Matriz

Matriz de tipo m×n sobre um corpo

Uma matriz de tipo m×n sobre um corpo Ω é um quadro com m linhas e n colunas cujos elementos A_{ij} são escalares de Ω.

$$A = \left[A_{ij} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{2} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

A – matriz $\qquad$ A_{ij} – elemento ou entrada da matriz

i – índice de linha ; j – índice de coluna

Matrizes especiais

Matriz-linha – matriz de tipo 1×n

Matriz-coluna – matriz de tipo m×1

Matriz-quadrada – matriz de tipo n×n ou de <u>ordem n</u>

elementos principais = A_{ii} → *diagonal principal*

tr*(A)* = traço de uma matriz quadrada
= soma dos elementos da diagonal principal

Matrizes especiais

Matrizes quadradas

Matriz nula - O

(de qualquer dimensão)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

superior inferior

Matriz diagonal

$$D_3 = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Operações

Igualdade de matrizes

Duas matrizes são iguais se e só se os elementos homólogos são iguais.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = B_{ij}$$

Elementos homólogos – elementos com índices iguais

Operações

Adição de matrizes

A adição ou soma de duas matrizes é uma matriz cujos elementos são iguais à soma dos elementos homólogos

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Propriedades

1. $A, B \in M_{m\times n} \Rightarrow A + B \in M_{m\times n}$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + B = B + A$
4. $A + O = O + A = A$
5. $A + (-A) = (-A) + A = O$
6. $A = B$ e $C = D \Rightarrow A + C = B + D$

Operações

Multiplicação de uma matriz por um escalar

O produto de uma matriz por um escalar é uma matriz que se obtém multiplicando o escalar por cada um dos elementos da matriz.

$$\lambda.A = [\lambda\ .A_{ij}]$$

Propriedades

1. $A \in M_{m\times n}, \lambda \in \Omega \Rightarrow \lambda A \in M_{m\times n}$
2. $\lambda.(A + B) = \lambda A + \lambda B$
3. $(\lambda + \mu).A = \lambda.A + \mu.A$
4. $(\lambda.\mu).A = \lambda.(\mu.A)$
5. $1.A = A$
6. $A = B \Rightarrow \lambda.A = \lambda.B$

Operações

Multiplicação de matrizes

Considerem-se duas matrizes A e B tais que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

O produto das matrizes A e B é uma matriz $P=A.B$ onde

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} & \vdots & \\ A_{i1} & \cdots A_{ik} \cdots & A_{in} \\ & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & B_{1j} & \\ & \vdots & \\ \cdots & B_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \\ & B_{nj} & \end{bmatrix} . = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & P_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$A.B = P$

(m×n).(n×p) = m×p

Operações

Multiplicação de matrizes

Matrizes quadradas

Propriedades (M_n - conjunto das matrizes quadradas de ordem n)

1. $A, B \in M_n \Rightarrow A.B \in M_n$
2. $(A.B).C = A.(B.C)$
3. $I_n.A = A.I_n = A$
4. $(A+B).C = A.C + B.C$
5. $A.(B+C) = A.B + A.C$
6. $A = B$ e $C = D \Rightarrow A.C = B.D$

Em geral, o produto de matrizes não é comutativo

A.B ≠B.A

Operações (unárias)

Transposição de matrizes

A matriz <u>transposta</u> da matriz A, $\boldsymbol{A^t}$, obtém-se através da troca ordenada de linhas por colunas (colunas por linhas) da matriz A.

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A^t \\ (m\times n) & \rightarrow & (n\times m) \end{array}$$

Propriedades

1. $\left(A^t\right)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(A.B)^t = B^t.A^t$

Matrizes quadradas

$A=A^t \Leftrightarrow$ *A é simétrica*

$A=-A^t \Leftrightarrow$ *A é hemi-simétrica*

Operações (unárias)

Conjugação de matrizes

A matriz <u>conjugada</u> da matriz A, $\overline{A}$, obtém-se substituindo cada elemento de A pelo respectivo complexo conjugado.

$$\overline{A} = \left[\overline{A_{ij}}\right]$$

Propriedades

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{A.B} = \overline{A}.\overline{B}$

Operações (unárias)

Transconjugação de matrizes

A matriz <u>transconjugada</u> ou matriz <u>adjunta</u> da matriz *A*, ***A****, obtém-se através da transposição e conjugação da matriz *A*.

$$A^* = \overline{\left(A^t\right)} = \left(\overline{A}\right)^t$$

Propriedades

1. $\left(A^*\right)^* = A$
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$
3. $(A.B)^* = B^*.A^*$

