta$, e envolve a definição de quatro parâmetros que caracterizam o comportamento do material. Traduz-se pela seguinte função:

$$f(I_1, J_2, \cos 3\theta) = a \cdot \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + b \cdot \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \qquad (4.23)$$

onde as constantes a e b representam parâmetros do material e λ é função de $\cos 3\theta$, $\lambda = \lambda(\cos 3\theta)$.

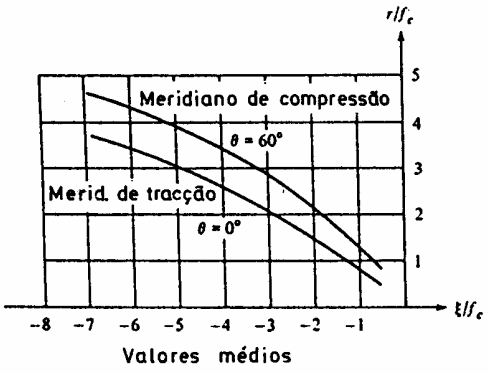


Fig. 4.4 - Forma característica dos meridianos de tracção e de compressão.

Para valores de a e b positivos, verifica-se que os meridianos são curvos (com curvaturas pouco acentuadas) e convexos, não intersectando o eixo negativo hidrostático. Por outro lado, o traçado da superfície no plano de desvio, definido pela função λ, é determinado pelas constantes $\lambda_t = 1/r_t$ e $\lambda_c = 1/r_c$ (correspondentes aos meridianos de tracção e de compressão, respectivamente), o que evidencia o facto do critério ser definido a partir de quatro parâmetros. Possui ainda a propriedade de mudança de forma de aproximadamente triangular para aproximadamente circular para tensões hidrostáticas crescentes, definida através da aproximação trigonométrica definida pela função $\cos 3\theta$. Verifica-se ainda que a superfície cilíndrica do critério de Huber-Mises e a superfície cónica de Drucker-Prager são casos particulares da presente formulação, sendo a primeira obtida para $a = b = 0$ e λ = constante e a segunda para $a = 0$ e λ = constante.

As expressões que permitem determinar a função λ são obtidas pela analogia da membrana (Chen, 1982), tendo em conta que a superfície de resistência projectada no plano de desvio deve mudar de aproximadamente triangular para aproximadamente circular com o aumento da tensão hidrostática. Essas expressões são:

$$\lambda = c_1 \cdot \cos\left[\frac{1}{3} \cdot arccos(c_2 \cdot \cos 3\theta)\right] \quad ; \quad \cos 3\theta \geq 0 \qquad (4.24.a)$$

$$\lambda = c_1 \cdot \cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cdot arccos(-c_2 \cdot \cos 3\theta)\right] \quad ; \quad \cos 3\theta \leq 0 \qquad (4.24.b)$$

onde $\cos 3\theta$ é definido pela expressão (4.22) e os parâmetros c_1 e c_2 são, respectivamente, factores de tamanho e de forma.

A determinação dos quatro parâmetros (α, b, c_1 e c_2) adoptados na definição do presente critério é feita a partir dos seguintes testes experimentais:

- resistência uniaxial de compressão $f_c(\theta = 60°)$;
- resistência uniaxial de tracção $f_{ct}(\theta = 0°)$;
- resistência biaxial de compressão ($\theta = 0°$), definido particularmente para $\sigma_1 = \sigma_2 = -1,16 \cdot f_c$, $\sigma_3 = 0$, correspondendo aos resultados experimentais de Kupfer (1969, 1973) que definem $f_{cb} = 1,16 \cdot f_c$ (ver figura 4.6);
- estado de tensão triaxial definido no meridiano de compressão ($\theta = 60°$) pelo ponto de coordenadas ($\sigma_{oct}/|f_c| = -5$; $\tau_{oct}/|f_c| = 4$), de forma a ajustar aos resultados obtidos por Balmer e Richard (ver figura 4.5; Chen, 1982).

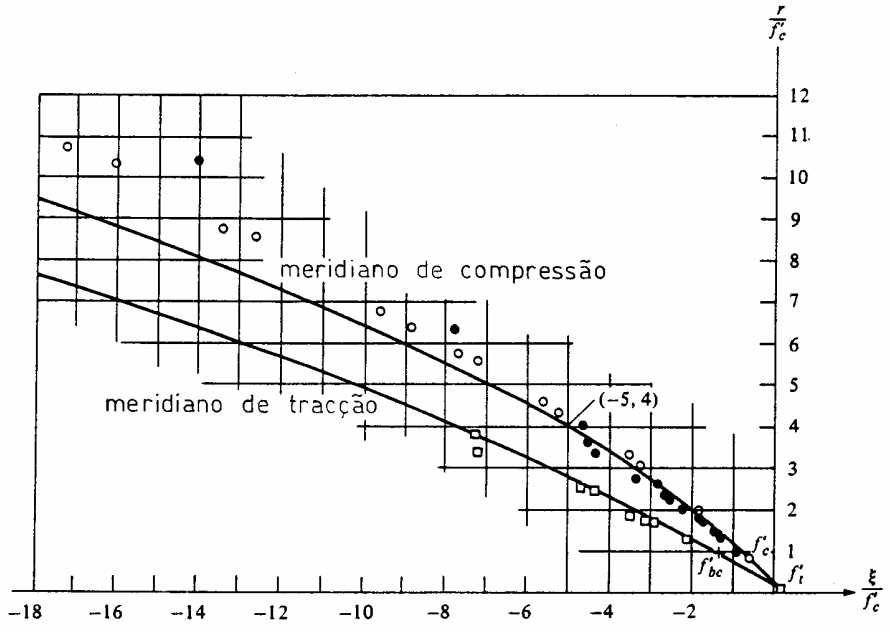


Fig. 4.5 - Comparação do critério de Ottosen com resultados experimentais nos planos meridianos: círculos abertos, Balmer (compressão); círculos a cheio, Richard (compressão); quadrados, Richard (tracção); cruzes, Kupfer (tracção).

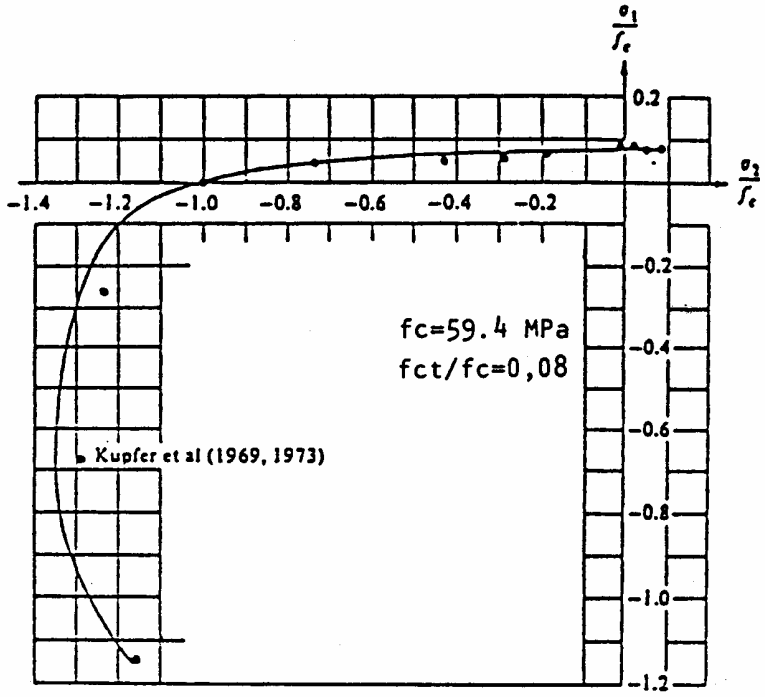


Fig. 4.6 - Comparação do critério de Ottosen com os testes biaxiais de Kupfer (1969, 1973).

Os coeficientes a, b, c_1 e c_2 apresentam uma considerável dependência (ver Quadro 4.1) da relação de resistência,

$$K = \frac{f_{ctm}}{f_c} \tag{4.25}$$

em que f_{ctm} é a resistência média à tracção do betão e f_c a sua resistência característica à compressão.

Aos valores de c_1 e c_2 apresentados no Quadro 4.1 correspondem os valores de λ_t e λ_c definidos no Quadro 4.2.

Quadro 4.1 - Parâmetros do material

k	a	b	c_1	c_2
0.08	1.8076	4.0962	14.4863	0.9914
0.10	1.2759	3.1962	11.7365	0.9801
0.12	0.9218	2.5969	9.9110	0.9647

Quadro 4.2 - Valores da função λ

k	λ_t	λ_c	λ_c/λ_t
0.08	14.4725	7.7834	0.5378
0.10	11.7109	6.5315	0.5577
0.12	9.8720	5.6979	0.5772

No novo Código Modelo do CEB (1990 e 1991) são definidas as expressões para os quatro parâmetros mencionados, que melhor se aproximam com os resultados obtidos no Quadro 4.1 :

$$a = \frac{1}{9 \cdot K^{1.4}} \tag{4.26}$$

$$b = \frac{1}{3,7 \cdot K^{1.1}} \tag{4.27}$$

$$c_1 = \frac{1}{0,7 \cdot K^{0.9}} \tag{4.28}$$

$$c_2 = 1 - 6,8 \cdot (K - 0,07)^2 \tag{4.29}$$

Concluindo, o presente critério é válido para qualquer estado de tensão multiaxial e contém todos os invariantes de tensão. As expressões matemáticas são facilmente exequíveis com a ajuda de computador. As soluções obtidas têm uma boa concordância com os resultados experimentais, para variadíssimos estados de tensão. As superfícies de resistência possuem as características requeridas de curvaturas pouco acentuadas, convexidade, simetria, meridianos curvos que abrem na direcção do eixo hidrostático negativo e da mudança de forma dos planos de desvio, de aproximadamente triangular para aproximadamente circular à medida que as tensões hidrostáticas crescem. Como resultado, verifica-se que não há necessidade de maior refinamento neste critério de resistência (Chen, 1982). Futuros desenvolvimentos devem ser feitos na definição de relações entre tensões e deformações para o betão fendilhado e não fendilhado, tendo em conta os modos de fractura do betão já mencionados. Estas relações vão ser discutidas e explicitadas nas secções seguintes.

4.3 - COMPORTAMENTO DO BETÃO NÃO FENDILHADO

4.3.1 - Generalidades

O betão é um material caracterizado por um comportamento não linear inelástico, verificando-se a existência de deformações recuperáveis e deformações permanentes. Os modelos elasto-plásticos possibilitam uma representação eficaz deste comportamento ao recorrerem à teoria da elasticidade para definir a componente recuperável de deformação e à teoria da plasticidade para identificar as deformações plásticas responsáveis pela componente permanente.

As relações constitutivas que definem o comportamento elasto-plástico com endurecimento são baseadas nas seguintes condições: o critério de cedência, a lei de fluxo ou de escoamento plástico e a lei de endurecimento. A formulação é apresentada com toda a generalidade para um estado triaxial de tensão, podendo as expressões para os casos bidimensionais e unidimensionais ser obtidas por simples anulação das componentes de tensão que não intervêm no cálculo.

4.3.2 - Critério de cedência

O critério de cedência determina o nível de tensões para o qual se dá o início da deformação plástica. Assim, para um material isotrópico sujeito a um determinado nível de carga, gera-se um estado de tensão que pode ser traduzido numa superfície de cedência em função dos invariantes de tensão.

Na presente análise de peças de betão, o efeito de corte é tido em conta existindo, por isso, a necessidade de empregar um critério de cedência biaxial. Este critério é expresso em função dos três invariantes de tensão e de quatro parâmetros do material pela relação (4.23).

O estado de tensão considerado é caracterizado pelos invariantes do tensor das tensões e do tensor das tensões desvio, através dos parâmetros I_1, J_2 e J_3, definidos em função das componentes cartesianas de tensões pelas seguintes expressões:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{4.30}$$

$$J_2 = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y - \sigma_x \cdot \sigma_z - \sigma_y \cdot \sigma_z + \\ + 3 \cdot \tau_{yz}^2 + 3 \cdot \tau_{xy}^2 + 3 \cdot \tau_{xz}^2) \tag{4.31}$$

$$J_3 = \frac{2}{27}\cdot(\sigma_x^3+\sigma_y^3+\sigma_z^3) -$$

$$-\frac{1}{9}\cdot(\sigma_x^2\cdot\sigma_y+\sigma_x^2\cdot\sigma_z+\sigma_x\cdot\sigma_y^2+\sigma_x\cdot\sigma_z^2+\sigma_y^2\cdot\sigma_z+\sigma_y\cdot\sigma_z^2)+$$

$$+\frac{4}{9}\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y\cdot\sigma_z -$$

$$-\frac{2}{3}\cdot(\sigma_x\cdot\tau_{yz}^2+\sigma_y\cdot\tau_{xz}^2+\sigma_z\cdot\tau_{xy}^2)+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot(\sigma_y\cdot\tau_{yz}^2+\sigma_z\cdot\tau_{yz}^2+\sigma_x\cdot\tau_{xy}^2+\sigma_y\cdot\tau_{xy}^2+\sigma_x\cdot\tau_{xz}^2+\sigma_z\cdot\tau_{xz}^2)+$$

$$+2\cdot\tau_{xy}\cdot\tau_{yz}\cdot\tau_{xz} \qquad (4.32)$$

Uma vez definidos os invariantes de tensão e os parâmetros do material, a tensão efectiva, σ_c, representativa do estado de tensão multiaxial a que o betão está sujeito, pode ser calculada pela seguinte relação (obtida a partir da expressão (4.23)):

$$\sigma_c = f(\underline{\sigma}) = [\alpha\cdot J_2+(\lambda\cdot\sqrt{J_2}+b\cdot I_1)\cdot\sigma_c]^{1/2} \qquad (4.33)$$

Uma vez atingida a superfície de cedência limite (representada no plano de desvio na forma que a figura 4.7 ilustra), definida por $f(\underline{\sigma}) = f_c$, em que f_c é a tensão efectiva de pico, o betão sofre uma quebra de resistência devido ao *softening* se houver predominância da compressão, ou devido à fendilhação no caso de a tracção ser predominante.

A obtenção de uma superfície de cedência mais circular que a obtida pela expressão (4.33), sobretudo para pequenas pressões hidrostáticas, seria possível através da adopção de um valor apropriado para o σ_c (que se encontra entre parêntesis na expressão mencionada). No entanto, isso conduziria a um problema que não se enquadrava na lei associativa a seguir referida.

4.3.3 - Lei de fluxo ou de escoamento plástico

Na fase plástica, as relações entre as tensões e os incrementos infinitesimais de deformação plástica são estabelecidas pela lei de fluxo. Na definição desta lei admite-se a condição de normalidade que considera a direcção do vector representativo dos acréscimos infinitesimais de deformação plástica, $d\underline{\epsilon}_p$, perpendicular à função de potencial plástico, $g(\underline{\sigma})$, representada (Owen e Hinton, 1980) pela expressão:

$$d\underline{\epsilon}_p = d\lambda \cdot \frac{\partial g(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \tag{4.34}$$

onde $d\lambda$ é um infinitésimo não negativo, designado por multiplicador plástico, que determina o acréscimo de deformação plástica e $\partial g(\underline{\sigma})/\partial \underline{\sigma}$ estabelece a condição de normalidade admitida.

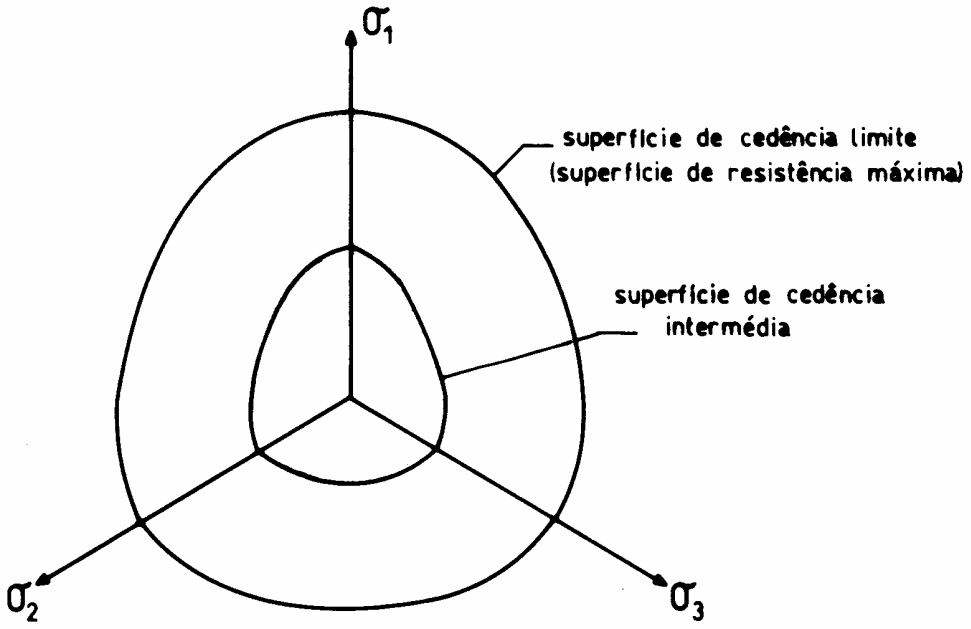


Fig. 4.7 - Representação das superfícies de cedência nos planos de desvio.

A função de potencial plástico é, no presente trabalho, identificada com a função de cedência, $f(\underline{\sigma})$, vindo a lei de fluxo associada traduzida por:

$$d\underline{\epsilon}_p = d\lambda \cdot \frac{df(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} = d\lambda \cdot \underline{a} \tag{4.35}$$

em que $\underline{a}$ representa o vector de fluxo.

A deformação volumétrica do betão, caracterizada por contracção na fase inicial seguida de expansão, não é modelada com rigor pela condição de normalidade associada expressa em (4.35). No entanto, do ponto de vista prático, apresenta a vantagem de definir uma matriz elasto-plástica simétrica.

Para um material com um endurecimento isotrópico, o factor $d\lambda$ é determinado tendo em conta que terão que ser satisfeitas as seguintes relações (Owen e Hinton, 1980):

$$F(\underline{\sigma}, \epsilon_p) = f(\underline{\sigma}) - \sigma_Y(\epsilon_p) = 0 \tag{4.36}$$

e

$$dF = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot d\underline{\sigma} - \frac{d\sigma_Y}{d\epsilon_p} \cdot d\epsilon_p = 0 \tag{4.37}$$

onde $f(\underline{\sigma})$ designa a função de cedência definida em (4.33) e $\sigma_Y(\epsilon_p)$ representa a tensão de cedência de referência, baseada na relação entre tensão e extensão plástica obtida num ensaio uniaxial.

Atendendo à condição de *work-hardening* (Owen e Hinton, 1980), a energia de deformação plástica resultante de um estado multiaxial de tensão pode ser identificada com o trabalho plástico correspondente ao modelo uniaxial, isto é,

$$dW_p = \underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\epsilon}_p = \sigma_Y(\epsilon_p) \cdot d\epsilon_p \tag{4.38}$$

considerando a expressão (4.35), vem:

$$d\epsilon_p = d\lambda \cdot \frac{\underline{a}^T \cdot \underline{\sigma}}{\sigma_Y(\epsilon_p)} \tag{4.39}$$

Tendo em conta o teorema de Euler para funções homogéneas (Owen e Hinton, 1980), a expressão (4.39) transforma-se em:

$$d\epsilon_p = d\lambda \cdot |\underline{a}| \tag{4.40}$$

onde $|\underline{a}|$ designa a norma do vector $\underline{a}$.

Dado que o acréscimo infinitesimal de deformação total, $d\underline{\epsilon}$, é igual à soma das suas componentes de deformação elástica, $d\underline{\epsilon}_e$, e plástica, $d\underline{\epsilon}_p$,

$$d\underline{\epsilon} = d\underline{\epsilon}_e + d\underline{\epsilon}_p \tag{4.41}$$

e que

$$d\underline{\epsilon}_e = \underline{D}^{-1} \cdot d\underline{\sigma} \tag{4.42}$$

onde $\underline{D}$ representa a matriz de elasticidade do material. O multiplicador plástico, $d\lambda$, é definido pela seguinte expressão (fazendo uso das relações (4.37), (4.40), (4.41) e (4.42)):

$$d\lambda = \frac{\underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot d\underline{\epsilon}}{A + \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} \tag{4.43}$$

sendo

$$A = \frac{d\sigma_Y}{d\epsilon_p} \cdot |\underline{a}| = H' \cdot |\underline{a}| \tag{4.44}$$

o escalar que caracteriza o endurecimento do material.

Desta forma, a relação constitutiva em regime elasto-plástico é definida em termos de acréscimos infinitesimais da seguinte forma:

$$d\underline{\sigma} = \underline{D}_{ep} \cdot d\underline{\epsilon} \tag{4.45}$$

em que a matriz elasto-plástica, $\underline{D}_{ep}$, atendendo às relações (4.40) a (4.44), é expressa por:

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D} - \frac{\underline{D} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{D}}{A + \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} \tag{4.46}$$

O vector de fluxo, $\underline{a}$, é definido nas suas componentes por:

$$\{a\}^T = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right\} \tag{4.47}$$

sendo as derivadas parciais da função de cedência, apresentada em (4.33), definidas por:

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{a \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{ij}} \cdot J_2^{1/2} + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot J_2^{-1/2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + b \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} \right) \cdot \sigma_c}{\sigma_c} \right] \tag{4.48}$$

onde as derivadas parciais da função $\lambda(\cos 3\theta)$, obtidas a partir das expressões (4.24), resultam em:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{3} arccos(c_2 \cdot \cos 3\theta)\right] \cdot \left(J_2^{3/2} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{3}{2} \cdot J_2^{1/2} \cdot J_3 \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \right)}{J_2^3 \cdot [1 - (c_2 \cdot \cos 3\theta)^2]^{1/2}} \quad ; \quad \cos 3\theta \geq 0 \tag{4.49.a}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} arccos(-c_2 \cdot \cos 3\theta)\right] \cdot \left(J_2^{3/2} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{3}{2} \cdot J_2^{1/2} \cdot J_3 \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \right)}{J_2^3 \cdot [1 - (c_2 \cdot \cos 3\theta)^2]^{1/2}} \quad ; \quad \cos 3\theta \leq 0 \tag{4.49.b}$$

As derivadas parciais dos invariantes I_1, J_2 e J_3, expressas em (4.48) e (4.49), são facilmente determinadas a partir das relações (4.30) a (4.32).

4.3.4 - Lei de endurecimento

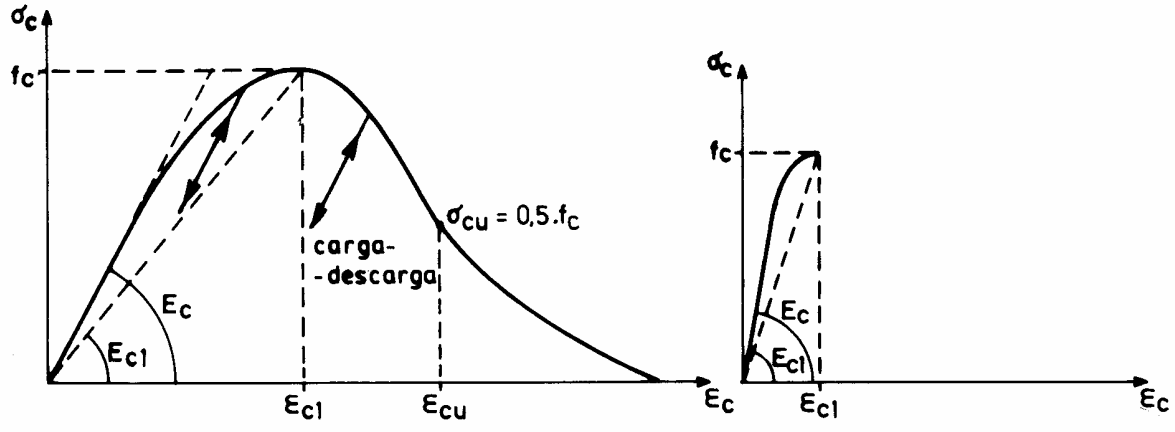
A lei de endurecimento define a expansão da superfície de carga, comandada pela tensão de cedência de referência, σ_Y, durante a deformação plástica. Este fenómeno é definido através da relação entre a tensão efectiva, σ_c, e a deformação plástica efectiva, ϵ_p, da seguinte maneira:

$$\sigma_Y = \sigma_c = H(\epsilon_p) \qquad (4.50)$$

estabelecida em função da relação entre tensões e deformações obtida num ensaio uniaxial.

Os conceitos de tensão efectiva e de deformação plástica efectiva permitem definir esta expansão para estados multiaxiais de tensão, genéricos, a partir de estados de tensão simples, através da extrapolação dos resultados experimentais verificados em ensaios uniaxiais.

No presente modelo, a relação entre tensão efectiva - deformação plástica efectiva é obtida a partir da curva definida no Código Modelo CEB-90, que relaciona tensões com deformações uniaxiais (figura 4.8).



a) Betão comprimido b) Betão traccionado não fendilhado

Fig. 4.8 - Representação unidimensional das relações constitutivas do betão definidas no presente modelo.

A curva para o betão comprimido, representada na figura 4.8, é definida pelas seguintes expressões:

$$\sigma_\gamma = \frac{\frac{E_c}{E_{c_1}} \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c_1}} - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c_1}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_c}{E_{c_1}} - 2\right) \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c_1}}} \cdot f_c \quad ; \quad \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \qquad (4.51.a)$$

$$\sigma_\gamma = \left[\left(\frac{1}{\epsilon_{cu}/\epsilon_{c1}} \cdot \xi - \frac{2}{(\epsilon_{cu}/\epsilon_{c1})^2}\right) \cdot \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\epsilon_{cu}/\epsilon_{c1}} - \xi\right) \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}\right]^{-1} \cdot f_c \quad ; \quad \epsilon_c \geq \epsilon_{cu} \qquad (4.51.b)$$

em que E_c representa o módulo de elasticidade do betão, ϵ_{c1} e E_{c1} são a extensão e o módulo secante, respectivamente, definidos para a tensão de pico, f_c, por:

$$\epsilon_{c1} = 0,0022 \qquad (4.52)$$

e

$$E_{c_1} = \frac{f_c}{0,0022} \qquad (4.53)$$

A extensão ϵ_{cu} e o parâmetro ξ são determinados, respectivamente, por:

$$\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{c1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{E_{c_1}} + 1\right) + \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{E_{c1}} + 1\right)^2 - \frac{1}{2}\right]^{1/2} \qquad (4.54)$$

e

$$\xi = \frac{4 \cdot \left[\left(\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{c1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{E_c}{E_{c1}} - 2\right) + 2 \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{c1}} - \frac{E_c}{E_{c1}}\right]}{\left[\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{c1}} \cdot \left(\frac{E_c}{E_{c1}} - 2\right) + 1\right]^2} \qquad (4.55)$$

Uma análise mais detalhada da curva definida pelas expressões (4.51) permite verificar uma diminuição gradual da rigidez do material até se anular para a tensão de pico. Para deformações superiores a ϵ_{c1} verifica-se o efeito designado por *softening* que se traduz por uma rigidez negativa, isto é, há uma diminuição da resistência à medida que as deformações aumentam. Pela observação da figura 4.9, é possível ainda verificar que para betões de baixa resistência a variação de tensões no ramo descendente (devido ao *softening*) é relativamente suave, traduzindo-se numa curva com uma configuração achatada, pelo contrário, os betões resistência elevada apresentam uma grande variação de tensões nesse ramo. Estas constatações estão de acordo com resultados experimentais, podendo afirmar-se que a adopção de curvas teóricas idênticas àquela definida no REBAP (1983), que consideram um patamar plástico (a tensão constante e igual à de pico) entre extensões

de 0,2% e 0,35% , pode traduzir-se, no caso dos betões resistência elevada, numa atribuição exagerada de resistência depois de ser atingida a tensão de pico (na ordem dos 5 a 10%), estando por isso do lado da insegurança.

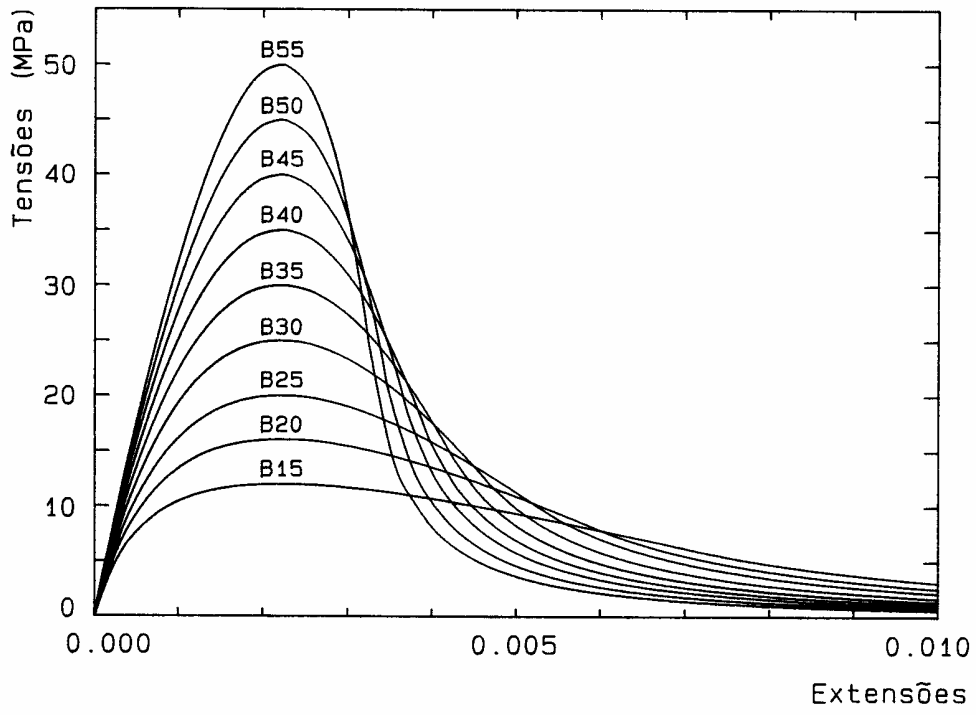


Fig. 4.9 - Relações constitutivas, para várias classes de betão, definidas pelo presente modelo.

A curva para o betão traccionado não fendilhado, a ser comparada com os valores efectivos, é definida pela expressão (4.51.a) para extensões não superiores a ϵ_{c_1}, definida para a tensão de pico, f_c, com o valor de :

$$\epsilon_{c_1} = 0,00020 \qquad (4.56)$$

sendo, por consequência, o módulo secante, E_{ct_1}, de:

$$E_{ct_1} = \frac{f_c}{0,00020} \qquad (4.57.a)$$

com um módulo de elasticidade fictício de:

$$E_{ct} = E_c / K \qquad (4.57.b)$$

sendo K definido pela relação (4.25).

Uma vez descrita a curva $\sigma_c - \epsilon_c$, a lei de endurecimento é caracterizada pelo parâmetro A expresso em (4.44), sendo H' definido pela relação:

$$H' = \frac{d\sigma_\gamma}{d\epsilon_p} = \frac{d\sigma_\gamma}{d\epsilon_c - d\epsilon_e} \tag{4.58}$$

Esta expressão pode ser transformada em:

$$H' = \frac{d\sigma_\gamma / d\epsilon_c}{1 - \frac{d\sigma_\gamma / d\epsilon_c}{d\sigma_\gamma / d\epsilon_e}} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_c}} \tag{4.59}$$

em que E_c é o módulo de elasticidade do betão definido na origem da curva $\sigma_c - \epsilon_c$ e E_T é o módulo tangente para o nível de deformação considerado, determinado por derivação das expressões (4.51) em ordem a ϵ_c:

$$E_T = \frac{A - B \cdot C \cdot \epsilon_c^2 - 2 \cdot B \cdot \epsilon_c}{(1 + C \cdot \epsilon_c)^2} \cdot f_c \quad ; \quad \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \tag{4.60.a}$$

$$E_T = -\frac{2 \cdot D \cdot \epsilon_c + F}{(D \cdot \epsilon_c^2 + F \cdot \epsilon_c)^2} \cdot f_c \quad ; \quad \epsilon_c \geq \epsilon_{cu} \tag{4.60.b}$$

sendo os parâmetros A, B, C, D e F definidos pelas seguintes relações:

$$A = \frac{E_c}{E_{c_1} \cdot \epsilon_{c_1}} \tag{4.61}$$

$$B = \frac{1}{\epsilon_{c_1}^2} \tag{4.62}$$

$$C = \left(\frac{E_c}{E_{c_1}} - 2 \right) \cdot \frac{1}{\epsilon_{c_1}} \tag{4.63}$$

$$D = \left[\frac{1}{\epsilon_{cu} / \epsilon_{c_1}} \cdot \xi - \frac{2}{(\epsilon_{cu} / \epsilon_{c_1})^2} \right] \cdot \frac{1}{\epsilon_{c_1}^2} \tag{4.64}$$

$$F = \left(\frac{4}{\epsilon_{cu} / \epsilon_{c_1}} - \xi \right) \cdot \frac{1}{\epsilon_{c_1}} \tag{4.65}$$

e em que as variáveis envolvidas mantêm os significados já indicados.

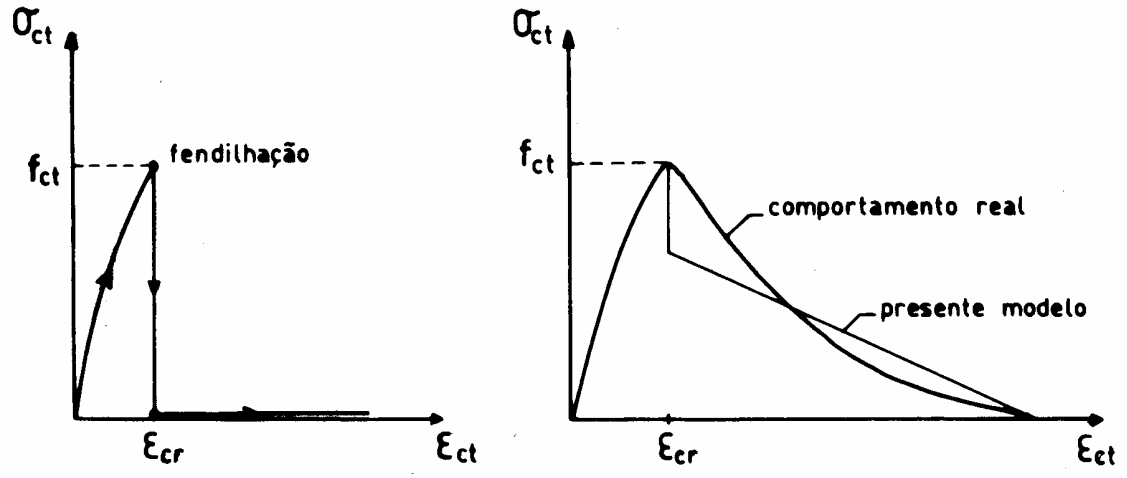
4.4 - COMPORTAMENTO DO BETÃO FENDILHADO

4.4.1 - Generalidades

A fendilhação no betão devido à tracção é a principal causa do comportamento altamente não linear das estruturas de betão. Embora não afecte significativamente a carga

de colapso é, no entanto, primordial na análise da deformação, sendo por isso importante simular de forma adequada a evolução deste processo através de um modelo apropriado.

Quando sujeito a tensões de tracção, a resposta do betão simples é caracterizada por pequenas deformações plásticas até se atingir a resistência máxima, verificando-se uma anulação instantânea dessa resistência quando se atinge a tensão máxima (figura 4.10a). No entanto, a presença de armadura concede ao betão uma capacidade de retenção das tensões de tracção normais ao plano da fenda, devido à interacção entre estes dois materiais (Gilbert e Warner, 1978; Floegl e Mang, 1982), conforme se pode ver na figura 4.10b.



a) Betão simples b) Betão estrutural

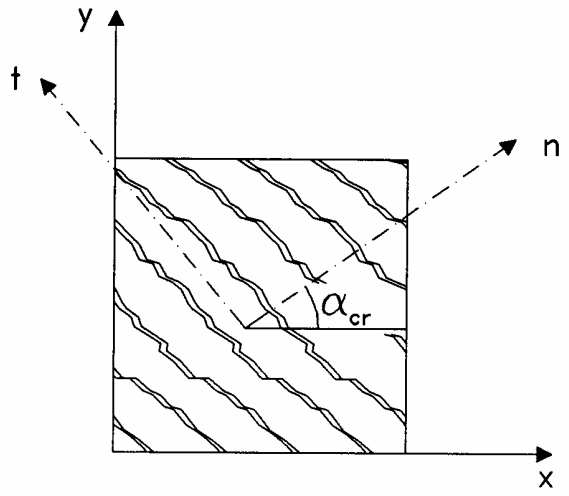
Fig. 4.10 - Resposta do betão à tracção.

No presente modelo é definido um diagrama de retenção das tensões de tracção, em língua inglesa *tension-stiffening* (Figueiras, 1983), que se aproxima do comportamento real.

A iniciação da fendilhação é aqui definida pela tensão de tracção máxima (Bazant, 1979) o que, embora possa ser considerado como um inconveniente devido à dificuldade em determinar o valor experimental dessa tensão e ainda devido à influência da armadura, se justifica pela reduzida influência do valor exacto da tensão de fendilhação na resposta da generalidade das estruturas de betão. Pelo contrário, a adequada descrição da propagação das fendas e do diagrama pós-fendilhação é fundamental para determinar o comportamento da estrutura, o qual é tido em conta pelo modelo adoptado para o betão traccionado.

No presente modelo, considera-se que as fendas são distribuídas no domínio do ponto de amostragem do elemento, traduzindo-se o seu efeito por uma simples modificação das relações constitutivas do material. O betão fendilhado é definido como um material

ortotrópico, sendo os eixos de ortotropia orientados segundo a direcção da fendilhação (figura 4.11). Desta forma, as fendas podem ser formadas numa direcção qualquer não modificando a discretização da topologia da estrutura.



n, *t* - eixos de referência de ortotropia
α_{cr} - ângulo de fendilhação

Fig. 4.11 - Direcção de fendilhação.

4.4.2 - Comportamento das zonas fendilhadas

O comportamento do betão estrutural fendilhado advém, fundamentalmente, da transferência de tensões entre o aço e o betão. Este fenómeno é devido sobretudo aos seguintes mecanismos de interacção: a aderência entre o betão e a armadura, a resistência ao corte da armadura e a engrenagem verificada entre as faces das fendas.

Desempenhando um papel relevante nesta interacção, a aderência estabelece-se logo após a formação das primeiras fendas, manifestando-se por uma transferência brusca de tensões do betão para o aço (figura 4.14). Conforme se observa na figura 4.12, verifica-se então um deslocamento relativo entre os dois materiais, que é condicionado pela adesão e fricção gerada na superfície de contacto. Só a uma determinada distância dessa fenda primária se restabelece a compatibilidade das deformações (figura 4.13), podendo dar origem a novas fendas. Com o aumento da deformação, as fendas internas propagam-se, atingindo algumas delas a superfície (formação de fendas secundárias). A progressiva degradação do betão entre fendas conduz à anulação do efeito de aderência com o início de plastificação da armadura.

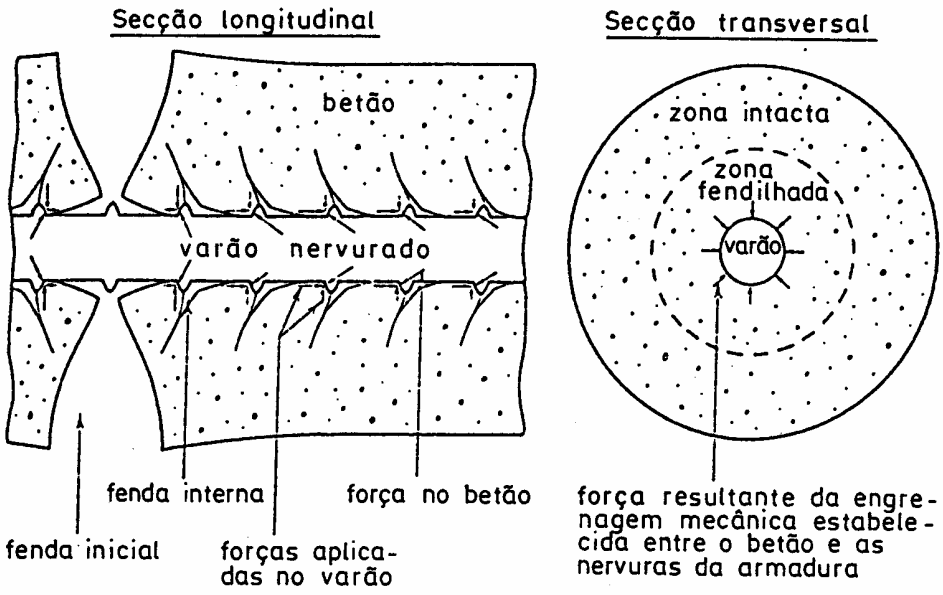


Fig. 4.12 - Interacção entre um varão nervurado e o betão envolvente.

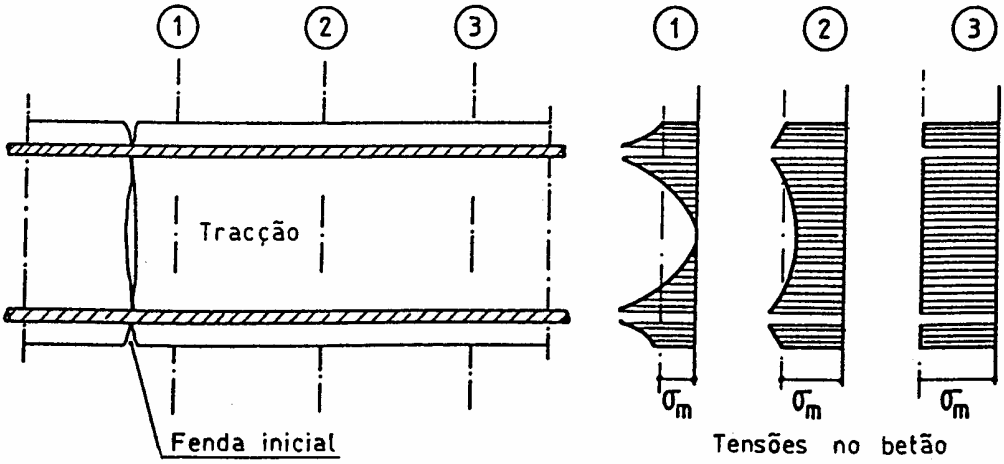


Fig. 4.13 - Diagramas de tensões no betão traccionado.

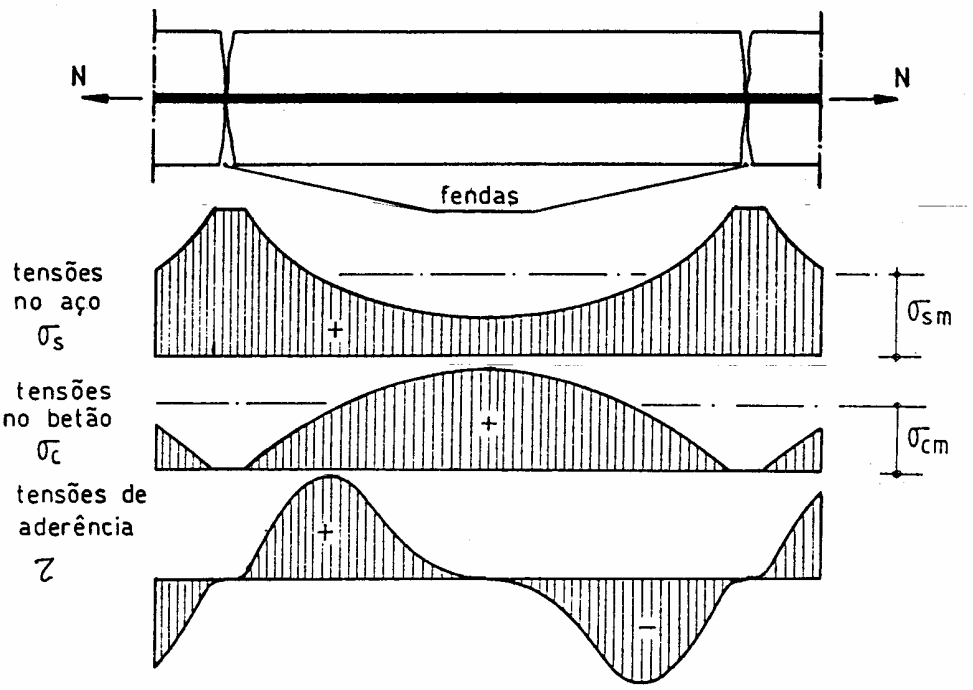


Fig. 4.14 - Representação esquemática da distribuição de tensões entre fendas.

Esta capacidade de retenção de tensões de tracção entre fendas é correntemente designada por efeito de *tension stiffening*, sendo de grande importância a sua consideração na análise da deformação de estruturas de betão armado e pré-esforçado.

É de salientar, também, na interacção armaduras-betão a condução de esforço de corte no betão estrutural fendilhado. Como se pode observar na figura 4.15, quando existem deslocamentos transversais entre as superfícies de uma fenda, as armaduras que a atravessam deformam-se, participando assim na transferência de uma parte significativa do esforço de corte. Sendo este efeito condicionado pelo diâmetro, recobrimento e disposição da armadura, este mecanismo não é dominante uma vez que em estruturas correntes de betão as espessuras de recobrimento e o diâmetro dos varões são pequenos.

