



Universidade do Porto

**FEUP** Faculdade de  
Engenharia

Mestrado em Automação, Instrumentação e Controlo

# Robótica Industrial

Textos

Modelação Cinemática e Dinâmica de  
Manipuladores de Estrutura em Série

Elaborados por:

António Mendes Lopes

2001/2002

---

# MODELAÇÃO

## CINEMÁTICA E DINÂMICA

### DE MANIPULADORES

### DE ESTRUTURA EM SÉRIE

---

*António Mendes Lopes, FEUP – DEMEGI, 2002*

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas tem-se assistido a um crescente interesse pelas áreas da automação industrial e da robótica, motivado, nomeadamente, por preocupações relacionadas com o aumento da produtividade, redução de horários e segurança no trabalho. Esse interesse tem levado diversas entidades públicas e privadas, tais como universidades, agências governamentais e empresas, a efectuar investigação, desenvolvimento e aplicações nessas áreas.

O início da era da automação industrial remonta ao século XVIII, numa altura em que as máquinas dedicadas começavam a fazer parte do processo produtivo das indústrias. O desenvolvimento das técnicas de produção veio criar novas necessidades só possíveis de satisfazer com máquinas programáveis e flexíveis, dando origem aos primeiros robôs industriais (Klafter *et al.*, 1989).

Foi no final dos anos sessenta, com base na experiência então existente no campo dos telemanipuladores e das máquinas ferramentas de comando numérico, que George Devol construiu o primeiro robô industrial. A partir dessa data a robótica tem vindo a afirmar-se como uma ciência autónoma, de carácter multidisciplinar, penetrando em áreas tradicionalmente ligadas às engenharias mecânica,

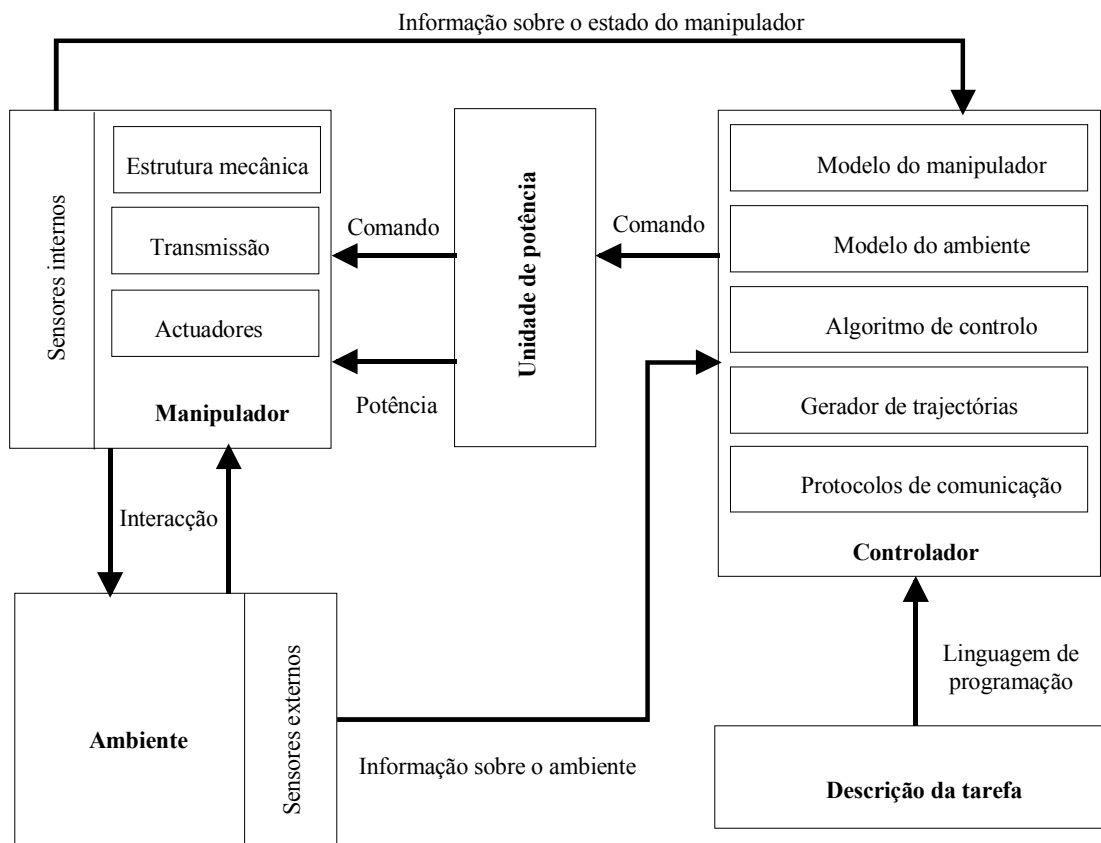
electrotécnica, de computadores e outras, revelando importância crescente em áreas tão distintas como a exploração espacial, a exploração subaquática, a medicina ou a indústria. É aliás na indústria que tem sido investido o maior esforço, sendo a indústria automóvel um bom exemplo disso; robôs de pintura e de soldadura fazem hoje parte integrante da sua “força laboral”.

Genericamente, um robô manipulador, independentemente da sua potencial aplicação, é mecanicamente concebido para posicionar e orientar no espaço o seu órgão terminal: uma garra ou uma ferramenta. A sua estrutura pode variar mas, normalmente, é possível identificar os seguintes elementos funcionais principais (Klafter *et al.*, 1989) (Figura 1.1):

- manipulador: conjunto de corpos ligados por juntas, formando cadeias cinemáticas que definem uma estrutura mecânica. No manipulador incluem-se os actuadores, que agem sobre a estrutura mecânica, modificando a sua configuração, e a transmissão, que liga os actuadores à estrutura mecânica. Os termos *manipulador* e *robô* são muitas vezes usados com a mesma finalidade, embora, formalmente, tal não esteja correcto;
- sensores: dispositivos usados para recolher e proporcionar ao controlador informação sobre o estado do manipulador e do ambiente. Os sensores internos fornecem informação sobre o estado do manipulador (por exemplo, posição, velocidade ou aceleração). Os sensores externos fornecem informação sobre o ambiente (por exemplo, sensores de força/momento ou câmaras de vídeo para detecção de obstáculos);
- controlador: dispositivo, tipicamente baseado em microcomputador, que controla o movimento do manipulador. Usa os modelos do manipulador e do ambiente e a informação fornecida pelo operador e pelos sensores, efectua as operações algébricas de cálculo necessárias e envia os sinais de controlo aos actuadores. Poderá ainda efectuar tarefas como o registo de dados em memória e a gestão das comunicações com o operador ou

com outros dispositivos que cooperem com o robô na execução da tarefa;

- unidade de potência: dispositivo que tem por objectivo proporcionar energia aos actuadores. Num sistema actuado electricamente trata-se de um conjunto de amplificadores de potência.



*Figura 1.1 Representação esquemática da estrutura geral de um robô manipulador integrado no seu ambiente.*

Em particular, um robô industrial possui uma estrutura mais simples (Figura 1.3); a interacção com o ambiente é praticamente inexistente e a programação do robô baseia-se numa descrição imutável quer da tarefa quer do ambiente. O manipulador é normalmente constituído por um conjunto de corpos rígidos ligados em série por intermédio de juntas rotativas ou prismáticas, formando uma cadeia cinemática aberta. Uma das extremidades do manipulador encontra-se rigidamente ligada a uma base, enquanto que a extremidade oposta suporta o órgão terminal,

podendo mover-se livremente no espaço. Tipicamente, o manipulador possui 6 graus de liberdade (gdl) e é composto pelo braço e pelo punho. O braço tem, em geral, 3 gdl, efectuando o posicionamento do punho. Este, normalmente, é composto por 3 juntas rotativas, que utiliza para orientar o órgão terminal (3 gdl).

Note-se que cada junta, rotativa ou prismática, confere ao manipulador um grau de movimento (gdm). Em teoria, o manipulador poderá ter uma infinidade de gdm. O órgão terminal pode possuir um máximo de 6 gdl: 3 gdl em posicionamento e 3 gdl em orientação no espaço 3D. O número de gdl do órgão terminal é sempre inferior ou igual ao número de gdm do manipulador. Se os vários gdm estiverem adequadamente distribuídos ao longo da estrutura mecânica, o número de gdl do órgão terminal será igual ao número de gdm do manipulador (até ao limite de 6). Quando o número de gdm é superior ao número de gdl diz-se que o manipulador é redundante.

Muitas vezes utiliza-se a expressão *grau de liberdade* quando deveria utilizar-se *grau de movimento*. Trata-se de um abuso de linguagem que deve ser evitado a menos que não haja risco de confusão (Figura 1.2).

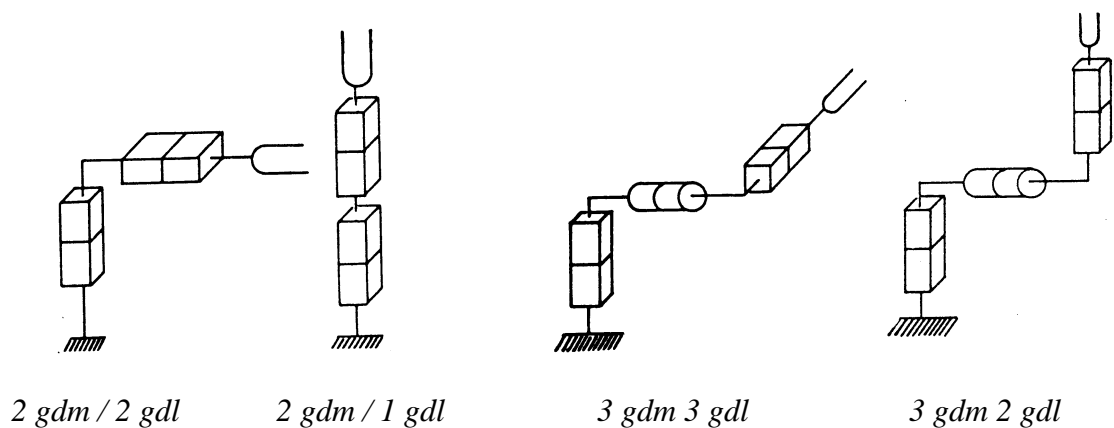
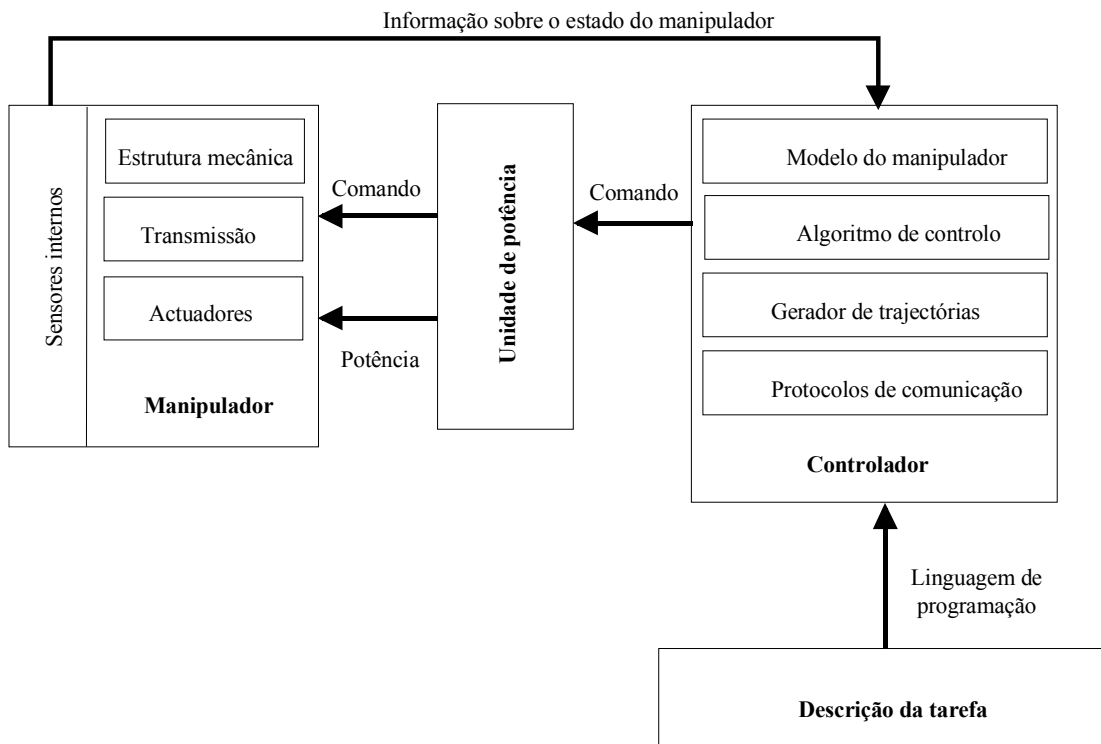
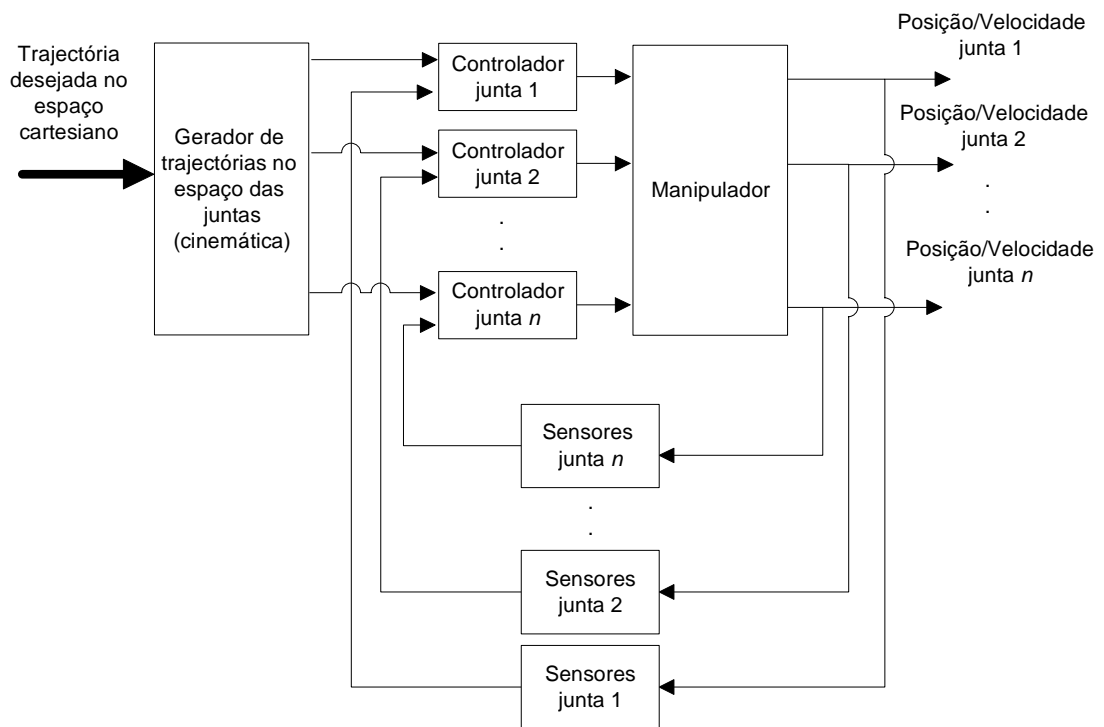