Matrizes quadradas definidas sobre o corpo **C**

$A = A^* \Leftrightarrow$ *A é hermiteana*

$A = -A^* \Leftrightarrow$ *A é hemi-hermiteana*

Operações (unárias)

Inversão de matrizes

A matriz <u>inversa</u> da matriz *A*, $\boldsymbol{A^{-1}}$, é tal que

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Condição <u>necessária</u> para a existência de inversa

A é uma matriz quadrada

Propriedades

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$
3. $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
4. $A.B = O \Leftrightarrow B = O$
5. $\left(I^{-1}\right) = I$
6. $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$

Operações elementares

Operação elementar

Operações elementares sobre as linhas (colunas) da matriz A:

(a) - troca de duas linhas (colunas);

(b) - multiplicação de uma linha (coluna) por uma constante não nula;

(c) - adição a uma linha (coluna) de outra linha (coluna) multiplicada por uma constante não nula.

As operações elementares são do tipo 1, tipo 2 ou tipo 3 consoante são obtidas por (a), (b) ou (c)

Operações elementares

Matriz elementar

Uma matriz elementar de ordem n é obtida pela execução de uma operação elementar sobre a matriz identidade de ordem n (I_n).

Uma matriz elementar é do tipo 1, tipo 2 ou tipo 3 consoante o tipo da operação elementar que lhe deu origem.

As matrizes elementares são invertíveis e a inversa de uma matriz elementar é também uma matriz elementar.

Operações elementares

Operação elementar ↔ Matriz elementar

Se a matriz *B* é obtida da matriz *A* por execução de uma operação elementar:

- sobre as linhas, então $B=E.A$

- sobre as colunas, então $B=A.E$

A matriz *E* é conseguida pela execução da mesma operação elementar que deu origem a *B*.

As operações elementares vão ser usadas no <u>cálculo da característica</u> e na <u>inversão</u> de matrizes

Combinação linear

Combinação linear das linhas de uma matriz

Se *A* é uma matriz m×n, a combinação linear das linhas de *A* é a matriz-linha

$$\boxed{X = \lambda_1 A_{(1)} + \lambda_2 A_{(2)} + \cdots + \lambda_m A_{(m)}}$$

onde $\lambda_i \in \Omega$.

Combinação linear das colunas de uma matriz

Se *A* é uma matriz m×n, a combinação linear das colunas de *A* é a matriz-coluna

$$\boxed{Y = \lambda_1 A^{(1)} + \lambda_2 A^{(2)} + \cdots + \lambda_n A^{(n)}}$$

onde $\lambda_i \in \Omega$.

Dependência linear

Dependência linear das linhas de uma matriz

As m linhas da matriz A são linearmente dependentes se e só se existem em Ω m escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, não todos nulos tais que

$$\lambda_1 A_{(1)} + \lambda_2 A_{(2)} + \cdots + \lambda_m A_{(m)} = O$$

Independência linear das linhas de uma matriz

As m linhas da matriz A são linearmente independentes se se verifica que

$$\lambda_1 A_{(1)} + \lambda_2 A_{(2)} + \cdots + \lambda_m A_{(m)} = O$$

só com todos os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ nulos.

Característica

Característica de uma matriz

A característica de uma matriz é o número máximo de linhas (colunas) da matriz que são linearmente independentes.

A característica de uma matriz pode ser determinada:

- usando a noção de dependência/independência linear
- usando operações elementares (condensação da matriz)

Característica

Cálculo de característica usando operações elementares

Princípio do método:

- a aplicação de uma operação elementar não altera a característica da matriz;
- em matrizes triangulares (ou diagonais), a característica da matriz é igual ao número de elementos não nulos da diagonal principal (em matrizes rectangulares, a noção de diagonal principal é estendida aos elementos de índices iguais).

Em conclusão, devemos transformar a matriz inicial numa matriz triangular (ou diagonal) por aplicação de operações elementares; nesta nova matriz, o cálculo da característica é imediato.

Inversão

Inversão de matrizes usando operações elementares

Princípio do método:

Realizar uma sucessão de operações elementares sobre as linhas de uma matriz aumentada (C) contendo a matriz original e a matriz identidade até que a matriz original se transforme na matriz identidade.

$$C = \left[A \quad | \quad I_n \right]$$

$$A^{-1}C = A^{-1}\left[A \quad | \quad I_n \right] = \left[A^{-1}A \quad | \quad A^{-1}I_n \right] = \left[I_n \quad | \quad A^{-1} \right]$$

$$E_k \ldots E_2 E_1 C = \left[E_k \ldots E_2 E_1 A \quad | \quad E_k \ldots E_2 E_1 I_n \right] \rightarrow \left[I_n \quad | \quad A^{-1} \right]$$