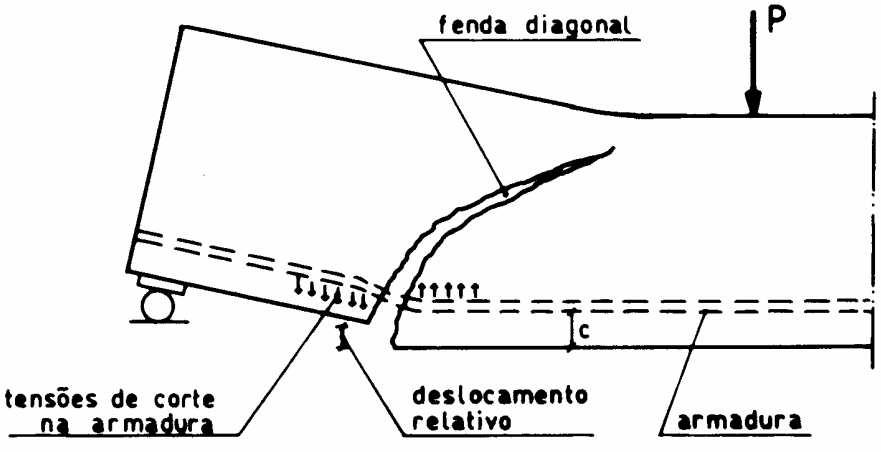


Fig. 4.15 - Contribuição da armadura na transmissão da força de corte através da fenda.

A existência de armaduras favorece também a transferência de tensões tangenciais, por atrito entre as superfícies das fendas. Devido à rugosidade e à irregularidade destas superfícies (figura 4.16), há uma tendência de se afastarem (dilatação da fenda) e de deslizarem transversalmente. Este efeito é contrariado por forças normais geradas pelo betão circundante e pelas armaduras que as atravessam. Este mecanismo é tanto mais preponderante quanto maior a dimensão dos inertes, a percentagem de armadura e a resistência à compressão do betão. No caso de fendilhação regular, com fendas paralelas e pouco espaçadas, este fenómeno pode ser caracterizado como uma propriedade do material a incorporar nas relações constitutivas do betão fendilhado.

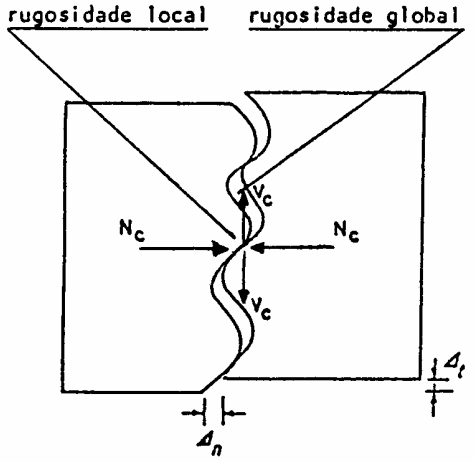


Fig. 4.16 - Transferência de esforços de corte por engrenagem entre as faces da fenda.

4.4.3 - Formulação do modelo de fendilhação

4.4.3.1 - Efeito de interacção entre a armadura e o betão

A resistência à tracção do betão é relativamente pequena e praticamente desprezável em comparação com a sua resistência à compressão, no entanto, a distribuição da fendilhação é marcante no comportamento estrutural. Sendo de toda a conveniência, para a formulação de elementos finitos, o uso de modelos que descrevam em termos médios este fenómeno, é dada a preferência a uma representação contínua que caracterize a distribuição das fendas no domínio do elemento finito. Os seus efeitos são considerados através de uma modificação das relações constitutivas do material.

A fendilhação do betão ocorre quando se verifica uma tensão efectiva superior ao valor de pico, f_{ct}, da curva tensões-deformações. Considera-se que as fendas se formam perpendicularmente à direcção das tensões principais máximas (figura 4.17) passando o cálculo das componentes de tensão a ser feito relativamente a um referencial coincidente com estas direcções.

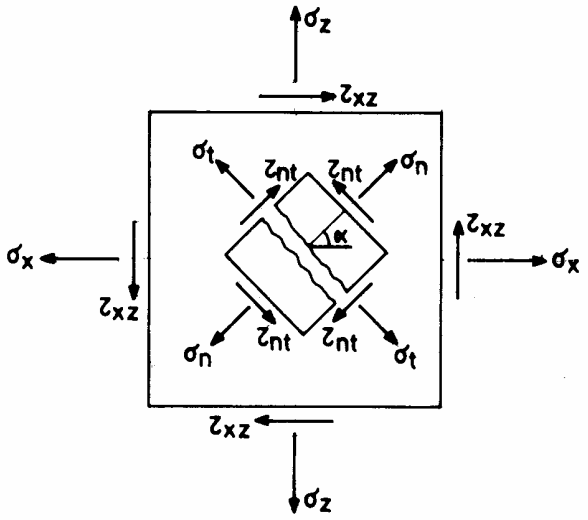


Fig. 4.17 - Direcção de fendilhação.

As relações constitutivas do betão fendilhado são definidas em função dos valores totais das tensões e das deformações, representando-se no referencial da fenda pela seguinte expressão:

$$\underline{\sigma}_{cr} = \underline{D}_{cr} \cdot \underline{\epsilon}_{cr} \tag{4.66}$$

sendo a contribuição do betão fendilhado para a formação da matriz de rigidez da estrutura dada por:

$$\underline{D} = \underline{T}^{T} \cdot \underline{D}_{cr} \cdot \underline{T} \tag{4.67}$$

onde $\underline{T}$ designa a matriz de transformação que relaciona os eixos do referencial da fenda com o referencial global.

As relações constitutivas definidas pela expressão (4.66) contêm o módulo reduzido de rigidez transversal para o betão fendilhado, obtido através de um parâmetro redutor designado por β_n. A tensão normal ao plano da fenda dada pela expressão (4.66) é nula sendo, no entanto, considerada com um valor positivo de acordo com o diagrama de retenção de tensões de tracção (*tension stiffening*), correspondente ao efeito de aderência armadura-betão.

a) Diagrama de retenção de tensões de tracção

O valor da tensão normal ao plano da fenda, que traduz quantitativamente o fenómeno de aderência entre a armadura e o betão, é definido de acordo com o diagrama de retenção de tensões de tracção apresentado na figura 4.18.

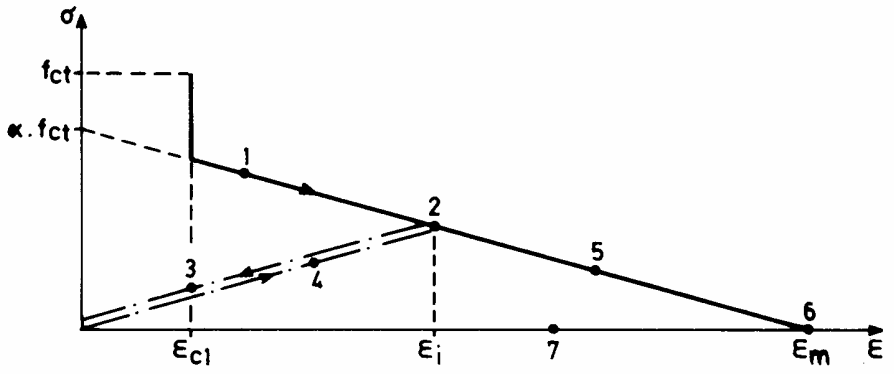


Fig. 4.18 - Diagrama de retenção de tensões de tracção para o betão fendilhado.

O valor da componente da tensão normal, σ_n, ao plano da fenda, para as situações correspondentes à abertura da fenda (pontos 1, 2, 5 e 6 da figura 4.18), é:

$$\sigma_n = \alpha \cdot f_{ct} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_n}{\epsilon_m} \right) \tag{4.68}$$

onde f_{ct} é a tensão máxima de tracção, ϵ_n é a deformação corrente no betão na direcção perpendicular à fenda, α e ϵ_m são coeficientes a definir em função das características geométricas e mecânicas dos elementos estruturais.

O valor de σ_n, para as situações relativas ao fecho parcial da fenda (pontos 3 e 7 da figura 4.18) e subsequente reabertura (ponto 4), é dado por:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} \cdot \epsilon_n \tag{4.69}$$

sendo ϵ_i o valor máximo atingido pela deformação de tracção ao ponto considerado e σ_i a correspondente tensão normal. Desta forma, pretende-se modelar aproximadamente a deterioração progressiva da aderência entre a armadura e o betão, através de um módulo de elasticidade fictício dado pelo quociente σ_i / ϵ_i.

O valor do coeficiente α, contido na expressão (4.68), depende da quantidade de armadura no domínio do elemento, no entanto, nos casos correntes verifica-se que valores entre 0,5 a 0,7 conduzem a uma boa aproximação (Figueiras, 1983). O parâmetro ϵ_m é normalmente considerado com o valor de 0,0020 (Figueiras , 1983), contudo, deve-se ter

em atenção que a presente aproximação do fenómeno de aderência sub-estima as tensões máximas efectivamente instaladas nas armaduras (ver figura 4.14) por isso, o parâmetro ϵ_m deve, ainda, satisfazer a condição (Póvoas, 1991):

$$\epsilon_m < \frac{f_{sy}}{E_s} \tag{4.70}$$

onde f_{sy} é a tensão de cedência das armaduras com módulo de elasticidade longitudinal E_s. Refira-se ainda que a força de tracção conduzida pelo betão entre fendas não deve ultrapassar a força de tracção máxima suportada pelo aço, logo (Póvoas, 1991):

$$\alpha < \frac{f_{sy} \cdot A_s}{f_{ct} \cdot A_c^*} \tag{4.71}$$

em que A_c^* representa a àrea de betão traccionado envolvente da armadura A_s, possuindo as restantes variáveis os significados já referidos.

Na discretização por elementos finitos, o efeito de *tension stiffening* nos elementos (ou nas camadas) relativamente afastados das armaduras pode ser anulado, considerando $\alpha = 0$. De facto, nestes elementos o aço não pode transmitir tensões de tracção, devido ao seu arranjo. Realce-se ainda a dependência deste efeito com o ângulo entre o plano da fenda e a armadura. Assim, ao traduzir implicitamente a relação entre a largura das fendas e o deslizamento relativo entre o betão e as armaduras, responsável pela destruição progressiva da aderência entre estes materiais, considera-se que a fenda se forma na direcção perpendicular à direcção de armação. Nos casos em que há um desvio significativo na fendilhação, a sua influência deve ser tomada em conta. Uma forma simples de o fazer é corrigir o valor originalmente atribuído a ϵ_m de acordo com a solução apresentada por Leonhardt (1979), traduzida graficamente na figura 4.19.

b) Módulo de rigidez transversal para o betão fendilhado

Como se viu anteriormente, existe transferência de forças de corte ao longo das superfícies rugosas das fendas. Embora o tamanho dos inertes, a quantidade de armadura e o diâmetro dos varões influenciem esta transferência, a largura das fendas é o factor de maior preponderância na ocorrência deste mecanismo.

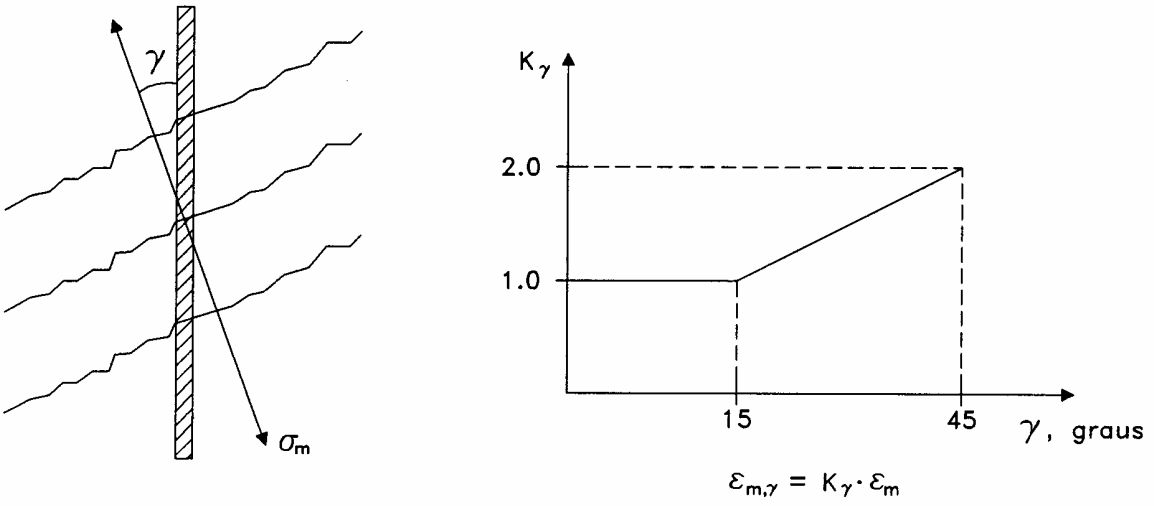


Fig. 4.19 - Influência do desvio da direcção das armaduras relativamente à direcção de fendilhação (coeficiente de correcção do parâmetro ϵ_m).

Atendendo à complexidade do fenómeno, emprega-se uma aproximação simplificada da capacidade de transferência das tensões de corte do betão fendilhado, definida através de um factor de redução do módulo de elasticidade transversal do betão. Esta redução é realizada gradualmente através de um decréscimo linear traduzido pelo coeficiente de retenção da rigidez ao corte, β_n, da forma apresentada na figura 4.20 (Cedolin e Dei Poli, 1977; Figueiras, 1983) e expressa por:

$$\beta_n = \rho \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{cv}}\right) \quad ; \quad \epsilon_n < \epsilon_{cv} \qquad (4.72.a)$$

$$\beta_n = 0 \quad ; \quad \epsilon_n \geq \epsilon_{cv} \qquad (4.72.b)$$

onde ρ e ϵ_{cv} são parâmetros do material que assumem os valores indicados na figura 4.20.

O módulo de rigidez transversal para o betão fendilhado, G^c, é obtido a partir do módulo de elasticidade transversal, G, a partir da seguinte relação:

$$G^c = \beta_n \cdot G \qquad (4.73)$$

No caso de se verificar o fecho total da fenda, admite-se a existência de um contacto perfeito entre as respectivas superfícies de fractura, sendo reposto o módulo G inicial, definido para o betão não fendilhado.

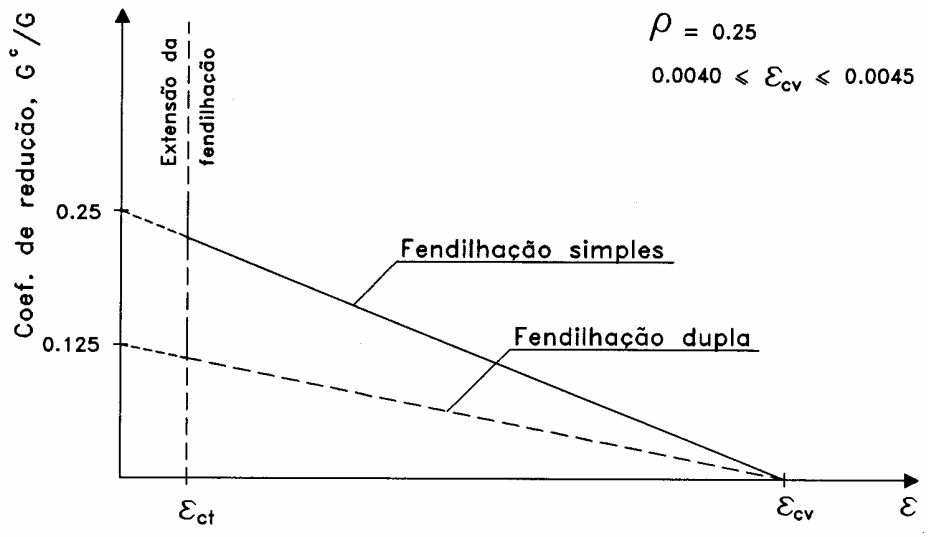


Fig. 4.20 - Coeficiente de retenção da rigidez ao corte no betão fendilhado.

4.4.3.2 - Formulação para os elementos de viga

Ao considerar como hipótese de base desprezáveis as tensões normais ao eixo neutro do elemento de viga ($\sigma_z = 0$), restringe-se o aparecimento de fendas a uma única direcção. Se t representar essa direcção (que é fixa durante o processo de carregamento), as relações tensões-deformações no referencial da fenda, traduzidas genericamente pela expressão (4.66), são expressas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & E_t & \cdot \\ \cdot & \cdot & G^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \tag{4.74}$$

onde E_t representa o módulo tangente no betão definido de acordo com as leis elasto-plásticas vistas anteriormente e G^c é determinado pela relação (4.73).

A transformação de eixos do referencial da fenda (n, t) para o referencial da estrutura (x, z), definida na expressão (4.67) pela matriz $\underline{T}$, é traduzida por:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \frac{1}{2}\cdot \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen}^2\alpha & -\frac{1}{2}\cdot \operatorname{sen} 2\alpha \\ -\operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

sendo α o ângulo que designa a orientação de fendilhação (figura 4.17).

Esta matriz permite relacionar as componentes de tensão σ_n, σ_t e τ_{nt} no referencial da fenda, com as componentes σ_x e τ_{xz} no referencial global.

Embora as relações (4.74) forneçam um valor nulo para σ_n, posteriormente é-lhe atribuído um valor positivo de acordo com o diagrama de retenção de tensões de tracção anteriormente apresentado.

A situação de fecho de uma fenda é traduzida pela reposição do módulo tangente definido de acordo com as leis elasto-plásticas, segundo a direcção normal ao plano da fenda.

4.4.3.3 - Formulação para os elementos planos

O modelo de fendilhação desenvolvido admite a formação de duas fendas mutuamente ortogonais, mantendo-se as respectivas direcções fixas ao longo do processo de carga.

As relações constitutivas adoptadas para o betão fendilhado no referencial da fenda (n, t) são expressas genericamente por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E^c_{nn} & \cdot & \cdot \\ \cdot & E^c_{tt} & \cdot \\ \cdot & \cdot & G^c_{nt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \qquad (4.76)$$

tomando os módulos de rigidez, E^c_{nn} , E^c_{tt} e G^c_{nt}, valores definidos de acordo com a configuração de fendilhação. Tendo em conta as configurações indicadas na figura 4.21 (Póvoas, 1991), tem-se:

- betão não fendilhado (configurações (b) e (f)):

$$E^c_{nn} = E^c_{tt} = E_t$$

$$G^c_{nt} = G \qquad (4.77.a)$$

- betão com a fenda inicial aberta (configurações (a) e (e)):

$$E^c_{nn} = 0 \quad , \quad E^c_{tt} = E_t$$

$$G^c_{nt} = G^c \qquad (4.77.b)$$

- betão com a segunda fenda aberta (configuração (d)):

$$E^c_{nn} = E_t \quad , \quad E^c_{tt} = 0$$

$$G^c_{nt} = G^c \qquad (4.77.c)$$

- betão com as duas fendas abertas (configuração (c)):

$$E^c_{nn} = E^c_{tt} = 0$$

$$G^c_{nt} = G^c/2 \qquad (4.77.d)$$

sendo E_t e G os módulos de rigidez definidos de acordo com as leis elasto-plásticas apresentadas anteriormente e G^c determinado pela expressão (4.73) (ver figura 4.20).

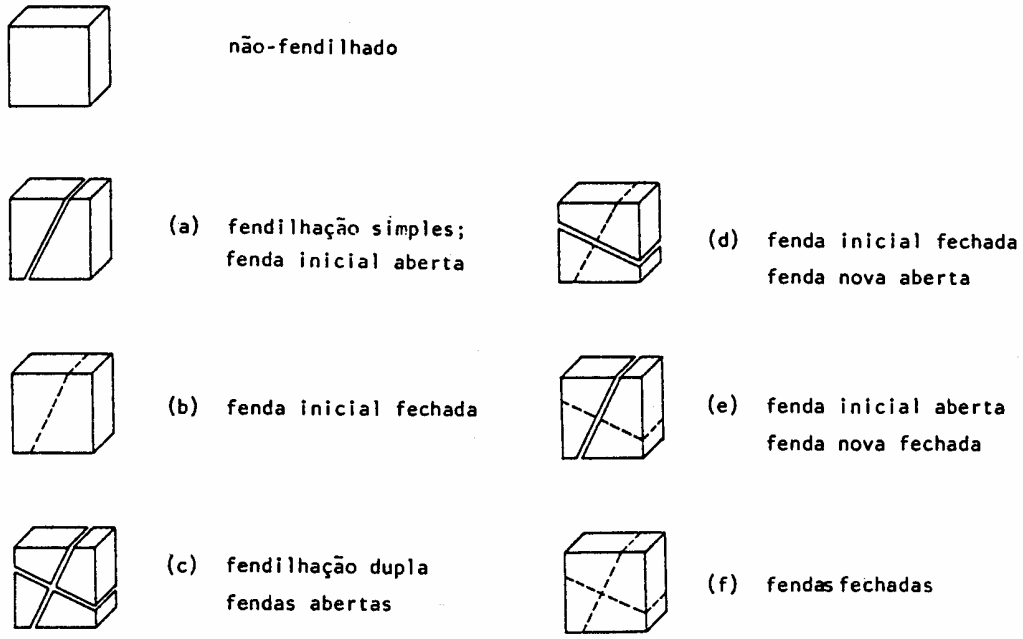


Fig. 4.21 - Configurações admitidas para a fendilhação.

A matriz de transformação $\underline{T}$, expressa em (4.67), é definida por:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha & \frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}2\alpha \\ \operatorname{sen}^2\alpha & \cos^2\alpha & -\frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}2\alpha \\ -\operatorname{sen}2\alpha & \operatorname{sen}2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \qquad (4.78)$$

onde α representa a orientação da fendilhação, de acordo com a figura 4.17.

A atribuição de um valor positivo para a tensão normal ao plano da fenda é realizada de acordo com o diagrama de retenção de tensões de tracção previamente definido.

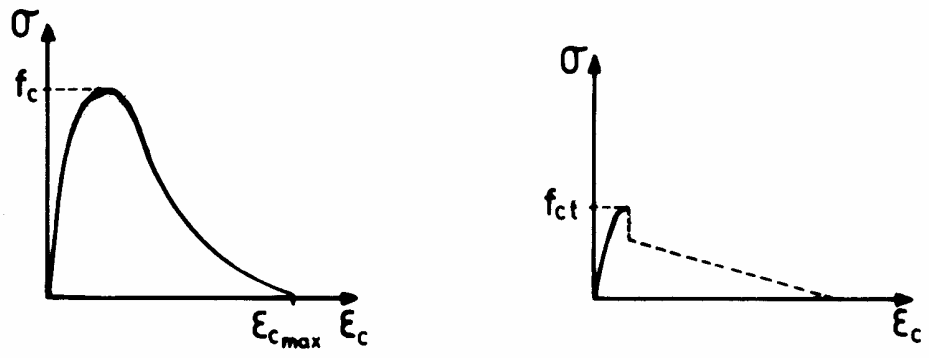
4.5 - COMPORTAMENTO DO BETÃO A UM ESTADO DE TENSÃO MULTIAXIAL

4.5.1 - Generalidades

Sob a acção de um estado de tensão multiaxial o comportamento do betão depende sobretudo da relação existente entre as componentes de tensão.

Nos casos em que as componentes normais de compressão são predominantes, observa-se uma diminuição gradual da resistência (traduzida pelo efeito designado por *softening*) logo que se atinge o seu valor máximo (Chappuis, 1987; Van Mier, 1984; Kang, 1977), como se pode ver na figura 4.22a. Nestas condições, a fractura do betão dá-se por esmagamento associado ao esgotamento da respectiva capacidade deformacional, sendo isso definido em termos computacionais pela imposição por uma extensão efectiva máxima, $\epsilon_{c\,max}$.

Nos casos em que há predominância das componentes normais de tracção, verifica-se uma queda brusca da resistência assim que o seu ponto máximo é atingido, permanecendo com um valor residual devido à interacção entre o aço e o betão no espaço entre as fendas (figura 4.22.b). Nestas circunstâncias, a fractura do betão dá-se por desagregamento das suas partículas originado pela ocorrência de fendilhação.



a) Betão comprimido b) Betão traccionado

Fig. 4.22 - Modelo de comportamento uniaxial do betão.

4.5.2 - Modos de rotura do betão em ensaios biaxiais

Ensaios experimentais realizados por Kupfer (1969) com provetes de betão permitiram observar o tipo de fendas que conduzem à fractura do material, para várias relações entre as componentes de tensão.

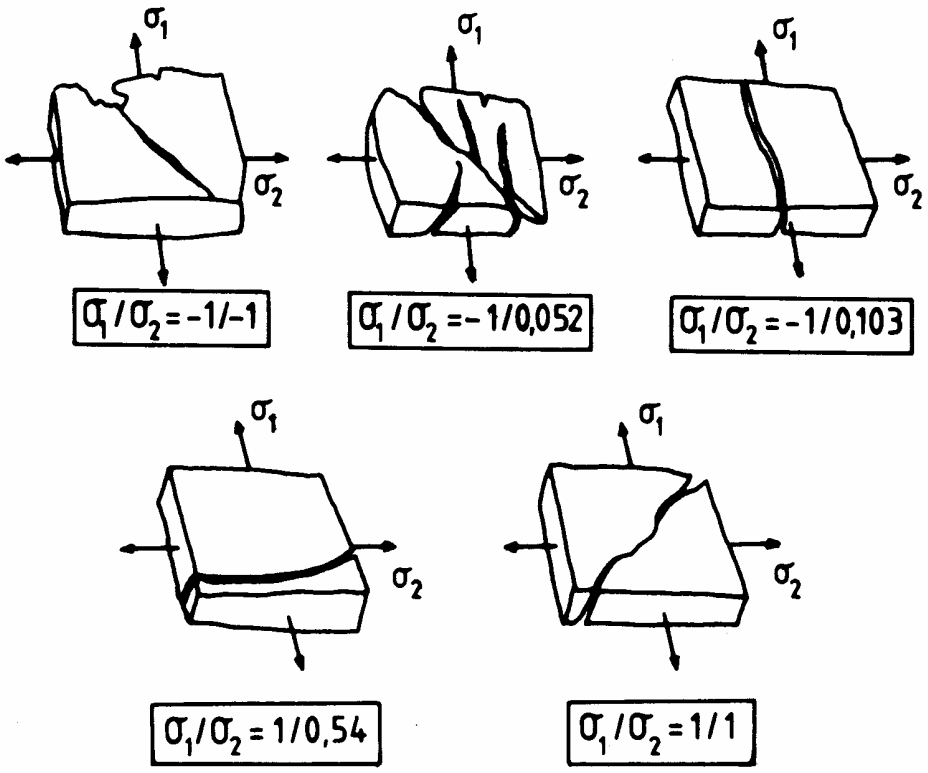


Fig. 4.23 - Modos de rotura em provetes sujeitos a tensões biaxiais.

Em testes realizados com provetes de betão sujeitos a uma compressão uniaxial, observou-se a formação de numerosas microfendas paralelas à direcção de aplicação da carga. O colapso foi acompanhado pela abertura de uma fenda predominante numa direcção que fazia cerca de 30 graus com a da carga aplicada (ver figura 4.23). Nos provetes sujeitos a uma compressão biaxial aparecem, identicamente, microfendas paralelas às faces livres, verificando-se na rotura uma fenda que se desenvolve numa direcção que faz um ângulo de 18 a 27 graus com essas faces. Nos casos em que há combinação de tracção e compressão, os provetes comportam-se de forma idêntica aos casos de carregamento em compressão biaxial desde que as componentes de tensões de tracção não sejam superiores a 1/15 das respectivas componentes de compressão. No entanto, para valores de tracção superiores, há uma fissuração perpendicular à tensão principal de tracção, verificando-se

um comportamento semelhante para provetes sujeitos a uma tracção biaxial. Se a tracção for igual em ambas as direcções principais, a fissuração não segue nenhuma direcção especial observando-se, contudo, que a fenda que conduzia à fractura era sempre perpendicular ao plano livre do provete.

4.5.3 - Estados de comportamento do betão

Como se viu no ponto anterior, o betão possui dois modos de rotura distintos: fractura por esmagamento e fractura por fendilhação; estando associados, respectivamente, a um comportamento do tipo compressão e a um comportamento do tipo tracção, em correspondência com o estado de tensão corrente.

De acordo com os resultados experimentais de Kupfer (1969) verifica-se que para uma relação de tensões principais $|\sigma_1/\sigma_2|$ inferior a 1/15 o comportamento do betão é do tipo de compressão, sendo do tipo de tracção para valores dessa relação superiores a 1/15.

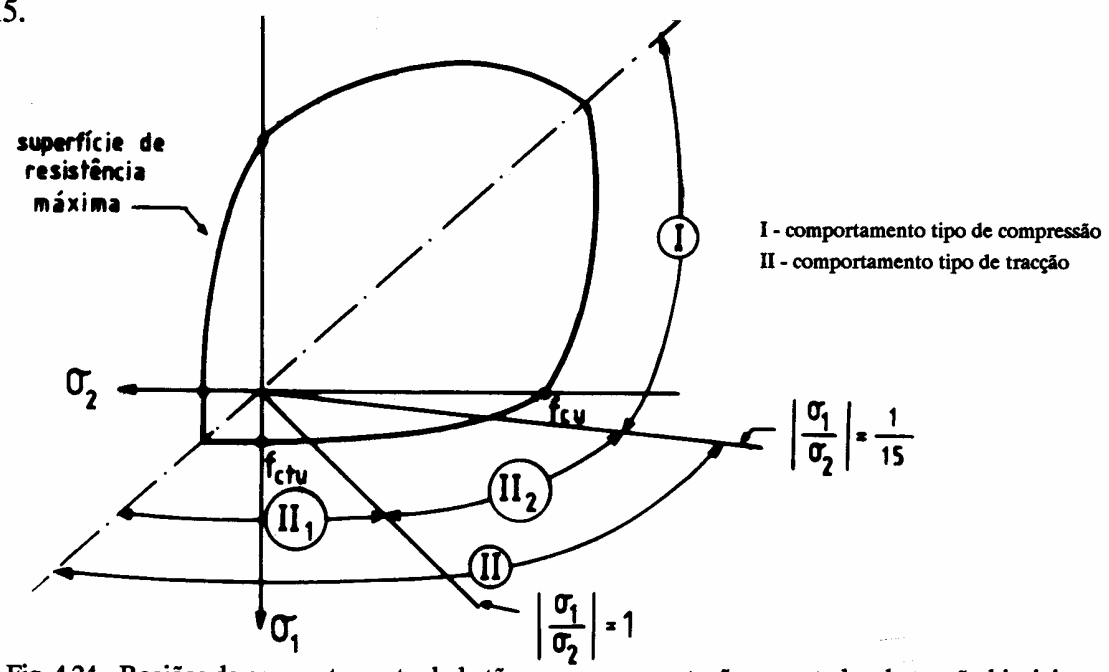


Fig. 4.24 - Regiões de comportamento do betão numa representação em estados de tensão biaxiais.

Na figura 4.24 representa-se a recta $|\sigma_1/\sigma_2| = 1/15$ que define as regiões de comportamento I e II, sendo a primeira relativa ao tipo de compressão e a segunda relativa ao tipo de tracção.

No presente modelo, o comportamento não linear do betão sujeito a um estado de tensão situado na região I é analisado de acordo com a curva, tensões efectivas - deformações efectivas, que inclui o efeito de *softening*, traduzida nas expressões (4.51) a

(4.55), com eventual rotura por esmagamento. Por sua vez, o comportamento não linear deste material para um estado de tensão situado na região II é caracterizado pelo aparecimento de fendilhação para valores de tensão efectiva superiores à tensão máxima, f_c, traduzida pelo modelo de fendilhação apresentado. O ramo ascendente da curva tensões efectivas - deformações efectivas é descrito pela relação (4.51.a), com os parâmetros definidos pelas expressões (4.56) e (4.57), para a região II_1. Nos casos situados em II_2, os parâmetros ϵ_{c1} e E_{ct} são obtidos por interpolação linear entre os correspondentes valores das curvas que caracterizam o betão comprimido e o betão traccionado (definidas na figura 4.8), sendo os valores da primeira curva definidos para $|\sigma_1/\sigma_2| = 1/15$ e os valores da segunda curva definidos para $|\sigma_1/\sigma_2| = 1$, obtendo-se:

$$\epsilon_{c1} = 0.0022 + \left(\left| \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right| - \frac{1}{15} \right) \cdot (0,00020 - 0,0022) \cdot \frac{15}{14} \qquad (4.79)$$

$$E_{ct} = E_c \cdot \left[1 + \left(\left| \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right| - \frac{1}{15} \right) \cdot \left(\frac{1}{K} - 1 \right) \cdot \frac{15}{14} \right] \qquad (4.80)$$

onde σ_1 e σ_2 são as tensões principais máxima e mínima, respectivamente, E_c é o módulo de elasticidade do betão e o parâmetro K encontra-se definido na expressão (4.25).

4.6 - COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO DAS ARMADURAS

4.6.1 - Generalidades

A consideração da contribuição da armadura para a análise do comportamento não linear da estrutura exige, para além da contribuição dos mecanismos de interacção já referidos, a definição das relações constitutivas através de um modelo elasto-plástico.

Em estruturas de betão armado pré-esforçado há dois tipos de aço a considerar e, consequentemente, dois tipos de diagramas tensão-deformação.

Na figura 4.25 representa-se um diagrama característico do aço macio, que se encontra na armadura ordinária, traccionado axialmente. O diagrama é linear até ao ponto *A*, designado correntemente por limite de proporcionalidade, aumentando as deformações para uma tensão quase constante até ao ponto *B* (patamar de cedência). Segue-se uma fase de endurecimento até ao ponto *C*, traduzindo-se os acréscimos de tensão em deformações elasto-plásticas. A zona decrescente do diagrama, até à rotura, deve-se ao facto de as tensões serem calculadas com a secção inicial e não ter em conta o fenómeno de estricção que se traduz na diminuição dessa secção.

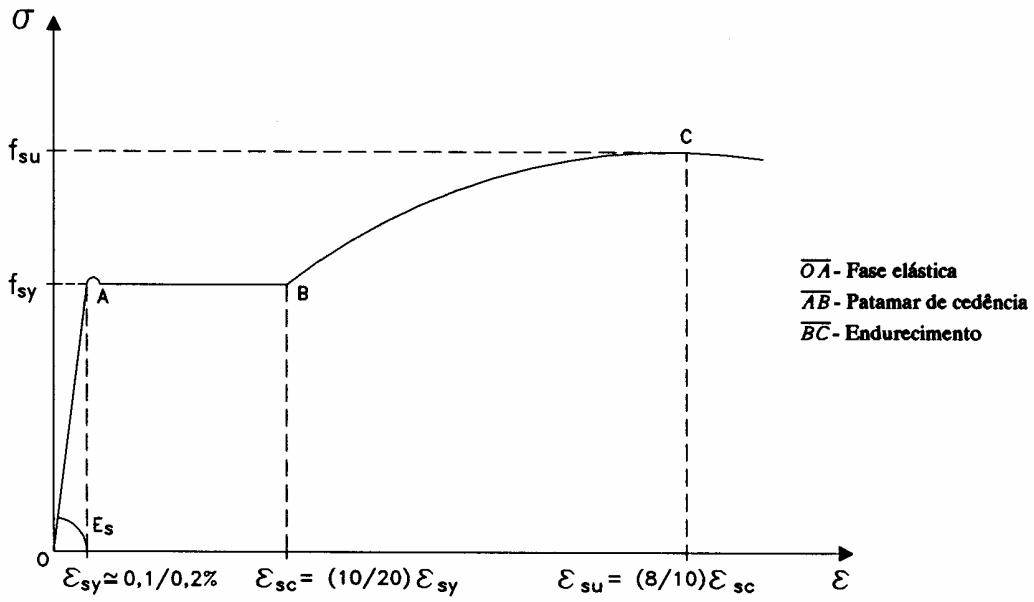


Fig. 4.25 - Diagrama tensão-deformação uniaxial do aço macio.

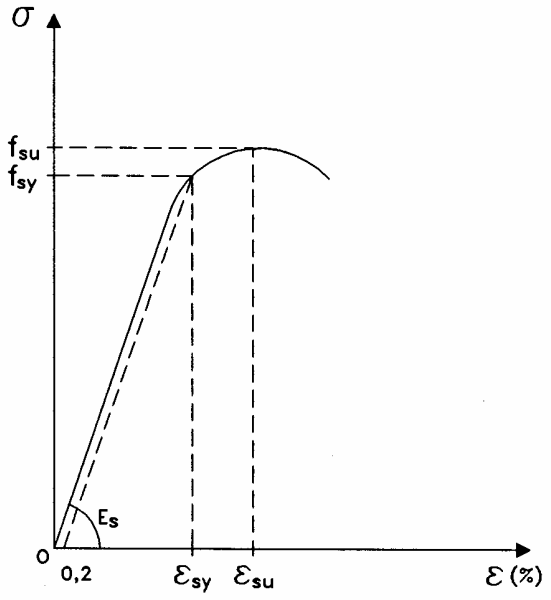


Fig. 4.26 - Diagrama tensão deformação uniaxial do aço duro.

Na figura 4.26 representa-se o diagrama característico dos aços duros das armaduras de pré-esforço traccionados axialmente, sendo caracterizado pela ausência de patamar de cedência e por uma redução acentuada da ductilidade. Não sendo nítido o início da plastificação, o limite de elasticidade é convencionalmente definido como a tensão à qual corresponde uma deformação residual de 0,2%.

Como se pode verificar nas figuras 4.25 e 4.26, as curvas aí representadas são totalmente caracterizadas pelos seguintes parâmetros: o módulo de elasticidade longitudinal, E_s; a tensão de cedência ou tensão limite convencional de proporcionalidade, f_{sy}; a extensão limite do patamar de cedência ou extensão de início do endurecimento, ϵ_{sc}; a tensão de rotura, f_{su}; e a extensão de rotura, ϵ_{su}. Geralmente, admite-se serem válidos os mesmos limites para a armadura sujeita à compressão.

4.6.2 - Relações constitutivas

A resposta unidimensional exibida pelo aço das armaduras ordinárias e de pré-esforço é idealizada de acordo com o diagrama trilinear ilustrado na figura 4.27.

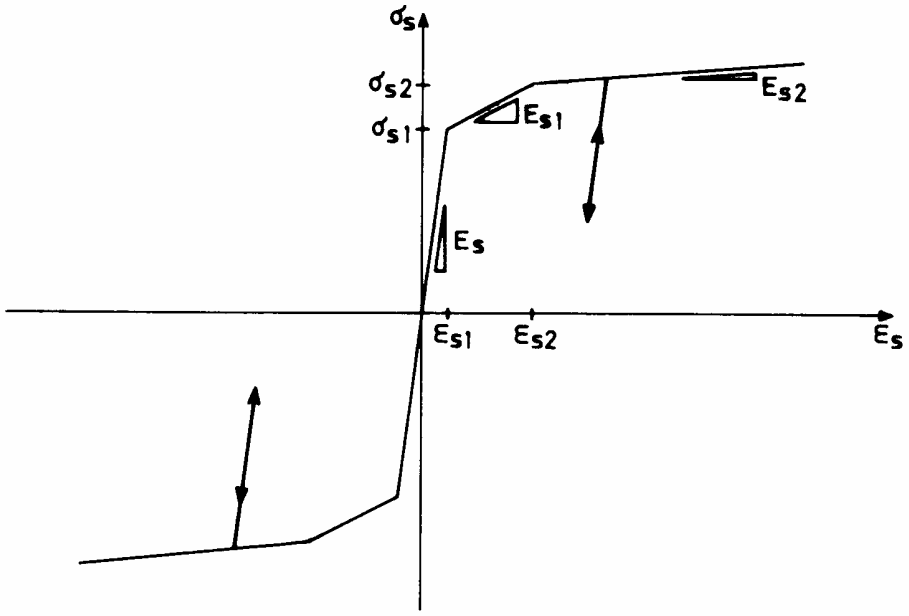


Fig. 4.27 - Diagrama tensões-deformações trilinear para o aço.

O comportamento elasto-plástico do aço é caracterizado por uma resposta inicial elástica definida por:

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \quad ; \quad \epsilon_s \leq \epsilon_{s_1} \qquad (4.81.a)$$

e por uma posterior fase elasto-plástica com endurecimento, definida pelas seguintes relações:

$$\sigma_s = E_{s_1} \cdot (\epsilon_s - \epsilon_{s_1}) + \sigma_{s_1} \quad ; \quad \epsilon_{s_1} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{s_2} \qquad (4.81.b)$$

e

$$\sigma_s = E_{s_2} \cdot (\epsilon_s - \epsilon_{s_2}) + \sigma_{s_2} \quad ; \quad \epsilon_s \geq \epsilon_{s_2} \tag{4.81.c}$$

onde

$$\epsilon_{s_1} = \frac{\sigma_{s_1}}{E_s} \tag{4.82}$$

e

$$\epsilon_{s_2} = \epsilon_{s_1} + (\sigma_{s_2} - \sigma_{s_1}) / E_{s_1} \tag{4.83}$$

sendo as restantes variáveis definidas de acordo com a figura 4.27.

Uma vez que as deformações plásticas do aço são irreversíveis, o descarregamento no aço é elástico, sendo por isso traduzido por:

$$\Delta\sigma_s = E_s \cdot \Delta\epsilon_s \tag{4.84}$$

4.7 - OBSERVAÇÕES FINAIS

No presente capítulo foi apresentada a formulação do modelo de comportamento não linear do betão estrutural, desenvolvido com o objectivo de aplicação ao método dos elementos finitos.

Especial destaque é aqui dado à formulação do critério proposto por Ottosen (1977) e adoptado também na proposta relativa ao novo Código Modelo do CEB (1990 e 1991), assim como a aplicação de leis elasto-plásticas a este critério.

A caracterização dos modos de fractura, em associação com o estado de tensão multiaxial no betão, é feita através da definição de estados de comportamento do material. A sua fendilhação é descrita e definida por um modelo que tem em conta a interacção armadura-betão envolvente.

O comportamento não linear do aço é traduzido por um diagrama unidimensional trilinear de tensões-deformações.

4.8 - BIBLIOGRAFIA

ASCE Committee on Concrete and Masonry Structures (1981), Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures - A State-of-the-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures.

Bazant, Z. P. e Kim, S. S. (1979) - Plastic-Fracturing Theory for Concrete - ASCE J. Engng. Mech. Div., Vol. 105 (3), p.p. 407-428.

Bresler, B. e Pister, K. S. (1958) - Strength of Concrete Under Combined Stressed - ACI Journal, Vol. 30(3), p.p. 321-343.

Cedolin, L. e Dei Poli, S. (1977) - Finite Element Studies of Shear - Critical RC Beams - ASCE J. Engng. Mech. Div., Vol 103(3), p.p. 395-410.

Chappuis, P. (1987) - Modélisation non-linéaire du comportement du béton sous des sollicitations dynamiques - Bericht Nr. 155, Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich.

Chen, W. F. (1982) - Plasticity in Reinforced Concrete - McGraw-Hill, New York.

Comité Euro-International du Béton (1983) - Concrete under Multiaxial States of Stress. Constitutive Equations for Practical Design - Bulletin d'Information N. 156.

Comité Euro-International du Béton (1990) - CEB-FIP Model Code 1990. First Draft - Bulletin d'Information N. 195 e 196.

Comité Euro-International du Béton (1991) - CEB-FIP Model Code 1990. Final Draft - Contribuition à la 28^{e} Session Plénière du CEB, Bulletin d'Information N. 203, 204 e 205.

Figueiras, J. A. (1983) - Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells - Ph. D. Thesis, C/Ph/72/83, Univ. College of Swansea.

Floegl, H. e Mang, H. A. (1982) - Tension Stiffening Concept based on Bond Slips - ASCE J. Struct. Div., Vol 108(12), p.p. 2681-2701.

Gilbert, R. I. e Warner, R. F. (1978) - Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs - ASCE J. Struct. Div., Vol. 104(2), p.p. 1885-1900.

Gerstle, K. H. (1981) - Simple Formulation of Biaxial Concrete Behavior - ACI Journal, Vol. 78(5), p.p. 62-68.

Gerstle, K. H. *et al.* (1980) - Behaviour of Concrete Under Multiaxial Stress States - ASCE J. Engng. Div., Vol 106(6), p.p. 1383-1403.

Henriques, A. A. R. e Figueiras, J. A. (1990) - Análise e Dimensionamento de Vigas Pré-Esforçadas de Betão - 2^{a}s Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, Lisboa, p.p. A.481-A.492.

Kang, Y. J. (1977) - Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames - Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, California.

Kotsovos, M. D. e Newman, J. B. (1978) - Generalized Stress-Strain Relations for Concrete - ASCE J. Engng. Mech. Div., Vol. 104(4), p.p. 845-856.

Kupfer, H. B. e Gerstle, K. H. (1973) - Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses - ASCE J. Engng. Div., Vol. 99(4), p.p. 853-866.

Kupfer, H. B.; Hilsdorf, H. K. e Rusch, H. (1969) - Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses - ACI Journal, Vol. 66(8), p.p. 656-666.

Leonhardt, F. (1979) - Construções de Concreto - Vol. 4, Editora Interciência, Rio de Janeiro, Brasil.

Liu, T. C. Y.; Nilson, A. H. e Slate, F. O. (1972) - Biaxial Stress-Strain Relation for Concrete - ASCE J. Struct. Div., Vol. 98(5), p.p. 1025-1034.