Figura 1.2 Graus de liberdade vs graus de movimento.



*Figura 1.3 Representação esquemática da estrutura geral de um robô industrial.*

O subsistema controlador de um robô industrial utiliza, em geral, apenas algoritmos de controlo de posição. Trata-se, normalmente, de controladores descentralizados, de ganhos fixos, em que cada junta possui o seu próprio servossistema de controlo. Geralmente, tais controladores apresentam um desempenho satisfatório graças às transmissões mecânicas empregues, com factores de redução da ordem dos 100:1. A utilização de tais reduções leva a que as variações inerciais (causadas por alterações da configuração da estrutura ou da carga manipulada), quando referidas aos motores, surjam divididas pelo quadrado do factor de redução. O efeito dessa variação é, assim, desprezável. Acoplamentos dinâmicos e variações inerciais são tratados como perturbações (Figura 1.4) (Mendes Lopes, 2000).



*Figura 1.4 Diagrama representativo do subsistema de controlo de posição de um robô industrial.*

## 2 MODELAÇÃO CINEMÁTICA

No que respeita à estrutura mecânica, um manipulador robótico é um sistema formado por um conjunto de corpos ligados por intermédio de juntas activas e passivas. As juntas activas são os pontos de entrada de energia controlada no sistema. Estas permitem o comando da estrutura, fazendo-a seguir uma trajectória no espaço operacional (cartesiano), com uma dada velocidade e aceleração, e, em certos casos, interagir com o meio ambiente, exercendo as forças de contacto desejadas.

As transformações de coordenadas entre o espaço das juntas e o espaço operacional revestem-se de importância fundamental no controlo de manipuladores. De facto, na maioria dos casos os robôs são controlados no espaço das juntas,

enquanto que o planeamento e a definição das trajectórias são, normalmente, efectuados no espaço operacional. Assim, métodos eficientes de transformação entre os dois espaços assumem um papel relevante onde, nos últimos anos, tem sido levada a cabo muita investigação (Paul, 1982; Vukobratovic e Kircanski, 1986; Fu *et al.*, 1987).

Neste contexto, é essencial o conhecimento dos modelos cinemáticos de posição e diferencial. O primeiro é traduzido matematicamente por um conjunto de equações algébricas não lineares, permitindo determinar as relações existentes entre a posição das juntas activas e a posição generalizada do órgão terminal. O segundo é traduzido matematicamente por um sistema de equações lineares que permite relacionar as respectivas velocidades. Além disso, através de considerações que envolvem os conceitos de trabalho e de energia, permite também determinar o modelo estático do manipulador (relação entre as forças aplicadas nas juntas e as forças aplicadas no órgão terminal). Em qualquer dos casos o problema envolve sempre a determinação de um jacobiano.

Relacionados com a cinemática podem distinguir-se dois problemas: a cinemática directa e a cinemática inversa.

A cinemática directa envolve a determinação da posição (ou velocidade) generalizada do órgão terminal a partir da posição (ou velocidade) das juntas activas. Para manipuladores de estrutura em série é, na maioria dos casos, um problema simples, com solução única.

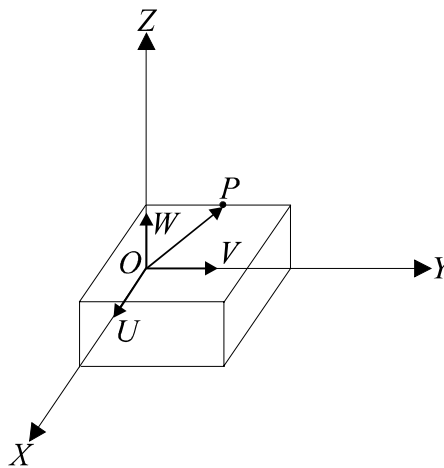
A cinemática inversa envolve a determinação da posição (ou velocidade) das juntas activas a partir da posição (ou velocidade) generalizada do órgão terminal. Normalmente, para os manipuladores de estrutura em série é um problema difícil, para o qual nem sempre é possível encontrar solução analiticamente. Além disso, normalmente, a solução não é única.



## 2.1 CINEMÁTICA DE POSIÇÃO DIRECTA

Nesta secção (e respectivas sub-secções) apresenta-se o formalismo de Denavit-Hartenberg e, com base nele, um algoritmo sistemático para a obtenção do modelo cinemático de posição de um manipulador de estrutura em série. Como exemplo efectua-se a modelação cinemática do robô industrial TI ER 6000<sup>1</sup>.

### 2.1.1 MATRIZ DE ROTAÇÃO



*Figura 2.1 Representação de um referencial fixo, OXYZ, e de um referencial móvel, OUVW.*

Considere-se a Figura 2.1. Os referenciais cartesianos OXYZ e OUVW têm a mesma origem no ponto O. O referencial OXYZ encontra-se fixo, enquanto que o referencial OUVW pode rodar relativamente a OXYZ. Fisicamente pode considerar-se OUVW como estando solidário com um corpo rígido, por exemplo, com um elo de um robô manipulador.

---

<sup>1</sup>Trata-se de um robot industrial 6R, com accionamento por motores de corrente contínua, desenvolvido pela Texas Instruments, Inc. em 1980.

Sejam  $(\mathbf{i}_x, \mathbf{j}_y, \mathbf{k}_z)$  e  $(\mathbf{i}_u, \mathbf{j}_v, \mathbf{k}_w)$  os vectores unitários segundo, respectivamente, os eixos de  $OXYZ$  e  $OUVW$ . Um ponto  $\mathbf{p}$  no espaço pode ser representado pelas suas coordenadas, expressas quer em  $OXYZ$  quer em  $OUVW$ . Por simplicidade, assumase que  $\mathbf{p}$  está fixo em relação a  $OUVW$ . Assim,  $\mathbf{p}$  pode ser representado por

$$\mathbf{p}_{uvw} = [p_u \quad p_v \quad p_w]^T \quad (\text{Eq. 2.1a})$$

em  $OUVW$ , e

$$\mathbf{p}_{xyz} = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T \quad (\text{Eq. 2.1b})$$

em  $OXYZ$ .

Pretende-se determinar a transformação matricial  $\mathbf{R} = {}^{xyz}\mathbf{R}_{uvw}$  que converte as coordenadas de  $\mathbf{p}$  expressas em relação a  $OUVW$ ,  $\mathbf{p}_{uvw}$ , nas coordenadas de  $\mathbf{p}$  expressas em relação a  $OXYZ$ ,  $\mathbf{p}_{xyz}$ , depois do corpo solidário com o referencial  $OUVW$  ter sofrido uma rotação. Isto é,

$$\mathbf{p}_{xyz} = \mathbf{R} \mathbf{p}_{uvw} \quad (\text{Eq. 2.2})$$

Recordando a definição de componentes de um vector, tem-se

$$\mathbf{p}_{uvw} = p_u \mathbf{i}_u + p_v \mathbf{j}_v + p_w \mathbf{k}_w \quad (\text{Eq. 2.3})$$

onde  $p_u, p_v, p_w$  representam, respectivamente, as componentes (ou as projecções) de  $\mathbf{p}$  segundo os eixos  $OU, OV$  e  $OW$ . Então, usando a definição de produto escalar e a equação (Eq. 2.3), tem-se (propriedade distributiva do produto escalar)

$$\begin{aligned} p_x &= \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{p} = \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w p_w \\ p_y &= \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{p} = \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w p_w \\ p_z &= \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{p} = \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w p_w \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.4})$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.5})$$

Usando esta notação, a matriz  $\mathbf{R}$  na equação (Eq. 2.2) é dada por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.6})$$

Note-se que as colunas da matriz  $\mathbf{R}$  representam as coordenadas dos eixos principais do referencial  $OUVW$  em relação ao referencial  $OXYZ$ , isto é, representam os cossenos directores dos eixos do referencial  $OUVW$  em relação ao referencial  $OXYZ$ . A matriz  $\mathbf{R}$  representa, assim, a orientação do referencial  $OUVW$  em relação ao referencial  $OXYZ$ .

De modo semelhante podem ser obtidas as coordenadas de  $\mathbf{p}_{uvw}$  a partir das coordenadas de  $\mathbf{p}_{xyz}$  através da equação matricial

$$\mathbf{p}_{uvw} = \mathbf{Q} \mathbf{p}_{xyz} \quad (\text{Eq. 2.7})$$

ou

$$\begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{j}_y & \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{k}_z \\ \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{j}_y & \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{k}_z \\ \mathbf{k}_w \cdot \mathbf{i}_x & \mathbf{k}_w \cdot \mathbf{j}_y & \mathbf{k}_w \cdot \mathbf{k}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.8})$$

Dado que o produto escalar é comutativo, pode mostrar-se a partir das equações (Eq. 2.6) a (Eq. 2.8) que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (\text{Eq. 2.9})$$

e

$$\mathbf{QR} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I}_3 \quad (\text{Eq. 2.10})$$

onde  $\mathbf{I}_3$  representa a matriz identidade de dimensão  $3 \times 3$ . As matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$  são ortogonais.