McHenry, D. e Karni, J. (1958) - Strength of Concrete Under Combined Tensile and Compressive Stress, ACI Journal, Vol. 29(10), p.p. 829-839.

Mills, L. L. e Zimmerman, R. M. (1970) - Compressive Strength of Plain Concrete Under Multiaxial Loading Conditions - ACI Journal, Vol. 67(10), p.p. 802-807.

Ottosen, N. S. (1977) - A Failure Criterion for Concrete - ASCE J. Engng. Mech. Div., Vol. 103(4), p.p. 527-535.

Ottosen, N. S. (1982) - 2-D Finite Element Analysis of Massive RC Structures - ASCE J. Struct. Div., Vol. 108(8), p.p. 1874-1893.

Owen, D. R. J. e Hinton, E. (1980) - Finite Elements in Plasticity; Theory and Practice - Pineridge Press, Swansea, U.K..

Póvoas, R. H. C. F. (1991) - Modelos Não Lineares de Análise e Dimensionamento de Estruturas Laminares de Betão Incluíndo os Efeitos Diferidos - Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Póvoas, R. H. C. F. e Figueiras, J.A. (1987) - Nonlinear Modelling of Plane RC Structures - International Conference on Computational Plasticity - Models, Software and Applications, Barcelona.

Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (1983), Decreto Lei nº 349-C/83, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa.

Van Mier, J. G. M. (1984) - Strain-Softening of Concrete Under Multiaxial Loading Conditions - Ter Verkrijging van de Graad van Doctor in de Technische Wetenschappen aan de Technische Hogeschool Eindhoven.

Wastiels, J. (1981) - Failure Criteria for Concrete Subjected to Multiaxial Stresses - Lecture held at Univ. of Illinois at Chicago Circle, Dept. of Material Engineering.

Capítulo 5

PROGRAMA DE ANÁLISE NÃO LINEAR

5.1 - INTRODUÇÃO

Como foi referido, o objectivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um programa de cálculo automático de análise de estruturas de betão armado pré-esforçado com verificação aos estados limites regulamentares.

O estudo do traçado da resposta da estrutura até ao colapso é realizado através de um modelo de discretização estrutural que tem em conta o comportamento não linear material, descrito nos Capítulos 2 e 4. Sendo o problema não linear expresso, em geral, por um conjunto discreto de equações algébricas não lineares, a adopção deste tipo de modelos requer a utilização de algoritmos de solução não linear eficientes e fiáveis.

Partindo de programas de elementos finitos já existentes (Hinton e Owen, 1977 e 1984; Owen e Hinton, 1980; Figueiras, 1983), foi desenvolvido um programa de cálculo automático que permite analisar vigas de betão armado pré-esforçado sujeitas a um carregamento quase estático e de curta duração. Sendo as zonas das vigas com comportamento típico de peça linear discretizadas por elementos de viga, o presente programa permite ainda uma discretização por elementos planos em zonas que se afastam desse tipo de comportamento.

Tendo sido inicialmente desenvolvido um programa de análise não linear com discretização por elementos de viga isoparamétricos de três nós de Timoshenko, foi posteriormente introduzido o modelo de comportamento não linear do betão, descrito no Capítulo 4, noutro programa de análise não linear de estados planos de betão (Póvoas, 1991) com discretização por elementos isoparamétricos de oito nós da família de Serendipity. Finalmente, foi criado o presente programa que faz a ligação entre os dois tipos de discretização. A sua estruturação e o seu modo de funcionamento é descrito no presente capítulo.

A resolução de problemas não lineares é feita com recurso a um processo incremental e iterativo de forma a reduzir sucessivamente as forças residuais devidas à linearização do processo incremental (Bergan e Soreide, 1973; Zienckiewicz, 1977).

Neste capítulo é descrito o funcionamento típico dos algoritmos de solução dos problemas não lineares, apresentando-se o método de Newton-Raphson como um algoritmo bastante eficiente. Apresentam-se também os critérios de convergência que lhe estão associados.

É ainda dado destaque à forma como a associação dos dois tipos de discretização é realizada e tratada pelo programa.

A apresentação de testes numéricos assim como a análise de duas vigas de betão pré-esforçado, testadas experimentalmente por Lin (1955) e com resultados numéricos fornecidos por Kang (1977), permitem avaliar a fiabilidade e a eficiência do presente modelo computacional.

5.2 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO - PCBEAM

5.2.1 - Generalidades

O programa PCBEAM foi desenvolvido com o objectivo de analisar vigas de betão armado pré-esforçado sujeitas a um carregamento quase estático e de curta duração, tendo em conta o comportamento não linear dos materiais constituintes. A utilização de elementos de viga isoparamétricos de três nós de Timoshenko e de elementos isoparamétricos de oito nós da família de Serendipity permite uma discretização que traduz, com uma boa aproximação e economia, o comportamento mecânico estrutural.

Funcionando como uma ligação entre dois programas, um de análise não linear com discretização por elementos unidimensionais de viga e outro com discretização por elementos planos, o presente programa permite definir as várias regiões de discretização (ver figura 2.19) por blocos de elementos de determinada natureza, fazendo depois a associação entre eles de acordo com a modelação da zona de transição apresentada na secção 2.4 e funcionando da maneira que se descreve na secção 5.4.

Nesta secção faz-se uma descrição sumária dos principais módulos do programa, de acordo com a ordem de execução apresentada no fluxograma da figura 5.1.

5.2.2 - Descrição dos módulos principais do programa

- *PROGRAMA PCBEAM*

O presente programa é composto por um segmento principal que faz a chamada sequencial das subrotinas que realizam os cálculos necessários à análise da estrutura em estudo.

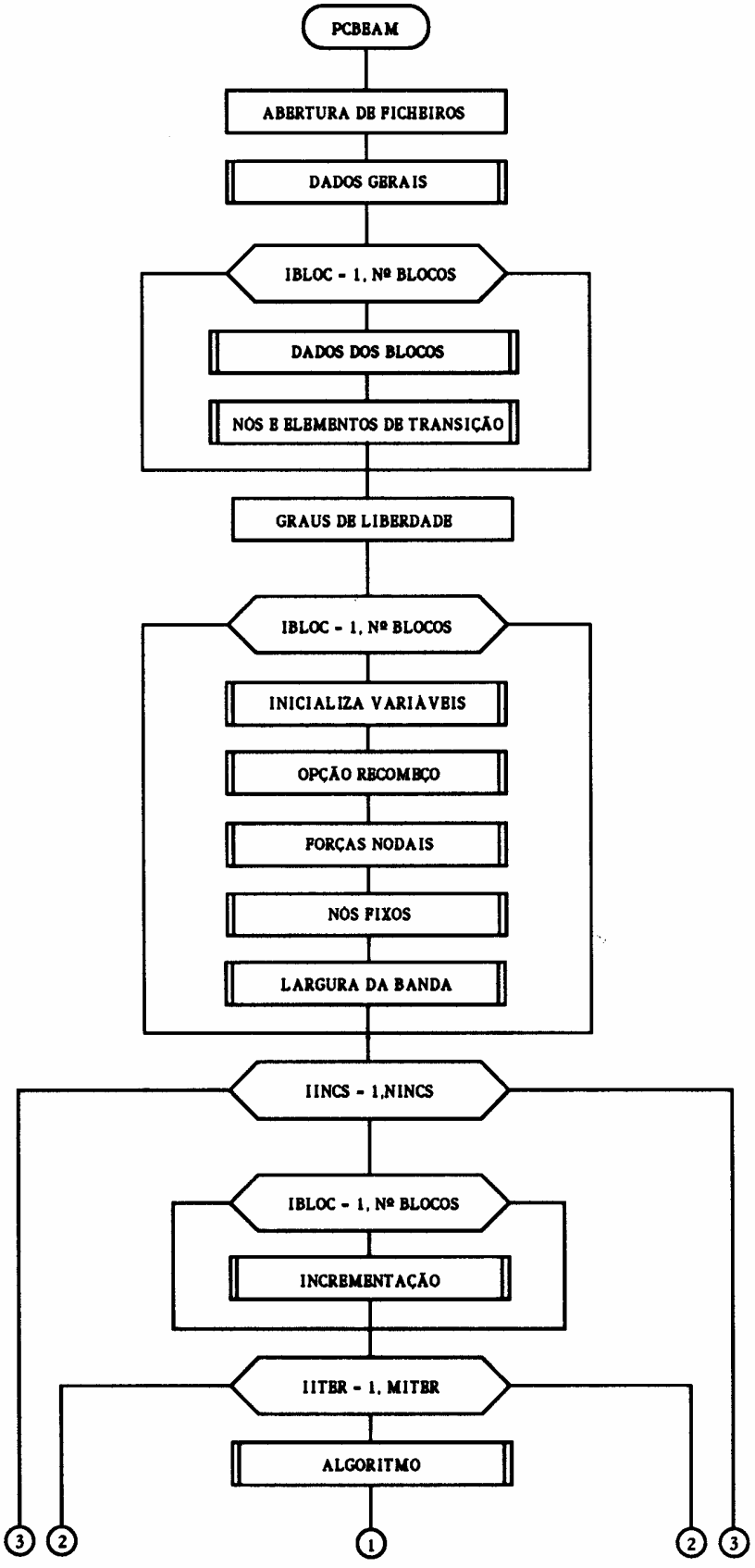


Fig. 5.1 - Fluxograma do programa PCBEAM.

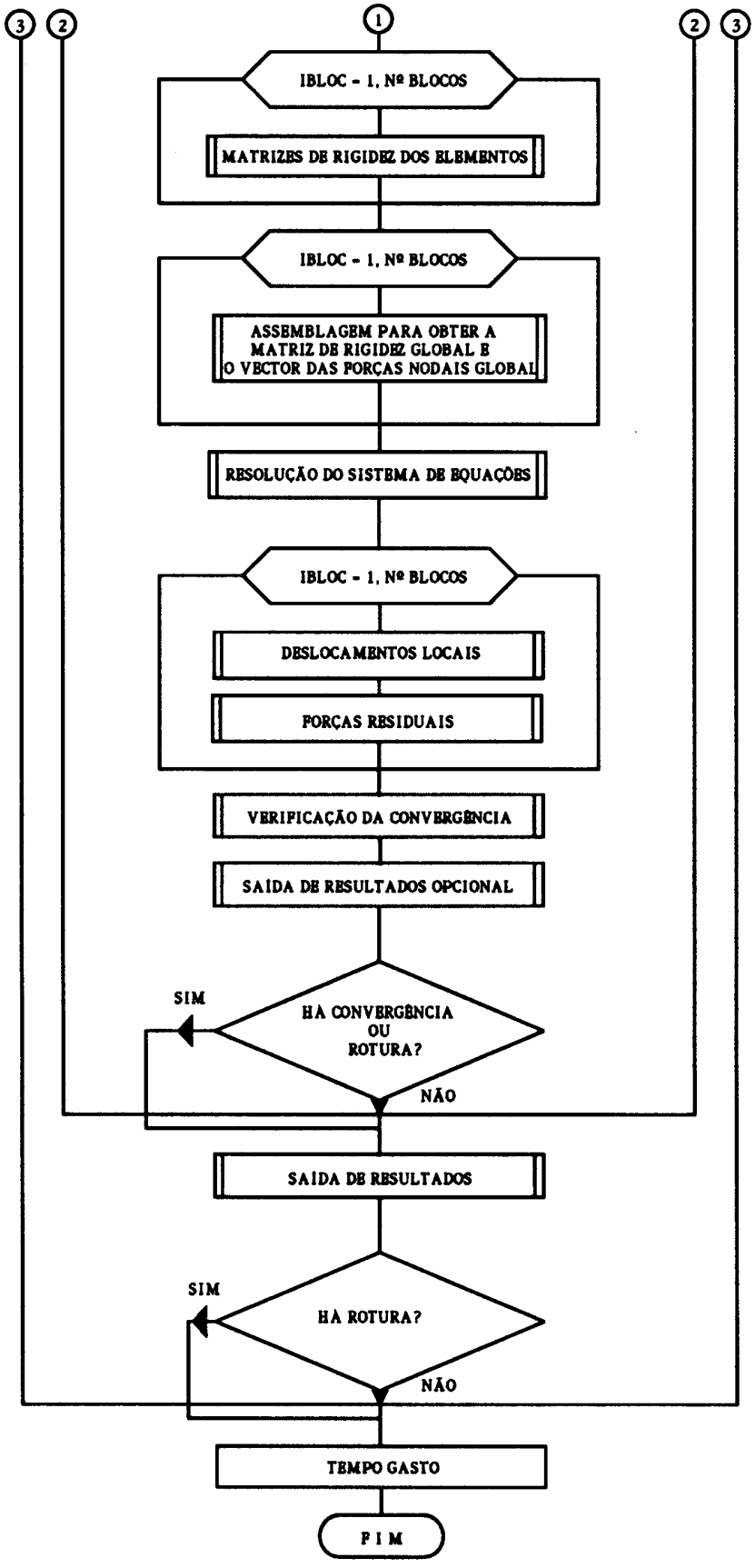


Fig. 5.1 - Fluxograma do programa PCBEAM (continuação).

· *ABERTURA DE FICHEIROS*

A execução do presente programa inicia-se com a abertura de ficheiros. Agrupando-se em quatro grupos, definem-se: os ficheiros de dados que caracterizam o problema em estudo, os ficheiros de resultados em termos de deslocamentos, reacções, tensões e esforços, ficheiros para saídas gráficas e ficheiros de recomeço, que guardam as variáveis do procedimento incremental-iterativo necessárias a reiniciar todo o processo caso seja interrompido.

· *DADOS GERAIS*

Define as regiões de discretização através de blocos de elementos da mesma natureza, identificando ainda as zonas de transição entre esses blocos.

· *DADOS DOS BLOCOS*

Este módulo destina-se à leitura das variáveis de controle que definem a dimensão do problema em questão, seguindo-se a leitura dos dados referentes à geometria do bloco, condições de fronteira e características dos materiais. Complementarmente é testada a validade de alguns destes dados, gravando mensagens de erro e interrompendo a execução do programa caso haja detecção de erros.

É ainda neste módulo que se estabelece a localização e o correspondente factor de peso dos pontos de Gauss utilizados no processo de integração numérica.

· *NÓS E ELEMENTOS DE TRANSIÇÃO*

Para cada bloco de elementos planos são localizados e identificados os nós e os elementos contidos nas zonas de transição.

· *GRAUS DE LIBERDADE*

É calculado o número de graus de liberdade associados aos nós de todos os blocos em que a estrutura foi discretizada e aos nós independentes, de forma a dimensionar as variáveis da estrutura global, nomeadamente, a matriz de rigidez, o vector das forças nodais e o vector dos deslocamentos nodais globais.

· *INICIALIZA VARIÁVEIS*

Inicializa as variáveis contidas no processo incremental-iterativo, igualando-as a zero.

· *OPÇÃO RECOMEÇO*

Caso se pretenda reiniciar o processo incremental-iterativo, anteriormente interrompido, são atribuídos (às variáveis intervenientes neste processo) os valores correspondentes ao último incremento convergido.

· *FORÇAS NODAIS*

Este módulo efectua a leitura das acções actuantes na estrutura e determina, para cada elemento do bloco, o vector das forças nodais equivalentes ao tipo de carregamento considerado. São previstas acções concentradas nos nós, acções distribuídas ao longo dos eixos dos elementos e acções de pré-esforço, no caso de elementos de viga e, acções concentradas nos nós, acções distribuídas nos lados dos elementos, acção de gravidade e acções de pré-esforço, no caso de elementos planos.

· *NÓS FIXOS*

Identifica os graus de liberdade dos nós independentes da estrutura global que estão restringidos, a partir das variáveis que definem as condições de apoio em cada um dos blocos.

· *LARGURA DA BANDA*

Calcula a largura da semi-banda correspondente à técnica utilizada na resolução do sistema de equações em banda.

Na fase que se segue inicia-se o ciclo dos incrementos activando, assim, o processo incremental-iterativo de resolução de problemas não lineares.

· *INCREMENTAÇÃO*

É neste módulo que se procede ao incremento do vector de solicitação através da incrementação das acções exteriores aplicadas em acumulação com as forças residuais provenientes do incremento anterior. É ainda aqui que se define a tolerância do critério de convergência, o número máximo de iterações e o tipo de resultados a imprimir.

Concluído o módulo de incrementação, o programa principal determina o início do ciclo relativo às iterações.

· *ALGORITMO*

É aqui que se estabelece o algoritmo de solução a utilizar, identificando em quais iterações se deve actualizar a matriz de rigidez.

· *MATRIZES DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS*

Este módulo é activado se o algoritmo de solução indicar a actualização da matriz de rigidez. Em caso afirmativo, as matrizes de rigidez de cada elemento em cada bloco são determinadas tendo em conta a contribuição dos materiais constituintes (betão, armadura passiva e de pré-esforço) e o seu comportamento não-linear.

· *ASSEMBLAGEM PARA OBTER A MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E O VECTOR DAS FORÇAS NODAIS GLOBAIS*

As grandezas globais da matriz de rigidez e do vector das forças nodais são obtidas por assemblagem das respectivas grandezas locais, tendo em conta a modelação das zonas de transição e o conhecimento dos elementos e nós contidos nessas zonas.

· *RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES*

Baseado na técnica de resolução em banda, a determinação dos acréscimos de deslocamentos nodais é feita a partir do sistema de equações $\underline{K} \cdot \Delta \underline{a} = \underline{r}$.

· *DESLOCAMENTOS NODAIS*

Os acréscimos de deslocamentos nos nós independentes, obtidos no módulo anterior, são identificados com todos os nós que compõem os elementos de cada bloco.

- *FORÇAS RESIDUAIS*

O campo de deslocamentos, entretanto obtido, gera um campo de tensões, definido para cada elemento de acordo com as relações constitutivas adoptadas para os materiais constituintes, aqui determinado. São também calculadas as forças nodais estaticamente equivalentes a esse campo de tensões. É ainda neste módulo que se estabelece a condição de esmagamento para o betão e se avalia a evolução da rigidez da estrutura.

- *VERIFICAÇÃO DA CONVERGÊNCIA*

Verifica a convergência da solução não linear de acordo com o critério de forças, fornecendo também os resultados obtidos pelos critérios energético e de deslocamentos. Determina ainda os valores das forças nodais não equilibradas (forças residuais) na iteração corrente.

- *SAÍDA DE RESULTADOS OPCIONAL*

Este módulo é activado sempre que se pretenda obter resultados da primeira iteração não convergida. São fornecidos os valores relativos aos deslocamentos nodais, reacções nos apoios, tensões nos pontos de Gauss e os esforços nos mesmos pontos.

- *SAÍDA DE RESULTADOS*

Se for satisfeita a condição de convergência ou ocorrer a rotura da estrutura (esmagamento do betão num ponto qualquer), o programa principal determina o fim do ciclo iterativo e fornece os resultados descritos no módulo anterior, assim como, grava os resultados para os ficheiros de saídas gráficas. Só quando ocorre convergência, os valores das variáveis intervenientes no processo incremental-iterativo são gravados nos ficheiros de recomeço.

- *TEMPO GASTO*

Se ocorrer a rotura da estrutura, ou terminar o ciclo de incrementos, ou for atingido o número máximo de iterações num incremento, termina a execução do programa, fornecendo previamente um conjunto de informações relativas ao tempo de execução, tempo de C.P.U., blocos de INPUT/OUTPUT e paginação.

5.3 - TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES

5.3.1 - Generalidades

A resolução das equações regentes do equilíbrio de uma estrutura (de acordo com a formulação do método dos elementos finitos apresentada no Capítulo 2) para problemas não lineares exige a adopção de um algoritmo que permita determinar a evolução do campo de tensões e de deformações de forma a satisfazer as relações constitutivas definidas no Capítulo 4.

Em materiais, como o betão, caracterizados por um comportamento altamente não linear e bastante dependentes da história de carga, o algoritmo de solução a adoptar deve reproduzir a resposta da estrutura de forma muito aproximada da real, caso contrário, pode conduzir a danos artificiais.

Em geral, a análise não linear no método dos elementos finitos é realizada através de uma formulação incremental onde a convergência para a solução correcta é imposta pela execução de ciclos iterativos necessários. Em cada iteração considera-se uma resposta linearizada, sendo as equações de equilíbrio para cada ciclo iterativo determinadas de acordo com a solução correspondente a um problema linear. O método de Newton-Raphson, que a seguir se apresenta, é uma aproximação adequada dos problemas correntes de análise não linear de estruturas de betão.

Devido à sua importância, apresenta-se também o algoritmo de solução implementado para o tratamento da não linearidade material e ainda os critérios de convergência associados ao procedimento incremental e iterativo.

5.3.2 - Processos incrementais e iterativos

Na presente formulação, as equações de equilíbrio são expressas por:

$$\underline{K} \cdot \underline{a} = \underline{f} \tag{5.1}$$

onde $\underline{K}$ designa a matriz de rigidez global da estrutura, dependendo do nível de deslocamentos corrente, $\underline{a}$ representa o vector dos deslocamentos nodais (as incógnitas do problema) e, $\underline{f}$ designa o vector das forças nodais equivalentes às acções aplicadas.

Representando o vector $\underline{a}$ a configuração da estrutura em equilíbrio, gerada por forças internas $\underline{p}$ como resposta às forças externas $\underline{f}$, a equação de equilíbrio (5.1) pode ser então traduzida por uma relação do tipo:

$$\underline{p} = \underline{f} \tag{5.2}$$

sendo,

$$\underline{p} = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV \tag{5.3}$$

como foi considerado no Capítulo 2.

As relações que definem o problema não linear mostram a impossibilidade de uma solução directa para este tipo de análise. De facto, o estado de tensão depende não só da configuração corrente como também da história de tensões e deformações prévias. Assim, não sendo possível obter o valor actualizado da matriz de rigidez, a relação (5.1) vem:

$$\overline{\underline{K}} \cdot \underline{\overline{a}} = \underline{f} \tag{5.4}$$

onde $\overline{\underline{K}}$ é a matriz de rigidez definida para uma configuração da estrutura estimada para um vector de deslocamentos nodais arbitrário $\underline{\overline{a}}$.

Na determinação do vector das forças nodais, $\underline{\overline{p}}$, equivalentes ao estado de tensão interno, gerado pelo campo de deslocamentos definido por $\underline{\overline{a}}$, verifica-se que já não há equilíbrio com as forças exteriores:

$$\underline{f} - \underline{\overline{p}} \neq \underline{0} \tag{5.5}$$

A resolução das equações representadas em (5.2) pode ser aproximada através de um processo incremental e iterativo, onde a carga é aplicada em sucessivos incrementos e o equilíbrio, em cada incremento, é obtido pela realização de sucessivas iterações até serem satisfeitas as condições de equilíbrio e de compatibilidade.

As equações de equilíbrio, para a iteração k, vêm expressas pela relação:

$$\underline{r}_k(\underline{a}_k) = \underline{f}_k(\underline{a}_k) - \underline{p}_k(\underline{a}_k) \neq \underline{0} \tag{5.6}$$

sendo $\underline{r}_k$ o vector das forças residuais resultante das forças nodais não equilibradas, mantendo as restantes variáveis indicadas os significados já apresentados.

Considera-se que o equilíbrio é atingido quando o valor das forças residuais é suficientemente pequeno, ou seja:

$$\underline{r}(\underline{a}) \cong \underline{0} \tag{5.7}$$

Desenvolvendo o vector das forças residuais em série de Taylor e considerando apenas os dois primeiros termos, obtém-se:

$$\underline{r}_{k+1}(\underline{a}_k + \Delta\underline{a}_{k+1}) = \underline{r}_k(\underline{a}_k) + \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{a}}\right)_k \cdot \Delta\underline{a}_{k+1} \tag{5.8}$$

Considerando que esta expressão satisfaz a condição (5.7) e substituindo (5.6) em (5.8), resulta:

$$-\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{a}}\right)_k \cdot \Delta\underline{a}_{k+1} = \underline{f}_k(\underline{a}_k) - \underline{p}_k(\underline{a}_k) \tag{5.9}$$

Tendo em conta que $(\partial \underline{p} / \partial \underline{a})_k$ é tangente à curva $\underline{p}_k - \underline{a}_k$ e sabendo que $\Delta \underline{r} = -\Delta \underline{p}$, a expressão (5.9) pode escrever-se da seguinte maneira:

$$\underline{K}_{T,k}(\underline{a}_k) \cdot \Delta\underline{a}_k = \underline{f}_k(\underline{a}_k) - \underline{p}_k(\underline{a}_k) \tag{5.10}$$

onde $\underline{K}_{T,k}(\underline{a}_k)$ representa a matriz de rigidez tangente, habitualmente aproximada pela matriz simétrica que resulta da adopção das relações estabelecidas no Capítulo 2.

O método de Newton-Raphson consiste na aplicação do processo incremental e iterativo ao campo de deslocamentos corrigido pelos acréscimos de deslocamento, $\Delta\underline{a}_k$, definidos pela expressão (5.10), com o cálculo da matriz de rigidez em todas as iterações (figura 5.2).

Devido ao elevado tempo de computação que requer a actualização da matriz de rigidez em todas as iterações, é usual a utilização de versões modificadas deste método. Entre as referidas versões destacam-se aquelas em que o cálculo da matriz de rigidez é realizado apenas numa iteração em cada incremento (figuras 5.3 e 5.4), permitindo assim reduzir o tempo de computação por iteração, mas necessitando de um maior número de iterações para atingir a convergência. Desta forma consegue-se uma solução muitas vezes mais estável e com um custo menor, em termos de tempo.

Nas versões modificadas, sempre que se verifique uma alteração das características do material devida, essencialmente, à abertura ou fecho de fendas, descarregamentos elásticos e alteração do estado de comportamento, impõe-se a actualização da matriz de rigidez, evitando-se assim que a ocorrência de instabilidade numérica possa afectar a solução impedindo eventualmente a obtenção da convergência.

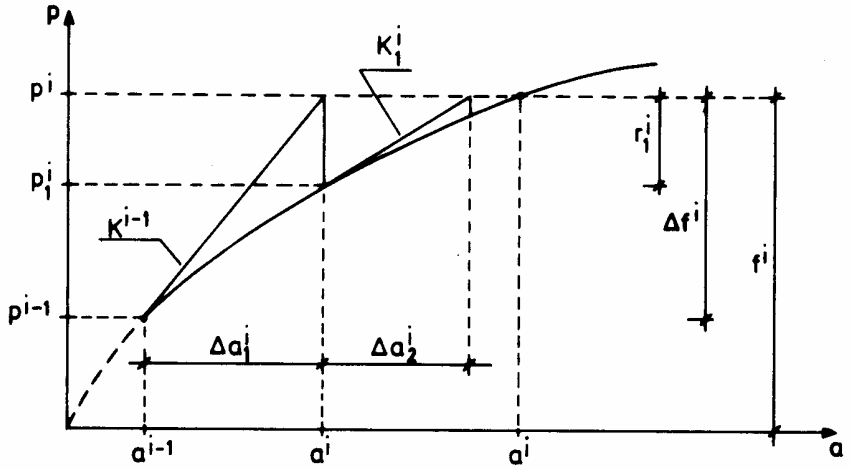


Fig. 5.2 - Processo incremental e iterativo na solução não linear de um problema unidimensional. Método de Newton-Raphson.

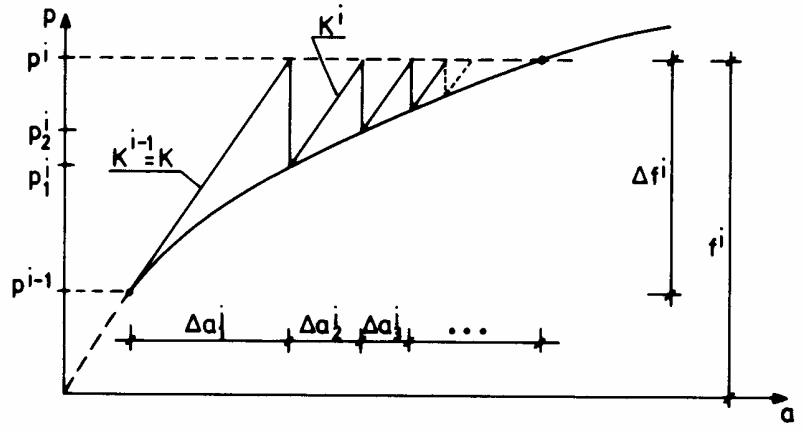


Fig. 5.3 - Método de Newton-Raphson modificado na primeira iteração.

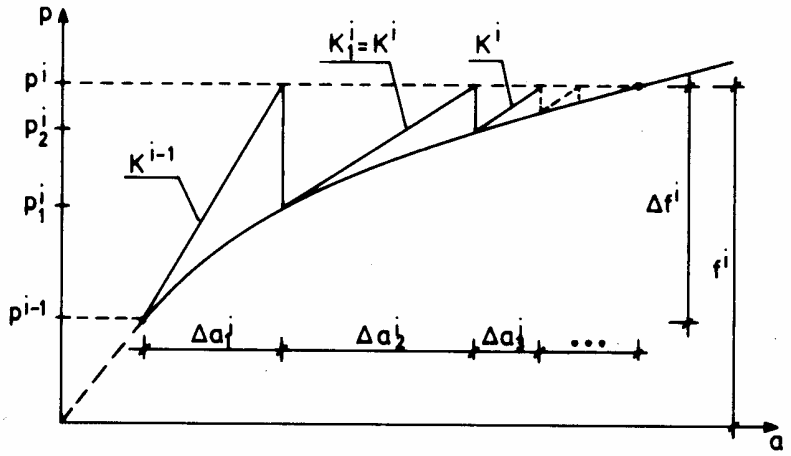


Fig. 5.4 - Método de Newton-Raphson modificado na segunda iteração.

5.3.3 - Algoritmo de solução do tratamento do material

O procedimento adoptado para o tratamento da não linearidade material, em associação com o método de Newton-Raphson, é ilustrado na figura 5.2 para o caso unidimensional.

No início do incremento genérico i é conhecida a solução para o incremento $i-1$, definida pelos vectores $\underline{f}^{i-1}$, $\underline{p}^{i-1}$ e $\underline{a}^{i-1}$, previamente calculados, e pela matriz de rigidez tangente $\underline{K}^{i-1}$, determinada pelas condições materiais associadas à solução obtida no incremento $i-1$.

Considerando o acréscimo da carga relativo ao incremento i, $\Delta \underline{f}^{i}$, o vector das forças nodais equivalentes ao carregamento aplicado vem definido por:

$$\underline{f}^{i} = \underline{f}^{i-1} + \Delta \underline{f}^{i} \tag{5.11}$$

A determinação da solução referente às equações de equilíbrio é realizada iterativamente, seguindo uma sequência definida para a iteração k da seguinte forma:

i) a matriz de rigidez, $\underline{K}$, é recalculada, ou não, de acordo com o algoritmo utilizado;

ii) os incrementos de deslocamentos, $\Delta \underline{a}_k$, são determinados pelo seguinte conjunto de equações lineares:

$$\Delta \underline{a}_k = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{f}_{k-1} \tag{5.12}$$

onde $\underline{f}_{k-1}$ representa as forças nodais não equilibradas nas iterações anteriores. O vector dos deslocamentos nodais totais, $\underline{a}_k$, é actualizado por:

$$\underline{a}_k = \underline{a}_{k-1} + \Delta \underline{a}_k \tag{5.13}$$

iii) os acréscimos de deformação, $\Delta \underline{\epsilon}_k$, e as deformações totais, $\underline{\epsilon}_k$, são então calculadas por:

$$\Delta \underline{\epsilon}_k = \underline{B} \cdot \Delta \underline{a}_k \tag{5.14}$$

e

$$\underline{\epsilon}_k = \underline{B} \cdot \underline{a}_k \tag{5.15}$$

onde $\underline{B}$ é a matriz de deformação.

iv) Como primeira aproximação são determinados os acréscimos elásticos de tensão, $\Delta\underline{\sigma}_k^e$, e adicionados ao vector das tensões, $\underline{\sigma}_{k-1}$, através das seguintes relações:

$$\Delta\underline{\sigma}_k^e = \underline{D}^e \cdot \Delta\underline{\epsilon}_k \tag{5.16}$$

e

$$\underline{\sigma}_k^e = \underline{\sigma}_{k-1} + \Delta\underline{\sigma}_k^e \tag{5.17}$$

onde $\underline{D}^e$ é a matriz de elasticidade, ou a correspondente matriz para as zonas de betão fendilhadas.

v) As tensões são corrigidas de acordo com as relações constitutivas dos materiais, definidas no Capítulo 4, utilizando um raciocínio idêntico ao ilustrado no diagrama apresentado na figura 5.5.

Refira-se que em comportamento elasto-plástico a parcela, R, da tensão que se encontra fora da superfície de cedência é corrigida usando processos usuais (Owen e Hinton, 1980) e dividindo a parcela R da tensão em vários intervalos (Marques, 1984).

vi) O vector das forças internas nodais equivalentes, $\underline{p}_k$, é calculado por integração numérica, de acordo com a expressão (5.3).

vii) O vector das forças residuais, $\underline{r}_k$, resultante das forças nodais não equilibradas, é dado por:

$$\underline{r}_k = \underline{f}_k - \underline{p}_k \tag{5.18}$$

viii) A convergência do processo é verificada, prosseguindo para o próximo incremento de carga caso a tolerância especificada para o critério de convergência seja satisfeita, ou volta a executar um novo ciclo iterativo caso essa tolerância não seja respeitada.

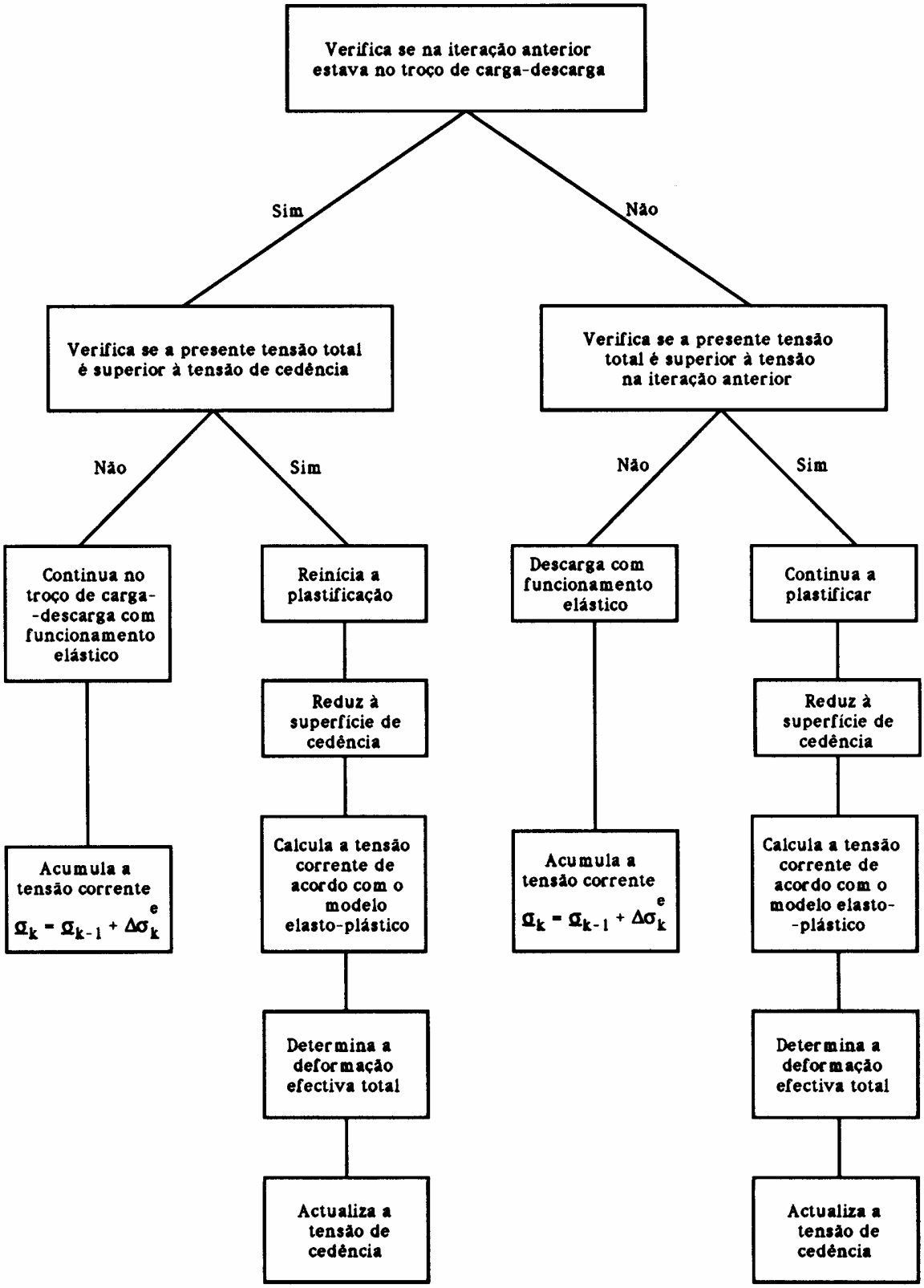


Fig. 5.5 - Determinação das tensões de acordo com as relações constitutivas dos materiais.

5.3.4 - Critérios de convergência

O processo iterativo, para um dado incremento, fica concluído logo que o equilíbrio seja garantido, a menos de uma tolerância previamente estabelecida. Assim, a solução obtida para uma iteração genérica é considerada pelo critério de convergência adoptado, sendo verificado o seu grau de aproximação.

Sempre que o ciclo iterativo se torne instável ou divergente, o processo é interrompido se for atingido o número máximo de iterações pré-estabelecido. O cálculo pode ser retomado para diferentes incrementos de carga através da opção de *recomeço* definida no presente programa. Além deste critério de paragem é definido um critério de colapso que interrompe a análise caso ocorra o esmagamento do betão num ponto qualquer da estrutura.

Os critérios de convergência são habitualmente formulados em função das forças e deslocamentos nodais, dividindo-se nos seguintes grupos: (i) critérios de convergência em termos de forças; (ii) critérios de convergência em termos de deslocamentos e (iii) critérios de convergência em termos energéticos.

Embora a formulação destes três critérios seja considerada no presente programa, a convergência da solução é determinada pelo critério de forças, sendo os outros dois usados como simples informação.

(i) Critério de convergência em termos de forças

Neste critério, a convergência no incremento genérico n é medida através da comparação entre a norma das forças residuais, $|\underline{r}_k^n|$, na iteração k e a norma das forças externas correntes, $|\underline{f}^n|$, pela seguinte relação:

$$\frac{|\underline{r}_k^n|}{|\underline{f}^n|} \leq t_f \qquad (5.19)$$

onde t_f designa a tolerância pré-estabelecida.

Uma vez que tolerâncias demasiado pequenas conduzem a um aumento do custo, em termos de tempo de computação, é essencial a utilização de valores que permitam a obtenção de soluções simultaneamente fiáveis e económicas. Nos casos estudados consideraram-se tolerâncias até 1%, sendo de salientar, contudo, que 2,5% é um valor aceitável para fins práticos.

(ii) Critério de convergência em termos de deslocamentos

O presente critério é definido em termos das normas dos deslocamentos obtidos nas sucessivas iterações, através da expressão:

$$\frac{\|\Delta \underline{a}_k^n\|}{\|\Delta \underline{a}_1^n\|} \leq t_d \tag{5.20}$$

onde $\Delta \underline{a}_k^n$ e $\Delta \underline{a}_1^n$ representam, respectivamente, os vectores dos acréscimos de deslocamentos relativos à iteração corrente, k, e à primeira iteração, e t_d define a tolerância pré-estabelecida.

A consideração dos acréscimos de deslocamentos relativos à primeira iteração em detrimento dos deslocamentos totais na iteração corrente, $\underline{a}_k^n$, tem como objectivo minorar os inconvenientes associados à análise de problemas com grandes deslocamentos.

No presente programa a expressão é decomposta em duas, estando cada uma delas associadas aos deslocamentos nodais e às rotações, respectivamente.

(iii) Critério de convergência em termos energéticos

O critério de convergência é formulado através da comparação entre o trabalho de deformação da estrutura produzido na iteração corrente pelas correspondentes forças residuais e o trabalho realizado na primeira iteração do incremento em questão:

$$\frac{(\underline{r}_{k-1}^n)^T \cdot \Delta \underline{a}_k^n}{(\underline{r}_o^n)^T \cdot \Delta \underline{a}_1^n} \leq t_e \tag{5.21}$$

onde t_e representa a presente tolerância.

Nos problemas estudados verificou-se que, geralmente, uma convergência adequada é atingida para valores de t_e cerca dez vezes inferior a t_f.

No critério das forças os problemas localizados de falta de convergência podem ter um efeito importante no processo iterativo, enquanto que nos outros dois critérios esse efeito pode ser atenuado desde que globalmente a estrutura se comporte satisfatoriamente. A inclusão de critérios de deslocamentos e energéticos no presente programa de análise não linear, com um papel simplesmente indicativo, permitem detectar a ocorrência destes fenómenos.

5.4 - ASSOCIAÇÃO DOS DOIS TIPOS DE DISCRETIZAÇÃO

O presente programa permite a utilização de dois tipos de discretização. Assim, enquanto que os elementos unidimensionais de viga permitem uma aproximação satisfatória à análise das zonas das vigas com um comportamento do tipo de peça linear, os elementos planos são mais adequados à discretização das restantes zonas.

A associação dos dois tipos de elementos é realizada através da imposição, na secção de transição, do campo de deslocamentos do elemento de viga, conforme foi descrito no Capítulo 2.

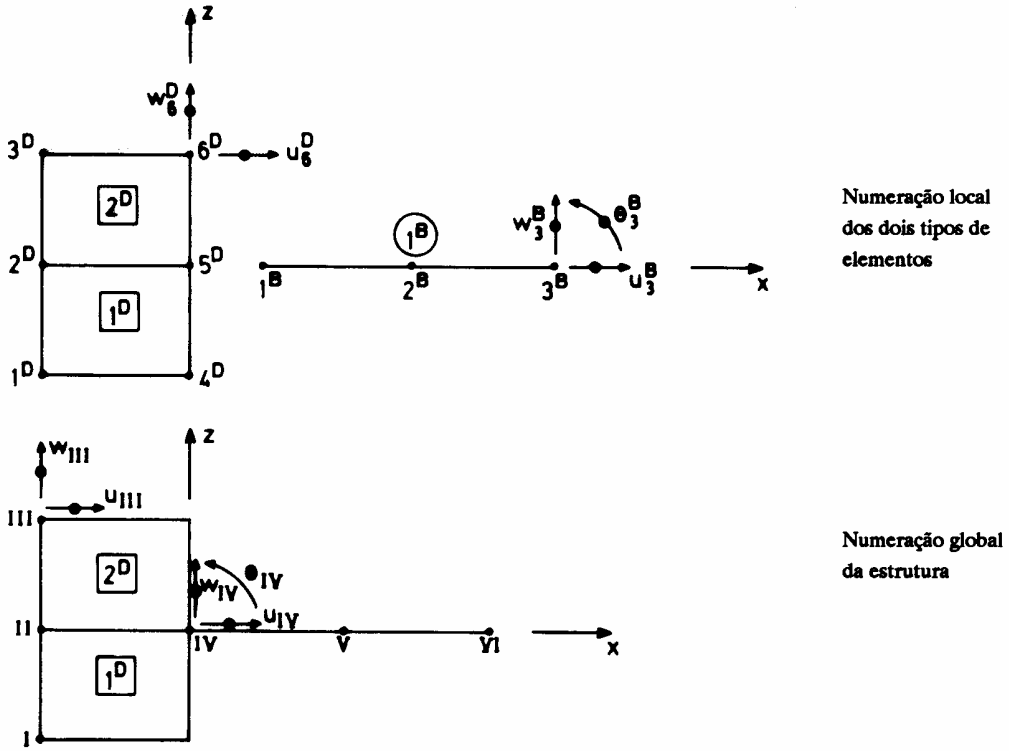


Fig .5.6 - Associação de dois elementos planos de 4 nós com um elemento de viga de 3 nós.

O procedimento a adoptar na resolução de problemas não lineares, através da associação das duas discretizações, pode ser facilmente explicado através dos elementos representados na figura 5.6.

i) Uma vez definida a numeração local dos dois tipos de elementos, 1^D a 6^D para os elementos planos e 1^B a 3^B para o elemento de viga, é necessário identificar os nós independentes (cujos graus de liberdade são as incógnitas do problema). Dado que as componentes de deslocamentos associadas aos nós 4^D, 5^D e 6^D são determinados em função das respectivas componentes de 1^B, então as

matrizes $\underline{T}$ que permitem estabelecer a compatibilização dos campos de deslocamentos, definidas na expressão (2.75), são caracterizadas para os elementos 1^D e 2^D, respectivamente, por:

$$\underline{T}^{1^D} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \underline{I} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \underline{T}_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \underline{T}_5 \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

e

$$\underline{T}^{2^D} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \underline{I} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \underline{T}_5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \underline{T}_6 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

onde $\underline{I}$ é a matriz identidade, com a dimensão 2x2, associada aos nós independentes 1^D, 2^D e 3^D (I, II e II no referencial global) e as submatrizes $\underline{T}_i$ são definidas para os nós dependentes 4^D, 5^D e 6^D, por:

$$\underline{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -z_i \\ \cdot & 1 & x_i \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

ii) Uma vez definida a matriz de rigidez e o vector das forças nodais dos elementos no referencial local, determina-se as respectivas grandezas transformadas de acordo com as expressões (2.81) e (2.82), com as matrizes $\underline{T}$ definidas no ponto anterior.

iii) Seguindo um processo corrente de assemblagem de matrizes e vectores, determina-se a matriz de rigidez global e o vector de forças nodais equivalentes (global) referidos aos nós independentes I, II, III, IV, V e VI.

iv) O vector dos deslocamentos (ou dos acréscimos de deslocamentos) dos nós independentes é determinado pela resolução do sistema de equações expresso pela relação (5.4).

v) Os deslocamentos dos nós dependentes são obtidos à custa das respectivas matrizes $\underline{T}$, de acordo com a expressão (2.76).

vi) Uma vez conhecidos os deslocamentos em todos os nós dos elementos, os correspondentes estados de deformação e de tensão são determinados por um algoritmo apropriado de análise não linear, como foi descrito na secção 5.3.3.