Sendo os vectores  $(\mathbf{i}_x, \mathbf{j}_y, \mathbf{k}_z)$  e  $(\mathbf{i}_u, \mathbf{j}_v, \mathbf{k}_w)$  unitários, as transformações representadas pelas equações (Eq. 2.2) e (Eq. 2.7) são chamadas transformações ortonormais.

A partir daqui podem ser determinadas as transformações que representam as rotações do referencial  $OUVW$  em relação aos eixos do referencial  $OXYZ$ . Se o referencial  $OUVW$  sofrer uma rotação de um ângulo  $\alpha$  segundo o eixo  $OX$ , então o ponto  $\mathbf{p}_{uvw}$  de coordenadas  $[p_u \ p_v \ p_w]^T$  em relação a  $OUVW$ , terá diferentes coordenadas  $[p_x \ p_y \ p_z]^T$  em relação a  $OXYZ$ . A transformação  $\mathbf{R}_{x,\alpha}$  chama-se matriz de rotação segundo  $OX$  de um ângulo  $\alpha$  e poderá ser deduzida a partir dos conceitos desenvolvidos anteriormente. Assim, vem

$$\mathbf{p}_{xyz} = \mathbf{R}_{x,\alpha} \mathbf{p}_{uvw} \quad (\text{Eq. 2.11})$$

com  $\mathbf{i}_x \equiv \mathbf{i}_u$  e

$$\mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.12})$$

De modo semelhante podem ser obtidas as matrizes de rotação segundo  $OY$  de um ângulo  $\phi$  e de rotação segundo  $OZ$  de um ângulo  $\theta$  (Figura 2.2):

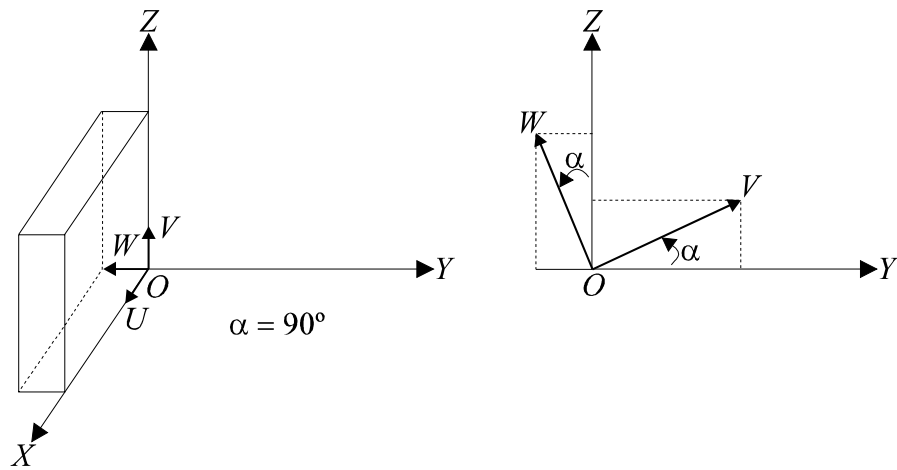


Figura 2.2a Rotação do corpo rígido da Figura 2.1 de um ângulo  $\alpha$  segundo o eixo OX.

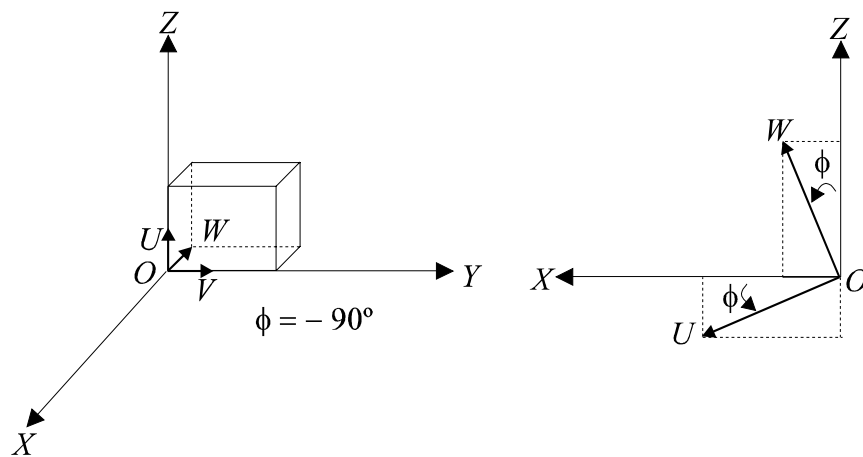


Figura 2.2b Rotação do corpo rígido da Figura 2.1 de um ângulo  $\phi$  segundo o eixo OY.

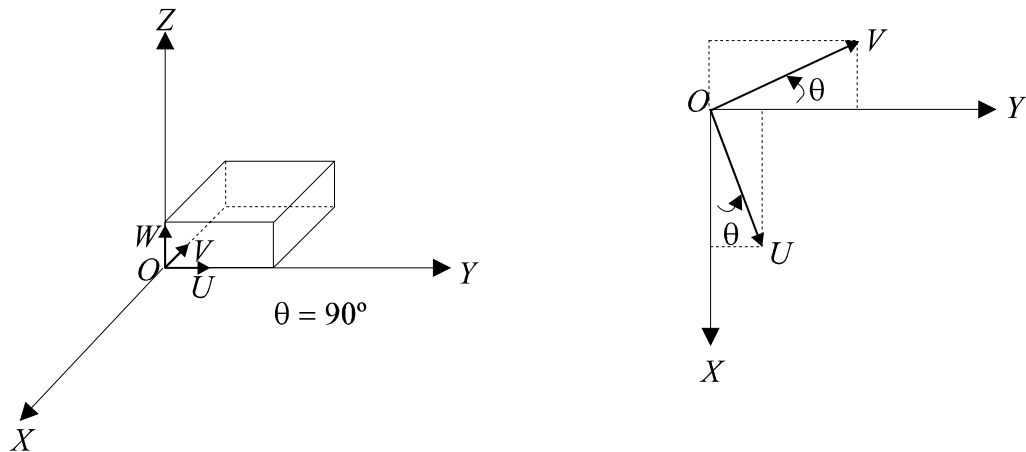


Figura 2.2c Rotação do corpo rígido da Figura 2.1 de um ângulo  $\theta$  segundo o eixo  $OZ$ .

$$\mathbf{R}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen } \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.13})$$

As matrizes  $\mathbf{R}_{x,\alpha}$ ,  $\mathbf{R}_{y,\phi}$  e  $\mathbf{R}_{z,\theta}$  são chamadas matrizes de rotação básicas ou elementares. Como se verá, rotações mais complexas podem ser tratadas à custa destas transformações elementares.

## 2.1.2 COMPOSIÇÃO DE MATRIZES DE ROTAÇÃO

Viu-se na secção anterior como representar matematicamente a rotação de um referencial  $OUVW$  segundo cada um dos eixos de um referencial fixo  $OXYZ$ .

Se, em vez de uma rotação simples em torno de um dos eixos de  $OXYZ$ , o referencial  $OUVW$ , inicialmente alinhado com  $OXYZ$ , sofrer uma sequência finita de rotações em torno desses mesmos eixos, então essa sequência pode ser representada através do produto de várias matrizes de rotação básicas.

Por exemplo, a matriz que representa a rotação de  $OUVW$  de um ângulo  $\alpha$  segundo o eixo  $OX$ , seguida da rotação de um ângulo  $\theta$  segundo  $OZ$  e, por último, da rotação de um ângulo  $\phi$  segundo  $OY$  é

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} = \mathbf{R}_{y,\phi} \mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{R}_{x,\alpha} &= \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & S\phi S\alpha - C\phi S\theta C\alpha & C\phi S\theta S\alpha + S\phi C\alpha \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha \\ -S\phi C\theta & S\phi S\theta C\alpha + C\phi S\alpha & C\phi C\alpha - S\phi S\theta S\alpha \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.14})
\end{aligned}$$

onde  $C\phi \equiv \cos \phi$ ,  $S\phi \equiv \sin \phi$ ,  $C\theta \equiv \cos \theta$ ,  $S\theta \equiv \sin \theta$ ,  $C\alpha \equiv \cos \alpha$  e  $S\alpha \equiv \sin \alpha$ .

Uma vez que o produto de matrizes em geral não é comutativo é importante a ordem pela qual são efectuadas as rotações. Assim, a matriz de rotação anterior é diferente da matriz correspondente à rotação de um ângulo  $\phi$  segundo  $OY$ , seguida da rotação de um ângulo  $\theta$  segundo  $OZ$  e seguida da rotação de um ângulo  $\alpha$  segundo  $OX$ . Para esta sequência a matriz de rotação vem

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x,\alpha} \mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{R}_{y,\phi} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta & C\theta S\phi \\ C\alpha S\theta C\phi + S\alpha S\phi & C\alpha C\theta & C\alpha S\theta S\phi - S\alpha C\phi \\ S\alpha S\theta C\phi - C\alpha S\phi & S\alpha C\theta & S\alpha S\theta S\phi + C\alpha C\phi \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.15})
\end{aligned}$$

Poderá ainda haver interesse em representar rotações de  $OUVW$  em torno dos seus próprios eixos,  $OU$ ,  $OV$  e  $OW$ . Assim, em geral, a matriz de rotação resultante de uma sequência finita de rotações elementares pode ser obtida através das seguintes regras (Fu *et al.*, 1987):

- inicialmente ambos os referenciais estão coincidentes, pelo que a matriz de rotação é a matriz identidade  $\mathbf{I}_3$ ;
- se  $OUVW$  rodar de um determinado ângulo em torno de um dos eixos de  $OXYZ$ , deve-se *pré-multiplicar* a matriz de rotação, calculada até esse momento, pela matriz de rotação básica apropriada: (Eq. 2.12) e (Eq. 2.13);

- se  $OUVW$  rodar de um determinado ângulo em torno de um dos seus próprios eixos, deve-se *pós-multiplicar* a matriz de rotação, calculada até esse momento, pela matriz de rotação básica apropriada: (Eq. 2.12) e (Eq. 2.13).

### 2.1.3 MATRIZ DE ROTAÇÃO SEGUNDO UM VECTOR ARBITRÁRIO

Em vez de uma sequência de rotações segundo os eixos principais de  $OXYZ$  e/ou  $OUVW$ , o referencial  $OUVW$  pode também rodar de um ângulo  $\phi$  em torno de um vector arbitrário  $\mathbf{r}$  de componentes  $r_x$ ,  $r_y$  e  $r_z$  e passando pela origem  $O$ . Para determinar a matriz de rotação  $\mathbf{R}_{\mathbf{r},\phi}$  em primeiro lugar, faz-se uma sequência de rotações segundo os eixos principais de  $OXYZ$ , de modo a alinhar o vector  $\mathbf{r}$  com o eixo  $OZ$ . De seguida faz-se a rotação do ângulo  $\phi$  em torno de  $\mathbf{r}$  e por último faz-se uma sequência de rotações segundo os eixos de  $OXYZ$ , para colocar o vector  $\mathbf{r}$  na sua situação inicial.

Observe-se a Figura 2.3. O alinhamento de  $OZ$  com  $\mathbf{r}$  pode ser feito através da rotação de um ângulo  $\alpha$  em torno de  $OX$  ( $\mathbf{r}$  fica no plano  $XZ$ ), seguida da rotação de um ângulo  $-\beta$  em torno de  $OY$  ( $\mathbf{r}$  fica alinhado com  $OZ$ ).