5.5 - TESTES NUMÉRICOS DE CARGA E DESCARGA

Em estruturas pré-esforçadas a consideração da alternância do carregamento assume um papel fundamental no estudo do seu comportamento. Assim, qualquer modelo de análise deste tipo de estruturas deve incluir um conjunto de procedimentos que tenha em conta este aspecto. Com o objectivo de testar a fiabilidade e a eficácia dos referidos procedimentos, procedeu-se a uma série de testes numéricos que, no essencial, consistem na aplicação de cargas alternadas em provetes de betão armado discretizados através de um único elemento finito de viga (figura 5.7). Sendo comum nas estruturas correntes a ocorrência deste tipo de comportamento devido, não só, à aplicação de carregamentos alternados, mas também devido à redistribuição de esforços de zonas mais solicitadas para zonas menos carregadas, os testes apresentados permitem reproduzir as diferentes situações de transição de estado susceptíveis de serem encontradas.

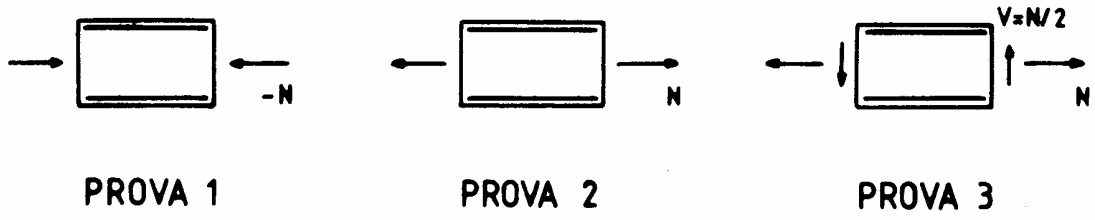
A ilustração dos procedimentos mencionados no parágrafo anterior é realizada a partir de três testes numéricos, caracterizados sumariamente da seguinte forma:

- **PROVA 1**: provete comprimido uniaxialmente, submetido a um ciclo de carga, descarga e recarga, com o objectivo de testar a eficiência do código computacional desenvolvido no tratamento de carregamentos elasto-plásticos, descargas elásticas em compressão e a definição de abertura e fecho de fendas, após a ocorrência de deformação plástica tanto em compressão, como em tracção.

- **PROVA 2**: provete sujeito a um ciclo completo de carga, descarga e recarga, funcionando da forma inversa ao teste anterior. Tendo um objectivo idêntico ao anterior, realça-se ainda a propriedade de *softening* exibida pelo modelo do betão. Desta forma, inverte-se a ordem pela qual os diferentes tipos de dano são introduzidos no material.

- **PROVA 3**: provete solicitado simultâneamente por uma força de tracção e outra de corte, sendo sujeito a um ciclo de carga, descarga, recarga, nova descarga e ainda nova recarga. Pretende-se com este teste avaliar a eficácia do tratamento do fecho parcial, total e da reabertura da fenda.

Os diagramas tensões-extensões (segundo a direcção normal ao plano da fenda) referentes aos testes efectuados encontram-se representados nas figuras 5.8, 5.9 e 5.10. As marcas aí indicadas identificam as soluções numéricas obtidas pelos incrementos de carga, na ordem que os números representados referem.



Betão :
- Módulo Young : E_c = 20 GPa
- Ten. rot. comp.: f_c = 10 MPa
- Ten. rot. trac.: f_{ct} = 1 MPa
- Área da secção : A_c = 0,25 x 0,50 cm^2

Aço :
- Módulo de Young : E_s = 200 GPa
- Tensão rotura : f_s = 100 MPa
(infinita para o 2º teste)
- Área da secção : A_s = 20 cm^2

Fig. 5.7 - Testes de carga e descarga em provetes de betão armado. Condições de carga.

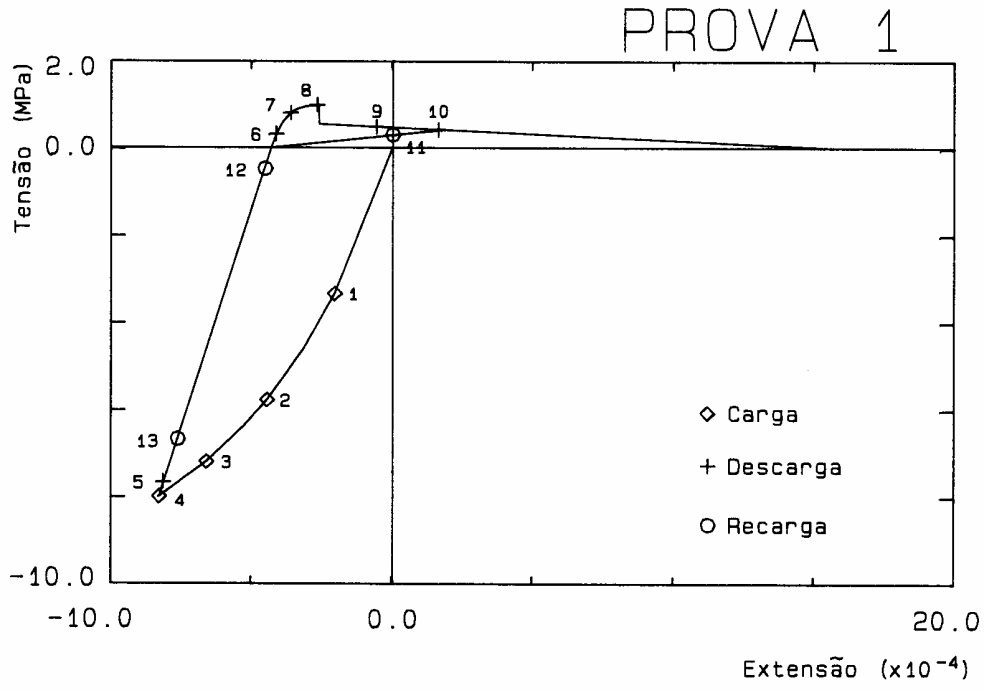


Fig. 5.8 - Diagrama tensão-extensão no betão na direcção normal ao plano da fenda. Sequência do teste: plastificação/abertura/fecho.

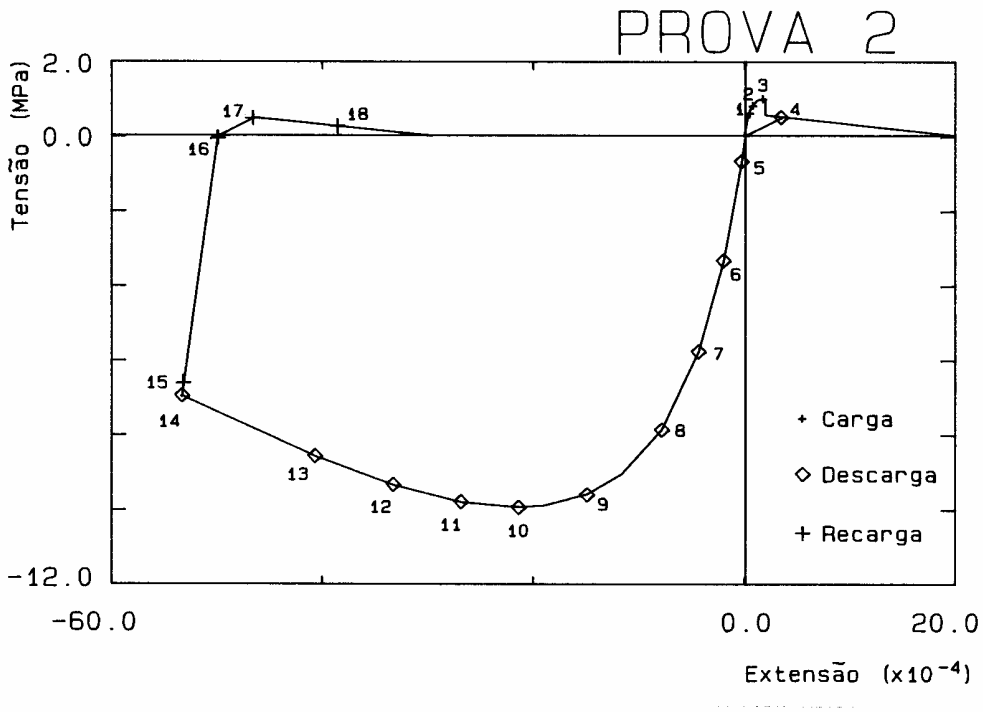


Fig. 5.9 - **Diagrama tensão-extensão no betão na direcção normal ao plano da fenda. Sequência do teste: plastificação/abertura/fecho/plastificação/abertura.**

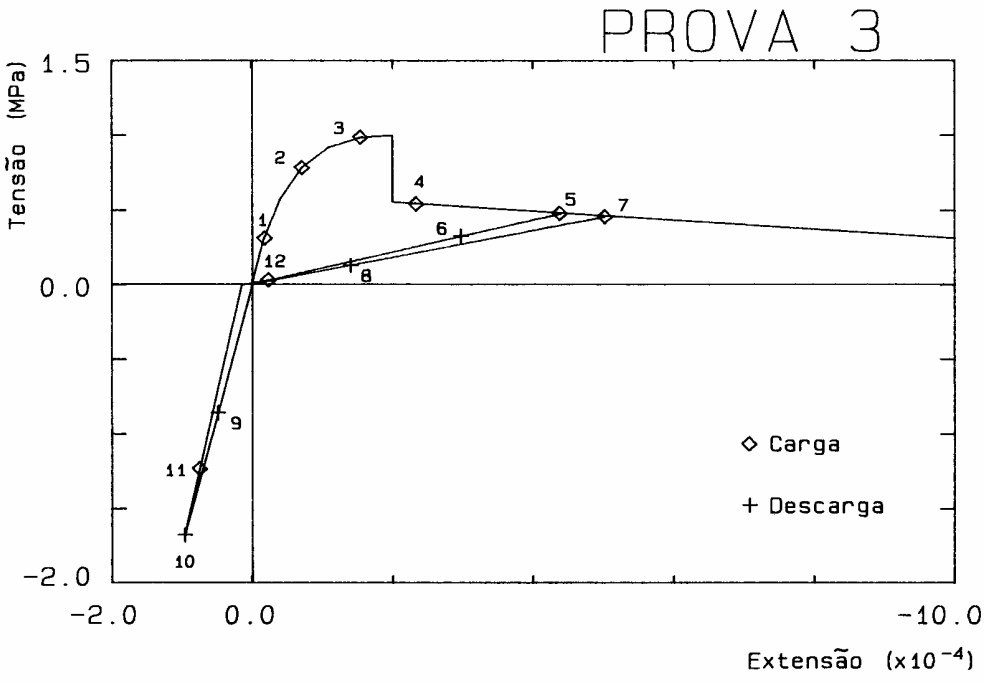


Fig. 5.10 - **Diagrama tensão-extensão no betão na direcção normal ao plano da fenda. Sequência do teste: plastificação/abertura/fecho/plastificação/abertura.**

A análise dessas figuras permite fazer algumas observações, das quais se destacam:

- comportamento não linear desde a origem, tanto em compressão como em tracção, originando deformações plásticas desde o início do carregamento.
- Uma vez atingida a resistência de pico do betão em compressão, verifica-se uma diminuição da resistência com o aumento da deformação (efeito de *softening*).
- A descarga e recarga do betão não fendilhado desenvolve-se segundo uma recta paralela à tangente ao diagrama na origem.
- A descarga e recarga do betão fendilhado processa-se segundo a recta que une o ponto representativo da máxima deformação até aí verificada com o ponto representativo de tensão nula (será a origem do sistema de eixos, caso não se tenham ainda verificado deformações plásticas devidas à compressão).

A total concordância verificada entre os diagramas teóricos (ver Capítulo 4), apresentados isoladamente para cada estado de comportamento, e os diagramas correspondentes às soluções numéricas dos testes efectuados, permite validar o código computacional desenvolvido para descrever os mecanismos de carga e descarga.

5.6 - EXEMPLO NUMÉRICO : VIGAS DE LIN

O exemplo de aplicação apresentado nesta secção tem como objectivo discutir a validade da solução numérica obtida pelo presente modelo computacional, permitindo assim tirar conclusões quanto à sua fiabilidade.

Resultados de duas vigas contínuas pós-tensionadas sujeitas a cargas estáticas, obtidos experimentalmente por Lin (1955) e por um modelo numérico definido por Kang (1977), foram usados para comparar com os obtidos pela presente análise. Sendo identificadas de modo idêntico ao usado pelos dois autores mencionados, as duas vigas são designadas por viga A e viga B. Possuindo a mesma geometria, a mesma armadura de pré-esforço e estando sujeitas ao mesmo carregamento, as duas vigas distinguem-se pelo facto de a primeira não incluir armadura ordinária, ao contrário da segunda.

A figura 5.11 ilustra a geometria e as cargas aplicadas nas vigas em estudo, incluíndo o traçado longitudinal concordante do cabo aderente de pré-esforço, constituído por 32 fios de 5mm de diâmetro ($A_p = 6,213 cm^2$), com uma parte rectilínea que se estende desde a ancoragem até à secção onde está aplicada a carga concentrada sendo a restante

curva até ao apoio central. A viga B é reforçada nas zonas mais esforçadas com uma armadura ordinária constituída por dois varões de 14mm ($A_s = 3,066 cm^2$) . As propriedades mecânicas encontram-se sumarizadas no Quadro 5.1.

Quadro 5.1 - Propriedades mecânicas dos materiais (Vigas de Lin).

BETÃO		AÇO		
Mód. Young:	$E_c = 37900 MPa$	Mód. Young:	$E_s = 195680 MPa$	$E_p = 199800 MPa$
Coef. Poisson:	$\nu = 0,18$		$E_{s1} = 720 MPa$	$E_{p1} = 39960 MPa$
Peso volúmico:	$\gamma = 24,34 KN/m^3$		$E_{s2} = 700 MPa$	$E_{p2} = 2668 MPa$
Ten. rot. comp.:	$f_c = 42,8 MPa$	Ten. cedência:	$f_{sy} = 313,5 MPa$	$f_{py} = 1439 MPa$
Ten. rot tracção:	$f_{ctm} = 5,5 MPa$		$f_{sy1} = 406,5 MPa$	$f_{py1} = 1764 MPa$

Atendendo à simetria, analisou-se metade de cada uma das estruturas. Desta forma, para a viga A foi realizada uma análise com discretização por dez elementos de viga, enquanto que para a viga B procedeu-se a duas análises, sendo também uma delas com dez elementos de viga e a outra com sessenta elementos planos. Pretendeu-se com este segundo caso comparar o desempenho relativo das formulações desenvolvidas para cada um desses elementos, além da comparação com os resultados obtidos pelos outros autores. Na figura 5.12 definem-se as malhas de elementos finitos adoptadas para cada uma das discretizações referidas e o padrão de camadas usado para os elementos de viga.

De acordo com os dados experimentais, durante a operação de aplicação do pré-esforço obteve-se uma tensão na origem de 978,8 MPa. Devido ao atrito e ao escorregamento do cabo nos dispositivos de amarrações (deslocamento médio de 2,5mm em cada extremidade do cabo) verificaram-se perdas instantâneas da ordem dos 14%. A força concentrada, F, é aplicada duas semanas após o pré-esforço, tendo sido calculada para essa data uma tensão instalada no cabo de pré-esforço próxima de 827MPa (junto ao apoio central) após estimativa de todas as perdas instantâneas e diferidas entretanto ocorridas.

O comportamento exibido pelas vigas nas presentes análises é idêntico ao verificado experimentalmente. Verificou-se o aparecimento das primeiras fendas nas fibras extremas superiores junto ao apoio central, com uma posterior propagação quer em fibras vizinhas, quer em fibras extremas inferiores nas zonas de meio vão. O colapso deu-se por esmagamento do betão na secção sobre o apoio central. Os níveis de carga que marcaram o início da fendilhação e o colapso, obtidos numericamente pelo presente modelo (com uma tolerância em termos de forças de 1%) e experimentalmente, são apresentados no Quadro 5.2, sendo complementarmente fornecidas as soluções elásticas da carga que conduz ao início da abertura de fendas e as soluções plásticas da carga de colapso pelo

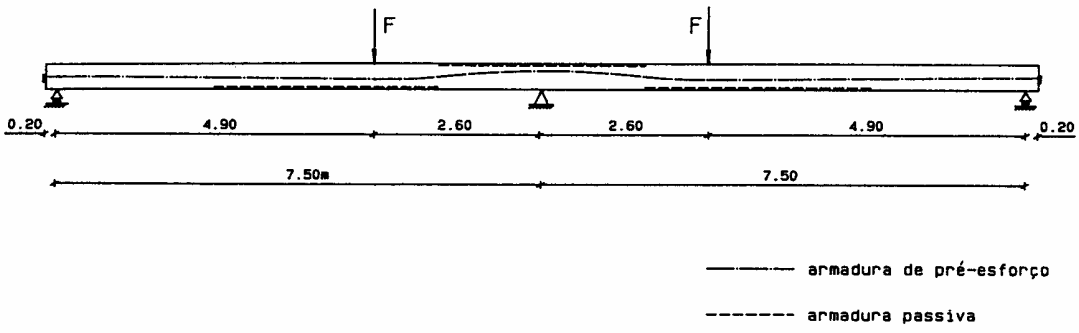
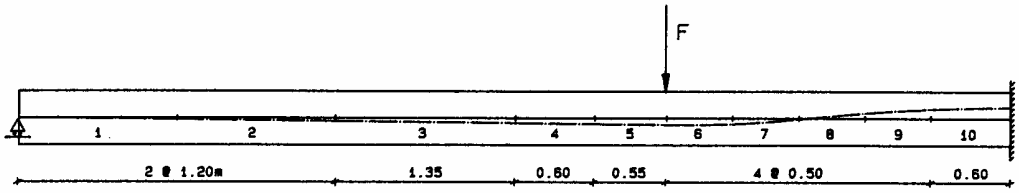
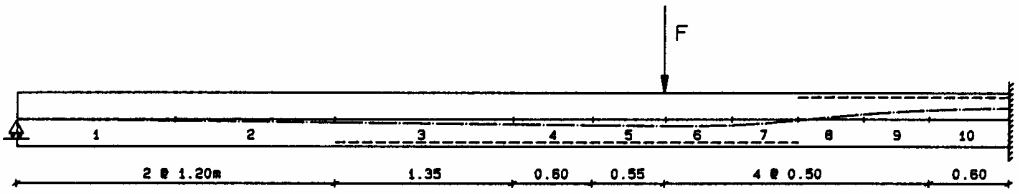


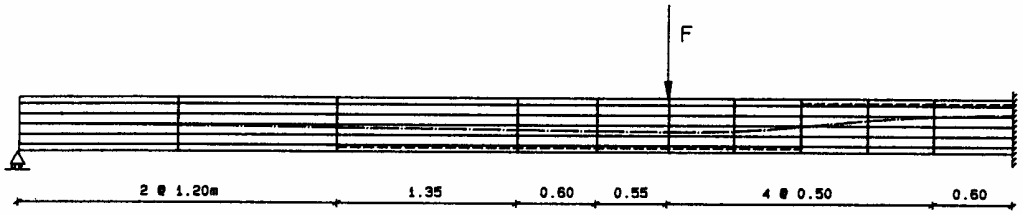
Fig. 5.11 - Geometria das vigas e cargas aplicadas.



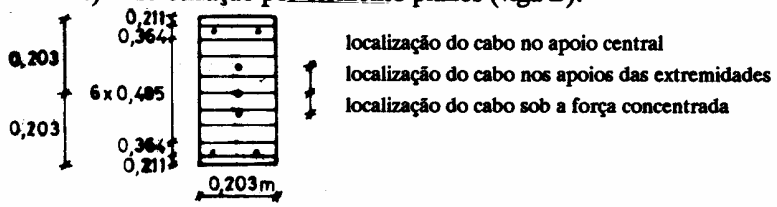
a) Discretização por elementos de viga (viga A).



b) Discretização por elementos de viga (viga B).



c) Discretização por elemento planos (viga B).



d) padrão de camadas para os elementos de viga.

Fig. 5.12 - Malhas de elementos finitos.

método das rótulas plásticas. O estado geral das vigas pré-esforçadas, para um nível de carga próximo do colapso ($F = 170KN$ na viga A e $F = 185KN$ na viga B) e definido com base nos resultados da análise efectuada com o modelo de elementos de viga, é ilustrado nas figuras 5.13 e 5.14 através das respectivas deformadas, das tensões principais nos pontos de Gauss e das configurações da fendilhação. Saliente-se a propagação relativamente extensa das fendas verificada nas zonas traccionadas sobre o apoio central e a meio vão, assim como o grau de não linearidade patenteado pelo betão nas zonas comprimidas, induzindo a uma rotura do tipo flexão-compressão que efectivamente se verifica nas análises efectuadas.

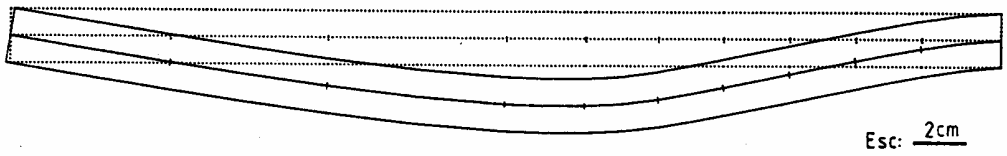
Quadro 5.2 - Níveis de carga que conduzem ao início da fendilhação e ao colapso.

	FENDILHAÇÃO E COLAPSO: NÍVEIS DE CARGA (KN)									
	Início da fendilhação						Colapso			
	A meio vão			Junto ao apoio central						
	Presente análise	Experimental	Elástico	Presente análise	Experimental	Elástico	Elem. viga	Elem. Plano	Experimental	Plástico
Viga A	107,8	107,6	110,7	70,7	65,8	68,9	172,0	-	174,3	184,5
Viga B	112,5	102,7	110,7	77,4	70,3	68,9	200,0	201,0	203,7	203,7

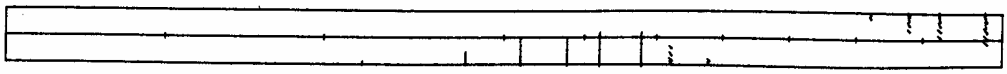
Nas análises efectuadas à viga B obtiveram-se resultados semelhantes no que diz respeito à carga que originou o aparecimento das fendas e bastante aproximados quanto à carga de colapso. Verifica-se ainda, em relação às duas vigas, uma boa aproximação com os valores experimentais, sendo de salientar que as cargas de colapso determinadas pelas presentes análises são ligeiramente inferiores, demonstrando uma excelente concordância e conduzindo a resultados que estão do lado da segurança.

Nos Quadros 5.3 e 5.4 apresentam-se os valores dos deslocamentos verticais a meio vão e as reacções nos apoios das extremidades para as vigas A e B, respectivamente. Nesses quadros estão definidos, para vários incrementos da força concentrada, os resultados obtidos pelo presente modelo, pelo modelo numérico de Kang e pelos testes experimentais de Lin. Para visualizar o grau de aproximação associado às soluções referidas são ilustradas nas figuras 5.15 e 5.16 as respostas deformacionais evidenciadas pelas vigas pré-esforçadas e as reacções nos apoios das extremidades, respectivamente.

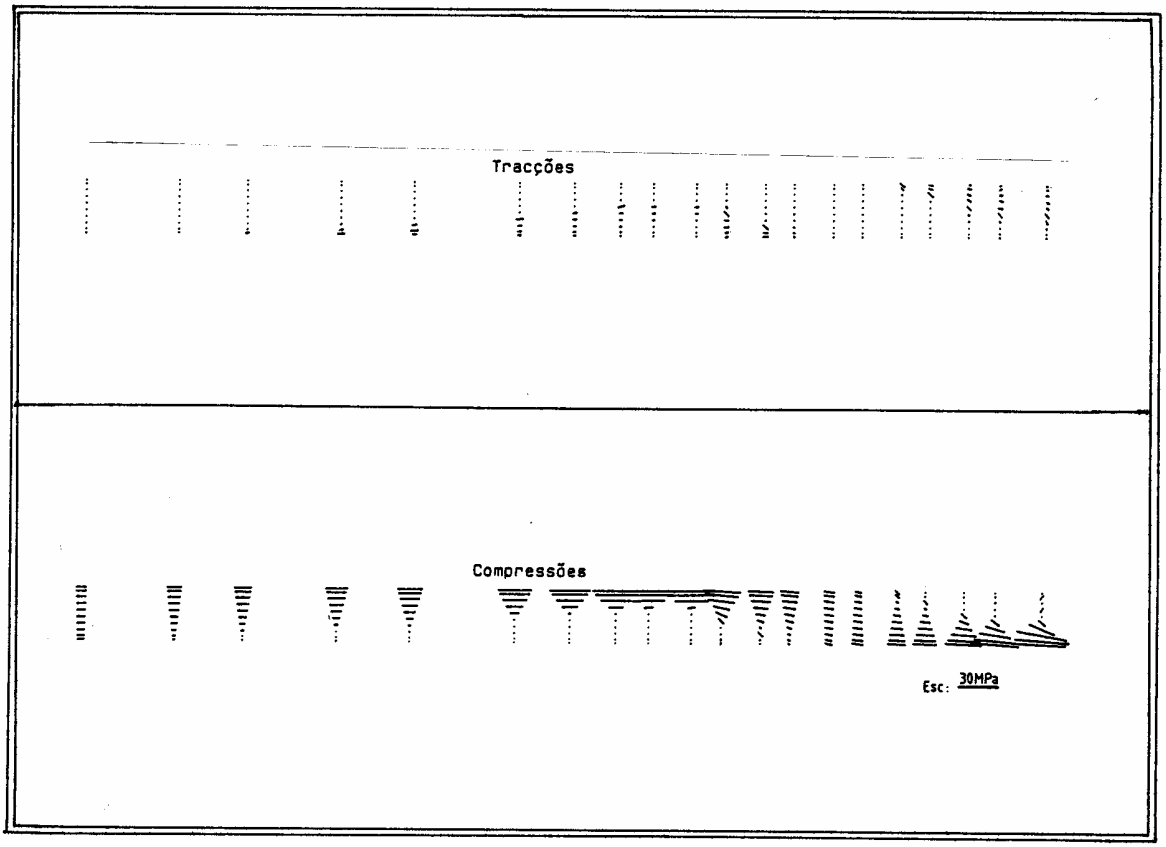
Nas análises efectuadas verifica-se uma resposta mais rígida da viga B, em relação à viga A, devido à armadura ordinária. A concordância entre as respostas deformacionais obtidas pelo presente modelo, pelas soluções numéricas de Kang e experimentais de Lin, é boa. Verifica-se, no entanto, que todos os resultados numéricos apresentam respostas mais rígidas que as definidas nos ensaios experimentais fazendo crer que o pré-esforço efectivamente instalado durante a execução dos testes realizados por Lin são inferiores àqueles considerados nas presentes análises e naquelas efectuadas por Kang. Comparando



a) Deformada.

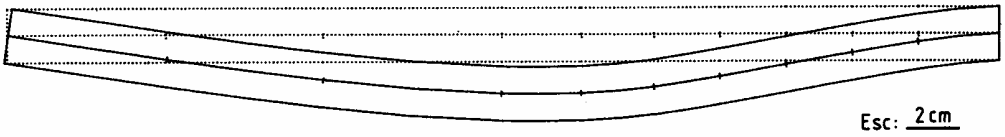


b) Configuração da fendilhação.

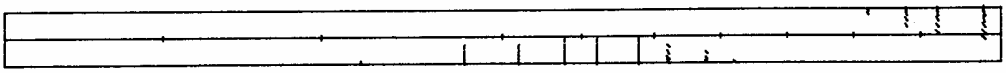


c) Tensões principais.

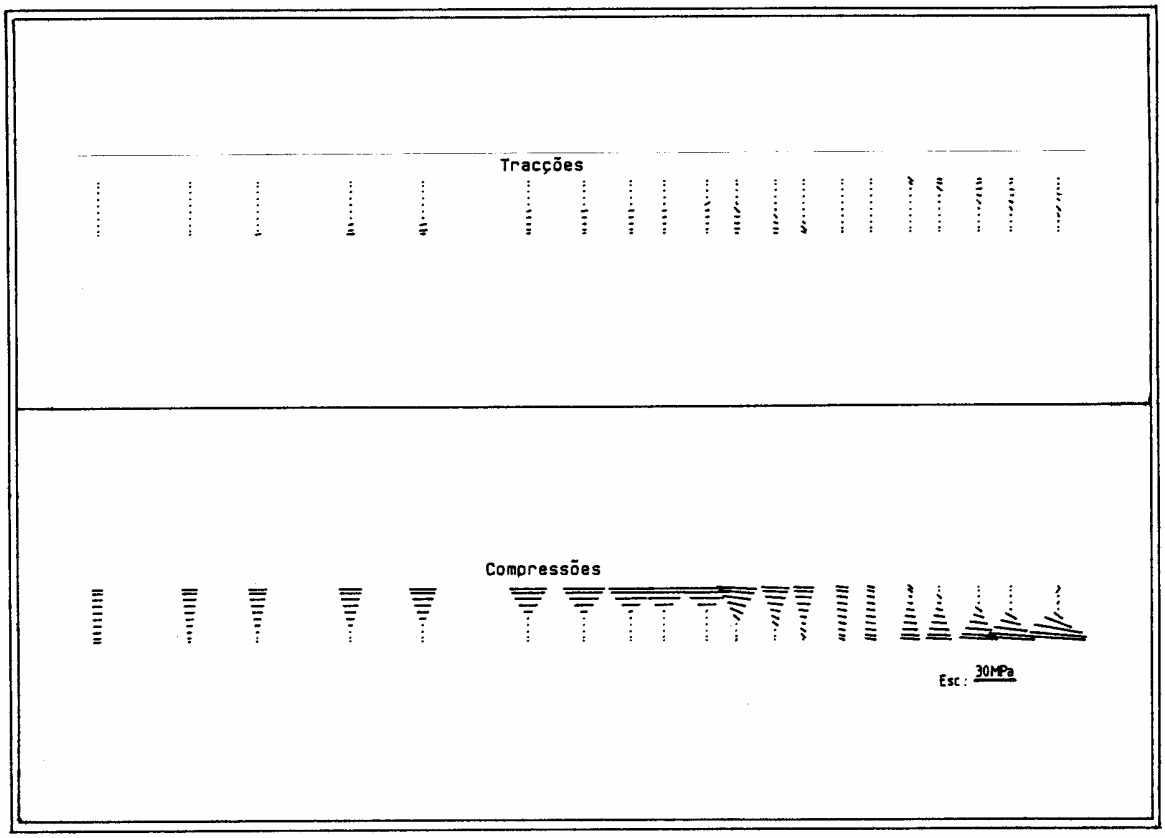
Fig. 5.13 - Viga de Lin A (nível de carga: $F = 170KN$).



a) Deformada.



b) Configuração da fendilhação.



c) Tensões principais.

Fig. 5.14 - Viga de Lin B (nível de carga: $F = 185KN$).

os resultados obtidos, na viga B, pelos elementos de viga e pelos elementos planos verifica-se que são praticamente coincidentes, podendo atribuir-se o ligeiro acréscimo de flexibilidade na solução exibida pelos segundos, ao maior grau de discretização ao longo da altura adoptada para estes elementos.

Quadro 5.3 - Viga A: deslocamentos verticais a meio vão e reacções nos apoios da extremidade.

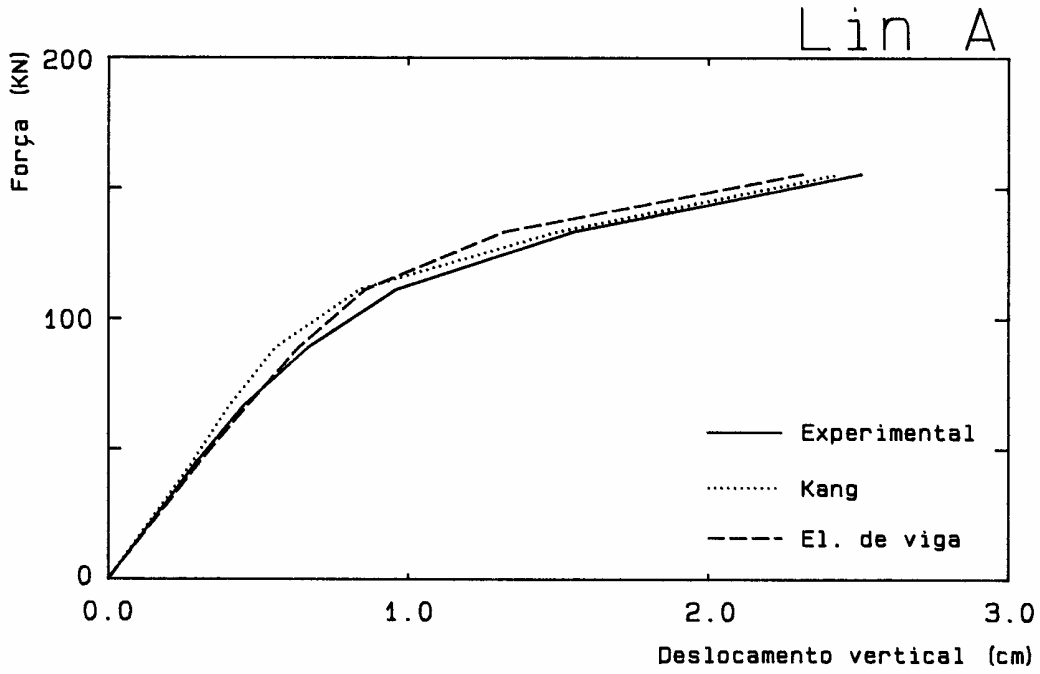
Força *F*	Deslocamentos verticais (m)			Reacções (KN)		
(KN)	Elem. Viga	Kang	Experimental	Elem. Viga	Kang	Experimental
44,5	0,00303	0,00280	0,00293	7,18	7,20	7,16
66,7	0,00465	0,00406	0,00453	10,79	10,81	10,63
89,0	0,00635	0,00559	0,00667	14,63	14,85	14,90
111,2	0,00856	0,00838	0,00960	19,19	19,97	19,70
133,4	0,01322	0,01499	0,01554	23,70	23,75	24,15
155,6	0,02314	0,02438	0,02510	27,19	27,44	28,24

Quadro 5.4 - Viga B: deslocamentos verticais a meio vão e reacções nos apoios da extremidade.

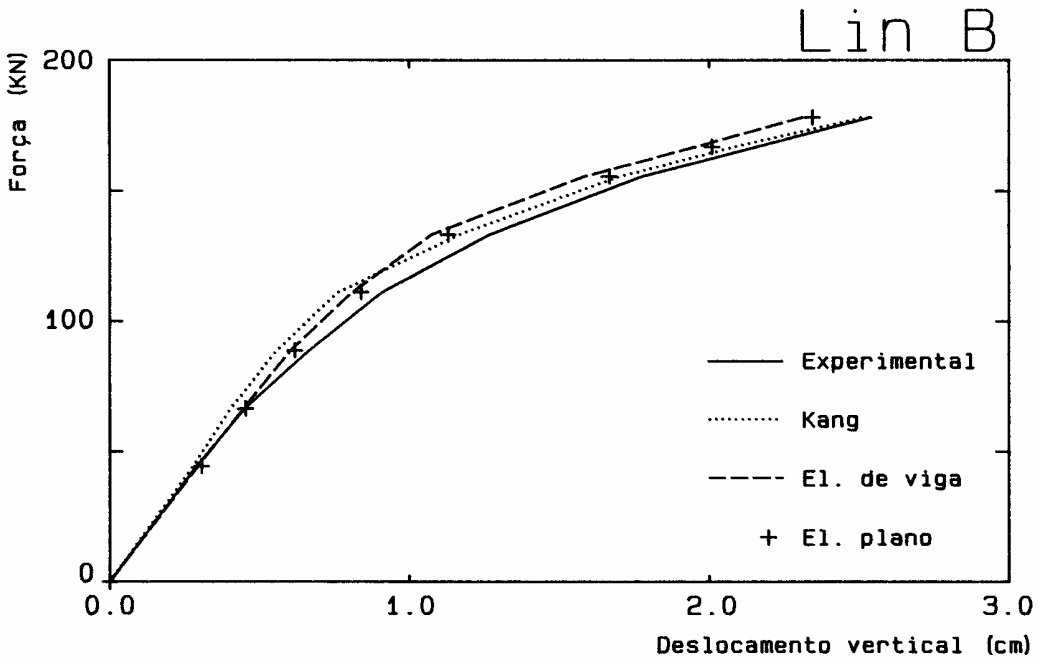
Força *F*	Deslocamentos verticais (m)				Reacções (KN)			
(KN)	Elem. Viga	Elem. Plano	Kang	Experim.	Elem. Viga	Elem. Plano	Kang	Experim.
44,5	0,00297	0,00308	0,00280	0,00293	7,17	7,17	7,16	7,16
66,7	0,00449	0,00455	0,00406	0,00453	10,75	10,66	10,76	10,63
89,0	0,00605	0,00618	0,00559	0,00667	14,68	14,63	14,81	14,85
111,2	0,00810	0,00838	0,00762	0,00910	19,58	19,55	19,57	19,70
133,4	0,01075	0,01130	0,01168	0,01270	23,27	23,22	23,52	23,88
155,6	0,01586	0,01668	0,01702	0,01778	27,10	27,52	27,22	27,66
166,8	0,01954	0,02009	0,02083	0,02159	29,12	29,61	29,30	29,97
178,0	0,02311	0,02344	0,02515	0,02540	31,41	31,67	31,80	32,29

Na figura 5.16 é possível observar a excelente concordância entre as várias análises, na determinação das reacções nos apoios das extremidades, podendo-se comprovar assim a validade da consideração do efeito da acção do pré-esforço na estrutura, nomeadamente, do efeito da sua componente hiperestática.

A figura 5.17 ilustra o acréscimo de tensões na armadura de pré-esforço com o aumento da força aplicada, em duas secções da viga: sob a força concentrada e junto ao apoio intermédio. São comparados os resultados obtidos pelas presentes análises e por Kang. De uma maneira geral observa-se uma boa aproximação nos resultados, salientando-se no estudo realizado na viga B os valores muito aproximados obtidos pelos elementos de viga e pelos elementos planos. Em ambas as vigas verificou-se, nas curvas

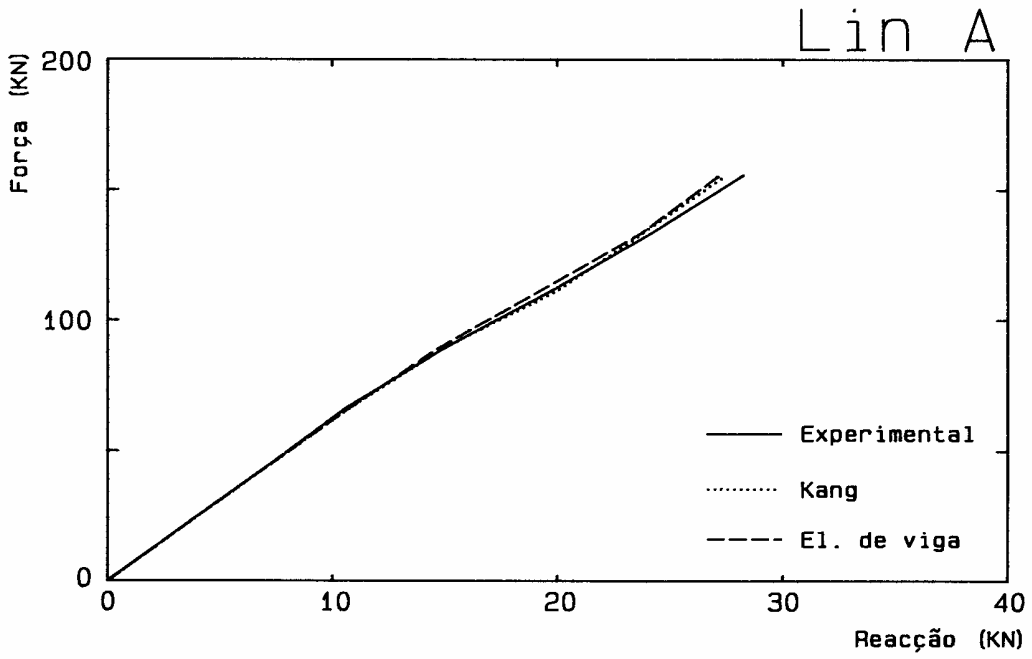


a) Viga de Lin A.

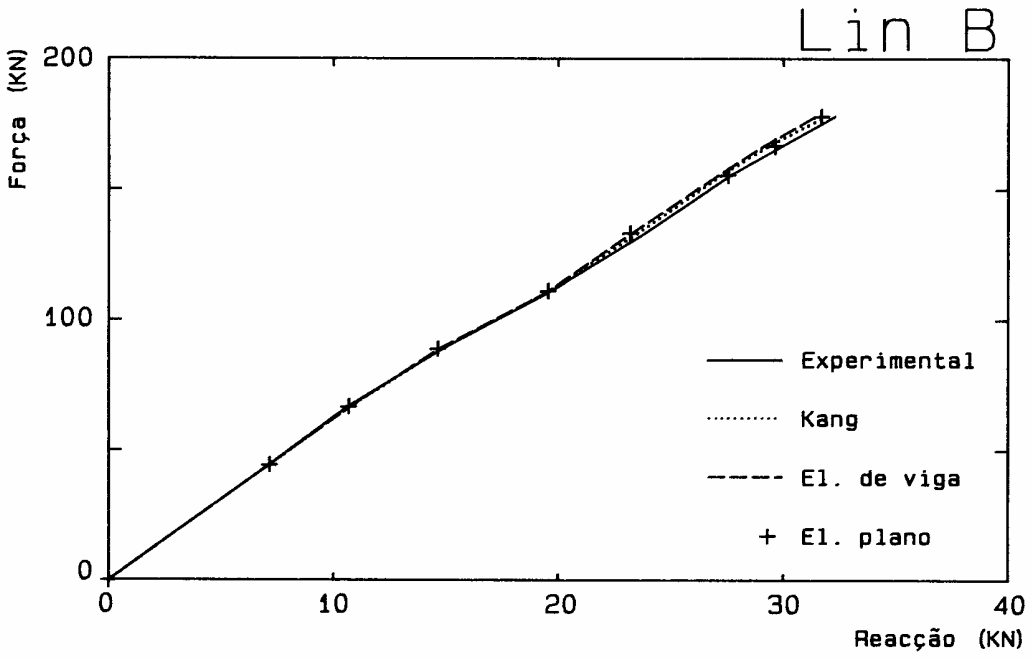


b) Viga de Lin B.

Fig. 5.15 - Curvas força-deslocamento a meio vão.

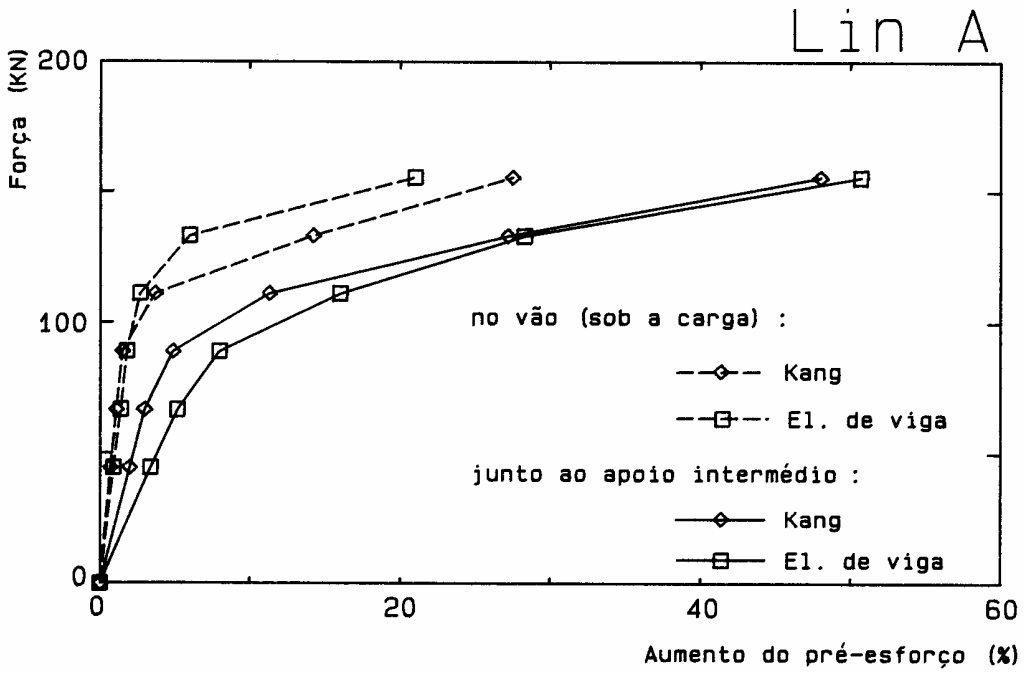


a) Viga de Lin A.