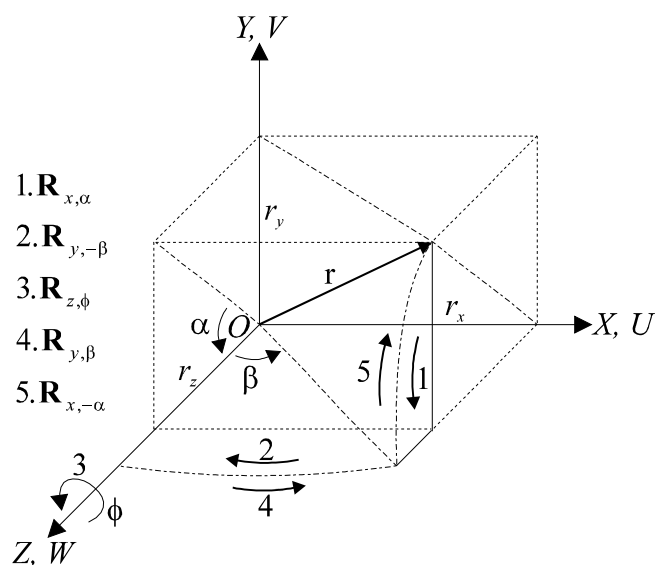


Figura 2.3 Rotação em torno de um vector arbitrário  $\mathbf{r}$ .



Depois da rotação do ângulo  $\phi$  em torno de  $OZ$  (e de  $\mathbf{r}$ ) inverte-se a ordem das rotações efectuadas, com ângulos simétricos dos anteriores. A matriz de rotação  $\mathbf{R}_{r,\phi}$  resultante vem

$$\mathbf{R}_{r,\phi} = \mathbf{R}_{x,-\alpha} \mathbf{R}_{y,\beta} \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y,-\beta} \mathbf{R}_{x,\alpha}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & S\alpha \\ 0 & -S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & -S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}$$

(Eq. 2.16)

Tendo em conta a Figura 2.3 tem-se

$$\sin \alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} \quad \cos \alpha = \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} \quad (\text{Eq. 2.17a})$$

$$\sin \beta = r_x \quad \cos \beta = \sqrt{r_y^2 + r_z^2} \quad (\text{Eq. 2.17b})$$

Substituindo na equação (Eq. 2.16) vem

$$\mathbf{R}_{r,\phi} = \begin{bmatrix} r_x^2 V\phi + C\phi & r_x r_y V\phi - r_z S\phi & r_x r_z V\phi + r_y S\phi \\ r_x r_y V\phi + r_z S\phi & r_y^2 V\phi + C\phi & r_y r_z V\phi - r_x S\phi \\ r_x r_z V\phi - r_y S\phi & r_y r_z V\phi + r_x S\phi & r_z^2 V\phi + C\phi \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.18})$$

onde  $V\phi = \text{vers } \phi = 1 - \cos \phi$ .

#### 2.1.4 REPRESENTAÇÃO DA MATRIZ DE ROTAÇÃO (ORIENTAÇÃO) USANDO ÂNGULOS DE EULER

Como a dimensão de uma matriz de rotação é  $3 \times 3$ , esta representação não utiliza um conjunto mínimo de parâmetros (3) para descrever a orientação de um corpo rígido em relação a um referencial fixo. Por esse motivo são muitas vezes usadas outras representações, como é o caso dos ângulos de Euler (3 ângulos).

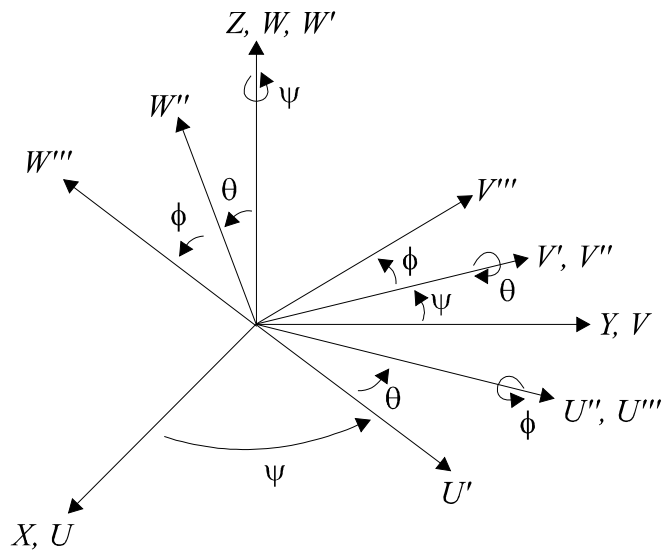


Figura 2.4 Representação da orientação em termos de ângulos de Euler.

Existem 12 conjuntos distintos de ângulos de Euler (que dependem da sequência de rotações escolhida) (Sciavicco e Siciliano, 1996). Uma das possibilidades corresponde à seguinte sequência (Figura 2.4) (Vukobratovic e Kircanski, 1986):

- rotação de um ângulo  $\psi$  segundo o eixo  $OZ$  ( $\mathbf{R}_{z,\psi}$ );
- rotação de um ângulo  $\theta$  segundo o eixo rodado  $OV$ , isto é,  $OV'$  ( $\mathbf{R}_{v,\theta}$ );
- rotação de um ângulo  $\phi$  segundo o eixo rodado  $OU$ , isto é,  $OU''$  ( $\mathbf{R}_{u,\phi}$ ).

Dado o vector de ângulos de Euler,  $\xi = [\psi \quad \theta \quad \phi]^T$ , a matriz resultante é

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\psi,\theta,\phi} &= \mathbf{R}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\phi} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\phi & -S\phi \\ 0 & S\phi & C\phi \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.19}) \\
&= \begin{bmatrix} C\psi C\theta & C\psi S\theta S\phi - S\psi C\phi & C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi \\ S\psi C\theta & S\psi S\theta S\phi + C\psi C\phi & S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi \\ -S\theta & S\theta S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Esta matriz pode também ser definida em termos de uma sequência de rotações em torno dos eixos principais do referencial fixo  $OXYZ$ : uma rotação de um ângulo  $\phi$  em torno de  $OX$ , seguida da rotação de um ângulo  $\theta$  em torno de  $OY$  e de uma rotação de um ângulo  $\psi$  em torno de  $OZ$ .

A partir da matriz de rotação podem ser determinados os ângulos de Euler (problema inverso). Assim, da equação (Eq. 2.19) vem

$$n_x = \cos \psi \cos \theta \quad (\text{Eq. 2.20})$$

$$n_y = \sin \psi \cos \theta \quad (\text{Eq. 2.21})$$

$$n_z = -\sin \theta \quad (\text{Eq. 2.22})$$

$$s_x = \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \quad (\text{Eq. 2.23})$$

$$s_y = \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \quad (\text{Eq. 2.24})$$

$$s_z = \cos \theta \sin \phi \quad (\text{Eq. 2.25})$$

$$a_x = \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \quad (\text{Eq. 2.26})$$

$$a_y = \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \quad (\text{Eq. 2.27})$$

$$a_z = \cos \theta \cos \phi \quad (\text{Eq. 2.28})$$

O ângulo  $\psi$  pode ser obtido multiplicando ambos os membros da equação (Eq. 2.20) por  $\sin \psi$ , multiplicando ambos os membros da equação (Eq. 2.21) por  $\cos \psi$  e subtraindo as duas equações, resultando

$$n_x \sin \psi - n_y \cos \psi = 0 \quad (\text{Eq. 2.29})$$

e

$$\psi = \arctan \frac{n_y}{n_x} + k\pi \quad (\text{Eq. 2.30})$$

O ângulo  $\theta$  pode ser calculado multiplicando a equação (Eq. 2.20) por  $\cos \psi$ , multiplicando a equação (Eq. 2.21) por  $\sin \psi$  e somando as duas, isto é

$$n_x \cos \psi + n_y \sin \psi = \cos \theta \quad (\text{Eq. 2.31})$$

Combinando a equação (Eq. 2.31) com a equação (Eq. 2.22) vem

$$\theta = \arctan \frac{-n_z}{n_x \cos \psi + n_y \sin \psi} + 2k\pi \quad (\text{Eq. 2.32})$$

Quanto ao ângulo  $\phi$ , este pode ser obtido multiplicando a equação (Eq. 2.26) por  $\sin \psi$ , multiplicando a equação (Eq. 2.27) por  $\cos \psi$  e subtraindo as equações:

$$a_x \sin \psi - a_y \cos \psi = \sin \phi \quad (\text{Eq. 2.33})$$

Por outro lado, multiplicando a equação (Eq. 2.23) por  $-\sin \psi$ , multiplicando a equação (Eq. 2.24) por  $\cos \psi$  e somando as duas equações resulta

$$-s_x \sin \psi + s_y \cos \psi = \cos \phi \quad (\text{Eq. 2.34})$$

Combinando as equações anteriores vem

$$\phi = \arctan \frac{a_x \sin \psi - a_y \cos \psi}{-s_x \sin \psi + s_y \cos \psi} + 2k\pi \quad (\text{Eq. 2.35})$$

onde  $k$  é um número inteiro.

### 2.1.5 PROPRIEDADES DAS MATRIZES DE ROTAÇÃO

Em resumo são apresentadas de seguida algumas propriedades das matrizes de rotação:

- as colunas da matriz de rotação representam os eixos do referencial móvel (vectores unitários) expressos no referencial fixo; as linhas da matriz de rotação representam os eixos do referencial fixo (vectores unitários) expressos no referencial móvel;
- dado que cada linha (ou cada coluna) da matriz de rotação é um vector unitário, o seu módulo é igual a um; o determinante de uma matriz de rotação é igual a 1;
- o produto interno de quaisquer duas linhas, bem como o produto interno de quaisquer duas colunas é igual a zero;
- a inversa de uma matriz de rotação é igual à sua transposta.

### 2.1.6 TRANSFORMAÇÕES HOMOGÉNEAS

O conceito de transformação homogénea é útil no desenvolvimento de transformações que incluam informação sobre rotação, translação, factor de escala e efeito de perspectiva.

Se a um dado vector  $\mathbf{p} = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T$ , no espaço 3D, é acrescentada uma quarta componente, de modo a  $\mathbf{p}$  ser transformado em  $\hat{\mathbf{p}} = [wp_x \quad wp_y \quad wp_z \quad w]^T$ , diz-se que  $\hat{\mathbf{p}}$  vem expresso em *coordenadas homogéneas*. Nesta secção será usado o símbolo “ $\hat{\phantom{p}}$ ” para representar um vector através de coordenadas homogéneas. Posteriormente, caso não exista perigo de confusão, este símbolo será omitido.

Em geral, a representação de um vector  $N$  - dimensional por um vector  $(N+1)$  - dimensional, diz-se de representação homogénea. Inversamente, o vector  $N$  - dimensional obtém-se da sua representação em coordenadas homogéneas dividindo as coordenadas do vector  $(N+1)$  - dimensional pela componente de ordem  $(N+1)$ . Assim, no espaço 3D, um vector  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  é representado pelo vector aumentado  $\hat{\mathbf{p}} = [wp_x \ wp_y \ wp_z \ w]^T$  verificando-se as relações

$$p_x = \frac{wp_x}{w} \quad p_y = \frac{wp_y}{w} \quad p_z = \frac{wp_z}{w} \quad (\text{Eq. 2.36})$$

Não existe uma representação única para um vector em coordenadas homogéneas.

Assim,  $\hat{\mathbf{p}}_1 = [w_1 p_x \ w_1 p_y \ w_1 p_z \ w_1]^T$  ou  $\hat{\mathbf{p}}_2 = [w_2 p_x \ w_2 p_y \ w_2 p_z \ w_2]^T$  podem ser consideradas representações válidas para o vector  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ . Pode ver-se deste modo que a quarta componente,  $w$ , funciona como um factor de escala. Se o factor de escala  $w = 1$ , então as componentes físicas do vector são iguais às componentes em coordenadas homogéneas. Na cinemática de robôs o factor de escala é considerado sempre unitário.

Uma matriz homogénea  $4 \times 4$  pode ser considerada como consistindo em quatro submatrizes

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{matriz} & \text{vector} \\ \text{rotação} & \text{posição} \\ \text{efeito de} & \text{factor} \\ \text{perspectiva} & \text{escala} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.37})$$

A submatriz  $\mathbf{R}_{3 \times 3}$  representa a matriz de rotação (i. e., a orientação do referencial móvel em relação ao referencial fixo), a submatriz  $\mathbf{p}_{3 \times 1}$  representa o vector posição da origem do referencial móvel em relação ao referencial fixo, a submatriz  $\mathbf{f}_{1 \times 3}$  representa o efeito de perspectiva e o quarto elemento da diagonal principal representa o factor de escala.

A matriz de rotação 3×3 pode ser aumentada para 4×4, transformando-se assim numa matriz homogénea,  $\mathbf{T}_{rot}$ , representando apenas a operação de rotação. Deste modo, as matrizes de rotação (Eq. 2.12) e (Eq. 2.13) expressas em termos de matrizes homogéneas ficam

$$\mathbf{T}_{x,\alpha} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{Eq. 2.38a})$$

$$\mathbf{T}_{y,\phi} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \cos \phi & 0 & \text{sen } \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{Eq. 2.22b})$$

$$\mathbf{T}_{z,\theta} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{Eq. 2.22c})$$

Estas matrizes de rotação 4×4, são chamadas de matrizes de rotação homogéneas básicas ou elementares.

Por outro lado, os três primeiros elementos da quarta coluna da matriz de transformação homogénea representam a translação do referencial  $OUVW$  em relação ao referencial  $OXYZ$ . Assim,  $OUVW$  tem eixos paralelos ao referencial  $OXYZ$ , mas a sua origem encontra-se deslocada de  $(dx, dy, dz)$  deste referencial

$$\mathbf{T}_{tran} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{Eq. 2.39})$$

Esta matriz é chamada de matriz homogénea de translação básica ou elementar.

Em resumo, uma transformação homogênea, converte um vector expresso em coordenadas homogêneas em relação a um referencial  $OUVW$ , num vector expresso em coordenadas homogêneas em relação a um referencial  $OXYZ$  (Figura 2.5). Isto é, com  $w = 1$ ,

$$\hat{\mathbf{p}}_{xyz} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{p}}_{uvw} \quad (\text{Eq. 2.40})$$

e

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.41})$$

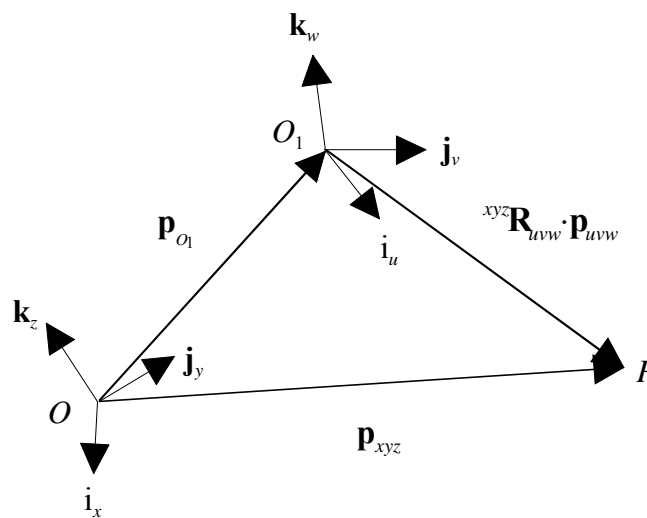


Figura 2.5 Operações representadas por uma transformação homogênea.

### 2.1.7 PROPRIEDADES DAS TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

Dada uma matriz homogênea  $\mathbf{T}$ , os vectores coluna da submatriz de rotação, representam os eixos de  $OUVW$  em relação a  $OXYZ$ . A quarta coluna da matriz de transformação homogênea representa a posição da origem do referencial  $OUVW$  em relação ao referencial  $OXYZ$ . Por outras palavras, uma matriz homogênea representa



a *situação* ou posição generalizada (posição e orientação) de um referencial móvel em relação a um referencial fixo.

Enquanto que a inversa de uma matriz de rotação é igual à sua transposta, o mesmo não se passa com uma matriz homogénea. A posição da origem do referencial  $OXYZ$  em relação ao referencial  $OUVW$  só pode ser determinada depois de ser determinada a inversa da matriz homogénea. Em geral, a inversa de uma matriz homogénea é dada por

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ s_x & s_y & s_z & -\mathbf{s}^T \mathbf{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3}^T & \begin{matrix} -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ -\mathbf{s}^T \mathbf{p} \\ -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.42})$$

Da equação (Eq. 2.42) vê-se que as colunas da inversa da matriz homogénea representam os eixos principais do referencial  $OXYZ$ , em relação ao referencial  $OUVW$ , e que a quarta coluna representa a origem do referencial  $OXYZ$  em relação ao referencial  $OUVW$ .

### 2.1.8 COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES HOMOGÉNEAS

Para representar uma sequência finita de transformações, as transformações homogéneas básicas podem ser multiplicadas sucessivamente, de modo a obter a matriz de transformação global. Como a multiplicação de matrizes em geral não é comutativa, há que ter em conta a ordem pela qual se fazem as transformações básicas. As regras que se seguem são úteis para encontrar a matriz de transformação global.

- inicialmente ambos os referenciais estão coincidentes, logo a matriz homogénea será a matriz identidade (de dimensão  $4 \times 4$ )  $\mathbf{I}_4$ ;
- se o referencial  $OUVW$  sofrer uma rotação/translação segundo um dos eixos principais de  $OXYZ$ , então deve-se *pré-multiplicar* a matriz

calculada até esse momento pela matriz homogénea básica apropriada: (Eq. 2.38) e (Eq. 2.39);

- se o referencial  $OUVW$  sofrer uma rotação/translação segundo um dos seus eixos principais, então deve-se *pós-multiplicar* a matriz calculada até esse momento pela matriz homogénea básica apropriada: (Eq. 2.38) e (Eq. 2.39).

### 2.1.9 CADEIA CINEMÁTICA

Um manipulador consiste numa sequência de elos ligados entre si por juntas. Essas juntas são accionadas por actuadores (motores eléctricos, hidráulicos, etc.) que lhes imprimem movimentos angulares ou lineares (Figura 2.6). Cada par junta-elos constitui um gdm. Assim, um robô manipulador com  $n$  gdm terá que possuir  $n$  pares junta-elos. O elo 0 (não considerado parte do robô manipulador) está fixo a uma base de suporte, onde normalmente é estabelecido um referencial inercial, e ao último elo está associada uma ferramenta de trabalho.

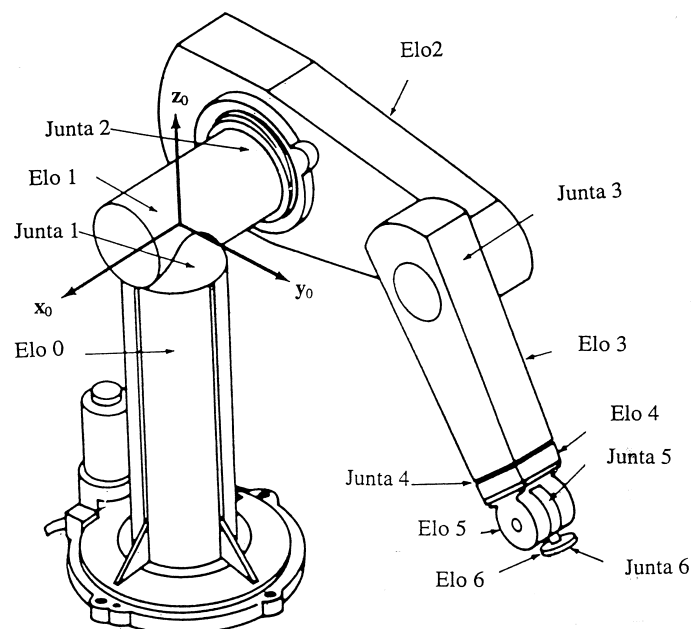


Figura 2.6 Um robô manipulador PUMA mostrando juntas e elos.

As juntas e os elos são numerados a partir da base. Assim, a junta 1 assegurará a ligação entre a base de suporte e o elo 1. Em geral, dois elos estão ligados através de uma única junta. Considerem-se seis tipos de juntas diferentes: rotativa, prismática, cilíndrica, esférica, parafuso e planar, representadas na Figura 2.7. Destas, apenas as rotativas e as prismáticas são comuns em robôs manipuladores. Uma representação esquemática destes dois tipos de juntas pode ser vista na Figura 2.8.

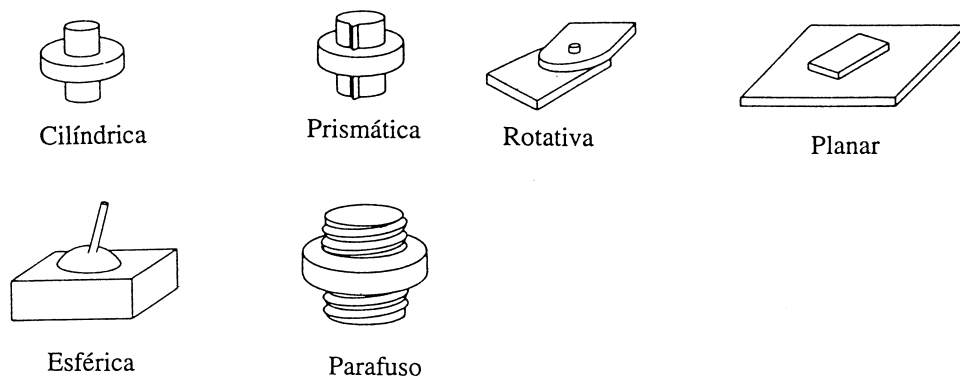


Figura 2.7 Vários tipos de juntas.

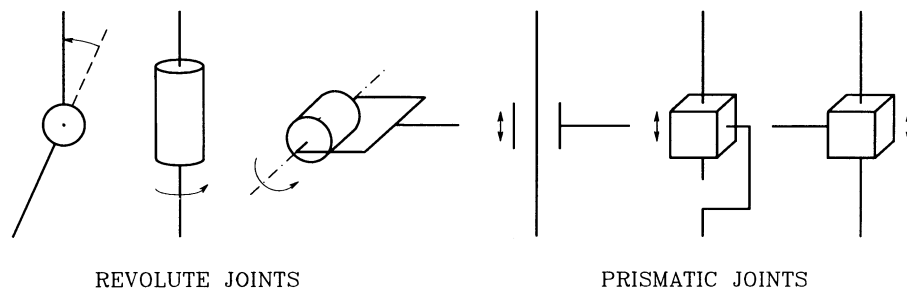


Figura 2.8 Representação esquemática de juntas rotativas e de juntas prismáticas.

### 2.1.10 REPRESENTAÇÃO DE DENAVIT-HARTENBERG (D-H)

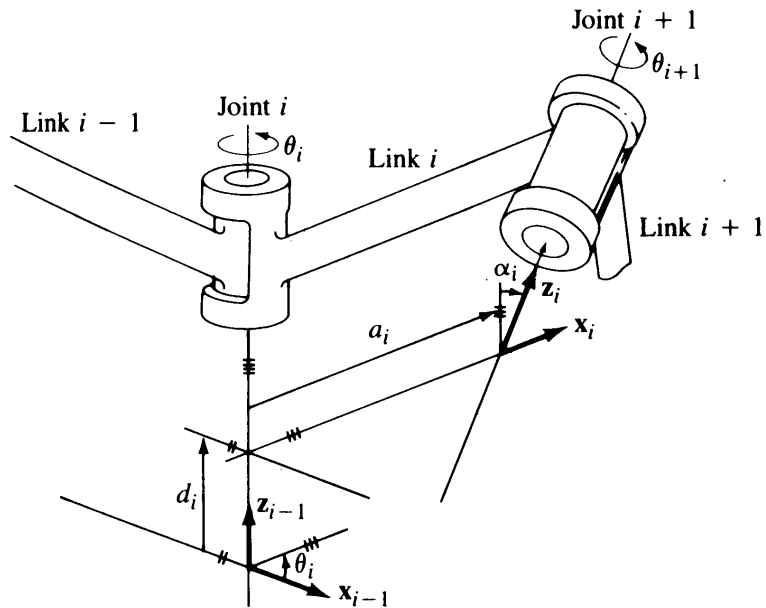


Figura 2.9 Parâmetros de D-H.

Para descrever as relações de translação e de rotação entre cada dois elos adjacentes, Denavit e Hartenberg propuseram um método sistemático para atribuição de um referencial a cada elo da cadeia cinemática.