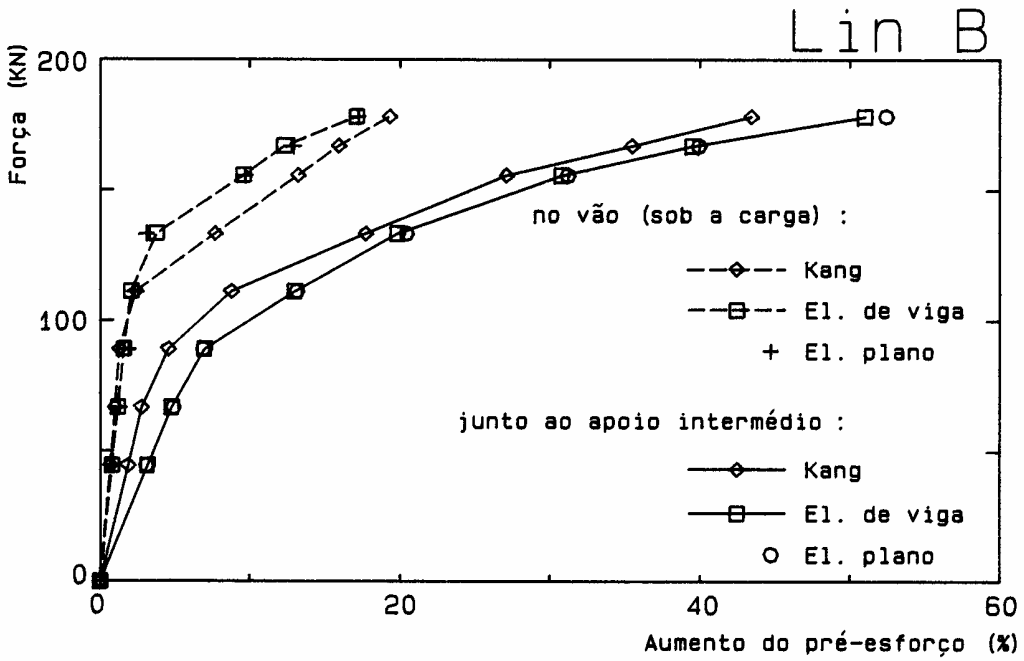


b) Viga de Lin B.

Fig. 5.16 - Curvas força-reacção nos apoios das extremidades.



a) Viga de Lin A.



b) Viga de Lin B.

Fig. 5.17 - Curvas força-aumento do pré-esforço.

que traduzem a variação do pré-esforço na secção situado no vão (sob a carga concentrada), que os resultados são inicialmente praticamente coincidentes, notando-se posteriormente que na análise efectuada por Kang o cabo começa a plastificar para um menor nível de carga que aquele verificado nos presentes estudos, voltando-se a aproximar de novo para carregamentos superiores. Tal constatação é devida, em grande parte, ao facto de a curva constitutiva (relações tensões-deformações) da armadura de pré-esforço adoptada por Kang ser dividida num maior número de troços que o diagrama trilinear aqui adoptado.

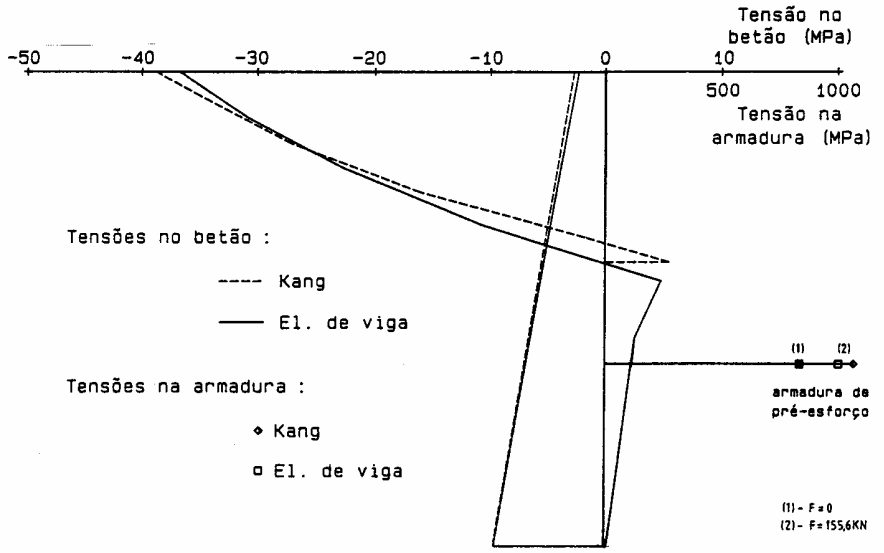
No que diz respeito às curvas que traduzem essas variações numa secção junto ao apoio central verifica-se que, embora apresentem um andamento semelhante, existem diferenças logo a partir do início. Tal deve-se a que as secções consideradas não serem exactamente as mesmas. Enquanto que nas presentes análises se considera a secção correspondente ao ponto de Gauss mais próximo do suporte central, Kang considera a secção situada no ponto médio do elemento que contém esse apoio.

Observa-se ainda na figura 5.17 a significativa contribuição dos cabos de pré-esforço na capacidade resistente última das vigas, bem como o efeito da aderência no desenvolvimento das tensões ao longo do cabo.

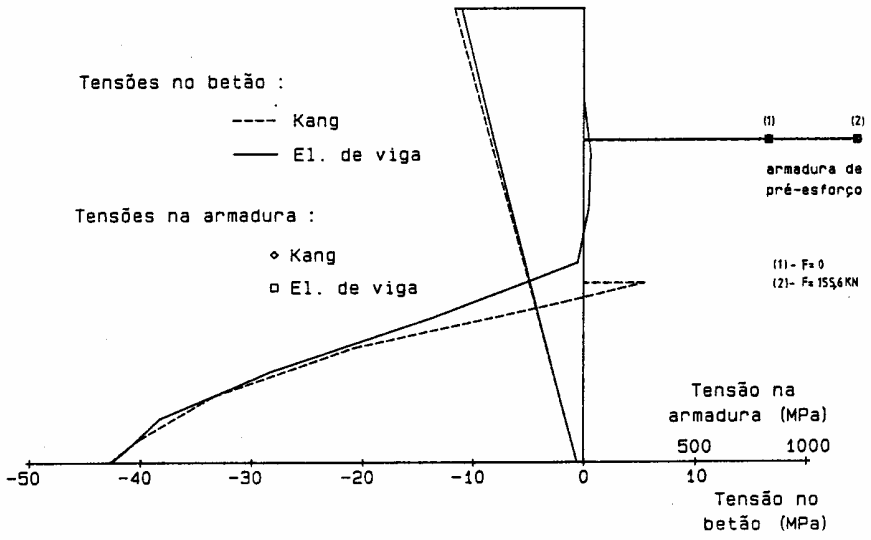
A análise comparativa das distribuições de tensões a meio vão (na secção de momentos flectores positivos máximos) e junto ao apoio central, entre aquelas obtidas no presente estudo e as propostas por Kang, é ilustrada nas figuras 5.18 e 5.19 para as vigas A e B, respectivamente. São apresentados os resultados obtidos quando se aplica o pré-esforço ($F = 0$) e para o valor da força concentrada, F, de 155,6KN. As tensões instaladas nas armaduras, passivas e de pré-esforço, são representadas numa escala diferente daquela adoptada para as tensões no betão.

Nos diagramas relativos ao instante de aplicação do pré-esforço verifica-se, em ambas as análises, uma maior variação de tensões ao longo da altura da viga, na secção junto ao apoio central, relativamente ao que é observado na secção a meio vão. De facto, uma vez que o pré-esforço é semelhante nas duas secções e a excentricidade que o cabo apresenta na primeira das secções referidas é maior, torna-se evidente tal constatação. Para o nível de carga $F = 155,6KN$ as tensões máximas de compressão na secção próxima do suporte central são superiores às correspondentes tensões observadas a meio vão, o que confirma a razão das zonas de momento negativo máximo serem as mais esforçadas, neste caso. Comparando os diagramas de tensões relativos às vigas A e B, é evidente o efeito da presença da armadura passiva na diminuição das tensões máximas no betão.

Ao discutir as pequenas diferenças observadas, nas distribuições de tensões nas secções, entre os resultados das presentes análises e as soluções numéricas de Kang, é de notar que esse autor considera no seu modelo que o betão fendilhado não retém tensões de tracção, contrariamente à hipótese do modelo de tension-stiffening apresentado no

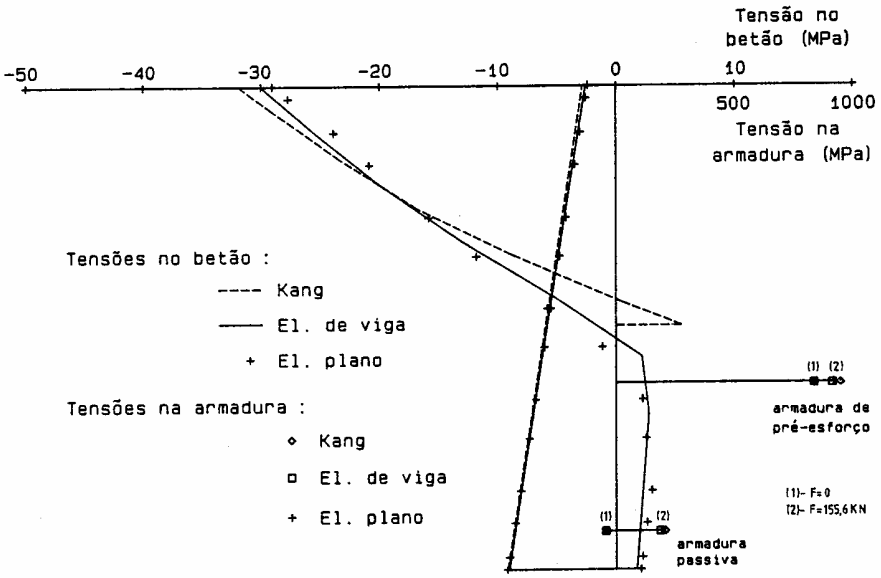


a) Secção a meio vão.

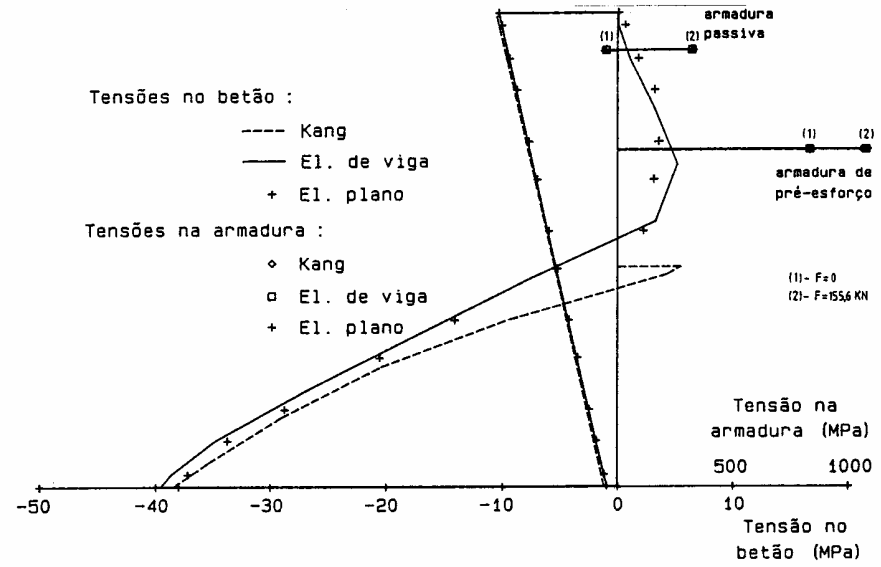


b) Secção junto ao apoio central.

Fig. 5.18 - Diagramas de tensões para $F = 0$ e $F = 155,6\,KN$ (viga A).

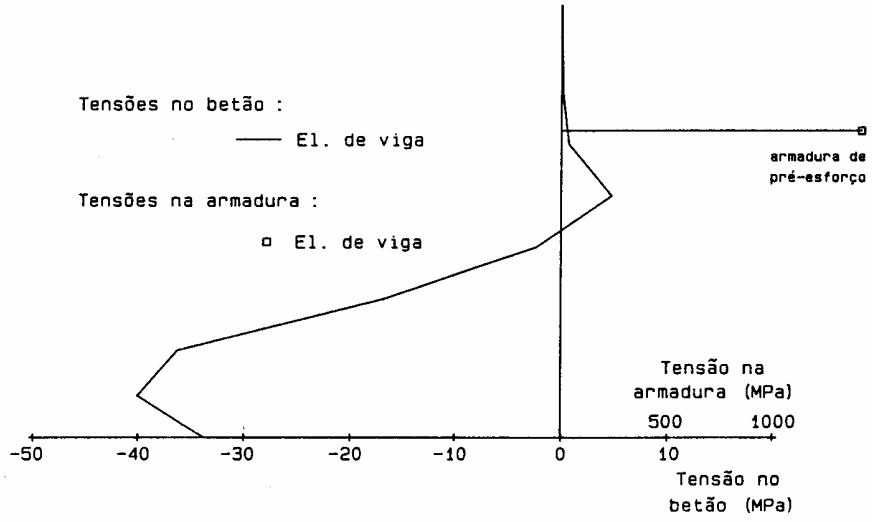


a) Secção a meio vão.

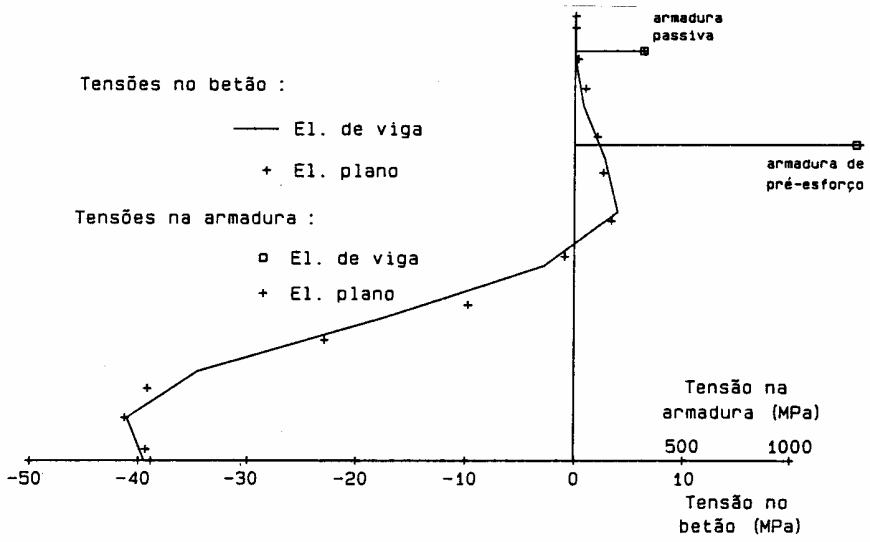


b) Secção junto ao apoio central.

Fig. 5.19 - Diagramas de tensões para $F = 0$ e $F = 155,6\,KN$ (viga B).



a) Viga A (para $F = 170KN$).



b) Viga B (para $F = 185KN$).

Fig. 5.20 - Diagramas de tensões.

Capítulo 4. Além disso, refira-se que a secção junto ao apoio central considerada por Kang não é exactamente a mesma que foi analisada nestes estudos, como atrás se mencionou. Realce-se, no entanto, a boa concordância dos diagramas apresentados, sendo essa aproximação ainda maior quando se faz a comparação entre a análise realizada por elementos de viga e por elementos planos, na viga B.

Na figura 5.20 apresenta-se os diagramas de tensões junto ao apoio central para níveis de carga de $F = 170KN$ (para a viga A) e $F = 185KN$ (para a viga B). É possível observar-se um decréscimo da resistência à compressão nas fibras extremas comprimidas, devido ao efeito de *softening*, e um anulamento das tensões de tracção nas fibras opostas, devido à extensão pronunciada da fendilhação observada nessas secções para o carregamento em questão.

Finalmente, para ter uma ideia comparativa dos desempenhos apresentados pelo modelo baseado nos elementos de viga e pelo modelo baseado nos elementos planos, referem-se alguns aspectos respeitantes ao procedimento automático de resolução deste tipo de problemas. Assim, o ficheiro de dados que define completamente o problema de análise não linear da viga de Lin B através de elementos de viga é cerca de seis vezes menor que aquele relativo aos elementos planos. Verificou-se ainda que o tempo de CPU utilizado na resolução do problema com elementos de viga foi cerca de dez vezes menor que o tempo utilizado na resolução por elementos planos. Estes valores permitem constatar a grande economia de tempo e de espaço apresentado pelos elementos de viga em relação aos planos.

5.7 - OBSERVAÇÕES FINAIS

Descreveu-se de uma forma sumária a estrutura e o funcionamento do programa de cálculo automático de análise não linear material de peças de betão armado pré-esforçado com comportamentos típicos de flexão, desenvolvido de acordo com os modelos apresentados nos Capítulos 2 e 4.

Devido à especificidade própria das análises não lineares, são apresentadas técnicas apropriadas de resolução deste tipo de problemas, destacando-se o método de Newton-Raphson como base de determinação da solução não linear. O algoritmo adoptado para o cálculo das tensões elasto-plásticas foi igualmente objecto de referência pormenorizada. São apresentados ainda os critérios de convergência associados a este processo.

Atendendo à sua importância, é feita uma descrição detalhada da forma como é tratada, pelo presente programa, a associação entre malhas de elementos planos e malhas de elementos de viga.

O presente capítulo conclui-se com a discussão dos resultados referentes a um conjunto de testes numéricos de carga e descarga e à análise comparativa de duas vigas pré-esforçadas testadas, experimentalmente e numericamente, por outros autores.

5.8 - BIBLIOGRAFIA

Bergan, P. G. e Soreide, T. H. (1973) - A Comparative Study of Different Solution Techniques as Applied to a Nonlinear Structural Problem - Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 2, p.p. 185-201.

Figueiras, J. A. (1983) - Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells - Ph. D. Thesis, C/Ph/72/83, Univ. College of Swansea.

Hinton, E. e Owen, D. R. J. (1977) - Finite Element Programming - Academic Press, London.

Hinton, E. e Owen, D. R. J. (1984) - Finite Element Software for Plates and Shells - Pineridge Press, U. K..

Lin, T. Y. (1955) - Strength of Continuous Prestressed Concrete Beams Under Static and Repeated Loads - ACI Journal, Vol. 26 (10), p.p. 1037-1059.

Kang, Y. J. (1977) - Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames - Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, California.

Marques, J. M. M. C. (1984) - Finite and Infinite Elements in Static and Dynamic Structural Analysis - Ph. D. Thesis, University of Wales, Swansea, U. K..

Owen, D. R. J. e Hinton, E. (1980) - Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice - Pineridge Press, Swansea, U. K..

Póvoas, R. H. C. F. (1991) - Modelos Não-Lineares de Análise e Dimensionamento de Estruturas Laminares de Betão Incluindo Efeitos Diferidos - Tese de Doutoramento, Univ. do Porto.

Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (1983), Decreto-Lei nº 349-C/83, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa.

Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes (1983), Decreto-Lei nº 235/83, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa.

Zienkiewicz, O. C. (1977) - The Finite Element Method - 3rd ed., McGraw-Hill, London.

Capítulo 6

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO PRÁTICA

6.1 - INTRODUÇÃO

O projecto de estruturas de betão armado pré-esforçado deve cumprir com segurança as condições de adequado funcionamento em serviço e de capacidade última de carga. De facto, o conhecimento do comportamento da estrutura para a história de carregamento ao longo do seu período de vida é de importância fundamental para o projectista. Por isso, a determinação rigorosa do grau de segurança exige, sobretudo em peças pouco comuns, a adopção de modelos que garantam uma análise adequada, nos quais se inserem os modelos de análise não linear.

Neste capítulo apresenta-se uma metodologia adequada à caracterização da resposta estrutural até à rotura e à verificação da segurança aos estados limites regulamentares (REBAP, 1983; RSA, 1983). Pretende-se desta forma, usando o modelo computacional do capítulo anterior, aferir o grau de segurança das soluções estruturais adoptadas e, ao mesmo tempo, aprofundar o conhecimento do comportamento estrutural.

A aplicabilidade do modelo computacional desenvolvido para a análise de estruturas de betão armado pré-esforçado é ilustrada através da apresentação de dois exemplos distintos.

No primeiro exemplo foi analisada a resposta estrutural da viga contínua pré-esforçada dimensionada no Capítulo 3 pelo programa de cálculo automático aí apresentado. Pretende-se não só averiguar o comportamento e a segurança da estrutura como também aferir a solução de dimensionamento apresentada pelo programa referido.

O segundo exemplo, por seu lado, permite avaliar o modelo de discretização com dois tipos de elementos (planos e de viga) actuando simultaneamente. Assim é possível, de uma forma rápida e rigorosa, estudar uma viga pré-esforçada de grande vão na globalidade e atender às descontinuidades apresentadas. Em suma, o estudo em causa visou objectivos análogos aos do exemplo precedente mas de forma a ilustrar melhor as potencialidades do presente modelo computacional.

6.2 - COMPORTAMENTO ATÉ À ROTURA COM VERIFICAÇÃO AOS ESTADOS LIMITES

Tendo como objectivo primordial a caracterização do comportamento de estruturas de betão, através do traçado da resposta deformacional, do nível de carga correspondente ao início da fendilhação e à cedência das armaduras, da definição da carga última e da identificação do mecanismo de colapso, o presente programa permite a verificação da segurança aos estados limites.

Tais características podem ser facilmente identificadas através da observação da figura 6.1 que representa o traçado da resposta típica de estruturas de betão, em termos de deslocamentos, a um carregamento monotónico sucessivamente crescente. Caracterizando-se por deformações quase elásticas até ao aparecimento das primeiras fendas, o comportamento da estrutura torna-se instável durante a fase de propagação da fendilhação devido à redistribuição de tensões dos elementos fendilhados para os elementos vizinhos. Segue-se uma fase de estabilização da fendilhação, traduzindo-se numa degradação progressiva dos mecanismos de interacção entre as armaduras e o betão envolvente e numa maior plastificação do betão, conduzindo a uma maior parcela das deformações permanentes. Uma vez iniciada a plastificação das armaduras, as deformações crescem de uma forma bastante acentuada para pequenos incrementos de carga, apresentando a curva carga-deslocamentos uma inclinação pouco acentuada. A capacidade resistente da estrutura rapidamente se esgota verificando-se, então, a sua rotura.

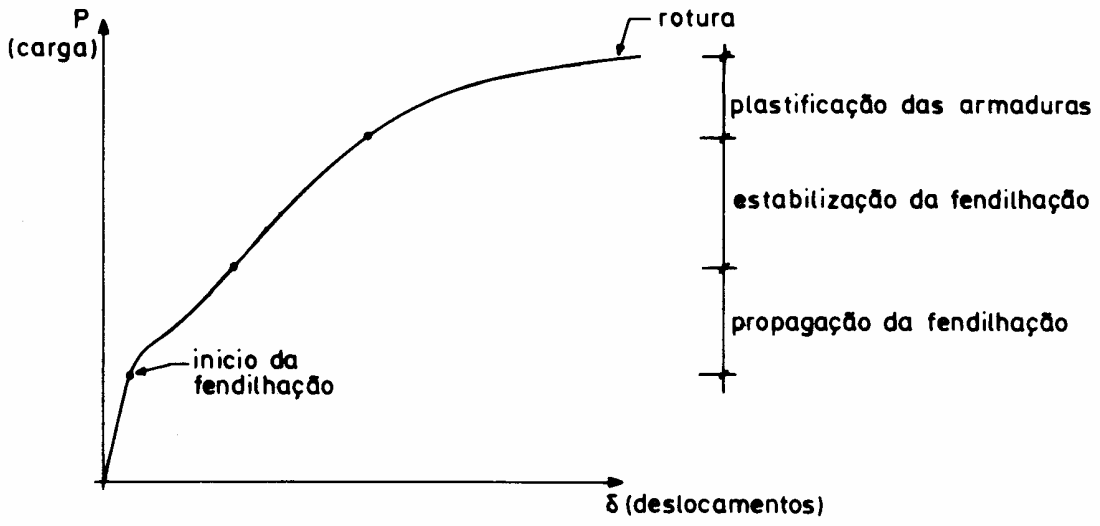


Fig. 6.1 - Traçado esquemático da resposta de uma estrutura de betão sujeita a um carregamento monotónico crescente.

De acordo com a regulamentação portuguesa (REBAP, 1983; RSA, 1983), a avaliação da segurança de uma estrutura de betão compreende a verificação da segurança em relação aos estados limites últimos, traduzida frequentemente pelo estado limite último de resistência e aos estados limites de utilização, nomeadamente, o estado limite de deformação e o estado limite de fendilhação.

i) Estado limite último de resistência

Sendo a análise não linear realizada com base num modelo de comportamento mecânico dos materiais que tem em conta as respectivas condições de cedência e de fractura, a verificação da segurança em relação ao estado limite último de resistência, em termos de acções, consiste na satisfação da seguinte condição:

$$q_{Sd} \leq q_{Rd} \tag{6.1}$$

onde q_{Sd} é o valor de cálculo das acções actuantes, obtido de acordo com as regras de combinação definidas regulamentarmente (RSA, 1983), e q_{Rd} é o valor de cálculo da capacidade de resistência última da estrutura, definido de acordo com os valores de cálculo das propriedades dos materiais.

Os valores de cálculo definidos na expressão (6.1) são obtidos pela alteração dos respectivos valores característicos através de coeficientes de segurança especificados em regulamentação apropriada. Essa alteração é traduzida por uma majoração, γ_f, dos valores característicos das acções actuantes, q_{sk}, e por uma minoração, γ_m, dos valores característicos da capacidade resistente, q_{Rk}, passando a expressão (6.1) a vir definida por:

$$\gamma_f \cdot q_{Sk} \leq \frac{q_{Rk}}{\gamma_m} \tag{6.2}$$

Sendo γ_S o coeficiente de majoração global das acções correspondente à última configuração de equilíbrio determinada para a estrutura, a relação entre os valores característicos da capacidade resistente e das acções actuantes é estabelecida por:

$$q_{Rk} = \gamma_S \cdot q_{Sk} \tag{6.3}$$

Substituindo (6.3) em (6.2) resulta:

$$\gamma_S \geq \gamma_f \cdot \gamma_m \tag{6.4}$$

que permite estabelecer a condição de segurança em relação ao estado limite último de resistência, em função do coeficiente de segurança global, γ_S, e dos coeficientes de segurança parciais, γ_f e γ_m, relativos às acções e às propriedades dos materiais, respectivamente.

Saliente-se que a expressão (6.4) não está completamente de acordo com a verificação regulamentar traduzida pela relação (6.1), já que a consideração da capacidade resistente, q_{Rk}, obtida pelo produto simples de γ_m por q_{Rd}, pode não ser válida na análise não linear de certas peças. Embora em estruturas isostáticas tal consideração esteja correcta, quando se está na presença de casos hiperestáticos a não linearidade exibida na resposta conduz, geralmente, à redistribuição de esforços das secções mais solicitadas para as secções vizinhas, podendo conduzir a um coeficiente de segurança global menos exigente que aquele definido em (6.4). Assim, com o presente modelo não linear a verificação regulamentar expressa em (6.1), conjuntamente com a verificação aos estados limites de utilização, só seria possível através da realização de duas análises independentes . Numa delas seriam considerados os valores característicos das propriedades dos materiais para o estudo da estrutura em fase de serviço, numa segunda análise teria que se definir os seus valores de cálculo e majorar as acções até se atingir a rotura, permitindo assim comparar a carga de colapso (que corresponderia ao valor de cálculo das acções actuantes) com o valor de cálculo da capacidade de resistência última.

Presentemente encontra-se em estudo uma metodologia mais apropriada para fazer este tipo de verificação, que permita obter, de forma expedita e mais correcta, a segurança ao estado limite último de resistência através de modelos não lineares.

Refira-se ainda que a verificação da pressão local no betão em zonas de elementos sujeitas a forças concentradas é feita automaticamente no presente programa (desde que se considere os valores de cálculo das propriedades dos materiais), uma vez que é feita a verificação do esmagamento deste material através do controle da deformação máxima à compressão, tendo implicitamente em conta as componentes do estado de tensão. Tal como anteriormente se referiu, a realização desta verificação em conjunto com as restantes só é possível através de duas análise não lineares.

ii) Estados limites de utilização

A avaliação da segurança aos estados limites de utilização é realizada através da verificação da fendilhação e da deformação para os estados limites correspondentes às combinações de acções definidas no RSA (1983).

A verificação ao estado limite de deformação de vigas é estabelecida para valores máximos da flecha igual a 1/400 do vão (nos casos correntes de edifícios) para combinações frequentes de acções, não devendo contudo ser tomada superior a 1,5cm quando afectar paredes divisórias. As normas suíças (SIA, 1985) aconselham em pontes rodoviárias um valor de 1/700 do vão, de forma a garantir o conforto na condução. O valor da flecha

máxima obtida pelo presente programa terá que ser ampliado devido aos efeitos diferidos no betão, nomeadamente, a sua fluência. A aplicação do método bilinear (Favre, 1980) a essa flecha permite calcular de forma expedita o seu valor a longo prazo.

A verificação da segurança em relação à fendilhação destina-se, fundamentalmente, a garantir que, durante a vida da obra, as armaduras não sofram corrosão que comprometa significativamente a sua resistência. Dependendo da agressividade do ambiente, da sensibilidade das armaduras à corrosão e da permanência das acções que provocam a fendilhação, é imposta a satisfação simultânea das seguintes condições para o betão pré-esforçado:

- ausência de tensões de tracção na estrutura (estado limite de descompressão) para a combinação quase permanente de acções;
- largura máxima de fendas, determinada para a combinação frequente das acções, inferior a valores regulamentares;
- tensão máxima de compressão no betão inferior ao valor de cálculo da tensão de rotura à compressão para a combinação rara de acções.

A primeira e a terceira condições são verificadas pela simples comparação dos valores das tensões obtidos na análise com os respectivos valores regulamentares. A largura de fendas, estabelecida na segunda condição, pode ser calculada identificando a extensão máxima instalada no betão na direcção normal ao plano da fenda, $\epsilon_{n,cr}$, com a extensão média da armadura, ϵ_{sm}, interveniente na expressão definida no REBAP (1983) para o cálculo do valor característico, w_k, da largura das fendas:

$$w_m = s_{rm} \cdot \epsilon_{sm} \qquad (6.5.a)$$

$$w_k = 1,7 \cdot w_m \qquad (6.5.b)$$

A distância média entre fendas, s_{rm}, definida em (6.5.a) pode ser aproximada pela expressão do mesmo regulamento:

$$s_{rm} = 2 \cdot \left(c + \frac{s}{10} \right) + \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\phi}{\rho_r} \qquad (6.6)$$

onde as variáveis incluídas têm os significados correntes.

6.3 - VIGA CONTÍNUA DE DOIS VÃOS COM SECÇÃO VARIÁVEL

6.3.1 - Objectivo da análise

Na presente análise pretende-se determinar a segurança da viga contínua pré-esforçada dimensionada na secção 3.4, de forma a avaliar a fiabilidade dos resultados obtidos com o programa de cálculo automático descrito no Capítulo 3.

O estudo do traçado da resposta da estrutura até ao colapso, tendo em conta o comportamento não linear material, através do programa apresentado no Capítulo 5, permite verificar com rigor a segurança aos estados limites últimos e de utilização definidos na regulamentação portuguesa em vigor para este tipo de estruturas (REBAP, 1983; RSA, 1983).

Finalmente refira-se que a análise não linear é efectuada com base no valor do pré-esforço final, obtido do pré-esforço na ancoragem descontando as perdas instantâneas e diferidas, calculadas na secção 3.4. Tal opção justifica-se se for considerado que as perdas diferidas apresentam um valor próximo do final quando se começam a aplicar as cargas de serviço. Neste caso, a verificação (efectuada na secção 3.4) da não existência de tracções no instante de aplicação do pré-esforço (considerando, evidentemente, somente as perdas instantâneas) é válida, uma vez que para este nível de carga a resposta do betão é praticamente elástica e linear, tornando-se desnecessária esta verificação através da presente análise não linear.

6.3.2 - Dados do problema

Os dados do problema referidos na secção 3.4, relativamente à geometria da estrutura, ao carregamento e às propriedades mecânicas dos materiais, mantêm-se inalterados. A quantidade de armadura ordinária, de armadura de pré-esforço e respectiva força, encontram-se também definidos nessa secção, de acordo com o dimensionamento aí efectuado. Os diagramas tensões-extensões para o aço das armaduras, ordinária e de pré-esforço, encontram-se representados na figura 6.2.

Finalmente, refira-se que se usou a mesma malha de elementos de viga adoptada no problema de dimensionamento das armaduras.

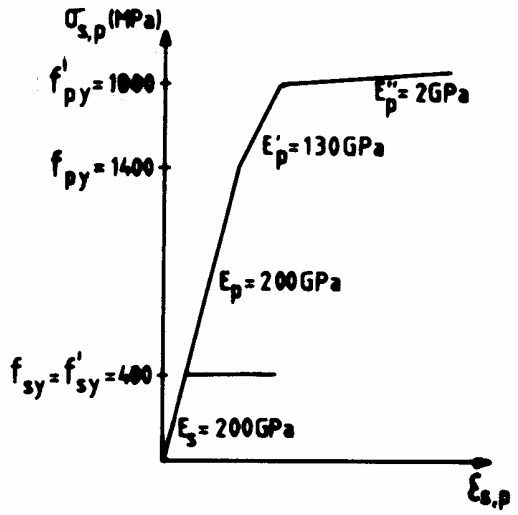


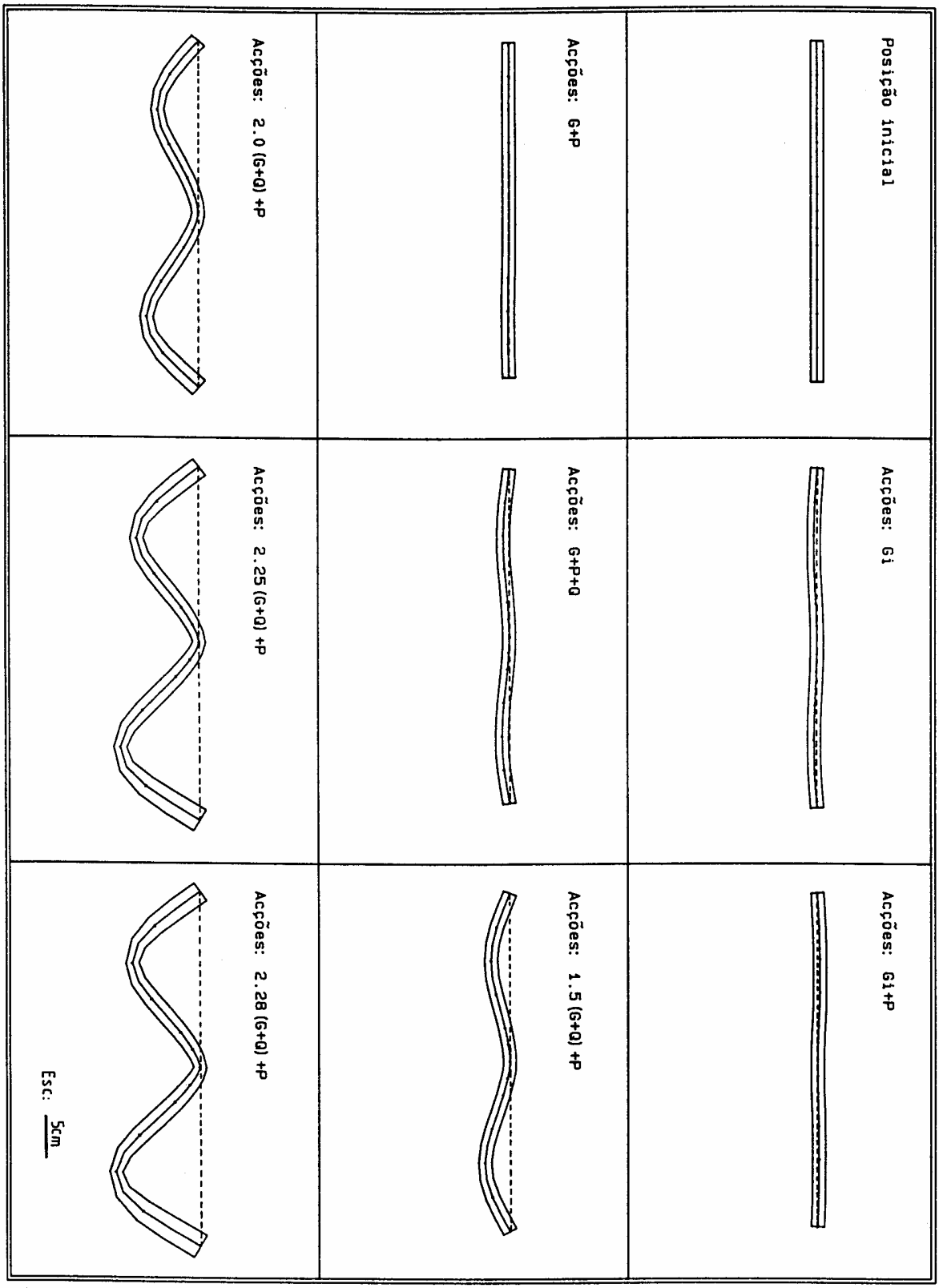
Fig. 6.2 - Diagramas tensões-extensões para o aço das armaduras ordinária e de pré-esforço.

6.3.3 - Resultados da análise

De forma a facilitar o estudo do comportamento da viga pré-esforçada, apresenta-se uma série de figuras que ilustram a evolução da resposta estrutural, para um conjunto seleccionado de incrementos de carga, através da representação:

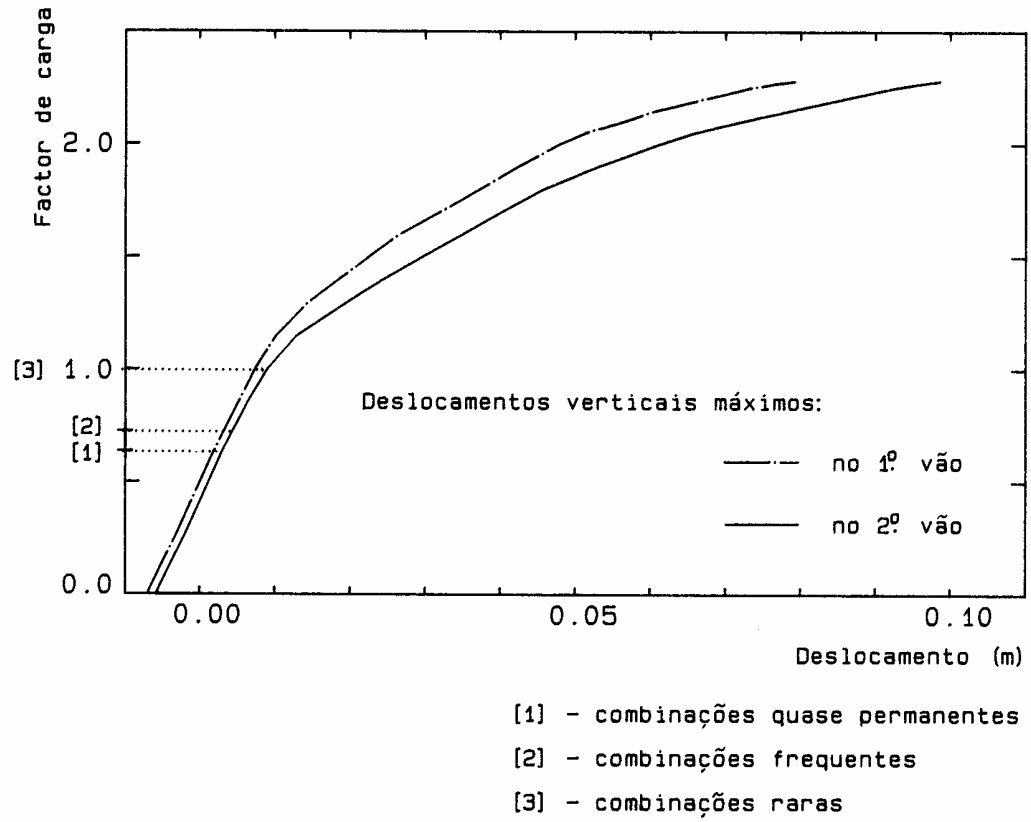
- da deformada da estrutura;
- da distribuição das tensões principais no betão;
- da fendilhação instalada no betão e a respectiva orientação, com a indicação complementar das zonas de plastificação relativas às armaduras ordinárias e de pré-esforço.

A resposta deformacional da viga pré-esforçada é ilustrada na figura 6.3 através das deformadas para vários incrementos de carga e através da curva carga-deslocamentos máximos nos vãos. É aqui representada a deformada para um incremento fictício correspondente às acções permanentes iniciais, G_i, actuando isoladamente. A sua inclusão nesta figura pretende mostrar o efeito do pré-esforço nos deslocamentos verticais ao longo do vão, em comparação com as deformadas obtidas para $G_i + P$ (P indica a acção de pré-esforço) e $G + P$ (G representa as acções permanentes totais). Para os incrementos de carga próximos da rotura verifica-se um acréscimo acentuado dos deslocamentos para variações relativamente pequenas nas acções, permitindo concluir quanto à existência de uma componente de deformação plástica sucessivamente crescente, até se atingir o colapso.



a) Evolução da deformada até ao colapso.

Fig. 6.3 - Resposta deformacional da viga pré-esforçada.



b) Deslocamentos verticais máximos nos vãos.

Fig. 6.3 - Resposta deformacional da viga pré-esforçada (continuação).

Note-se ainda que as flechas no vão da direita são ligeiramente superiores aos da esquerda, devido a existir aí maiores perdas de pré-esforço, ou seja, as tensões instaladas na respectiva armadura são menores.

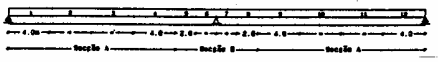
O estudo aos estados limites de utilização, em termos de tensões nas secções, pode ser realizado através da figura 6.4 que representa a distribuição de tensões principais no betão para os seguintes níveis de carregamento:

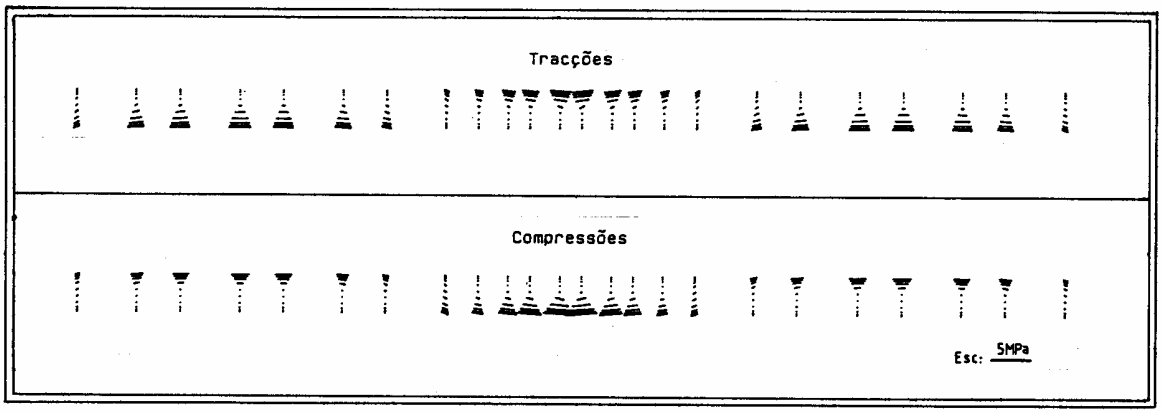
- acções permanentes iniciais (G_i) , mobilizáveis no acto de aplicação do pré-esforço, actuando isoladamente (carregamento fictício);
- acções permanentes iniciais conjuntamente com o pré-esforço ($G_i + P$) , correspondendo às acções em jogo durante o processo de transferência das forças dos macacos para os dispositivos de amarração;
- acções permanentes totais mais pré-esforço ($G + P$);

- combinação quase permanente de acções ($G + P + 0,2Q$), onde Q representa as sobrecargas aplicadas;
- combinação frequente de acções ($G + P + 0,4Q$);
- combinação rara de acções ($G + P + Q$).