O método de D-H conduz a uma representação baseada em transformações homogêneas, que exprimem cada referencial (associado a cada elo) em relação ao referencial anterior. Assim, através de uma sequência de transformações, a posição generalizada do órgão terminal do robô manipulador (ou melhor, o respectivo referencial) pode ser expresso em relação ao sistema de eixos da base, o qual pode constituir o referencial inercial do sistema.

*Algoritmo 2.1 (D-H) (Figura 2.9)*

- D1. *Estabelecimento do referencial da base.* Fixar um referencial ortonormado ( $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ ) na base de suporte, com o eixo  $\mathbf{z}_0$  coincidindo com o eixo da junta 1. Os eixos  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{y}_0$  podem ser convenientemente

estabelecidos (de acordo com “regra da mão direita”) e são perpendiculares a  $\mathbf{z}_0$ .

- D2. *Início*. Para cada  $i, i = 1, \dots, n-1$ , executar os passos D3 a D6.
- D3. *Estabelecimento dos eixos das juntas*. Fazer coincidir  $\mathbf{z}_i$  com o eixo da junta  $i+1$ .
- D4. *Estabelecimento da origem do referencial  $i$* . Colocar a origem do referencial  $i$  na intersecção dos eixos  $\mathbf{z}_i$  e  $\mathbf{z}_{i-1}$  ou na intersecção da perpendicular comum aos eixos  $\mathbf{z}_i$  e  $\mathbf{z}_{i-1}$  e o eixo  $\mathbf{z}_i$ .
- D5. *Estabelecimento do eixo  $\mathbf{x}_i$* . Estabelecer  $\mathbf{x}_i = \pm \frac{(\mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{z}_i)}{\|(\mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{z}_i)\|}$  ou segundo a perpendicular comum entre  $\mathbf{z}_{i-1}$  e  $\mathbf{z}_i$ , quando estes são paralelos (de  $\mathbf{z}_{i-1}$  para  $\mathbf{z}_i$ ).
- D6. *Estabelecimento do eixo  $\mathbf{y}_i$* . Fazer  $\mathbf{y}_i = + \frac{(\mathbf{z}_i \times \mathbf{x}_i)}{\|(\mathbf{z}_i \times \mathbf{x}_i)\|}$  de modo a completar o referencial de acordo com a “regra da mão direita”.
- D7. *Estabelecimento do referencial do órgão terminal*. Estabelecer  $\mathbf{x}_n$  de modo a seja perpendicular a  $\mathbf{z}_{n-1}$ . Se a última junta for rotativa, alinhar  $\mathbf{z}_n$  com  $\mathbf{z}_{n-1}$ . Colocar  $\mathbf{y}_n$  de modo a completar o referencial de acordo com a “regra da mão direita”.
- D8. *Determinação dos parâmetros*. Para cada  $i, i = 1, \dots, n-1$ , executar os passos D9 a D12.
- D9. *Determinar  $d_i$* . O parâmetro  $d_i$  é a distância da origem do referencial  $i-1$  até à intersecção de  $\mathbf{z}_{i-1}$  com  $\mathbf{x}_i$  segundo  $\mathbf{z}_{i-1}$ . É variável se a junta  $i$  é prismática.
- D10. *Determinar  $a_i$* . O parâmetro  $a_i$  é a distância desde a intersecção de  $\mathbf{z}_{i-1}$  com  $\mathbf{x}_i$ , à origem do referencial  $i$ , segundo  $\mathbf{x}_i$ .
- D11. *Determinar  $\theta_i$* . O parâmetro  $\theta_i$  é o ângulo entre  $\mathbf{x}_{i-1}$  e  $\mathbf{x}_i$ , segundo  $\mathbf{z}_{i-1}$ . É variável se  $i$  é rotativa.

- D12. *Determinar  $\alpha_i$ .* O parâmetro  $\alpha_i$  é o ângulo entre  $\mathbf{z}_{i-1}$  e  $\mathbf{z}_i$ , segundo  $\mathbf{x}_i$ .

Dadas estas regras, a escolha da origem do referencial 0, a colocar na base de suporte, é livre, desde que o eixo  $\mathbf{z}_0$  coincida com o eixo da primeira junta. O último referencial pode também ser colocado em qualquer ponto do órgão terminal, desde que o eixo  $\mathbf{x}_n$  seja perpendicular ao eixo  $\mathbf{z}_{n-1}$  (se o órgão terminal consistir numa pinça, o último referencial é normalmente colocado no seu centro).

Uma vez aplicado o Algoritmo 2.1 haverá que determinar uma transformação homogénea que relacione o referencial  $i$  com o referencial  $i-1$ . Considerando a Figura 2.9, pode ver-se que o referencial  $i$  sofreu as seguintes transformações relativamente ao referencial  $i-1$ :

- rotação em torno de  $\mathbf{z}_{i-1}$  de um ângulo  $\theta_i$ , para alinhar o eixo  $\mathbf{x}_{i-1}$  com o eixo  $\mathbf{x}_i$  (o eixo  $\mathbf{x}_{i-1}$  é paralelo a  $\mathbf{x}_i$ , apontando no mesmo sentido);
- translação segundo  $\mathbf{z}_{i-1}$ , da distância  $d_i$ , de modo a colocar coincidentes os eixos  $\mathbf{x}_{i-1}$  e  $\mathbf{x}_i$ ;
- translação segundo  $\mathbf{x}_i$ , da distância  $a_i$ , para colocar coincidentes as origens e os eixos  $\mathbf{x}$ ;
- rotação segundo  $\mathbf{x}_i$  de um ângulo  $\alpha_i$ , para tornar os dois referenciais coincidentes.

Cada uma das quatro transformações referidas acima pode ser descrita por uma matriz homogénea básica e o seu produto dá origem a uma matriz homogénea  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ , conhecida por matriz de D-H para os referenciais  $i$  e  $i-1$ . Assim, vem

$$\begin{aligned}
{}^{i-1}\mathbf{A}_i &= \mathbf{T}_{z,d} \mathbf{T}_{z,\theta} \mathbf{T}_{x,a} \mathbf{T}_{x,\alpha} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\text{sen } \theta_i & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\text{sen } \alpha_i & 0 \\ 0 & \text{sen } \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \text{sen } \theta_i & \text{sen } \alpha_i \text{sen } \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \text{sen } \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\text{sen } \alpha_i \cos \theta_i & a_i \text{sen } \theta_i \\ 0 & \text{sen } \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(Eq. 2.43)

Usando a equação (Eq. 2.42), a inversa desta matriz é

$$\left[ {}^{i-1}\mathbf{A}_i \right]^{-1} = {}^i\mathbf{A}_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \text{sen } \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \text{sen } \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \text{sen } \alpha_i & -d_i \text{sen } \alpha_i \\ \text{sen } \alpha_i \text{sen } \theta_i & -\text{sen } \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.44})$$

onde, para uma junta rotativa,  $\alpha_i$ ,  $a_i$  e  $d_i$  são constantes, enquanto que  $\theta_i$  é variável. Para uma junta prismática, a variável é  $d_i$ , enquanto que  $\alpha_i$ ,  $a_i$  e  $\theta_i$  são constantes.

Usando a matriz  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  pode relacionar-se um ponto  $\mathbf{p}_i$ , fixo a um elo  $i$ , e expresso em coordenadas homogêneas em relação a um referencial  $i$ , com um referencial  $i-1$  estabelecido num elo  $i-1$ . Isto é

$$\mathbf{p}_{i-1} = {}^{i-1}\mathbf{A}_i \mathbf{p}_i \quad (\text{Eq. 2.45})$$

onde  $\mathbf{p}_{i-1} = [x_{i-1} \ y_{i-1} \ z_{i-1}]^T$  e  $\mathbf{p}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ .

### 2.1.11 EQUAÇÕES DA CINEMÁTICA

A matriz homogênea  ${}^0\mathbf{T}_i$ , que especifica a localização do referencial  $i$  em relação ao referencial da base, pode ser encontrada fazendo o produto das sucessivas transformações  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ :

$${}^0\mathbf{T}_i = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{i-1}\mathbf{A}_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}\mathbf{A}_j, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Eq. 2.46})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i & \mathbf{y}_i & \mathbf{z}_i & \mathbf{p}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_i & {}^0\mathbf{p}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde

- $[\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i]$  = matriz de orientação do referencial  $i$ , estabelecido no elo  $i$ , em relação à base. É uma matriz com dimensão  $3 \times 3$ ;
- $\mathbf{p}_i$  = vector de posição que aponta da origem do referencial da base, para a origem do referencial  $i$ . É um vector com dimensão  $3 \times 1$ .

Para o caso em que  $i = 6$ , vem  $\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_6$ , a qual especifica a posição e a orientação do órgão terminal do robô em relação à base. Esta matriz, de grande importância para a cinemática, é chamada a matriz do robô manipulador e pode ser considerada como tendo a seguinte estrutura:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_6 & \mathbf{y}_6 & \mathbf{z}_6 & \mathbf{p}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_6 & {}^0\mathbf{p}_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.47})$$

onde (Figura 2.10),

- $\mathbf{n}$  = *normal*. Vector perpendicular ao órgão terminal. Assumindo um órgão terminal como na Figura 2.10,  $\mathbf{n}$  é perpendicular aos “dedos”;



- $s$  = *deslizamento*. Aponta na direcção do movimento dos “dedos” quando o pinça abre e fecha;
- $a$  = *Aproximação*. Aponta na direcção perpendicular à “palma da mão”;
- $p$  = Vector *posição* da “mão”. Aponta da origem do referencial da base para a origem do referencial do órgão terminal, a qual está normalmente localizada no seu centro.

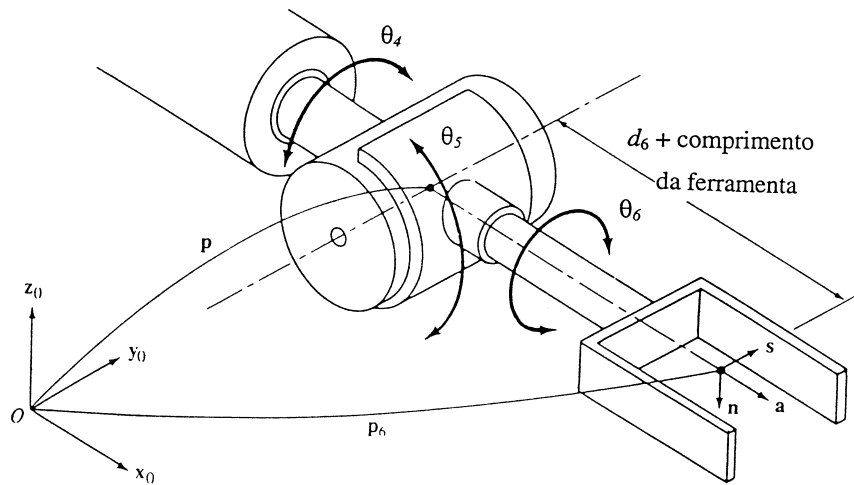


Figura 2.10 Punho esférico: referencial do órgão terminal e os vectores  $[n, s, a]$ .

Se o referencial da base do robô manipulador estiver relacionado com um referencial exterior (referencial inercial) pela transformação  $\mathbf{B}$  e tiver uma ferramenta relacionada com o último referencial pela transformação  $\mathbf{H}$ , então o ponto terminal da ferramenta pode ainda ser relacionado com o sistema de coordenadas de referência através da transformação:

$${}^{ref}\mathbf{T}_{ferr} = \mathbf{B}^0 \mathbf{T}_6 \mathbf{H} \quad (Eq. 2.48)$$

Notar que  $\mathbf{H} \equiv {}^6\mathbf{A}_{ferr}$  e  $\mathbf{B} \equiv {}^{ref}\mathbf{A}_0$ .

A solução das equações da cinemática directa de um robô manipulador com 6 gdl resume-se ao cálculo da matriz  $\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_6$ , que é conseguido multiplicando as seis

matrizes  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . De notar que a matriz  $\mathbf{T}$  é única, para um dado sistema de referenciais estabelecidos com base no algoritmo de D-H e para um dado vector de coordenadas no espaço das juntas,  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T$ , onde  $q_i = \theta_i$  para uma junta rotativa e  $q_i = d_i$  para uma junta prismática.

Uma vez obtidas as matrizes  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ , como muitas é necessário calcular a matriz  $\mathbf{T}$  em tempo-real, há que encontrar um método computacionalmente eficiente para o efeito (Vukobratovic e Kircanski, 1986).

## 2.1.12 CINEMÁTICA DIRECTA DE ALGUNS MANIPULADORES

### 2.1.12.1 MANIPULADOR DE STANFORD

Trata-se de um manipulador com 6 gdl constituído por um braço esférico e por um punho também esférico.

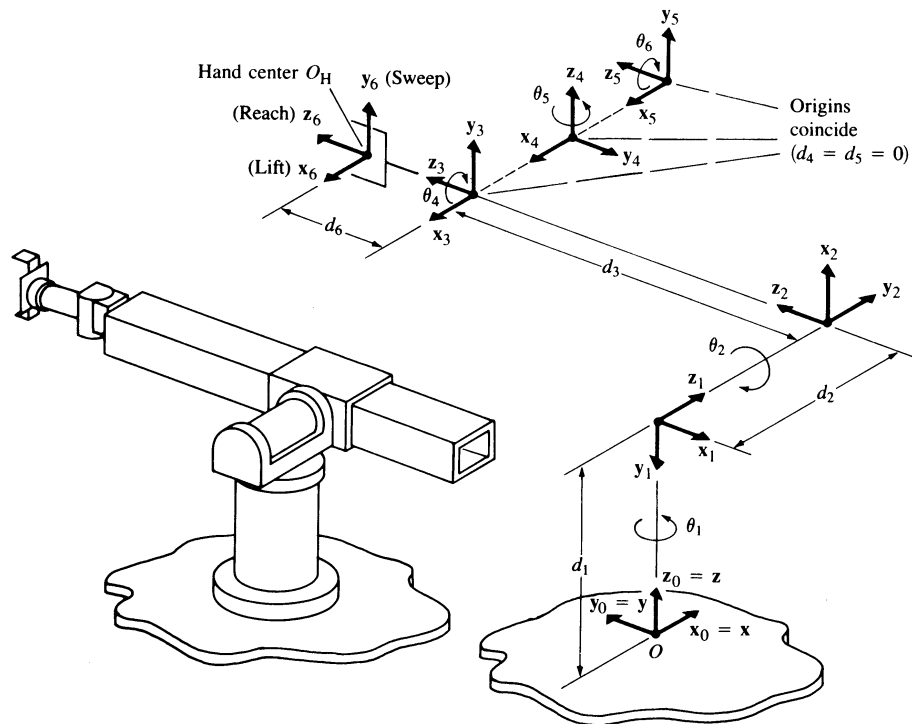


Figura 2.11 Estabelecimento de referenciais para o robô manipulador Stanford.

Os parâmetros de D-H são apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 Parâmetros de D-H para o manipulador de Stanford.

Junta	$\theta_i$ (°)	$\alpha_i$ (°)	$a_i$	$d_i$
1	-90	-90	0	$d_1$
2	-90	90	0	$d_2$
3	-90	0	0	$d_3$
4	0	-90	0	0
5	0	90	0	0
6	0	0	0	$d_6$

As transformações homogêneas são:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.49})$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.50})$$

$${}^4\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.51})$$

### 2.1.12.2 MANIPULADOR PUMA

Trata-se de um manipulador com 6 gdl constituído por um braço antropomórfico e por um punho esférico.

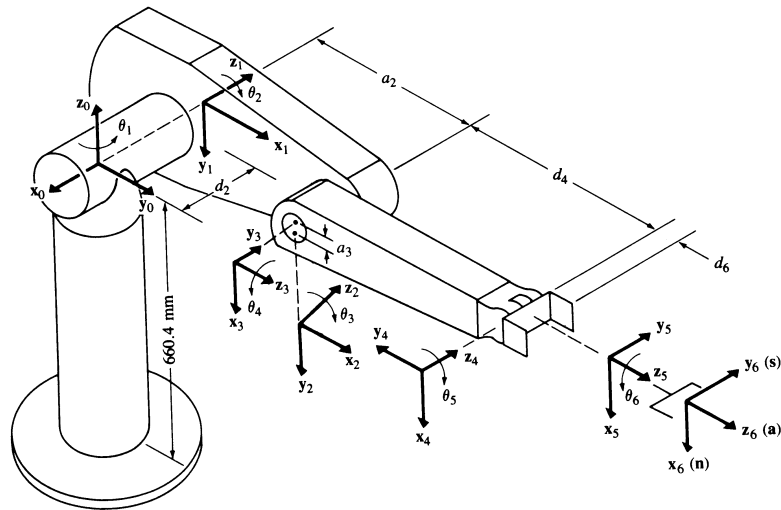


Figura 2.12 Estabelecimento de referenciais para o robô manipulador Puma.

Os parâmetros de D-H são apresentados na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 Parâmetros de D-H para o manipulador Puma.

Junta	$\theta_i$ (°)	$\alpha_i$ (°)	$a_i$	$d_i$
1	90	-90	0	0
2	0	0	$a_2$	$d_2$
3	90	90	$a_3$	0
4	0	-90	0	$d_4$
5	0	90	0	0
6	0	0	0	$d_6$

As transformações homogêneas são:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.52})$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.53})$$

$${}^4\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.54})$$

### 2.1.12.3 MANIPULADOR TI ER 6000

Trata-se de um manipulador com 6 gdl, constituído por um braço antropomórfico e por um punho esférico (semelhante ao PUMA).

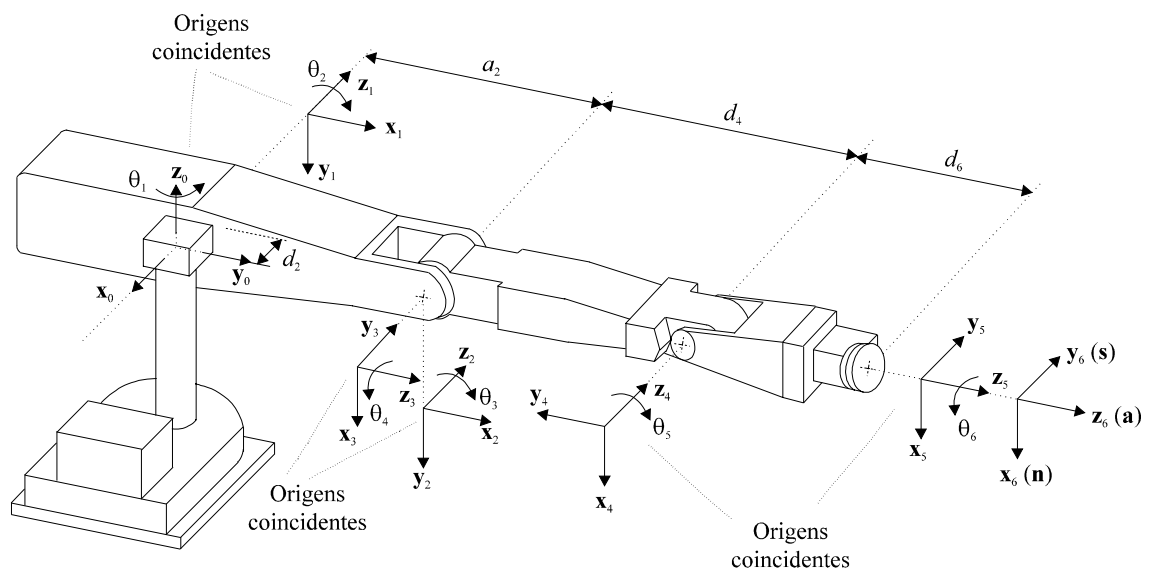


Figura 2.13 Estabelecimento de referenciais para o robô manipulador TI ER 6000.

O parâmetros de D-H são apresentados na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 Parâmetros de D-H para o manipulador TI ER 6000.

Junta	$\theta_i$ (°)	$\alpha_i$ (°)	$a_i$ (mm)	$d_i$ (mm)	Intervalo de variação (°)
1	90	-90	0	0	[-165, 165]
2	0	0	304.8	102.9208	[-252.5, 72.5]
3	90	90	0	0	[-35, 215]
4	0	-90	0	304.8	[-162.5, 162.5]
5	0	90	0	0	[-105, 105]
6	0	0	0	108.712	[-171, 171]

As transformações homogêneas são:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.55})$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.56})$$

$${}^4\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.57})$$

Então, a matriz  $\mathbf{T}$  do robô manipulador TI ER 6000 vem

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.58})$$

onde

$$n_x = C_1 [C_{23}(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \quad (\text{Eq. 2.59})$$

$$n_y = S_1 [C_{23}(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] + C_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \quad (\text{Eq. 2.60})$$

$$n_z = -S_{23}(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - C_{23} S_5 C_6 \quad (\text{Eq. 2.61})$$

$$s_x = C_1 [-C_{23}(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] - S_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \quad (\text{Eq. 2.62})$$

$$s_y = S_1 [-C_{23}(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] + C_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \quad (\text{Eq. 2.63})$$

$$s_z = S_{23}(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + C_{23} S_5 S_6 \quad (\text{Eq. 2.64})$$

$$a_x = C_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) - S_1 S_4 S_5 \quad (\text{Eq. 2.65})$$

$$a_y = S_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + C_1 S_4 S_5 \quad (\text{Eq. 2.66})$$

$$a_z = -S_{23} C_4 S_5 + C_{23} C_5 \quad (\text{Eq. 2.67})$$

$$p_x = C_1 [d_6 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + S_{23} d_4 + a_2 C_2] - S_1 (d_6 S_4 S_5 + d_2) \quad (\text{Eq. 2.68})$$

$$p_y = S_1 [d_6 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + S_{23} d_4 + a_2 C_2] + C_1 (d_6 S_4 S_5 + d_2) \quad (\text{Eq. 2.69})$$

$$p_z = d_6 (C_{23} C_5 - S_{23} C_4 S_5) + C_{23} d_4 - a_2 S_2 \quad (\text{Eq. 2.70})$$

## 2.2 CINEMÁTICA DIFERENCIAL DIRETA

Outro problema importante diz respeito às relações existentes entre as velocidades (linear e angular) do órgão terminal e as velocidades das juntas. O conhecimento destas relações é essencial para a implementação de certos algoritmos

de controlo, bem como para alguns algoritmos de cálculo da cinemática de posição inversa.

Nesta secção (e respectivas sub-secções) são estudadas as relações diferenciais, ou seja, as relações entre as velocidades linear e angular do órgão terminal e as velocidades das juntas.

### 2.2.1 JACOBIANO CINEMÁTICO

Para um manipulador com  $n$  gdl a cinemática de posição directa pode ser representada pela função

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n & {}^0\mathbf{p}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.71})$$

Pretende-se agora determinar a relação entre as velocidades linear e angular do órgão terminal,  ${}^0\mathbf{v}_{n|0}$  e  ${}^0\boldsymbol{\omega}_{n|0}$ , em relação ao referencial da base e expressas no referencial da base, e as velocidades das juntas,  $\dot{\mathbf{q}}$

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_{n|0} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{n|0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{Eq. 2.72})$$

em que  $\mathbf{J}_P$  e  $\mathbf{J}_O$  são matrizes de dimensão  $3 \times n$ , representando as contribuições das velocidades das juntas para, respectivamente, a velocidade linear do órgão terminal e a velocidade angular do órgão terminal.

De forma mais compacta pode escrever-se

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_{n|0} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{n|0} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (\text{Eq. 2.73})$$

com



$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.74})$$

uma matriz de dimensão  $6 \times n$ .