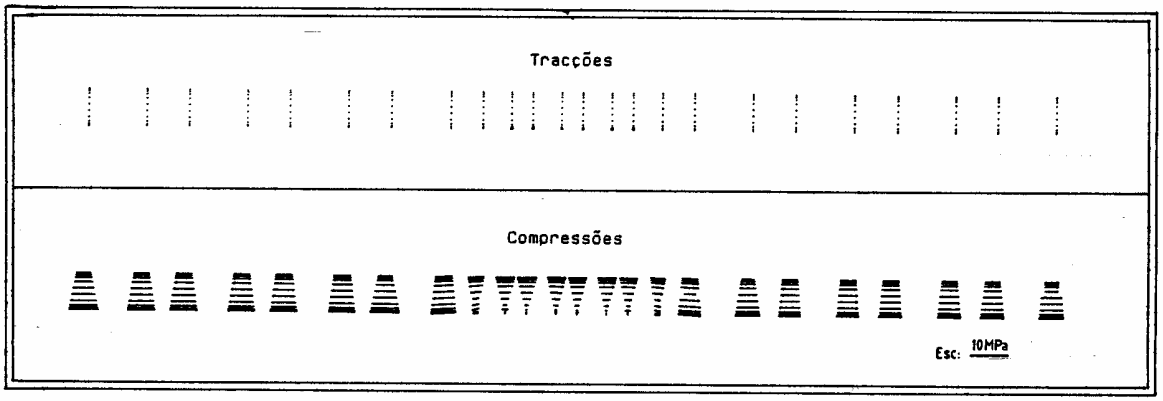
A representação da distribuição das tensões principais para o nível de carga G_i (que não existe na realidade já que actuam em simultâneo com o pré-esforço) tem como objectivo mostrar o efeito benéfico do pré-esforço no anulamento das tensões de tracção (como se verifica para $G_i + P$). Caso essa força não fosse aplicada, as tensões de tracção atingiriam valores relativamente apreciáveis podendo eventualmente ocorrer fendilhação para níveis de carga inferiores aos permitidos regulamentarmente. É possível observar que para uma combinação de acções em que a sobrecarga entra com uma parcela pequena, as tensões instaladas no betão resultam em grande parte das forças de pré-esforço transmitidas a este material. Assinale-se a não existência de tensões de tracção para as combinações quase permanentes de acções e a não ocorrência de qualquer fendilhação para a combinação frequente de acções. Para a combinação rara de acções registou-se a existência de fendas junto ao apoio central, no entanto, o nível de dano introduzido no betão comprimido é relativamente pequeno. Na figura 6.4 é notório o aumento da influência relativa dos esforços de flexão à medida que cresce a parcela da sobrecarga, através da diminuição das tensões de compressão nas fibras inferiores a meio vão e nas fibras superiores junto ao apoio central (verificando-se, inclusivé, em algumas delas o aparecimento de tensões de tracção) e do aumento das compressões nas fibras opostas.

A evolução da resposta da estrutura até ao colapso é obtida por majoração de todas as acções, exceptuando o pré-esforço. A rotura deu-se por esmagamento do betão nas fibras inferiores junto ao apoio central, tendo o último estado de equlíbrio sido obtido para um coeficiente de majoração, γ, igual a 2,28. O estado do betão, para os níveis de carga correspondentes a $\gamma = 1,5$ e $\gamma = 2,28$, é ilustrado nas figuras 6.5 e 6.6, respectivamente, através da representação da distribuição das tensões principais e do padrão de fendilhação. Para o nível de carga último são ainda apresentadas as zonas plastificadas relativas às armaduras ordinárias e de pré-esforço, através de marcas indicativas nos pontos de Gauss. Na figura 6.5 é já possível distinguir perfeitamente a existência de uma biela de compressão, partindo dos apoios extremos para o apoio central, formando um arco que passa pelas fibras superiores nas zonas de meio vão. Em concordância verifica-se uma propagação de fendas relativamente extensa ao longo do comprimento e, também, ao longo da altura. Saliente-se ainda o facto dessa propagação se verificar em três zonas características, nos vãos e junto ao apoio central.

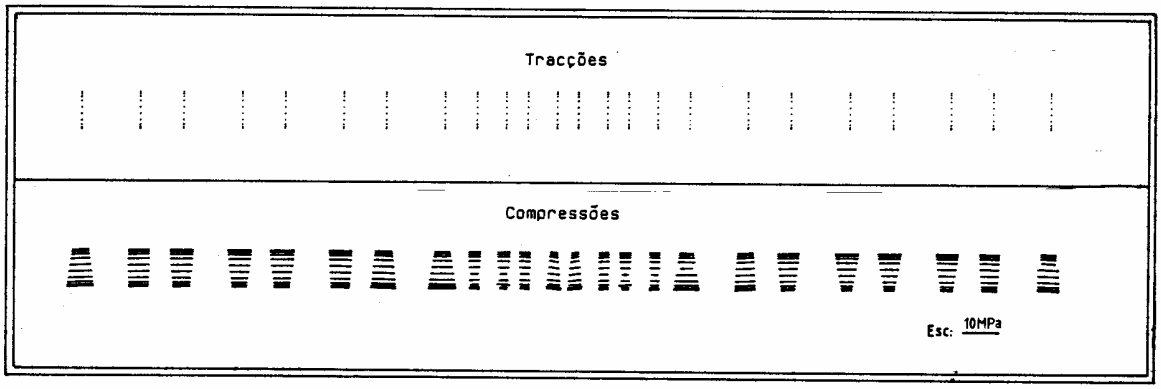




a) Tensões principais para as acções permanentes iniciais (G_i).

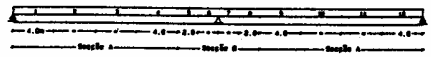


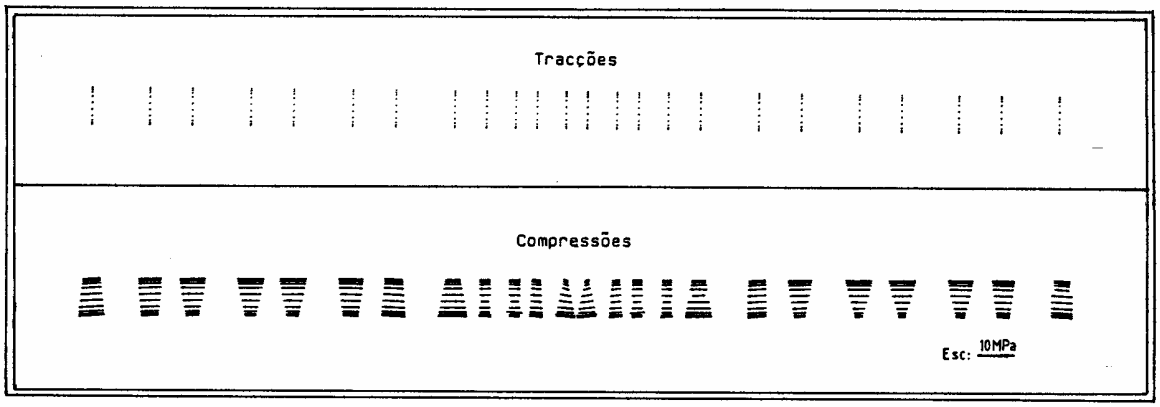
b) Tensões principais no instante de aplicação do pré-esforço ($G_i + P$).



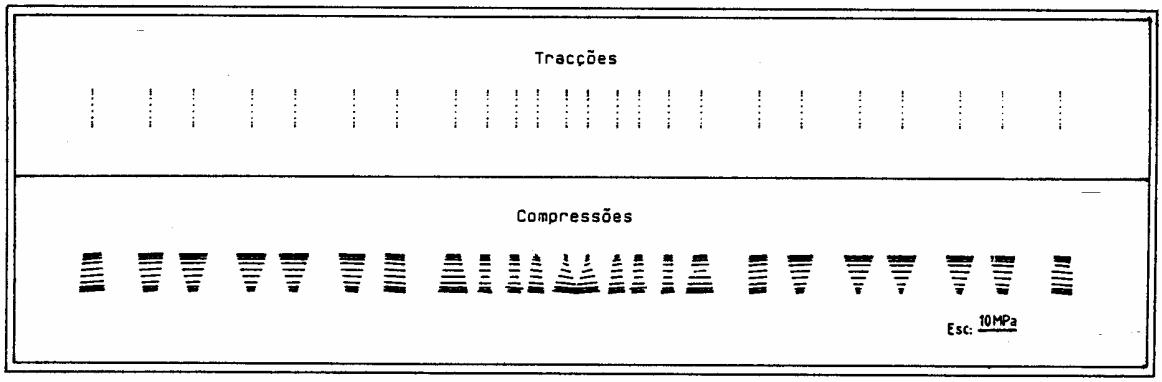
c) Tensões principais para as acções permanentes totais com pré-esforço ($G + P$).

Fig. 6.4 - Distribuição das tensões principais no betão para vários níveis de carregamento.

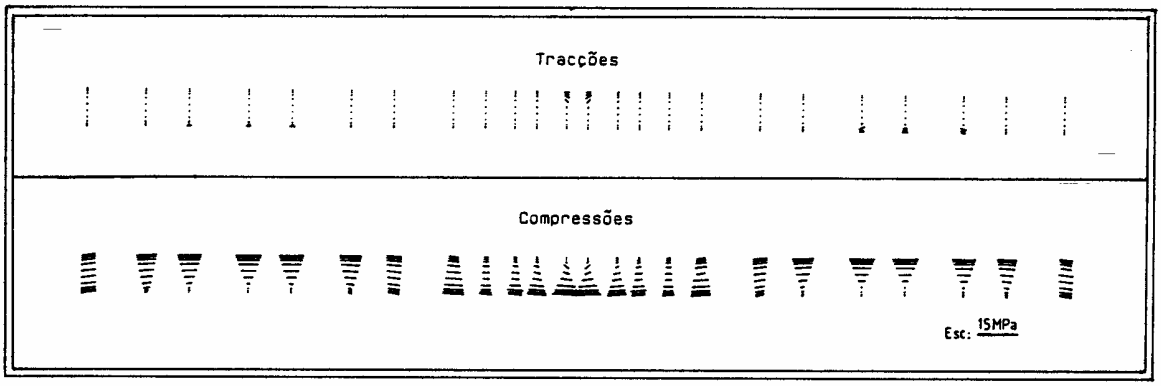




d) Tensões principais para a combinação quase permanente de acções ($\psi_2 = 0,2$).



e) Tensões principais para a combinação frequente de acções ($\psi_1 = 0,4$).



f) Tensões principais para a combinação rara de acções.

Fig. 6.4 - Distribuição das tensões principais no betão para vários níveis de carregamento (continuação).

A figura 6.6 acentua de uma forma mais marcante as características observadas anteriormente. De facto, a biela de compressão referida no parágrafo anterior torna-se mais evidente, sendo possível ainda identificar de forma bastante nítida a região comprimida mais solicitada onde ocorre a rotura do betão por esmagamento. É possível observar o agravamento da extensão da fendilhação nas três zonas atrás referidas, através de um prolongamento das fendas em altura. Complementarmente, são representadas esquematicamente as zonas das armaduras plastificadas, permitindo mais uma vez constatar as regiões mais esforçadas a meio vão e junto ao suporte central. Nos resultados obtidos na presente análise para um nível de carga próximo do colapso, registaram-se na secção mais esforçada extensões máximas de 0,5% na armadura ordinária superior e de 0,9% na armadura de pré-esforço.

6.3.4 - Verificação da segurança

Regulamentarmente (REBAP, 1983; RSA, 1983), a avaliação da segurança da viga pré-esforçada compreende a verificação em relação ao estado limite último de resistência e aos estados limites de utilização, nomeadamente, o estado limite de deformação e o estado limite de fendilhação. Nos parágrafos seguintes apresentam-se as verificações relativas a cada um dos estados limites mencionados.

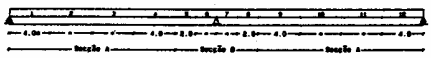
Estado limite de deformação

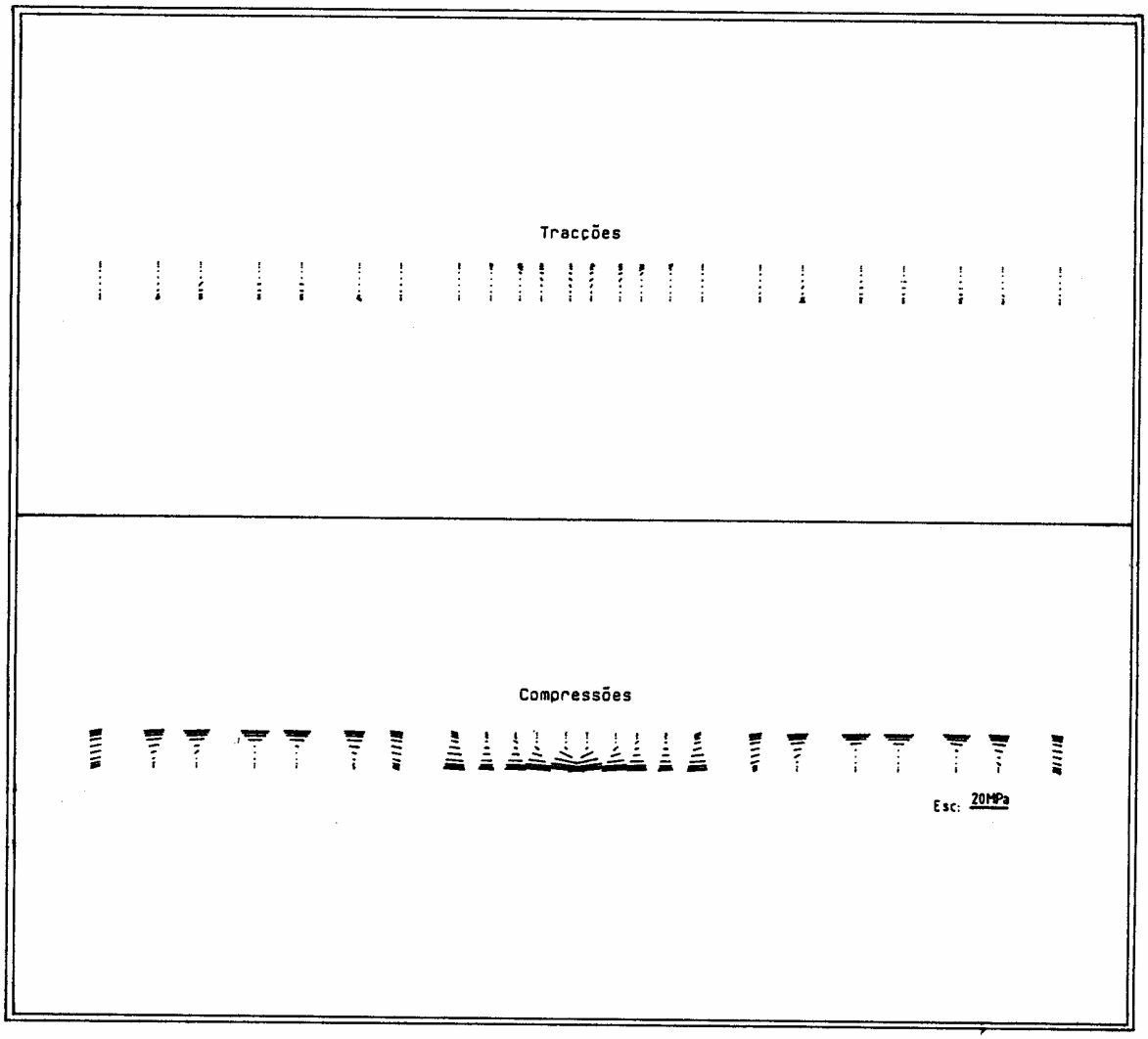
A verificação da segurança em relação ao estado limite de deformação para a combinação frequente de acções ($\psi = 0,4$) consiste na satisfação da condição de flecha máxima, instalada no vão da direita (onde se verificam maiores deformações), igual a 1/400 (ou 1/700, no caso de pontes rodoviárias) desse vão. Tendo sido determinado o valor de 0.005m pela análise não linear realizada e considerando o efeito da fluência do betão pelo método bilinear (Favre, 1980), para um coeficiente de fluência igual a 2.5 , obteve-se:

$$w_{máx} = 0,011m \leq \frac{L}{400} = 0,050m \qquad (6.7)$$

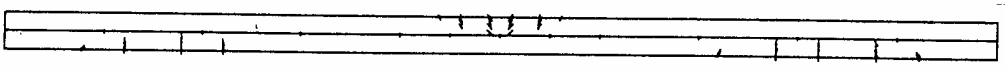
Estado limite de fendilhação

De acordo com o regulamento e conforme foi descrito na secção 6.2, a verificação da segurança em relação ao estado limite de fendilhação (considerando, por hipótese, um meio moderadamente agressivo) exige a satisfação simultânea da ausência de tracções para a combinação quase permanente de acções ($\psi_2 = 0,2$), uma largura máxima de



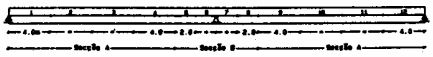


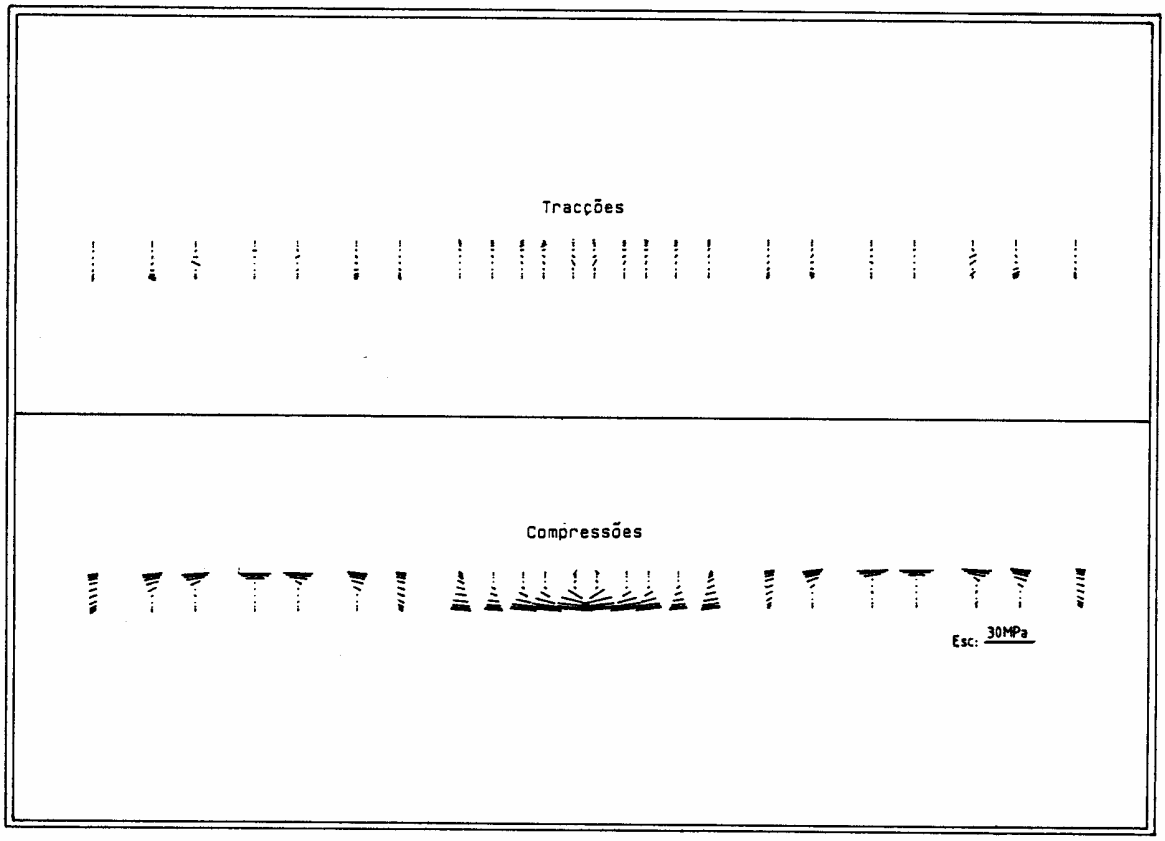
a) Tensões principais para $\gamma = 1,5$.



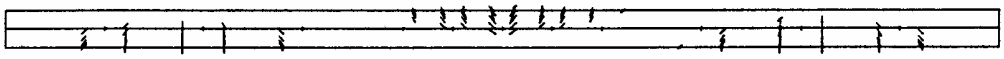
b) Fendilhação para $\gamma = 1,5$.

Fig. 6.5 - Estado do betão para um coeficiente de majoração de acções igual a 1,5.





a) Tensões principais para $\gamma = 2,28$



b) Fendilhação para $\gamma = 2,28$.

c) Plastificação das armaduras para $\gamma = 2,28$.

Fig. 6.6 - Estado do betão para um coeficiente de majoração de acções igual a 2,28 (próximo do colapso).

fendas inferior a 0,1mm para a combinação frequente de acções ($\psi_1 = 0,4$) e uma tensão máxima de compressão no betão inferior ao valor de cálculo da tensão de rotura à compressão para combinações raras de acções.

A observação das distribuições de tensões principais, representadas na figura 6.4 para cada uma das combinações de acções mencionadas, permitem fazer as verificações atrás enunciadas. A constatação de não existência de tensões de tracção para a combinação quase permanente de acções e a não ocorrência de qualquer fendilhação para a combinação frequente de acções, permite validar a segurança aos estados limites de descompressão e de largura de fendas, respectivamente. Registou-se ainda uma tensão máxima de compressão de 10,6MPa nas fibras inferiores junto ao apoio central, para a combinação rara de acções, ficando aquém do valor máximo permitido de 20,0 MPa. Complementarmente, verificou-se a ausência de tracções para o instante de aplicação do pré-esforço e uma tensão máxima de compressão de 7,6MPa junto à ancoragem, o que conjuntamente com as restantes verificações permite validar a segurança ao estado limite de fendilhação.

Estado limite último de resistência

A verificação da segurança em relação ao estado limite último de resistência é expressa pela condição (6.4) que relaciona o coeficiente de segurança global, γ_s (coincidente com o valor do coeficiente de majoração das acções que conduziram ao colapso da estrutura), com os coeficientes de segurança parciais definidos para as acções (γ_f) e para as propriedades mecânicas dos materiais (γ_m).

Na presente análise, o valor obtido para o coeficiente de segurança global, $\gamma_s = 2,28$, assegura a verificação da condição referida. De facto, tendo em conta que a rotura se dá por esmagamento do betão, o coeficiente de segurança γ_m relativo às propriedades dos materiais coincide com o do betão, $\gamma_m = \gamma_c = 1,50$. Quanto ao coeficiente γ_f, toma o valor de 1,50 no caso mais desfavorável, ou menor se o valor das acções permanentes for considerado com bastante rigor (situação para a qual o coeficiente γ_g que afecta estas acções pode ser de 1,35). Mesmo no caso mais desfavorável a segurança ao estado último considerado é verificada:

$$\gamma_s = 2,28 \geq \gamma_f \cdot \gamma_m = 2,25 \qquad (6.8)$$

Nesta análise, deve-se ter em conta que não se consideraram todas as hipóteses de combinação de acções últimas, no entanto, o caso estudado é o mais desfavorável para a obtenção de esforços mais elevados na secção crítica localizada sobre o apoio intermédio.

Numa avaliação mais rigorosa da segurança ao estado limite último de resistência, haveria que considerar hipóteses de combinação de acções que tivessem em conta a alternância de sobrecargas entre os vãos.

6.3.5 - Carga de colapso (pelo método das rótulas plásticas)

A confirmação dos resultados fornecidos pelo modelo não linear, nomeadamente a aferição da máxima capacidade de carga, pode ser realizada pelo método das rótulas plásticas.

A figura 6.7 ilustra a configuração de colapso obtida por esta análise plástica para metade do comprimento da viga (devido à simetria). São aí representadas as duas rótulas que conduziram à rotura, uma sobre o apoio central e a outra a 7,3m da extremidade, determinadas tendo em conta o seguinte:

- as acções actuantes na estrutura são traduzidas por uma carga uniformemente distribuída, p_u, ao longo do seu vão.
- A capacidade portante é definida através dos momentos flectores resistentes (ilustrados na figura 6.7), obtidos por um cálculo à rotura nas secções correspondentes às rótulas plásticas, considerando os valores característicos das tensões de resistência dos materiais e o diagrama rectangular para o betão, resultando nos valores de $M_{RK}^{vão} = 6334 KN.m$ e $M_{RK}^{apoio} = 13322 KN.m$.

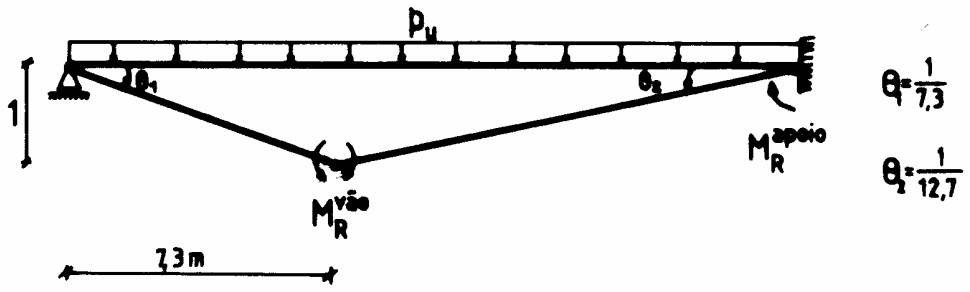


Fig. 6.7 - Configuração de colapso (método das rótulas plásticas).

Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, obtém-se a carga, p_u, que conduz à configuração de colapso apresentada na figura 6.7:

$$(7,3 \cdot p_u + 12,7 \cdot p_u) \cdot 0,5 = 6334 \cdot (\theta_1 + \theta_2) + 13322 \cdot \theta_2 \qquad (6.9)$$

resultando em,

$$p_u = 241,5 KN/m \qquad (6.10)$$

O coeficiente global de segurança, γ_s, é obtido dividindo o valor da carga última pelo respectivo valor característico (110 KN/m):

$$\gamma_s = \frac{241,5}{110} = 2,20 \qquad (6.11)$$

Comparando os valores determinados em (6.8) e (6.11) é possível verificar a semelhança nos resultados. Desta forma foi possível aferir a carga de colapso obtida pelo modelo não linear desenvolvido, através de um método simples de análise plástica limite.

6.3.6 - Conclusões

O estudo da resposta estrutural da viga contínua de dois vãos com secção variável (dimensionada na secção 3.4) para as combinações de acções consideradas na presente análise, permitiu concluir que a estrutura em causa apresenta um comportamento ajustado à respectiva geometria e às características mecânicas dos materiais constituintes, verificando-se complementarmente a satisfação das condições de segurança estabelecidas regulamentarmente para este tipo de estruturas.

A análise efectuada permitiu validar a solução apresentada pelo programa de dimensionamento das armaduras e verificação aos estados limites regulamentares, assim como mostrar a utilidade do modelo computacional de análise não linear de estruturas pré-esforçadas através de elementos de viga. Foi possível ainda observar as potencialidades dos programas através da apresentação de figuras obtidas directamente do processo de resolução dos problemas em causa, permitindo assim uma interpretação bastante facilitada dos resultados.

A determinação da carga de colapso pelo método das rótulas plásticas permitiu aferir a carga de colapso fornecida pelo presente modelo.

6.4 - VIGA PRÉ-ESFORÇADA DA NOVA PONTE DE MACAU

6.4.1 - Objectivos da análise

Nesta secção apresentam-se os resultados de um estudo efectuado tendo em vista a caracterização do comportamento estrutural até à rotura e a avaliação da segurança de uma das vigas pré-esforçadas projectadas para a execução do tabuleiro da Nova Ponte de Macau (Figueiras, 1990a e 1990b; Póvoas, 1991), com relevo para as zonas de apoio de altura reduzida.

A adopção de uma discretização conveniente, que tenha em conta as singularidades da estrutura em causa e seja exequível em pequenos computadores, de uso corrente, foi também um dos objectivos deste exemplo. Desta forma, pretende-se mostrar as potencialidades do presente modelo computacional de análise não linear com recurso a pequenos meios informáticos.

A verificação da segurança é discutida à luz dos resultados obtidos na análise não linear e das disposições regulamentares portuguesas em vigor para este tipo de estruturas (REBAP, 1983; RSA, 1983).

6.4.2 - Dados do problema

Na figura 6.8 ilustra-se a geometria da viga em análise, com destaque para as zonas de apoio que são objecto de especial atenção devido à sua peculiaridade relativamente às restantes zonas da estrutura.

De acordo com a solução preconizada no projecto, a viga é pré-fabricada sendo constituída pela armadura representada na figura 6.9. Numa fase posterior, a região superior do banzo é betonada *in situ*, como mostra a figura referida. A armadura ordinária nas zonas a meio vão foi obtida através de um cálculo à rotura com verificação ao estado limite último de resistência. De acordo com os resultados obtidos e obedecendo às condições expressas regulamentarmente, foi adoptada a disposição da armadura ilustrada na figura 6.10d.

Atendendo à simetria da estrutura, analisou-se metade do seu vão. Na discretização por elementos finitos optou-se por uma malha de elementos planos para representar a zona de apoio e uma malha de elementos de viga para modelar as restantes zonas até à secção localizada a meio vão. Na figura 6.10 representa-se esquematicamente a malha de elementos finitos adoptada, as características geométricas (espessura das secções de betão nos elementos planos e padrão de camadas nos elementos de viga, áreas das armaduras

ordinária e de pré-esforço) e as condições de apoio. Os valores adoptados na definição da espessura dos elementos, assim como a respectiva discretização, respeitam no essencial os valores indicados no projecto (ver figura 6.8), com as simplificações decorrentes das limitações impostas pelos elementos finitos usados (espessura do betão e área da armadura com valores constantes no domínio de cada elemento plano, ou no domínio de cada camada do elemento de viga, conforme o caso em questão). Os cabos de pré-esforço e os varões inclinados (representados na figura 6.10c) são modelados por elementos unidimensionais de cabo, sendo atribuída uma força de pré-esforço nula para os varões da armadura ordinária. As condições de apoio garantem a ausência de deslocamentos verticais próximo das extremidades e impedem os deslocamentos horizontais na secção de meio vão, assegurando simultaneamente a mobilização do momento flector actuante nessa secção.

No Quadro 6.1 indica-se os valores considerados na definição das propriedades mecânicas dos materiais, ilustrando-se na figura 6.11 os diagramas tensões-extensões relativos aos aços das armaduras.

Quadro 6.1 - Propriedades mecânicas dos materiais (B40; A400; A1665). Unidades: MPa.

BETÃO		AÇO (Armadura ordinária e de pré-esforço)		
Mod. Young:	$E_c = 33500$	Mod. Young:	$E_s = 200000$	$E_p = 195000$
Coef. Poisson:	$\nu = 0,18$		$E'_s = 20000$	$E'_p = 79000$
			$E''_s = 6000$	$E''_p = 9000$
Tens. ced. comp.:	$f_{ck} = 35,0$	Tens. ced.:	$f_{syk} = 355$	$f_{pyk} = 1400$
Ten. rot. tracção:	$f_{ctm} = 3,1$		$f'_{syk} = 400$	$f'_{pyk} = 1665$
		Tens. últ.:	$f_{suk} = 440$	$f_{puk} = 1850$

As acções actuantes na viga pré-esforçada compreendem:

- a força de pré-esforço (P) aplicada sobre o betão , com o valor de 2100 KN por cabo, na amarração;
- o peso próprio da estrutura (G_i), sendo o peso volúmico do betão de 25 KN/m^3;
- o peso próprio da laje, dos revestimentos e da guarda ($G - G_i$), correspondendo a uma carga uniformemente distribuída na face superior da viga de 12,6 KN/m;
- a sobrecarga de utilização (Q), representada também por uma carga uniformemente distribuída no banzo superior de 12,8 KN/m.

As forças instaladas nas armaduras de pré-esforço foram quantificadas a partir da força transmitida pelos macacos, deduzindo-lhe as perdas instantâneas e diferidas. Tendo em conta que nos dois cabos inferiores o pré-esforço é aplicado na extremidade em estudo e no cabo superior se aplica na extremidade oposta, o Quadro 6.2 apresenta valores calculados das perdas na secção de ancoragem ou amarração passiva, consoante o cabo

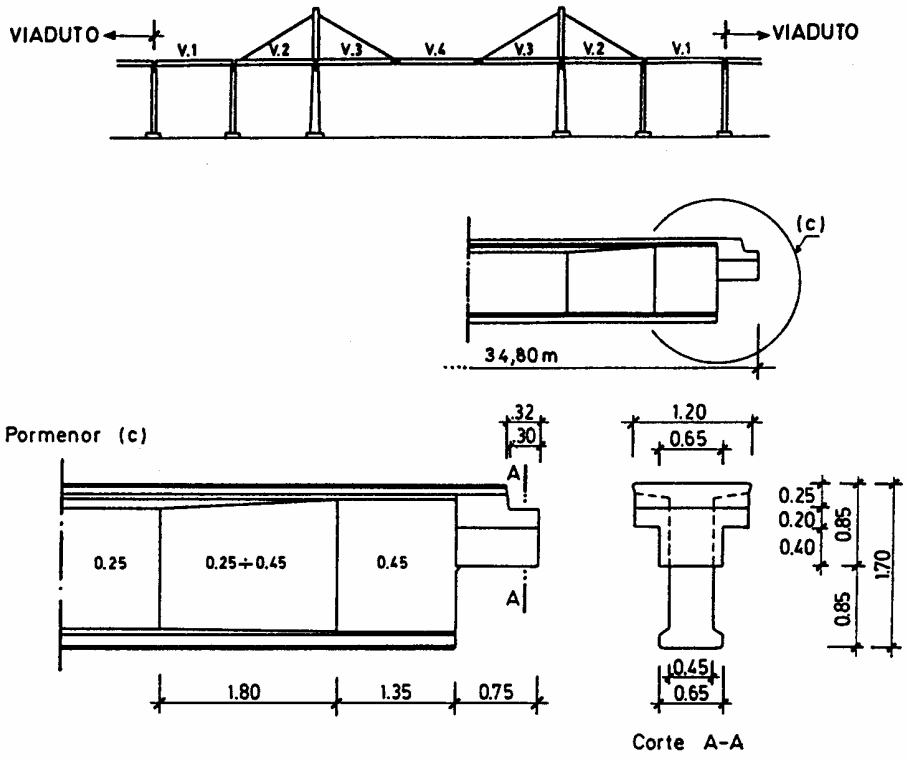


Fig. 6.8 - Geometria da viga pré-esforçada (viga V.4).

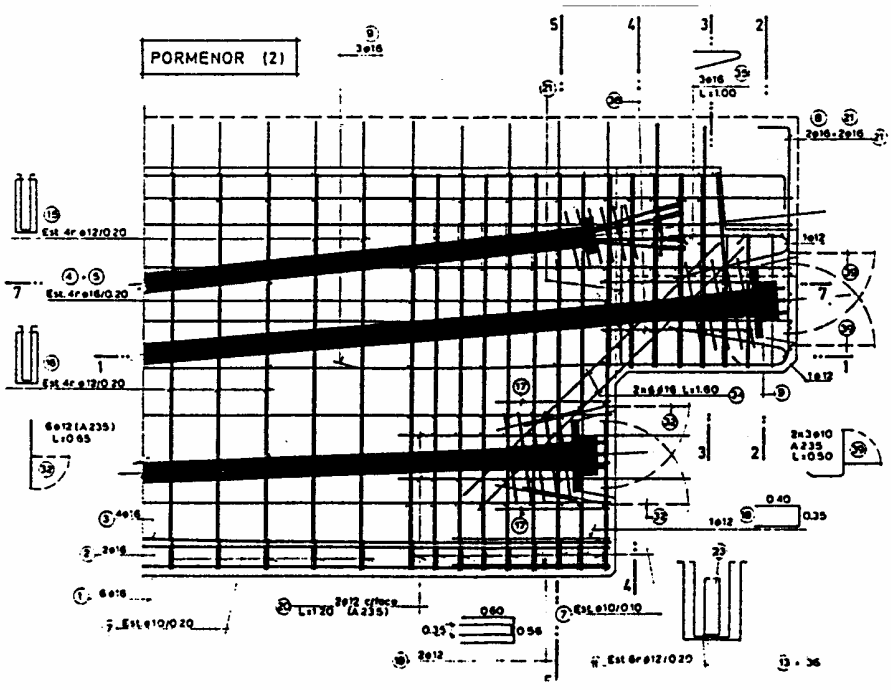
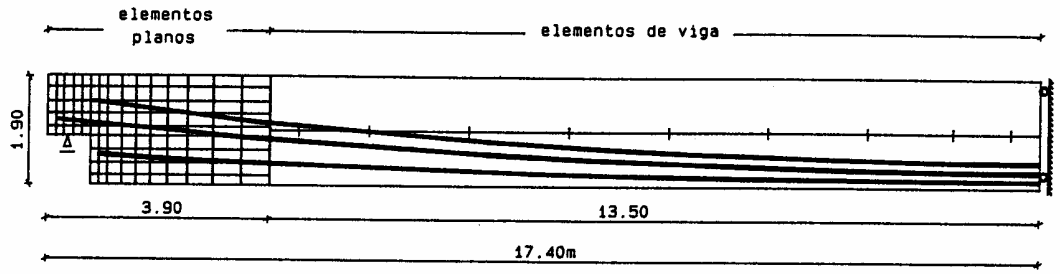
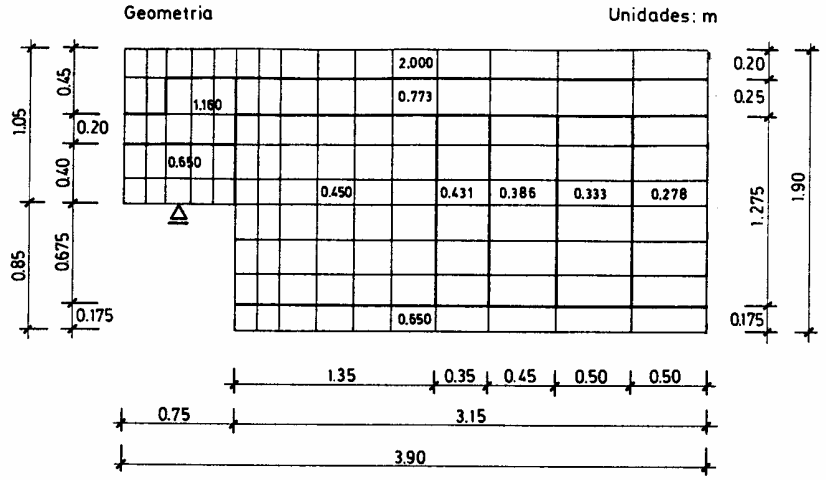


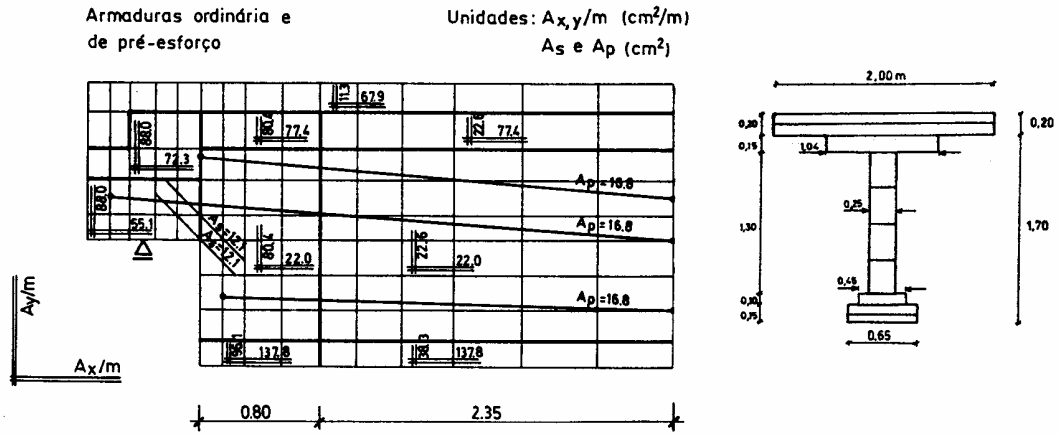
Fig. 6.9 - Pormenor da distribuição da armadura (desenho do projecto).



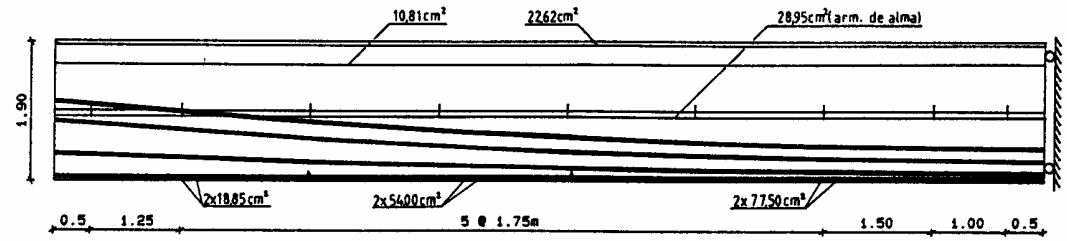
a) Malha de elementos finitos.



b) Malha de elementos planos e respectivas espessuras.



c) Disposição das armaduras nos elementos planos e padrão de camadas para os elementos de viga.



d) Disposição das armaduras nos elementos de viga.

Fig. 6.10 - Características geométricas e condições de apoio consideradas na análise da viga pré-esforçada.

considerado, na secção de transição entre os elementos planos e de viga, e na secção a meio vão. Nestes cálculos usaram-se valores correntes preconizados na regulamentação, adoptados também na secção 3.4.

Quadro 6.2 - Perdas de pré-esforço nos cabos de pré-esforço (%).

SECÇÃO	CABO 1			CABO 2			CABO 3		
	Instant.	Diferidas	Totais	Instant.	Diferidas	Totais	Instant.	Diferidas	Totais
Ancoragem ou amarr. passiva	0,7	12,5	13,2	0,7	12,6	13,3	25,5	7,0	32,6
de transição	2,5	12,0	14,1	3,6	11,8	15,4	23,5	7,3	30,8
a meio vão	9,7	5,5	15,2	14,0	5,3	19,3	13,7	5,3	19,0

Tendo em conta que a construção é feita em fases sucessivas e que as cargas não actuam em simultâneo, a solução não linear vem determinada pela seguinte história de carregamento:

a) aplicação do pré-esforço ($P + G_i$);

b) betonagem da laje *in situ*, sendo consideradas também as cargas permanentes devidas aos revestimentos e guardas ($P + G$);

c) introdução da sobrecarga com valores crescentes ($P + G + \psi Q$, com $0 < \psi \leq 1$);

d) majoração de todas as cargas permanentes e variáveis (com excepção do pré-esforço) até ao colapso da estrutura.

6.4.3 - Resultados da análise

A análise dos resultados obtidos apoia-se num conjunto de figuras dispostas em dois grupos distintos. O primeiro grupo visa, essencialmente, fornecer uma aproximação qualitativa do comportamento global da estrutura através de figuras representativas, para sucessivos níveis de carga, das seguintes características:

- deformada da estrutura;
- distribuição das tensões principais no betão;
- configuração da fendilhação;
- localização das zonas onde se verifica a plastificação das armaduras;
- distribuição das extensões plásticas no betão.

Em complemento às informações de carácter eminentemente qualitativo contidas nesse conjunto de figuras, apresenta-se um segundo grupo ilustrativo da evolução de um conjunto seleccionado de parâmetros que contemplam:

- o traçado dos deslocamentos em secções determinantes;
- a evolução das tensões normais nas camadas de betão mais esforçadas;
- a distribuição das tensões instaladas nas armaduras, também, nas secções marcantes;
- os diagramas de tensões no betão e nas armaduras a meio vão para vários níveis de carga.

Conforme ilustra a figura 6.12, o campo de deslocamentos instalado na estrutura quando se aplica o pré-esforço ($P + G_i$) é caracterizado por deslocamentos verticais com sentido ascendente, embora de valores reduzidos. Desta maneira, é possível visualizar de forma clara o efeito ascensional introduzido pelo pré-esforço actuando no sentido contrário ao do peso próprio da viga.

O traçado das tensões principais representado na figura 6.13 permite verificar de uma forma clara a influência das forças de compressão introduzidas pelos cabos de pré-esforço. De facto, as tensões principais de compressão apresentam uma orientação que acompanham, aproximadamente, a geometria da armadura de pré-esforço. Por outro lado, as tensões de tracção são nulas em praticamente todas as zonas da viga, apresentando alguns valores significativos junto à ancoragem do cabo inferior e na zona de amarração passiva do cabo superior, não se verificando, contudo, a ocorrência de qualquer fendilhação. O dano introduzido no betão comprimido é praticamente desprezável, registando-se os valores máximos na zona de amarração do cabo inferior, como se pode constatar na figura 6.13 e complementarmente na figura 6.14 (representativa da distribuição das extensões plásticas efectivas, definidas para valores correspondentes de tensão efectiva, instaladas no betão durante a aplicação do pré-esforço). Saliente-se que a zona em referência apresenta uma menor espessura do que as zonas de ancoragem dos cabos superiores. Registe-se ainda que a faixa superior dos elementos planos e as camadas superiores dos elementos de viga apresentam valores nulos para as tensões, atendendo ao facto de a zona correspondente à laje ainda não existir nesta fase.

Na figura 6.13 é possível verificar que na secção de transição entre os dois tipos de discretização usados a orientação das tensões de compressão no elemento de viga não acompanha totalmente a orientação dessas tensões observadas nos elementos planos. Sendo mais notória nas fibras superiores e inferiores, esta diferença justifica-se porque nos

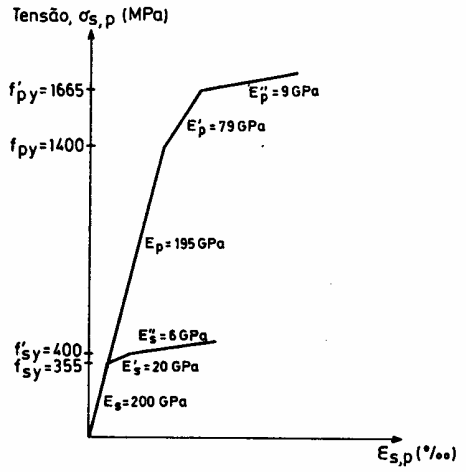


Fig. 6.11 - Diagramas tensões-extensões para o aço das armaduras ordinária (A400) e de pré-esforço (A1665 de 0,6").

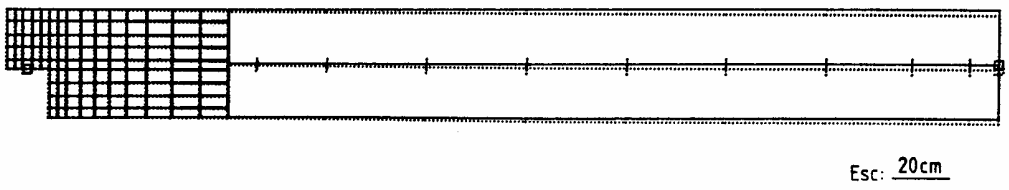


Fig. 6.12 - Deformada da viga pré-esforçada. Aplicação do pré-esforço.

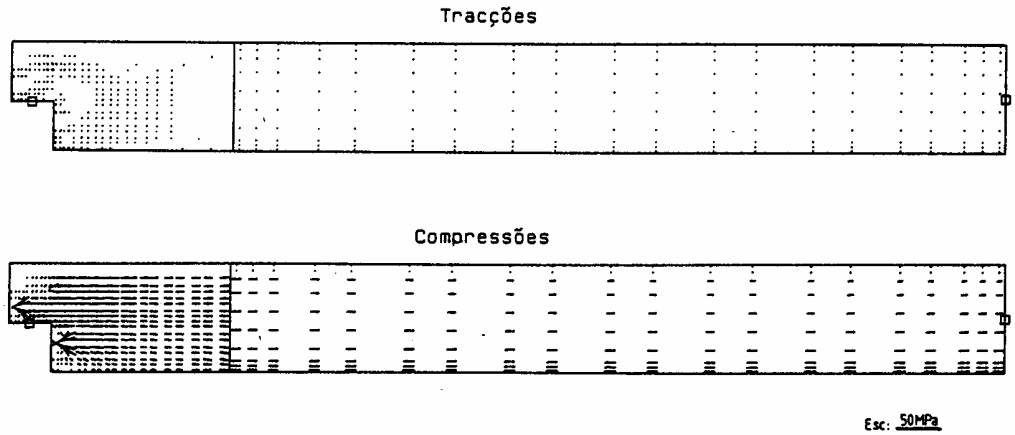


Fig. 6.13 - Distribuição das tensões principais no betão. Aplicação do pré-esforço.

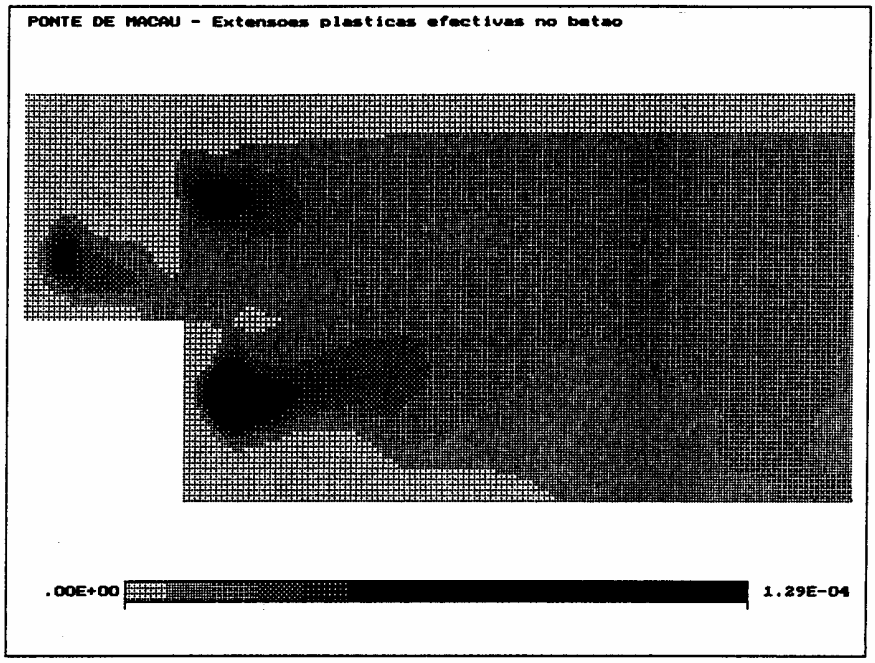


Fig.6.14 - Distribuição das extensões plásticas equivalentes no betão. Aplicação do pré-esforço.

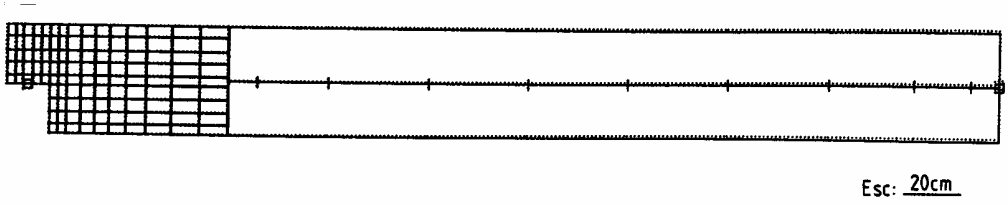


Fig. 6.15 - Deformada da viga pré-esforçada. Betonagem da laje.

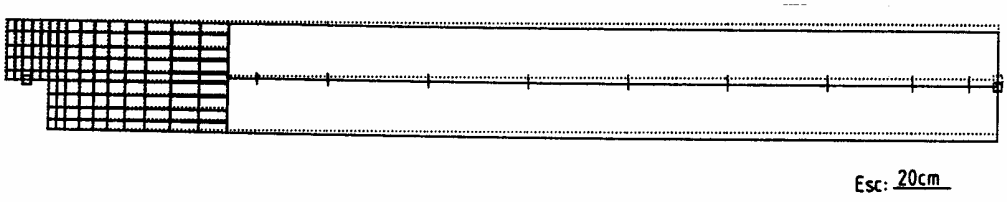


Fig. 6.16 - Deformada da viga pré-esforçada. Combinação frequente de acções.

elementos de viga a distribuição das tensões tangenciais ao longo da altura é considerada pelo seu valor médio, enquanto que na realidade essas tensões apresentam, neste caso, valores menores nos extremos tal como é obtido nos elementos planos.

Pode assim concluir-se que existe uma total concordância entre os campos de tensões e de deslocamentos instalados na viga pré-esforçada, verificando-se em ambos que a acção do pré-esforço supera, ainda que moderadamente, o peso próprio da estrutura.

Durante a fase de betonagem da laje e de aplicação das restantes cargas permanentes, as flechas resultantes da aplicação do pré-esforço são completamente anuladas, verificando-se inclusivé a existência de deslocamentos verticais no sentido descendente embora apresentem valores muito pequenos (figura 6.15). Verifica-se assim que, em termos de resposta deformacional, o pré-esforço anula aproximadamente o efeito das acções permanentes que actuam na estrutura.

Seguidamente, o carregamento continua a aumentar através da majoração da sobrecarga de utilização, verificando-se que a deformada típica da estrutura, ilustrada na figura 6.16 para o valor frequente da sobrecarga ($\psi_1 = 0,4$), não sofre grandes variações na sua configuração com o aumento desta acção, para além do acréscimo moderado dos deslocamentos.

A figura 6.17 permite observar a evolução das distribuições das tensões principais no betão na fase de serviço da estrutura. Em termos gerais, nota-se o aumento significativo da influência da parcela de flexão devida às acções verticais em relação à acção do pré-esforço sobretudo nas zonas próximas do meio vão, traduzindo-se no desaparecimento das tensões de compressão nas fibras inferiores das zonas referidas dando lugar ao aparecimento de tracções significativas que conduzem à abertura de fendas, como se pode ver na figura 6.18 relativamente à combinação rara de acções. A não ocorrência de qualquer abertura de fendas para o valor quase-permanente da sobrecarga ($\psi_2 = 0,2$) e o confinamento da fendilhação às regiões indicadas na figura atrás mencionada com pequenos valores registados quanto à sua largura, permite realçar o bom desempenho da estrutura para as cargas de utilização corrente.

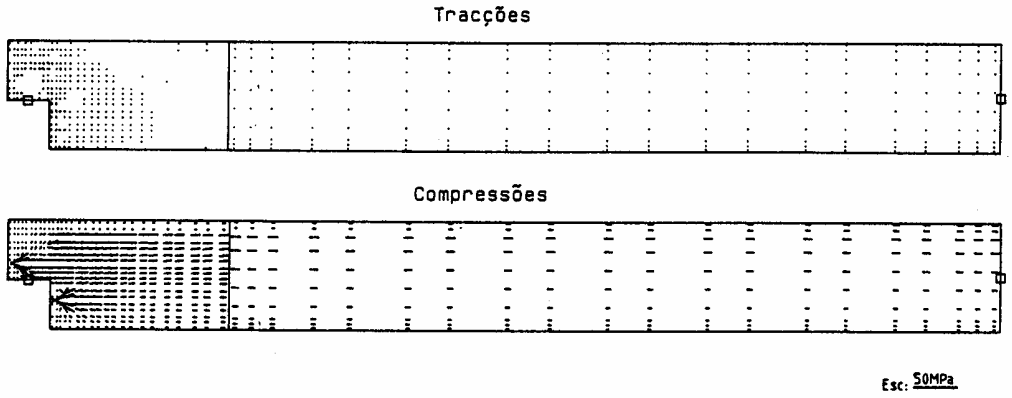
A evolução da resposta deformacional durante a última fase de carga, caracterizada pela majoração de todas as acções (exceptuando o pré-esforço), é ilustrada na figura 6.19 para um conjunto seleccionado de valores do coeficiente de majoração, γ, correspondendo o mais elevado ($\gamma = 2,30$) ao último estado de equilíbrio alcançado antes de se atingir o colapso da estrutura. Registe-se a diminuição significativa da rigidez da viga, nomeadamente, para as deformadas correspondentes aos coeficientes $\gamma = 2,00$ e $\gamma = 2,30$, associada a uma plastificação progressiva das armaduras, primeiramente nas secções próximas do meio vão e avançando posteriormente para zonas mais afastadas.

Observa-se que os deslocamentos verticais sucessivamente crescentes acompanhados, naturalmente, por rotações no apoio cada vez maiores, não originaram perturbações na deformação obtida na secção de transição entre os elementos planos e o elemento de viga. Por sua vez, o desenvolvimento ocorrido, nesta fase de carregamento, na distribuição das tensões principais no betão é apresentado na figura 6.20. É possível constatar a progressiva individualização de duas bielas de compressão (uma partindo do apoio vertical e outra desenvolvendo-se a partir da amarração do cabo inferior) na zona de altura reduzida e ancoragem dos cabos convergindo para uma única biela a partir, aproximadamente, da secção de transição atrás referida. Essa individualização vai-se tornando cada vez mais marcante em consequência do aumento da influência do efeito de flexão, devido às cargas verticais aplicadas, relativamente à acção do pré-esforço.

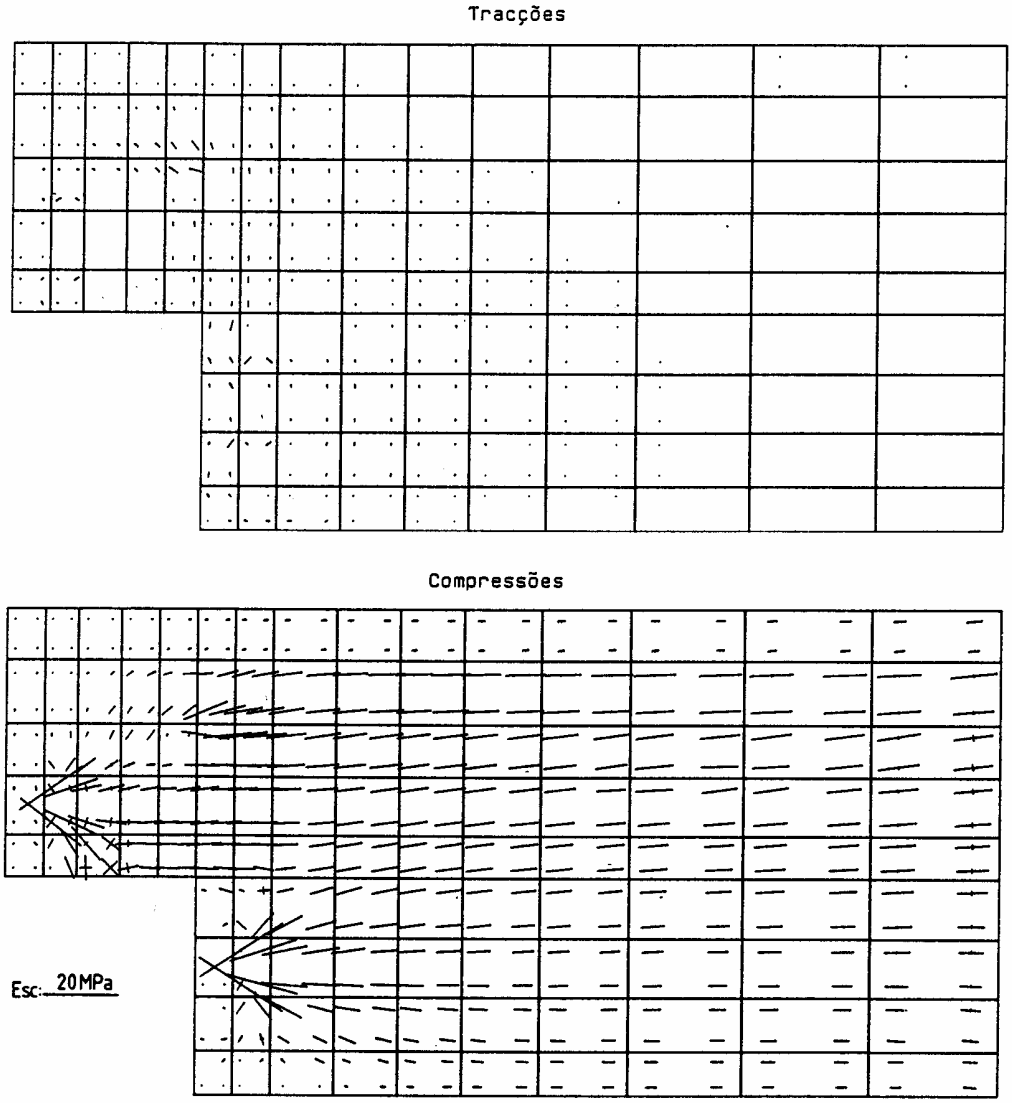
Em concordância com a orientação das tensões principais apresentadas, obtiveram-se os padrões de fendilhação ilustrados na figura 6.21. Verifica-se a existência de dois grupos de fendas: o primeiro, é constituído por fendas inclinadas e localizado na transição entre as secções de altura reduzida e normal; o segundo grupo é formado essencialmente por fendas de flexão. Complementarmente, registou-se ainda a existência de duas fendas na zona de amarração passiva do cabo superior devidas, essencialmente, ao crescimento do esforço transverso nessa zona como resultado do aumento das cargas e às tracções desenvolvidas durante a aplicação do pré-esforço. Refira-se, no entanto, que na realidade essa amarração não é feita num único ponto, como se considerou na presente análise, mas sim distribuída na vizinhança do elemento em questão. A repartição da força de tracção provocada pelo pré-esforço vai permitir uma suavização na variação das tensões impedindo assim a ocorrência da fendilhação mencionada. Verifica-se para o nível de carga próximo do colapso ($\gamma = 2,30$) uma grande propagação da fendilhação ao longo do comprimento e da altura, estando a sua configuração de acordo com a dispensa de armadura ordinária adoptada. Assinale-se ainda a concordância na orientação da fendilhação obtida nos dois tipos de elementos finitos usados.

A figura 6.22 indica, para a carga próxima do colapso, a extensão das zonas plastificadas relativas às armaduras, ordinária e de pré-esforço, em comparação com o respectivo padrão de fendilhação. É possível observar o comprimento relativamente extenso de armaduras plastificadas, nomeadamente, as que se encontram nos níveis mais inferiores.

Globalmente, as figuras apresentadas fornecem a indicação clara de que as regiões superiores próximas do meio vão são aquelas que se apresentam mais esforçadas imediatamente antes do colapso. Torna-se assim evidente que a carga última da estrutura foi determinada pelo esmagamento do betão na camada superior do elemento de viga que contém o eixo de simetria, associada à cedência da armadura horizontal inferior ($\epsilon_s \cong 0,7\%$), confirmando assim a rotura por flexão.

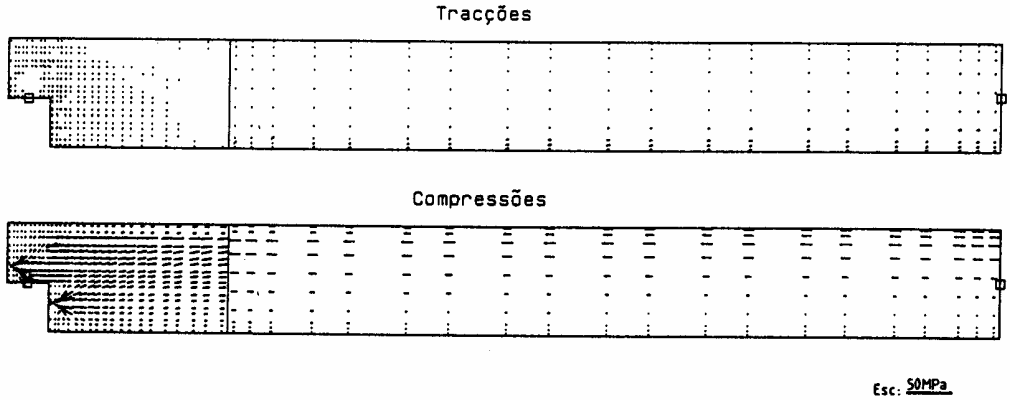


a) Combinação quase permanente de acções.



b) Combinação frequente de acções (zona de apoio).

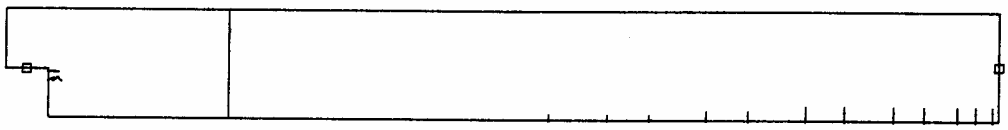
Fig. 6.17 - Distribuição das tensões principais no betão.



c) Combinação rara de acções.

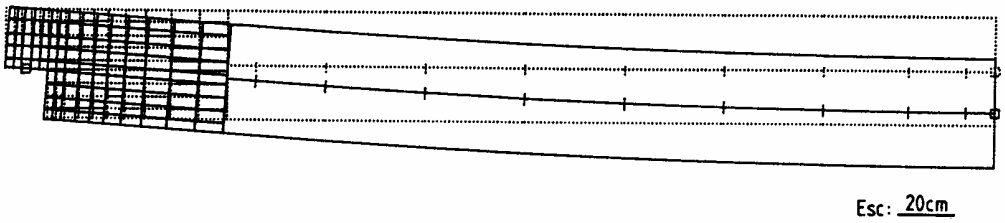
Fig. 6.17 - Distribuição das tensões principais no betão (continuação).

a) Combinação frequente de acções.

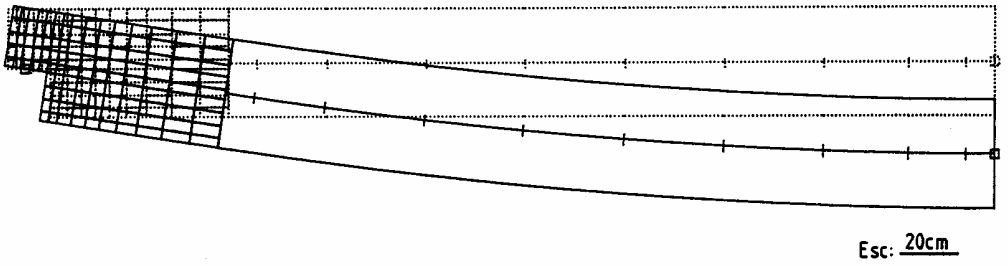


b) Combinação rara de acções.

Fig. 6.18 - Configuração da fendilhação.

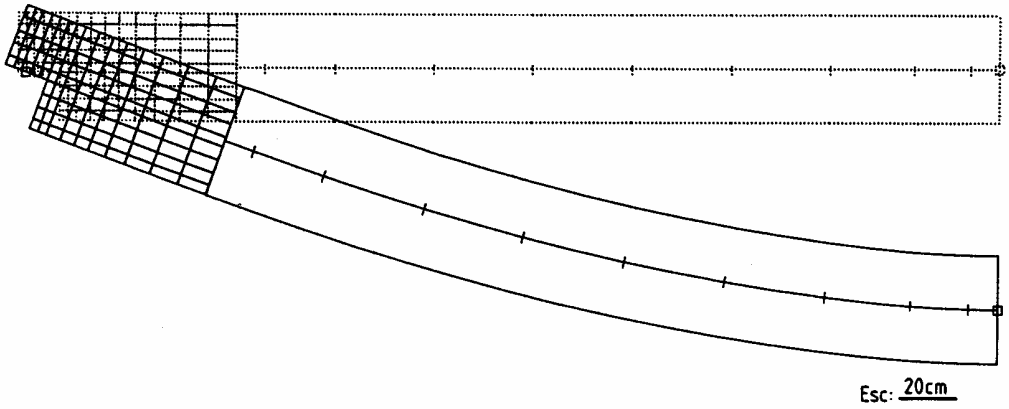


a) Acções majoradas de $\gamma = 1,50$.



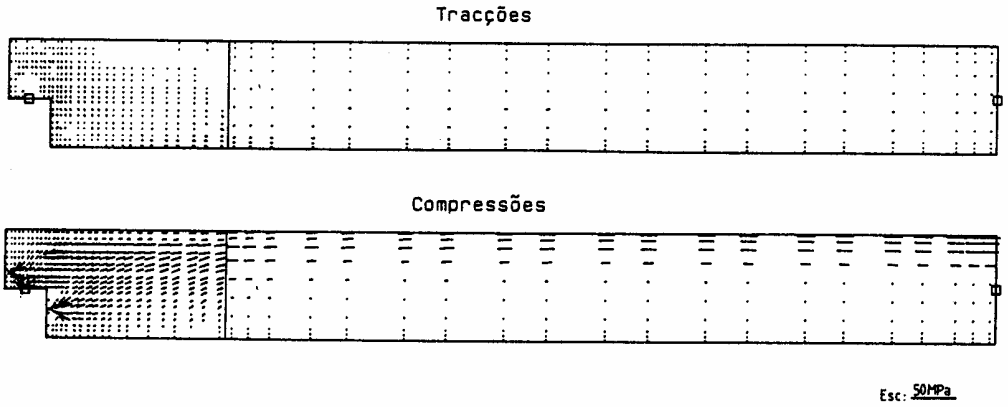
b) Acções majoradas de $\gamma = 2,0$.

Fig. 6.19 - Deformada da viga pré-esforçada.

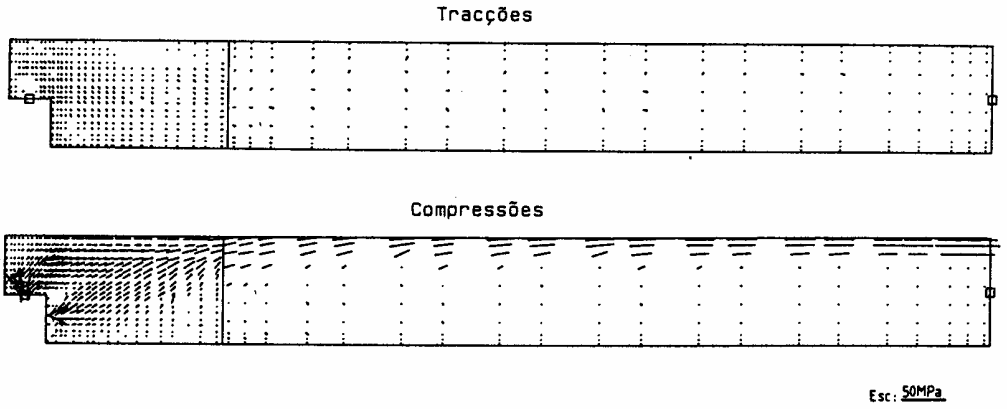


c) Acções majoradas de $\gamma = 2,30$.

Fig. 6.19 - Deformada da viga pré-esforçada (continuação).

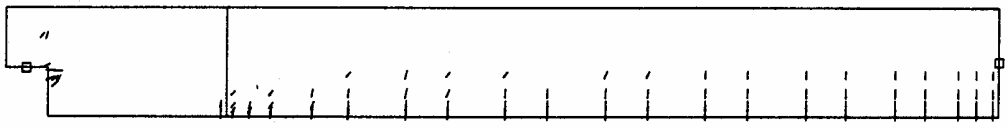


a) Acções majoradas de $\gamma = 1,50$.

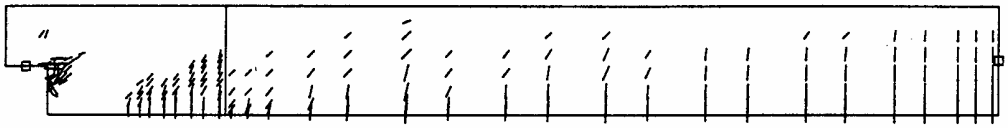


b) Acções majoradas de $\gamma = 2,30$.

Fig. 6.20 - Distribuição das tensões principais no betão.



a) Acções majoradas de $\gamma = 1,50$.



b) Acções majoradas de $\gamma = 2,30$.

Fig. 6.21 - Configuração da fendilhação.

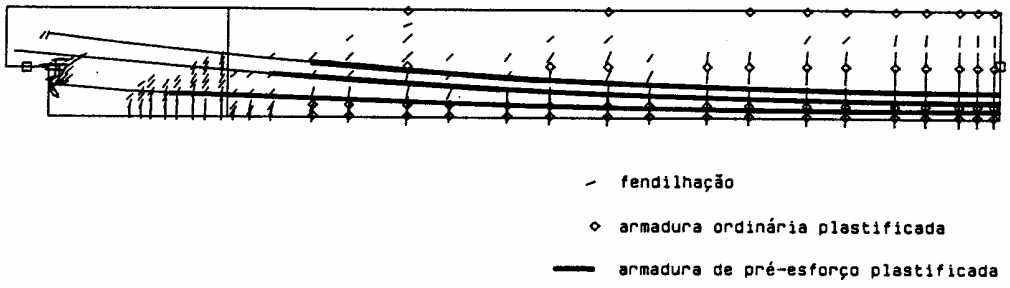
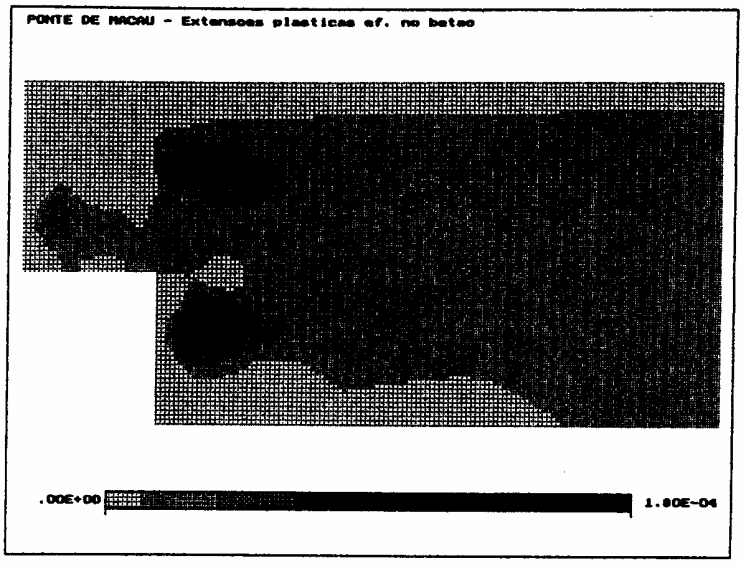


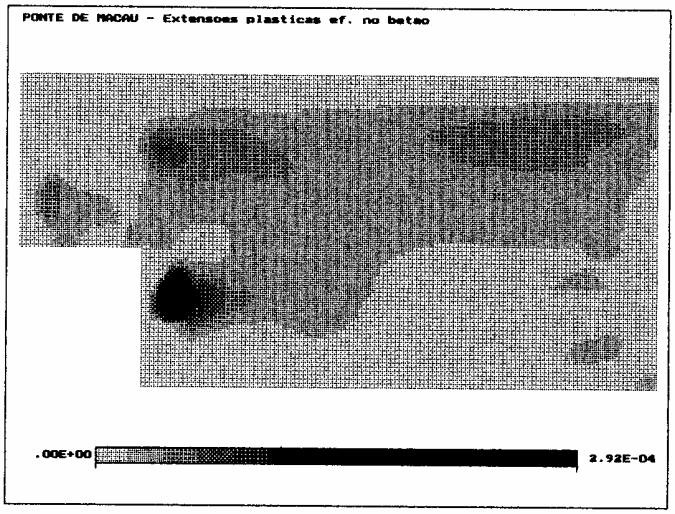
Fig. 6.22 - Configuração da fendilhação e identificação das armaduras plastificadas. Acções majoradas de $\gamma = 2,30$.



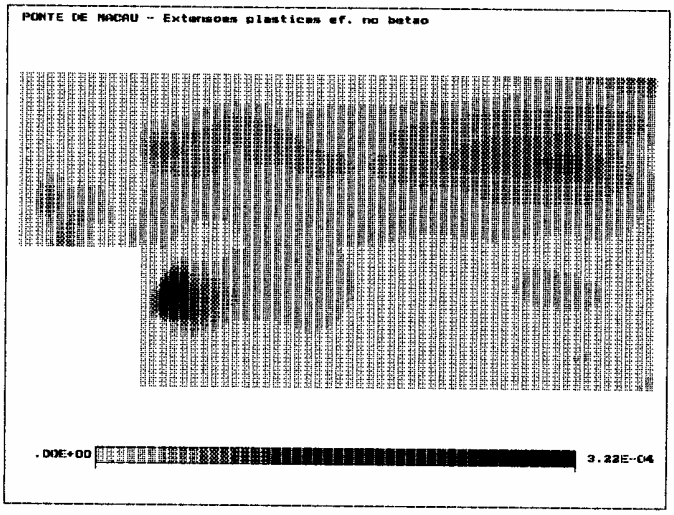
a) Combinação rara de acções.

Fig. 6.23 - Distribuição das extensões plásticas equivalentes no betão.

a) Acções majoradas de $\gamma = 1,50$.



b) Acções majoradas de $\gamma = 2,00$.



c) Acções majoradas de $\gamma = 2,30$.

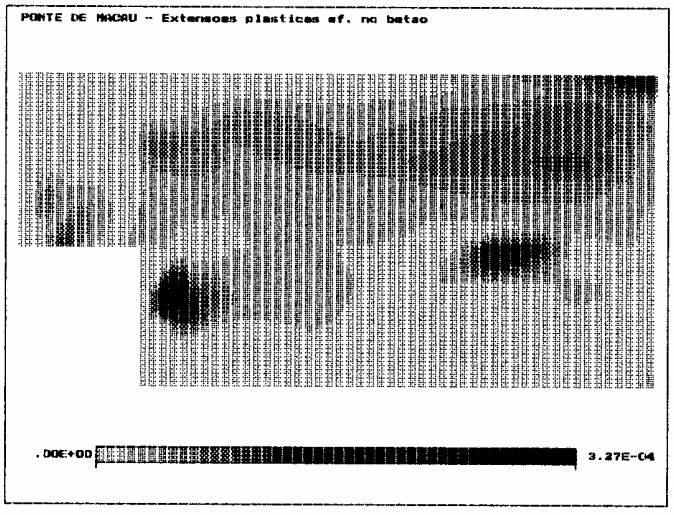


Fig. 6.23 - Distribuição das extensões plásticas equivalentes no betão (continuação).

O estudo da evolução do comportamento da zona de apoio de altura reduzida no betão comprimido, ilustrado na figura 6.23 através da distribuição da correspondente extensão plástica equivalente, permite confirmar de forma aproximada a localização das bielas de compressão atrás referidas.

Constata-se ainda que o dano no betão comprimido não é suficientemente elevado, verificando-se para $\gamma = 2,30$ que se encontra longe dos valores que conduziram ao colapso a meio vão. Tal constatação é possível comparando o grau de plastificação máximo apresentado nesta zona ao verificado na zona superior da secção de transição, que por sua vez é bastante inferior àquele onde se processou a rotura.

Nos parágrafos seguintes, a análise qualitativa efectuada ao comportamento estrutural da viga em estudo é complementada por uma análise mais pormenorizada de alguns aspectos particulares da sua resposta, nomeadamente, a evolução dos deslocamentos e das tensões (no betão e nas armaduras) em secções determinantes, ao longo da história de carga considerada.

A figura 6.24 ilustra a evolução dos deslocamentos verticais a meio vão e na zona de transição entre os dois tipos de discretização usados, assim como dos deslocamentos horizontais no apoio. Os níveis de carga correspondentes às combinações quase permanentes, frequentes e raras de acções, encontram-se devidamente assinalados na figura. Para o acréscimo progressivo das acções verticais, nota-se que o início das curvas não coincidem com a origem dos eixos devido à existência de deslocamentos provocados pela aplicação do pré-esforço. Observa-se uma resposta praticamente elástica durante a fase de serviço, apresentando os deslocamentos verticais para níveis de carga altos uma crescente flexibilidade devida a uma propagação extensa da fendilhação acompanhada posteriormente por um sucessivo aumento da plastificação das armaduras. Os deslocamentos horizontais no apoio apresentam pequenas variações ao longo da análise permanecendo praticamente na posição inicial, exceptuando para níveis de carga próximos do colapso onde se verifica um ligeiro acréscimo provocado pela subida do eixo neutro da peça. Realce-se o comportamento excelente verificado na zona de transição atrás mencionada, confirmando a validade da sua formulação.

O estudo da evolução das tensões normais nas camadas superiores da laje (camada 10) e da viga pré-fabricada (camada 8) na secção mais próxima do meio vão, é ilustrado na figura 6.25. A camada 8 apresenta uma tensão inicial não nula devida à aplicação do pré-esforço realizada previamente ao acréscimo de cargas considerado, enquanto que nessa fase a camada 10, pertencente à laje, se encontra inactiva. Como seria de esperar, a camada 10 apresenta uma maior variação de tensões até atingir o seu valor máximo de resistência à compressão, f_c, próximo da rotura, verificando-se depois uma diminuição nessa resistência para cargas superiores devido ao efeito de *softening*. Por sua vez, o acréscimo

de tensões na camada 8 é praticamente anulado para o carregamento referido devido à subida do eixo neutro da secção para um nível muito próximo dessa camada, provocado pela fendilhação das camadas inferiores.

A figura 6.26 apresenta a variação das tensões na armadura ordinária inferior e nos cabos de pré-esforço situados nos níveis inferior (cabo 1), intermédio (cabo 2) e superior (cabo 3), nas secções de meio vão, de transição entre as duas discretizações usadas e junto às respectivas amarrações dos cabos. É perfeitamente visível o acréscimo das tensões nas armaduras nas secções intermédias, sobretudo naquela mais esforçada onde os três cabos apresentam sensivelmente os mesmos valores de tensão para todos os níveis de carga. Na secção de transição, devido às maiores perdas de pré-esforço ocorridas no cabo 3, as tensões aí instaladas são inferiores às dos restantes cabos. Por sua vez, o maior acréscimo de tensão no cabo 1 para cargas elevadas deve-se ao maior efeito da flexão provocado pelas acções verticais afectando em maior grau as fibras inferiores. Aliás, esta explicação permite entender também os maiores acréscimos de tensão a meio vão para essas cargas elevadas, verificando complementarmente uma quebra nesse acréscimo para a armadura ordinária, provocada pelo alto grau de plastificação aí observado. Nas zonas junto às amarrações dos cabos é possível observar uma tensão praticamente constante gerada pela aplicação do pré-esforço, denotando uma influência quase nula do efeito de flexão.

A figura 6.27 ilustra a evolução dos diagramas de tensões a meio vão para um conjunto seleccionado de níveis de carga, permitindo avaliar o comportamento da secção onde ocorreu o colapso, em fase de serviço e aos estados últimos de resistência. Nestes diagramas além da variação das tensões em altura no betão, são também representadas as tensões instaladas nas armaduras, ordinárias e de pré-esforço. A quebra registada nas tensões no betão próximo da face superior deve-se ao facto de as camadas superiores, respeitantes à laje, se encontrarem inactivas durante a aplicação do pré-esforço. Os diagramas apresentados nesta figura mostram o comportamento típico de uma secção pré-esforçada sujeita a esforços de flexão crescentes. Analisando as tensões obtidas no betão, verifica-se que para valores da sobrecarga de utilização não muito elevados a secção se encontra totalmente comprimida, verificando-se durante a aplicação do pré-esforço um valor máximo da tensão na fibra inferior. Esta situação é invertida para cargas verticais sucessivamente crescentes até ocorrer o anulamento da compressão, aproximadamente, para o valor frequente das acções. Para a combinação rara de acções é possível observar a ocorrência de fendilhação no banzo inferior da viga, que se propaga acentuadamente nos incrementos seguintes acompanhada de um acréscimo significativo das tensões de compressão nas fibras superiores. O estado de tensão próximo do colapso revela o esgotamento da contribuição do mecanismo de interacção aço-betão à tracção até zonas próximas do banzo superior da viga pré-fabricada, acompanhado por um decréscimo da resistência à compressão nas fibras superiores devido ao efeito de *softening*. Assinale-se o

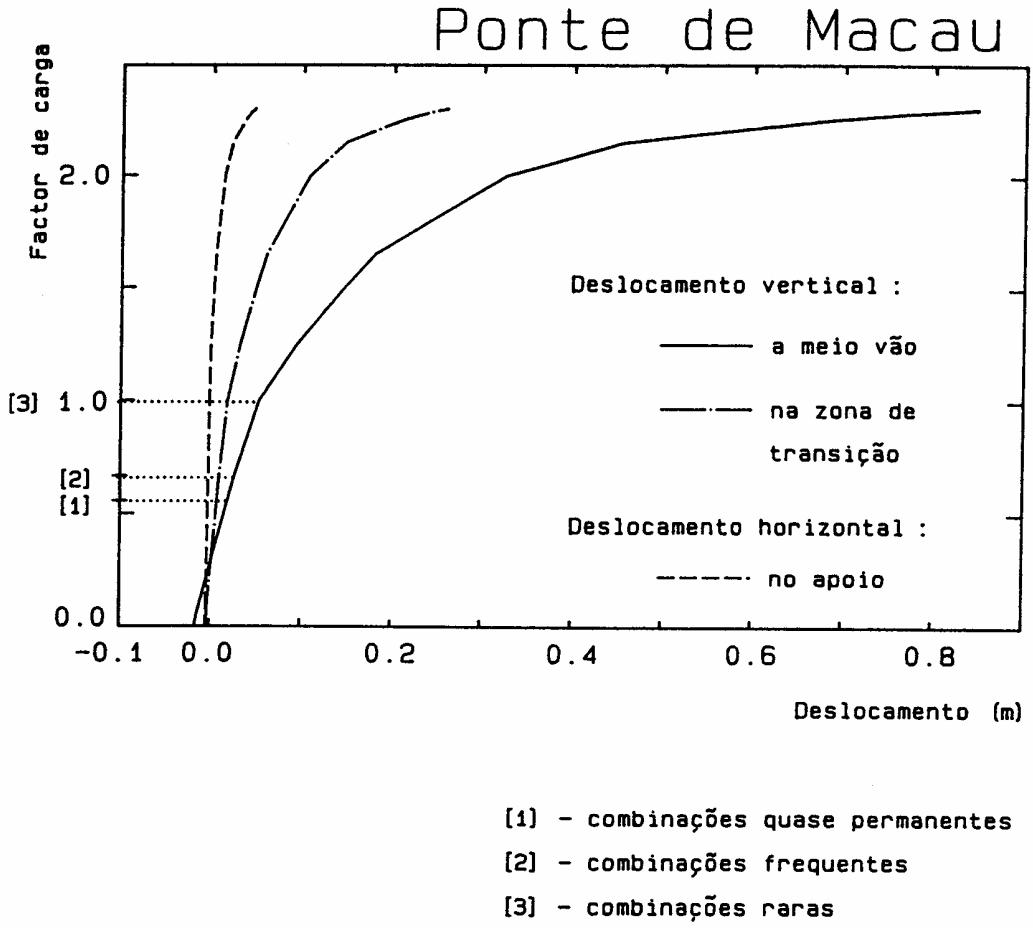


Fig. 6.24 - Curvas carga-deslocamentos.

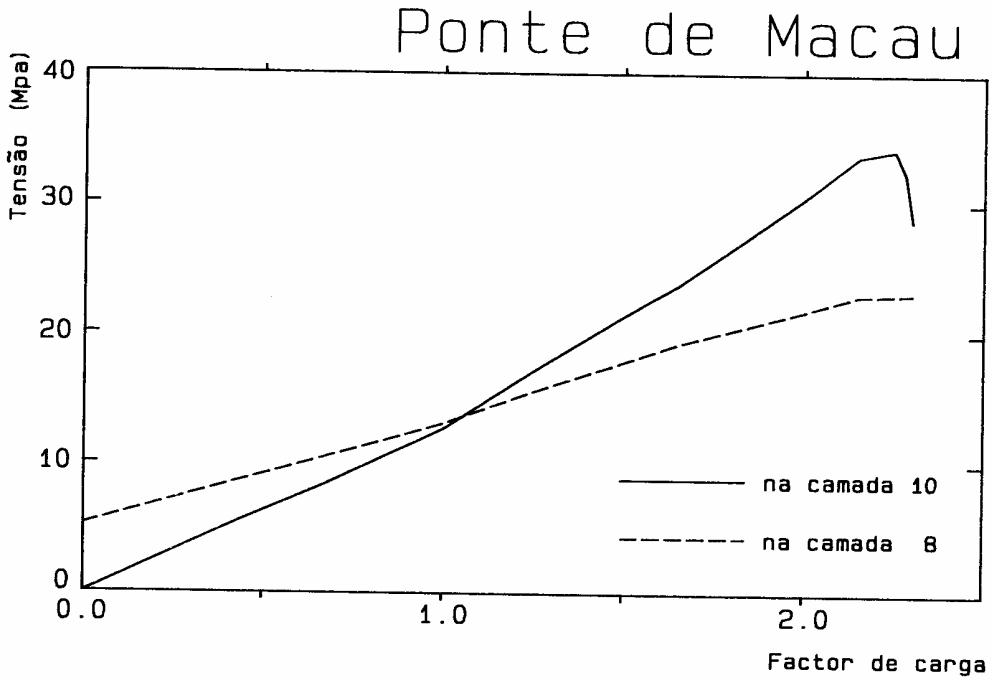
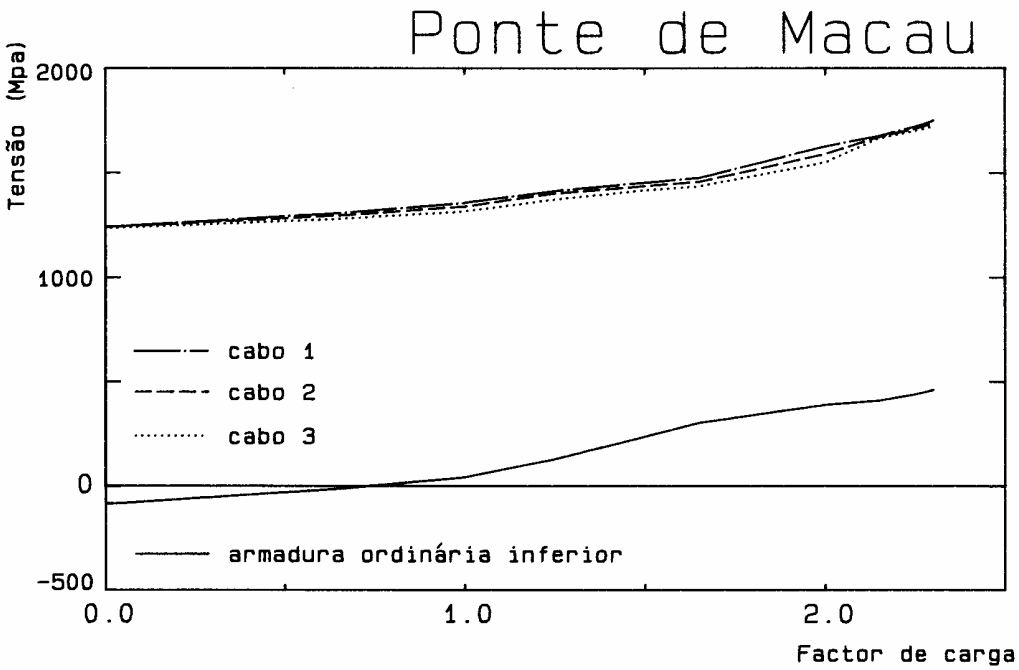
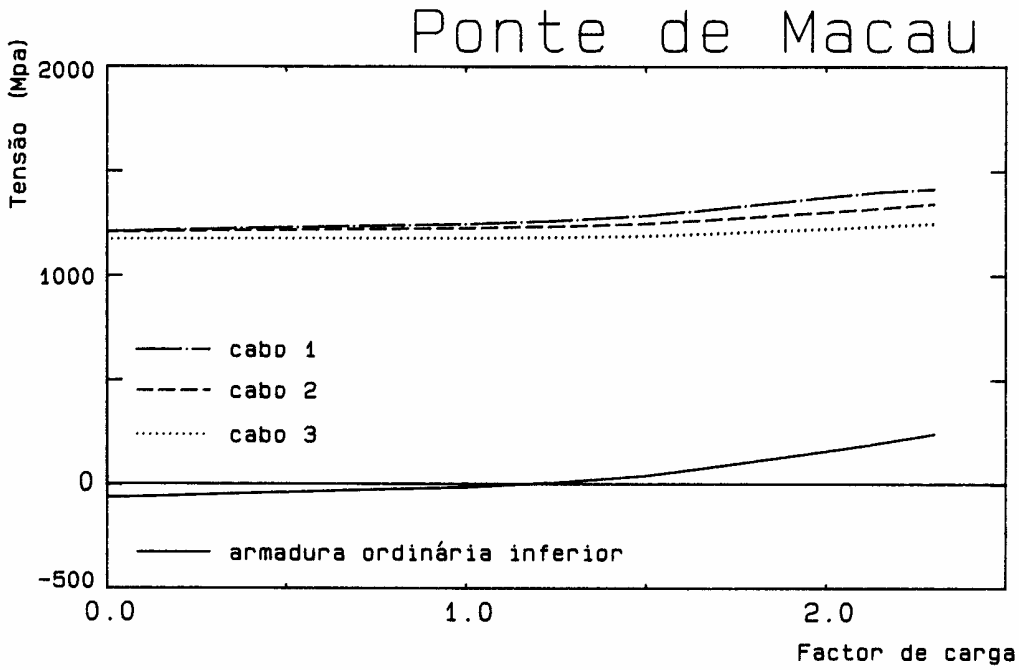


Fig. 6.25 - Curvas carga-tensões normal nas camadas a meio vão.

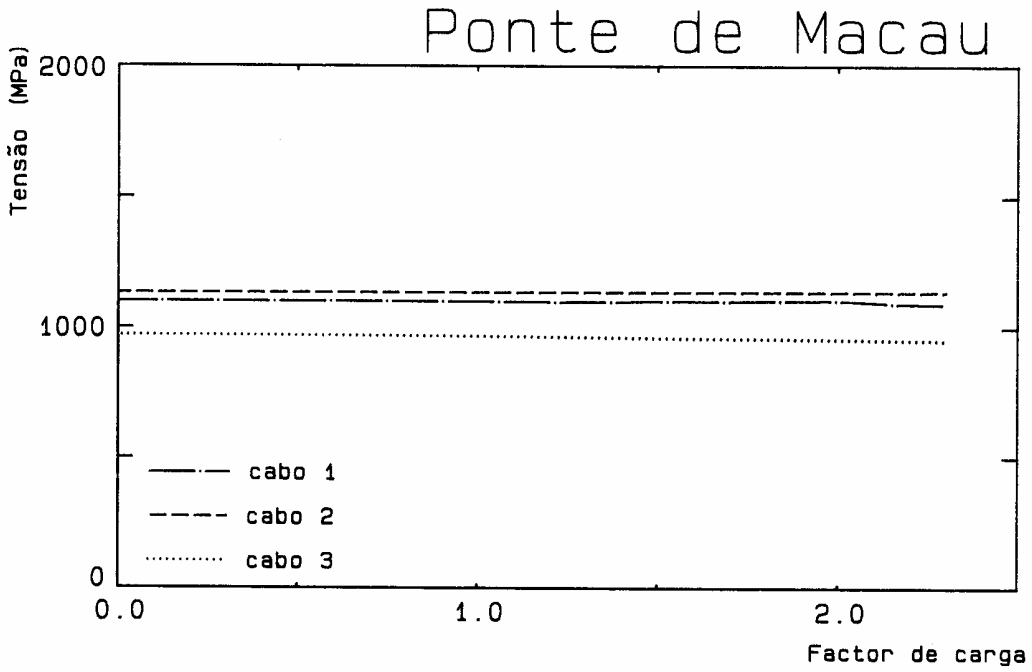


a) Secção a meio vão.



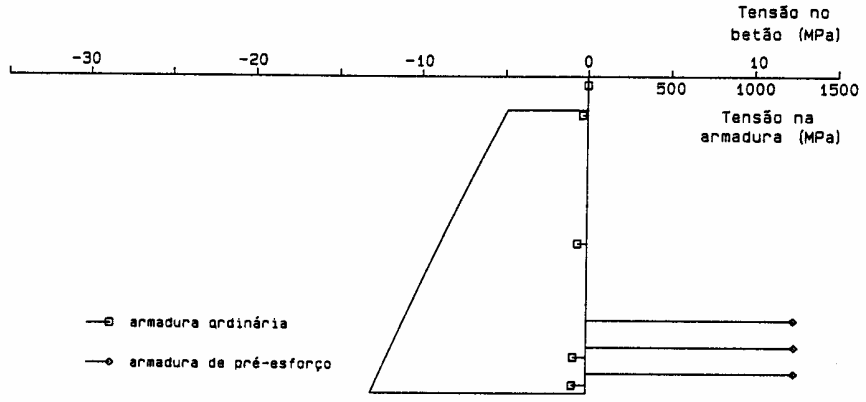
b) Secção de transição entre discretizações.

Fig. 6.26 - Curvas carga-tensões nas armaduras.

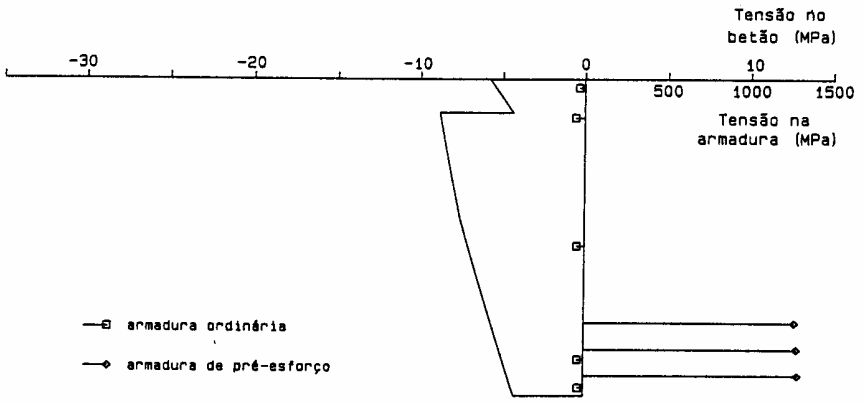


c) Junto à amarração dos cabos.

Fig. 6.26 - Curvas carga-tensões nas armaduras (continuação).

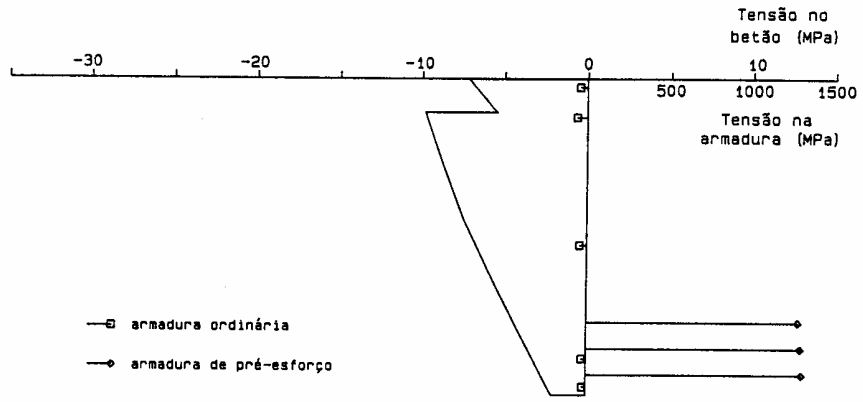


a) Aplicação do pré-esforço.

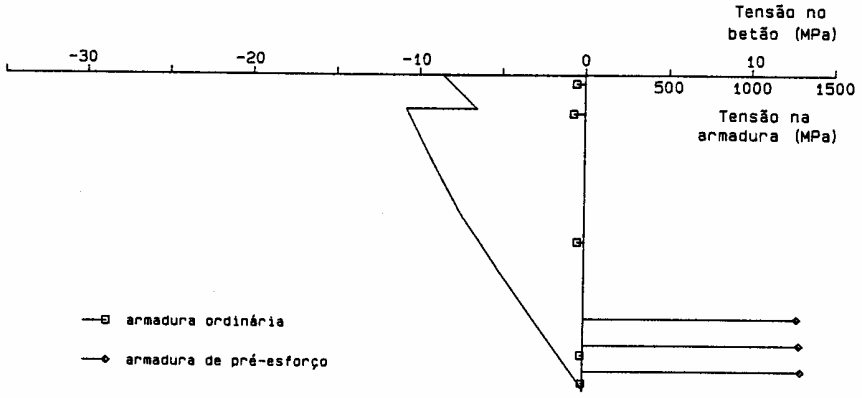


b) Totalidade das acções permanentes (após a betonagem da laje).

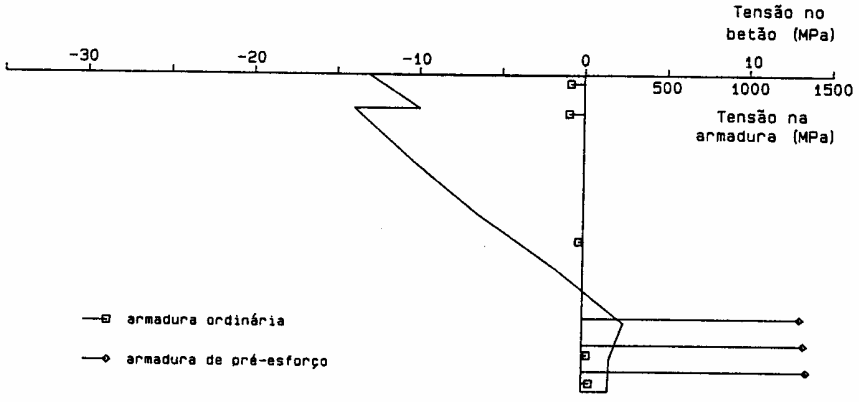
Fig. 6.27 - Diagramas de tensões na secção a meio vão.



b) Combinação quase permanente de acções.

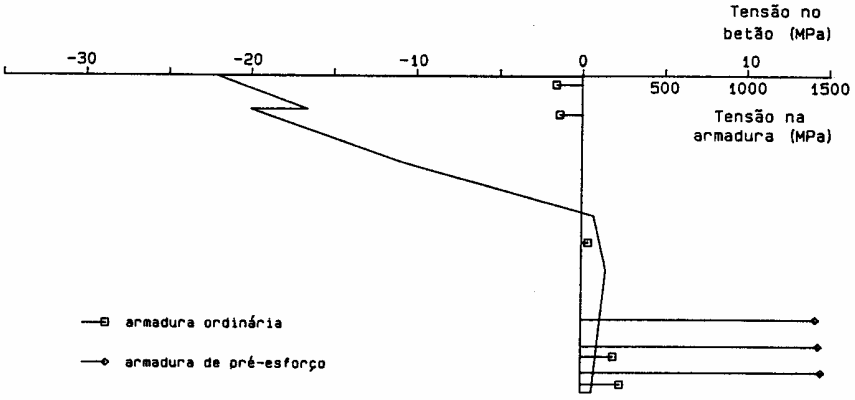


c) Combinação frequente de acções.

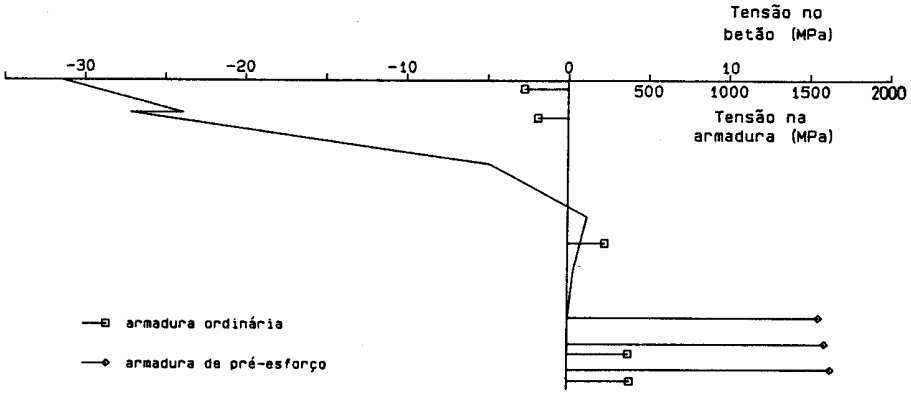


d) Combinação rara de acções.

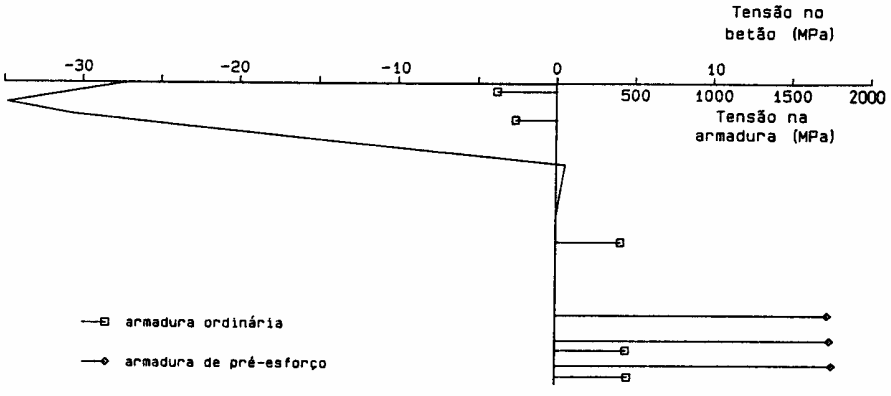
Fig. 6.27 - Diagramas de tensões na secção a meio vão (continuação).



e) Acções majoradas de $\gamma = 1,50$.



f) Acções majoradas de $\gamma = 2,00$.



g) Acções majoradas de $\gamma = 2,30$.

Fig. 6.27 - Diagramas de tensões na secção a meio vão (continuação).

deslocamento do eixo neutro da secção para níveis sucessivamente superiores à medida que cresce o carregamento. Quanto ao comportamento verificado pelos cabos, observa-se tensões semelhantes em todos eles quando se aplica o pré-esforço. No entanto, devido ao efeito de flexão provocado pelas acções verticais registam-se valores ligeiramente superiores de tensões nos cabos inferiores. Estas diferenças são posteriormente atenuadas devido à plastificação ocorrida nessas armaduras. Esta constatação é também observada nas armaduras ordinárias, sendo possível verificar a importância sucessivamente crescente da armadura de alma na absorção das tensões de tracção, devida também em grande parte ao deslocamento ocorrido no eixo neutro da secção, como atrás se mencionou.

6.4.4 - Verificação da segurança

Nos parágrafos seguintes é feita a avaliação da segurança em termos regulamentares (REBAP, 1983; RSA, 1983), definida para este tipo de estruturas, compreendendo a verificação aos estados limites último de resistência e de utilização (deformação e fendilhação).

Estado limite de deformação

Definido para a combinação frequente de acções ($\psi_1 = 0,4$) com valor de 0,026m e tendo em conta o efeito da fluência do betão (coeficiente de fluência igual a 2,5) pelo método bilinear (Favre, 1980), a flecha máxima instalada a meio vão obedece a condição regulamentar (1/400 do vão, REBAP, 1983) mas não satisfaz o valor aconselhado pela norma suíça (SIA, 1985) para pontes rodoviárias de 1/700 do vão,

$$w_{máx} = 0,064m \leq \frac{L}{400} = 0,087m \qquad (6.12)$$

Estado limite de fendilhação

A imposição regulamentar da ausência de tensões de tracção na estrutura (estado limite de descompressão) para a combinação quase permanente das acções ($\psi_2 = 0,2$), da largura máxima de fendas (considerando, por hipótese, um meio moderadamente agressivo) para a combinação frequente das acções ($\psi_1 = 0,4$) inferior a valores pré-estabelecidos e da tensão máxima de compressão no betão inferior ao valor de cálculo da tensão de rotura à compressão para a combinação rara de acções, permite verificar a segurança ao estado limite de fendilhação.

Tendo presente que as verificações regulamentares referidas estão orientadas para a análise de secções pertencentes a peças lineares e não para zonas de descontinuidade, como a zona de apoio de altura reduzida da viga em estudo apresenta, a discussão quanto à avaliação da segurança nesta região merece algumas considerações adicionais que nos parágrafos seguintes serão apontadas.

Na figura 6.17 é possível observar a não existência de tensões de tracção nas zonas de comportamento de peça linear, para a combinação de acções de longa duração ($\psi_2 = 0,2$), designadamente, na secção de meio vão como se mostra na figura 6.27. Contudo, na zona de amarração passiva do cabo superior e na transição das secções de altura reduzida para secções de altura normal, verifica-se a existência de tracções elevadas, embora não tivesse ocorrido qualquer fendilhação. Tal facto viola o articulado regulamentar, no entanto, a circunscrição dessas tensões à zona de apoio de altura reduzida e tendo em conta que a eliminação das tracções nesta região é praticamente impossível (já durante a aplicação do pré-esforço elas se verificaram) atendendo às descontinuidades apresentadas pela respectiva geometria e aliado à constatação de não ocorrência de fendilhação, não será de invalidar a solução de dimensionamento em estudo.

A verificação da segurança ao estado limite de largura de fendas é avaliada com base na formulação regulamentar (ver expressões 6.5 e 6.6), tendo presente a configuração de fendilhação ilustrada na figura 6.18 e tomando como referência a extensão máxima instalada no betão na direcção normal ao plano da fenda, $\epsilon_{n,cr}$. Na determinação da distância média entre fendas, s_{rm}, as variáveis contidas na expressão (6.6) apresentam os seguintes valores: recobrimento, $c = 35mm$; espaçamento de varões (definido com referência à armadura vertical, face à orientação da fenda), $s = 100mm$; diâmetro dos varões, $\phi = 16mm$ e, por fim, os coeficientes, $\eta_1 = 0,4$, $\eta_2 = 0,25$, $\rho_r = 0,0179$; resultando $S_{rm} = 179,4mm$. Identificando ϵ_{sm} com $\epsilon_{n,cr} = 0,000245$ (valor máximo obtido) e considerando a relação (6.5), obtém-se:

$$w_k = 0,075mm < 0,100mm \qquad (6.13)$$

que satisfaz o valor limite considerado na hipótese de um meio moderadamente agressivo. Note-se que a aplicabilidade da expressão regulamentar para o cálculo da largura de fendas é, neste caso, bastante discutível atendendo ao facto de essa fórmula ter sido deduzida para uma hipótese de fendilhação estabilizada em peças lineares, o que não acontece na presente situação. No entanto, atendendo ao facto de as extensões apresentadas no betão fendilhado e a posterior evolução na zona referida não ter provocado grandes danos no comportamento estrutural da viga pré-esforçada, é de admitir a validade da segurança ao estado limite em questão.

Finalmente, ao fazer a verificação da tensão máxima de compressão para a combinação rara de acções, registou-se a ocorrência da situação mais desfavorável na fibra superior da secção a meio vão com um valor de 13,1 MPa, manifestamente inferior à tensão de cálculo de rotura à compressão, $f_{cd} = 23,3 MPa$.

Estado limite último de resistência

De acordo com a secção 6.2, a verificação ao estado limite último de resistência vem expressa pela condição (6.4) que relaciona o coeficiente de segurança global ou de majoração das acções que conduziram ao colapso, γ_s, com os coeficientes de segurança parciais definidos para as acções, γ_f, e para as propriedades mecânicas dos materiais, γ_m.

Uma vez que foi obtido na presente análise, para o coeficiente de segurança global, o valor de $\gamma_s = 2,30$, a condição de segurança referida encontra-se verificada tendo presente que a rotura se dá por esmagamento do betão. Assim, quer se considere um coeficiente γ_g igual a 1,35 (considerando que a quantificação do valor das acções considerado é rigoroso) ou, na hipótese mais desfavorável, igual a 1,50 e, sabendo que, $\gamma_m = 1,50$ (para o betão), a condição de segurança ao estado limite último de resistência é verificada:

$$\gamma_s = 2,30 \geq \gamma_f \cdot \gamma_m = 2,25 \qquad (6.14)$$

6.4.5 - Conclusões

A caracterização pormenorizada da resposta estrutural de uma viga pré-esforçada que compõe o tabuleiro da Nova Ponte de Macau, com especial atenção para a zona de apoio com altura reduzida e a avaliação da respectiva segurança, foram objectos de análise ao longo desta secção. De acordo com os resultados obtidos é possível concluir que a estrutura em causa, e nomeadamente a zona mencionada, oferece a segurança adequada.

A presente análise serviu ainda para mostrar a utilidade do modelo computacional apresentado no capítulo anterior, com especial destaque para o excelente desempenho revelado pela formulação da zona de transição entre a malha de elementos planos e a malha de elementos de viga. Tendo em conta que uma discretização por elementos planos em toda a extensão da presente viga tornaria a resolução do problema incomportável para meios informáticos disponíveis, atendendo ao elevado volume de cálculo e ao não menos grande espaço de memória necessário, o presente programa de cálculo automático tornou isso possível usando um pequeno computador. A grande economia de tempo de cálculo e de espaço na memória requerido pelos elementos de viga relativamente aos elementos

planos permitiu, com o programa mencionado, fazer uma análise rápida que tivesse em conta, simultaneamente, as regiões com um comportamento típico de peça linear e as zonas de descontinuidade.

6.5 - OBSERVAÇÕES FINAIS

A confirmação do dimensionamento efectuado para as estruturas de betão armado pré-esforçado, sobretudo quando se avança para padrões estruturais menos correntes, utilizando um modelo que forneça com rigor a indicação do seu grau de segurança, é cada vez uma necessidade mais premente. Para além da certificação obtida, aprofunda-se o conhecimento do comportamento estrutural.

Neste capítulo apresentou-se uma metodologia adequada à caracterização da resposta estrutural e à verificação da segurança aos estados limites regulamentares, fazendo uso do modelo computacional descrito no Capítulo 5. Com os exemplos apresentados procurou-se ilustrar a metodologia referida. Assim, no primeiro exemplo foi possível avaliar o grau de segurança do dimensionamento de uma viga contínua pré-esforçada efectuado na secção 3.4. Por sua vez, no segundo exemplo foi dado realce à análise de uma viga pré-esforçada caracterizada por uma descontinuidade correspondente à zona de apoio de altura reduzida.

Desta forma, foi possível evidenciar o interesse e a utilidade dos presentes programas computacionais na análise e dimensionamento deste tipo de estruturas de betão armado pré-esforçado.

6.6 - BIBLIOGRAFIA

Favre, R. *et al.* (1980)- Effects Différés, Fissuration et Deformations de Structures en Béton - Ec. Pol. Féd. Lausanne.

Figueiras, J. A.; Póvoas, R. H. C. F. e Henriques, A. A. R. (1990a) - Análise da Zona de Apoio de Altura Reduzida de Vigas Pré-Esforçadas (Ponte de Macau) - Instituto da Construção, Divisão de Estruturas, Porto.

Figueiras, J. A.; Póvoas, R. H. C. F. e Henriques, A. A. R. (1990b) - Análise da Zona de Apoio de Vigas Pré-Esforçadas (Ponte de Macau) - 2as Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, Lisboa, p.p. B.111-B.122.

Póvoas, R. H. C. F. (1991) - Modelos Não-Lineares de Análise e Dimensionamento de Estruturas Laminares de Betão Incluindo Efeitos Diferidos - Tese de doutoramento, Univ. do Porto.

Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (1983), Decreto-Lei nº 349-C/83, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa.

Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes (1983), Decreto-Lei nº 235/83, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa.

SIA (1985) - Actions sur les Structures - Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes, Zurich.

Capítulo 7

CONCLUSÕES E ORIENTAÇÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS

7.1 - CONCLUSÕES FINAIS

Tendo como fim o desenvolvimento de modelos de dimensionamento e análise de peças de betão armado pré-esforçado sujeitas, essencialmente, a esforços de flexão, considera-se que os objectivos inicialmente propostos foram plenamente atingidos. Assim, foram criados modelos computacionais que permitem dimensionar este tipo de estruturas de acordo com a actual regulamentação portuguesa e fazer um estudo rigoroso do seu comportamento não linear, através do traçado da resposta deformacional até à rotura, da determinação do nível de carga que conduz ao início da fendilhação e à cedência das armaduras, da definição da carga última e da identificação do mecanismo de colapso.

As técnicas dos elementos finitos usadas nas formulações apresentadas revelaram-se de extrema importância, quer pela versatilidade das suas aplicações, quer pela precisão dos resultados obtidos em comparação com valores experimentais e analíticos. Desta forma, foi possível implementar leis constitutivas com um certo grau de complexidade que de outro modo seria muito difícil de realizar.

A numerosa variedade de soluções estruturais que podem ser apresentadas, a consideração de histórias de carga complexas (com sucessivos carregamentos e descarregamentos) e o pré-esforço, tornam os programas de cálculo automático desenvolvidos de extrema utilidade no projecto e na investigação no domínio do betão estrutural. Sinteticamente, referem-se as possíveis aplicações dos presentes modelos :

- dimensionamento de estruturas com verificação regulamentar aos estados limites;

- traçado da resposta até ao colapso, permitindo a aferição da segurança das estruturas projectadas ou construídas;

- na análise experimental, como forma de clarificar e discutir resultados obtidos por ensaios;

- na análise numérica, permitindo a validação de novas regras e métodos de dimensionamento, assim como na investigação e desenvolvimento de outros modelos.

Embora as conclusões mais relevantes já tenham sido apresentadas ao longo dos capítulos precedentes, nos parágrafos seguintes destacam-se sumariamente as mais importantes.

Modelos de discretização

- O elemento de viga isoparamétrico de três nós de Timoshenko com discretização por camadas ao longo da sua altura, revelou-se bastante adequado e versátil na modelação de zonas com comportamento típico de peça linear.

- A utilização do elemento isoparamétrico quadrático de Serendipity foi privilegiada na discretização de zonas de descontinuidade, onde se verifica um afastamento notório do comportamento tipo de peça linear.

- A formulação de um modelo que permita fazer a associação dos dois tipos de elementos referidos revelou-se de extrema importância na redução do volume de cálculo e de espaço na memória do computador, que a resolução deste tipo de problemas não lineares envolve.

- A simulação dos cabos das armaduras de pré-esforço através de um elemento unidimensional curvo desenvolvido no presente trabalho, além de mostrar aspectos inovadores em relação a formulações apresentadas anteriormente, permitiu definir com rigor a sua contribuição para a matriz de rigidez da estrutura e para o vector das forças nodais equivalentes.

- A obtenção de comportamentos demasiadamente rígidos (para relações vão/espessura crescentes) com a regra de integração completa nos elementos finitos estudados, levou a privilegiar a utilização de uma regra de integração reduzida que permitiu obter resultados muito bons.

Dimensionamento e verificações regulamentares

- O dimensionamento das armaduras de vigas de betão armado pré-esforçado e a verificação da segurança aos estados limites regulamentares são baseados em regras correntes que podem ser sistematizados num processo de cálculo estruturado.

- O programa de cálculo automático desenvolvido, englobando os procedimentos referidos, mostrou-se de grande utilidade para o projecto deste tipo de estruturas, através de um conjunto de informações preciosas para ilustrar os resultados obtidos.

Modelos não lineares do betão estrutural

- O critério de resistência máxima do betão baseado no critério proposto por Ottosen mostrou ser bastante eficaz na determinação da capacidade portante do betão quando sujeito a um estado de tensão multiaxial. Foi possível obter soluções com uma boa concordância com resultados experimentais, para vários estados de tensão. Além disso, as respectivas superfícies de resistência possuem as características essenciais ao bom desempenho deste tipo de funções.

- A aplicação das leis elasto-plásticas ao critério mencionado, para a representação do comportamento do betão não fendilhado, foi realizada com toda a generalidade. A aplicação desta formulação, particularizando para os elementos finitos estudados, mostrou a sua eficácia na definição da resposta deformacional do material (leis de endurecimento e de escoamento plástico).

- A adopção de um modelo de fendilhação distribuída, que tem em conta os mecanismos de interacção betão-armaduras, revelou uma excelente adequação para modelar o comportamento característico do betão fendilhado.

- A definição dos estados de comportamento do betão (comportamento tipo de compressão ou de tracção), em função das componentes do estado de tensão

e a sua associação com dois modos distintos de fractura (esmagamento por compressão e fendilhação por tracção), provou ser eficaz na determinação da sua capacidade resistente última.

- A definição de um modelo de comportamento elasto-plástico unidimensional para o aço teve, de modo idêntico aos anteriores, um adequado desempenho.

- A realização de testes numéricos de carga e descarga, ilustrando a ocorrência de diferentes tipos de comportamento (considerados isoladamente na formulação dos respectivos modelos), permitiram elucidar sobre a importância dos refinamentos introduzidos, de forma a assegurar a compatibilidade entre as relações constitutivas associadas aos modelos elasto-plásticos e de fendilhação.

Resolução de problemas não lineares

- Foi privilegiado o uso do método de Newton-Raphson modificado, onde a actualização da matriz de rigidez é feita na segunda iteração de cada incremento ou sempre que se verifique a alteração das características do material devida, essencialmente, à abertura ou fecho de fendas, descarregamentos elásticos e modificação do estado de comportamento. De facto, este procedimento permitiu (na grande maioria dos casos) reduzir o tempo de computação (relativamente à versão original do método de Newton-Raphson) e, simultaneamente, evitou a ocorrência de instabilidade numérica na obtenção da solução.

- Embora tenha sido empregue um critério de convergência do processo iterativo em termos de forças residuais, a consideração dos critérios definidos em termos de deslocamentos e em termos energéticos permitiram a detecção de problemas localizados de falta de convergência.

- Nos casos estudados adoptaram-se tolerâncias até 1%, em termos de forças residuais, no entanto, para fins práticos é aceitável valores até 2,5%.

- O estudo de exemplos comparativos com resultados fornecidos por outros autores permitiu comprovar a adequação do modelo não linear apresentado.

- A apresentação de dois exemplos ilustrou de maneira eficiente a aplicabilidade do modelo computacional para a análise de vigas de betão armado pré-esforçado. Desta forma, foi possível obter um conhecimento profundo do comportamento dessas estruturas e, ao mesmo tempo, avaliar o seu grau de segurança. O segundo dos exemplos mencionados, mostrou ainda de forma inequívoca a adequação da modelação da zona de transição entre os elementos planos e os elementos de viga usados na discretização da peça em estudo.

7.2 - ORIENTAÇÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS

Nesta secção são sugeridas algumas orientações para eventuais desenvolvimentos futuros no domínio de aplicação em que se insere o presente trabalho. Assim, nos parágrafos seguintes salientam-se, sumariamente, as mais importantes.

- Como já foi referido, a verificação da segurança aos estados limites últimos de resistência em termos regulamentares através de modelos não lineares é um assunto que merece uma investigação adequada de forma a definir um processo adequado de aferição da segurança, no âmbito deste tipo de análises.

- O desenvolvimento de um modelo do comportamento reológico do betão e sua implementação no presente modelo não linear é de extrema importância para o estudo da resposta estrutural a longo prazo.

- A introdução da não linearidade geométrica no modelo apresentado é também importante, sobretudo, para o estudo de estruturas de grande vão.

- A atenção dada à modelação de cargas e descargas alternadas permitem traduzir eficazmente o comportamento histerético dos materiais, estando por isso facilitada a consideração de acções dinâmicas.

- A generalização da formulação do elemento de viga em elementos curvos, no seu plano e fora dele, com qualquer orientação, tornando possível fazer o estudo de vigas curvas e pórticos tridimensionais.

- A modelação das condições de apoio efectivamente realizadas em pontos distintos do eixo médio do elemento de viga.

- O desenvolvimento de um algoritmo de solução não linear para aumentar a eficiência da presente formulação, através de um conjunto de técnicas e procedimentos numéricos que possibilitem a consideração de um incremento de carga variável durante o ciclo iterativo, a aceleração da convergência e a definição automática da história da carga.

- Aplicação do modelo do material desenvolvido a elementos de casca e elementos tridimensionais, assim como a generalização da formulação da zona de transição entre elementos finitos, permitindo o estudo conjunto de diferentes peças estruturais (pilares, paredes, vigas, lajes, cascas nervuradas, etc.).

- Na globalidade, o modelo de fendilhação mostrou ser adequado ao estudo do comportamento de estruturas de betão. No entanto, a caracterização localizada deste fenómeno e a sua importância na análise estrutural torna interessante o desenvolvimento da sua formulação através da consideração da Mecânica da Fractura.

Anexo

MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA DE DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS E VERIFICAÇÃO AOS ESTADOS LIMITES REGULAMENTARES - PREDIM

O presente programa foi desenvolvido com base no método dos elementos finitos (formulação de deslocamentos), recorrendo à formulação elástica linear do elemento de viga isoparamétrico de três nós de Timoshenko. O objectivo principal foi criar um procedimento rápido e económico de dimensionamento das armaduras de vigas pré-esforçadas, complementado por uma verificação aos estados limites regulamentares.

Neste anexo descreve-se a sequência dos dados a fornecer para a resolução do problema de dimensionamento em questão.

a) TÍTULO DO PROBLEMA

Na primeira linha do ficheiro de dados é definido o título genérico do problema a estudar.

b) VARIÁVEIS DE CONTROLE

A segunda linha do ficheiro é composta pelas variáveis de controle que definem a dimensão das variáveis indexadas intervenientes no processo de resolução. São elas:

* número de pontos nodais da malha de elementos finitos (NPOIN);
* número de elementos finitos (NELEM);
* número de nós com os graus de liberdade restringidos - número de apoios - (NVFIX);
* número de diferentes características materiais dos elementos (NMATS);
* número de camadas com diferentes propriedades (NTLAY);
* número de diferentes acções, exceptuando as de pré-esforço (NSOLS);
* número de acções de pré-esforço (NSOLP);

* número de combinações de acções correspondentes aos estados limites de utilização a analisar (NCOBU). A este número deverá adicionar-se duas unidades, pois o programa admite que as duas primeiras combinações definem, respectivamente, as acções permanentes mobilizadas durante o acto de aplicação de pré-esforço e as acções permanentes totais;
* número de combinações correspondentes aos estados limites últimos de resistência (NCOMB);
* número de cabos de pré-esforço (NCABO).

c) IDENTIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS E RESPECTIVAS PROPRIEDADES

Para cada um dos elementos finitos, de 1 até NELEM, são fornecidos os seguintes dados:

* a sua numeração;
* a numeração do material que o caracteriza;
* a numeração do nó da extremidade esquerda;
* a numeração do nó intermédio;
* a numeração do nó da extremidade direita.

d) COORDENADAS DOS PONTOS NODAIS

Para cada nó da malha de elementos, de 1 até NPOIN, define-se:

* a sua numeração;
* a sua coordenada x.

e) IDENTIFICAÇÃO DOS APOIOS E RESPECTIVOS ASSENTAMENTOS

Para cada apoio, de 1 até NVFIX, define-se:

* a numeração do nó com os graus de liberdade restringidos.

Para cada grau de liberdade é definida a existência, ou não, de impedimento de deslocamento (0 - não; 1 - sim):

* para o grau de liberdade horizontal;
* para o grau de liberdade vertical;

* para o grau de liberdade de rotação.

Identicamente, para cada apoio, se define a existência de assentamentos de apoio:

* assentamento horizontal;
* assentamento vertical;
* assentamento de rotação.

f) DEFINIÇÃO DAS PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

f.1 Caracterização dos materiais por camadas

As características dos materiais, variando entre 1 e NMATS, dos elementos são definidos pelo conjunto das camadas que os compõem, pelos seguintes dados:

* numeração do material;
* número de camadas existentes para esse material (KLAYR);
* numeração dessas KLAYR camadas.

f.2 Propriedades associadas a cada camada

Para cada camada, de 1 até NTLAY, são definidas as propriedades dos materiais (betão ou aço das armaduras ordinárias) que compõem os elementos:

* numeração da camada;
* tipo de material (zero para o betão e um número inteiro superior a zero para o aço);
* módulo de elasticidade do material;
* coeficiente de Poisson do material;
* largura da camada;
* espessura da camada (ou espessura equivalente, no caso do aço, de forma que a sua multiplicação com a respectiva largura resulte na sua área de secção);
* valor de cálculo da tensão de rotura à compressão para o betão e da tensão de cedência para o aço;

* relação f_{ct} / f_c entre a tensão de rotura à tracção e à compressão do betão, ou coordenada z da camada de aço.

g) CÁLCULOS PRETENDIDOS

Define se é pretendido o cálculo relativamente às seguintes situações (1 em caso afirmativo e 0 em caso negativo):

* faz pré-dimensionamento do pré-esforço (KPRED) ? ;
* calcula as perdas de pré-esforço (KPERD) ? ;
* faz verificação aos estados limites (KVEST) ? ;
* faz verificação aos estados limites de largura de fendas (KFEND) ? .

h) DADOS RELATIVOS AO PRÉ-DIMENSIONAMENTO DO PRÉ-ESFORÇO

Este conjunto de dados só é lido se KPRED = 1 ou se KVEST = 1.

* tensão admissível de compressão no betão durante a aplicação do pré-esforço;
* tensão admissível de compressão no betão após 28 dias;
* percentagem de perda diferida de pré-esforço arbitrada;
* percentagem de perda total de pré-esforço arbitrada;
* excentricidade admissível para cima do eixo da viga;
* excentricidade admissível para baixo do eixo da viga.

i) DEFINIÇÃO DAS ACÇÕES, EXCEPTUANDO AS DE PRÉ-ESFORÇO

Para a acção, de 1 até NSOLS, definem-se os seguintes dados:

i.1) Título da acção

* título genérico da acção corrente

i.2) Número de cargas

* número de nós com cargas concentradas (NNLOD);
* número de elementos com cargas uniformemente distribuídas (NULOD).

i.3) Definição das cargas concentradas nos nós

Para cada nó com cargas concentradas, de 1 até NNLOD, define-se:

* numeração do nó;
* componente horizontal da carga;
* componente vertical da carga;
* componente de momento da carga.

i.4) Definição das cargas uniformes nos elementos

Para cada elemento com cargas uniformemente distribuídas, de 1 até NULOD, define-se:

* numeração do elemento;
* valor da carga.

j) COEFICIENTES DE COMBINAÇÃO PARA AS ACÇÕES PERMANENTES E PARA AS ACÇÕES CORRESPONDENTES AOS ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO

Para cada combinação de acções, a seguir enunciadas, definem-se os coeficientes que vão afectar as acções lidas no ponto anterior de forma a caracterizar o carregamento da viga para os estados limites de utilização.

Assim, os coeficientes de combinação são definidos para:

* as acções permanentes mobilizadas durante a aplicação do pré-esforço;
* as acções permanentes totais;
* as acções correspondentes aos estados limites de utilização (variando de 3 até NCOBU).

k) INSTRUÇÕES DE SAÍDA DE RESULTADOS PARA OS ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO

Sendo as instruções de saída de resultados definidas por números compostos por três algarismos, em que o primeiro, o segundo e o terceiro definem, respectivamente, se se pretende (0 em caso negativo e 1 em caso afirmativo) resultados relativos a deslocamentos, reacções e esforços resultantes. As instruções são definidas para resultados relativos a:

* acções permanentes;
* acções correspondentes a estados limites de utilização.

l) MÓDULO DE ELASTICIDADE INICIAL DO BETÃO

O módulo de elasticidade do betão no momento de aplicação do pré-esforço é definido se KPERD = 1 ou KVEST = 1.

m) DADOS DAS PROPRIEDADES DIFERIDAS DOS MATERIAIS

Este conjunto de dados é fornecido se KPERD = 1, sendo composto por:

* o coeficiente de fluência do betão;
* a perda por relaxação das armaduras de pré-esforço;
* o módulo de elasticidade do betão aos 28 dias.

n) DADOS RELATIVOS À VERIFICAÇÃO AOS ESTADOS LIMITES

Os dados que se seguem são definidos se KVEST = 1, sendo eles os seguintes:

* espessura de recobrimento da armadura;
* percentagem mínima de armadura longitudinal;
* percentagem mínima de armadura transversal (estribos);
* valor de cálculo da tensão de cedência das armaduras ordinárias;
* tensão de corte τ_1, relacionada com o termo corrector da teoria de Mörsch, relacionado com o valor de cálculo do esforço transverso resistente, definido no artigo 53º do REBAP;
* tensão de corte τ_2, relacionada com o limite máximo do valor de cálculo do esforço transverso resistente, definido no artigo 53º do REBAP.

Para cada uma das combinações de acções definidas em *j)*, identifica em qual delas se faz a verificação ao estado limite de largura de fendas através da seguinte pergunta:

* faz o cálculo de fendas (0 em caso negativo e 1 em caso afirmativo) ? .

o) DADOS RELATIVOS À VERIFICAÇÃO AO ESTADO LIMITE DE LARGURA DE FENDAS

Este conjunto de dados é definido se KFEND = 1.

o.1) Módulo de elasticidade da armadura ordinária.

o.2) Dados relativos à armadura traccionada, definindo-se para cada elemento:

* número de varões da camada de aço maior;
* diâmetro dos varões;
* área da armadura traccionada;
* posição, y_s, da armadura traccionada resultante, relativamente ao eixo médio da viga (ver figura A.1);
* posição, h_s, dos varões traccionados mais próximos do eixo médio da viga (ver figura A.1).

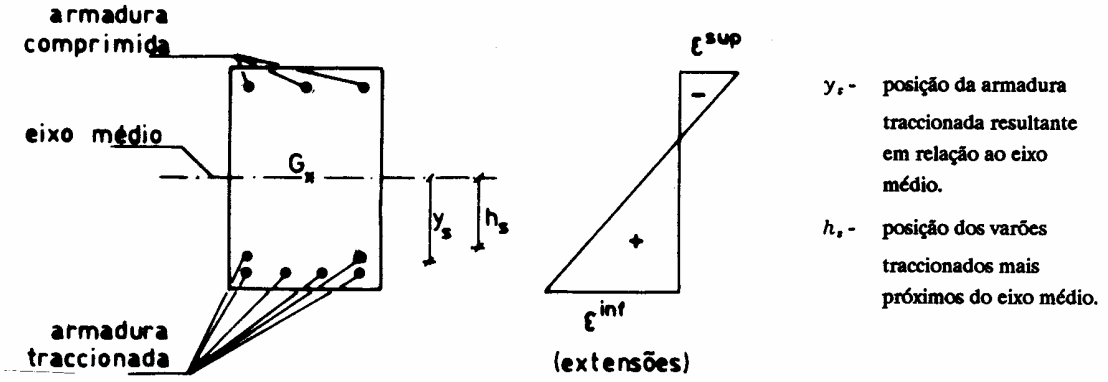


Fig. A.1 - Posicionamento da armadura traccionada.

o.3) Dados relativos ao cálculo da largura de fendas

* valor limite de largura de fendas;
* coeficiente η_1, definido na expressão (3.31) e no artigo 70º do REBAP;
* coeficiente β_1, definido na expressão (3.32) e no artigo 70º do REBAP;
* coeficiente β_2, definido para todas as combinações de acções definidas em *j)*, relativo à expressão (3.32) e ao artigo 70º do REBAP.

p) ACÇÕES DE PRÉ-ESFORÇO

Este conjunto de dados é repetido para cada acção de pré-esforço, de 1 até NSOLP.

* título genérico da acção de pré-esforço corrente;
* número de cabos considerado na presente solicitação;

* numeração dos cabos considerados na presente solicitação.

q) GEOMETRIA E PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS CABOS DE PRÉ-ESFORÇO

O seguinte conjunto de dados é definido para cada cabo de pré-esforço, de 1 até NCABO.

q.1) Propriedades do cabo de pré-esforço

* módulo de elasticidade;
* área da secção transversal;
* valor característico da tensão de rotura à tracção;
* número de excentricidades que definem o traçado do cabo (NEXCE);
* número de extensões (NEXTE), equivalentes à acção de pré-esforço, que definem a força instalado ao longo do cabo (será de um, correspondendo ao pré-esforço na origem, se forem calculadas as suas perdas).

q.2) Dados necessários ao cálculo das perdas de pré-esforço

* coeficiente de atrito entre a armadura de pré-esforço e a baínha;
* desvio angular parasita por unidade de comprimento;
* deslocamento da armadura de pré-esforço devido ao seu escorregamento no dispositivo de amarração;
* extensão devida à retracção livre do betão entre a data de aplicação do pré-esforço e a data corrente;
* definir se a armadura é pré-tensionada (através do algarismo 0) ou pós-tensionada (através do algarismo 1).

q.3) Leitura das excentricidades

Para cada um dos NEXCE pontos, definir:

* a sua coordenada x;
* a sua excentricidade.

q.4) Leitura das extensões

Para cada um dos NEXTE pontos, definir:

* a sua coordenada x;

* a respectiva extensão equivalente à acção de pré-esforço.

r) COEFICIENTES DE COMBINAÇÃO RELATIVOS ÀS ACÇÕES CORRESPONDENTES AOS ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS DE RESISTÊNCIA

Para cada uma das NCOMB combinações são definidos os coeficientes de que são afectados as NSOLC=NSOLS+NSOLP acções.

s) INSTRUÇÕES DE SAÍDA DE RESULTADOS PARA OS ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS DE RESISTÊNCIA

A obtenção dos resultados relativos a deslocamentos, reacções e esforços resultantes, para os estados limites últimos de resistência são definidos da forma indicada em *k)*.