Pelo método do trabalho virtual, Asada e Slotine (1986) mostram que as forças nas juntas,  $\boldsymbol{\tau}$ , podem ser relacionadas com a força generalizada (força e momento) aplicada no órgão terminal do robô e expressa no referencial da base,  $\mathbf{f}_{n|_0}$ , através da equação

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{f}_{n|_0} \quad (\text{Eq. 2.75})$$

### 2.2.1.1 DERIVADA DE UM VECTOR DEFINIDO EM RELAÇÃO A UM REFERENCIAL QUE PODE RODAR

Considere-se um referencial fixo,  $A$ , e um referencial móvel,  $B$ , com movimento de translação e de rotação em relação a  $A$ . Seja  ${}^A\mathbf{p}_{P|_A}$  o vector posição do ponto  $P$  em relação a  $A$ , expresso em  $A$ ;  ${}^B\mathbf{p}_{P|_B}$  o vector posição do ponto  $P$  em relação a  $B$ , expresso em  $B$ ; e  ${}^A\mathbf{p}_{B|_A}$  o vector posição do ponto  $B$  em relação a  $A$ , expresso em  $A$  (Figura 2.14).

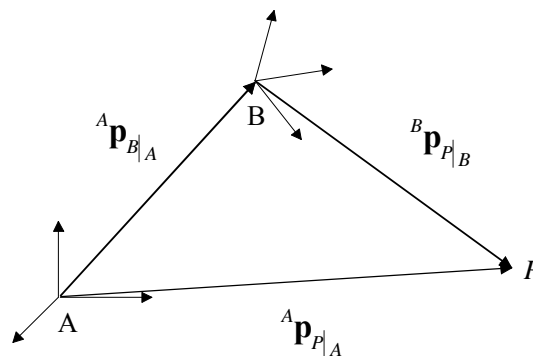


Figura 2.14 Posição de um ponto  $P$  em relação a um referencial fixo,  $A$ , e a um referencial móvel,  $B$ .

Da Figura 2.14 facilmente se conclui que

$${}^A \mathbf{p}_{P|A} = {}^A \mathbf{p}_{B|A} + {}^A \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{p}_{P|B} \quad (\text{Eq. 2.76})$$

$${}^A \dot{\mathbf{p}}_{P|A} = {}^A \dot{\mathbf{p}}_{B|A} + {}^B \dot{\mathbf{p}}_{P|A} \quad (\text{Eq. 2.77})$$

A velocidade de  $P$  em relação ao referencial  $A$ , expressa em  $A$ , será

$${}^A \dot{\mathbf{p}}_{P|A} = {}^A \dot{\mathbf{p}}_{B|A} + {}^B \dot{\mathbf{p}}_{P|A} \quad (\text{Eq. 2.78})$$

Sendo  ${}^B \mathbf{p}_{P|A}$  um vector definido no referencial  $B$ , é sabido, da mecânica clássica, que a sua derivada temporal é

$${}^B \dot{\mathbf{p}}_{P|A} = {}^B \dot{\mathbf{p}}_{P|A} \Big|_{rot} + {}^A \boldsymbol{\omega}_{B|A} \times {}^B \mathbf{p}_{P|A} \quad (\text{Eq. 2.79})$$

onde  ${}^B \dot{\mathbf{p}}_{P|A} \Big|_{rot}$  representa a derivada do vector  ${}^B \mathbf{p}_{P|A}$  no referencial que está a rodar, ao passo que  ${}^B \dot{\mathbf{p}}_{P|A}$  é a sua derivada no referencial fixo (sempre que não haja risco de confusão o símbolo  $(\cdot) \Big|_{rot}$  poderá ser omitido). Assim,

$${}^A \dot{\mathbf{p}}_{P|A} = {}^A \dot{\mathbf{p}}_{B|A} + {}^B \dot{\mathbf{p}}_{P|A} \Big|_{rot} + {}^A \boldsymbol{\omega}_{B|A} \times {}^B \mathbf{p}_{P|A} \quad (\text{Eq. 2.80})$$

$${}^A \dot{\mathbf{p}}_{P|A} = {}^A \dot{\mathbf{p}}_{B|A} + {}^A \mathbf{R}_B {}^B \dot{\mathbf{p}}_{P|B} \Big|_{rot} + {}^A \boldsymbol{\omega}_{B|A} \times ({}^A \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{p}_{P|B}) \quad (\text{Eq. 2.81})$$

Em geral, a derivada temporal de um vector em relação a um referencial fixo é igual à derivada do vector em relação ao referencial que está a rodar mais o produto vectorial da velocidade angular do referencial que está a rodar pelo próprio vector:

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot) \Big|_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times (\cdot) \quad (\text{Eq. 2.82})$$

Note-se que, da equação (Eq. 2.76), também se pode escrever

$${}^A \dot{\mathbf{p}}_{P|A} = {}^A \dot{\mathbf{p}}_{B|A} + {}^A \mathbf{R}_B {}^B \dot{\mathbf{p}}_{P|B} \Big|_{rot} + {}^A \dot{\mathbf{R}}_B {}^B \mathbf{p}_{P|B} \quad (\text{Eq. 2.83})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} {}^A \dot{\mathbf{R}}_B {}^B \mathbf{p}_{P|B} &= {}^A \mathbf{R}_B \left( {}^A \boldsymbol{\omega}_{B|B} \times {}^B \mathbf{p}_{P|B} \right) = \left( {}^A \mathbf{R}_B {}^A \boldsymbol{\omega}_{B|B} \right) \times \left( {}^A \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{p}_{P|B} \right) \\ &= {}^A \boldsymbol{\omega}_{B|A} \times \left( {}^A \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{p}_{P|B} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.84})$$

### 2.2.1.2 VELOCIDADES LINEAR E ANGULAR DE UM ELO DA ESTRUTURA

Sejam  ${}^0 \mathbf{p}_{i-1|0}$  e  ${}^0 \mathbf{p}_{i|0}$  os vectores posição das origens dos referenciais, respectivamente,  $i-1$  e  $i$ , expressos no referencial 0 (Figura 2.15).

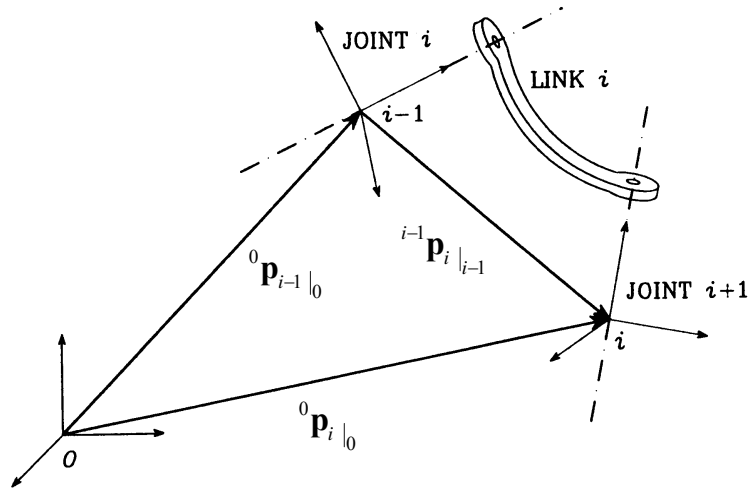


Figura 2.15 Relação entre os referenciais  $i-1$  e  $i$ .

Seja ainda  ${}^{i-1} \mathbf{p}_{i|i-1}$  o vector posição do referencial  $i$ , em relação ao referencial  $i-1$ , expresso no referencial  $i-1$ . O vector  ${}^0 \mathbf{p}_{i|0}$  pode ser representado por

$${}^0 \mathbf{p}_{i|0} = {}^0 \mathbf{p}_{i-1|0} + {}^0 \mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1} \mathbf{p}_{i|i-1} \quad (\text{Eq. 2.85})$$

ou seja

$$\begin{aligned} {}^0 \dot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0 \dot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^0 \mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1} \dot{\mathbf{p}}_{i|i-1} + {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i-1|0} \times {}^0 \mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1} \mathbf{p}_{i|i-1} \\ &= {}^0 \dot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1} \mathbf{v}_{i|0} + {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i-1|0} \times {}^0 \mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1} \mathbf{p}_{i|i-1} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.86})$$

que representa a velocidade linear do elo  $i$  em função das velocidades linear e angular do elo  $i-1$ . Notar que  ${}^{i-1}\mathbf{v}_{i|0}$  representa a velocidade da origem do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$ , expressa no referencial da base.

Quanto à velocidade angular tem-se

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} + {}^0\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|i-1} \\ &= {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.87})$$

O que representa a velocidade angular do referencial  $i$ , em função das velocidades angulares dos referenciais  $i-1$  e  $i$  em relação ao referencial  $i-1$ .

As expressões (Eq. 2.86) e (Eq. 2.87) assumem distintas formas, consoante se trate de juntas prismáticas ou rotativas.

Para uma junta prismática, dado que a orientação do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$  se mantém constante, tem-se

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= 0 \\ {}^{i-1}\mathbf{v}_{i|0} &= \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.88})$$

onde  $\mathbf{z}_{i-1}$  é o vector unitário segundo o eixo da junta  $i$ .

As velocidades linear e angular são

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} \\ {}^0\mathbf{v}_{i|0} &= {}^0\mathbf{v}_{i-1|0} + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.89})$$

Para uma junta rotativa, devido à rotação do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$  causada pelo movimento da junta  $i$ , tem-se

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \\ {}^{i-1}\mathbf{v}_{i|0} &= {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.90})$$

As velocidades linear e angular são

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} + \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \\ {}^0\mathbf{v}_{i|0} &= {}^0\mathbf{v}_{i-1|0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.91})$$

### 2.2.1.3 DETERMINAÇÃO DO JACOBIANO

Considere-se que o jacobiano é representado por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P1} & \dots & \mathbf{J}_{Pn} \\ \mathbf{J}_{O1} & & \mathbf{J}_{On} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.92})$$

em que  $\mathbf{J}_{Pi}$  e  $\mathbf{J}_{Oi}$  são vectores de dimensão  $3 \times 1$ .

A expressão  $\dot{q}_i \mathbf{J}_{Pi}$  representará a contribuição da junta  $i$  para a velocidade linear do órgão terminal, enquanto que  $\dot{q}_i \mathbf{J}_{Oi}$  representará a contribuição da mesma junta para a velocidade angular.

Se se tratar de uma junta prismática ( $q_i = d_i$ ) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{q}_i \mathbf{J}_{Oi} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{Oi} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.93})$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_i \mathbf{J}_{Pi} &= \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{J}_{Pi} &= \mathbf{z}_{i-1} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.94})$$

Se se tratar de uma junta rotativa ( $q_i = \theta_i$ ) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{q}_i \mathbf{J}_{Oi} &= \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{J}_{Oi} &= \mathbf{z}_{i-1} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2.95})$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_i \mathbf{J}_{Pi} &= {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{n|0} \\
&= \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{n|0} \\
\mathbf{J}_{Pi} &= \mathbf{z}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{n|0}
\end{aligned} \tag{Eq. 2.96}$$

Para um manipulador com 6 gdl tem-se

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_{6|0} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{6|0} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}(t) = [\mathbf{J}_1(\mathbf{q}) \quad \mathbf{J}_2(\mathbf{q}) \quad \dots \quad \mathbf{J}_6(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}(t) \tag{Eq. 2.97}$$

onde  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  é uma matriz de dimensão  $6 \times 6$  cuja coluna de ordem  $i$   $\mathbf{J}_i(\mathbf{q})$  é dada pela equação seguinte

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{q}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{6|0} \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{se a junta } i \text{ é rotativa} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se a junta } i \text{ é prismática} \end{cases} \tag{Eq. 2.98}$$

$\dot{\mathbf{q}}(t) = [\dot{q}_1(t) \quad \dots \quad \dot{q}_6(t)]$  é um vector que representa a velocidade das juntas,  ${}^{i-1}\mathbf{p}_{6|0}$  é o vector posição que corresponde à quarta coluna das matrizes  ${}^{i-1}\mathbf{T}_6$  expresso no referencial da base e  $\mathbf{z}_{i-1}$  é o vector unitário definido segundo o eixo da junta  $i$  e expresso no referencial da base.

Para um robô do tipo 6R o jacobiano vem

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times {}^0\mathbf{p}_{6|0} & \mathbf{z}_1 \times {}^1\mathbf{p}_{6|0} & \dots & \mathbf{z}_5 \times {}^5\mathbf{p}_{6|0} \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \dots & \mathbf{z}_5 \end{bmatrix} \tag{Eq. 2.99}$$

Em alguns casos pode ser preferível exprimir a velocidade generalizada do órgão terminal no referencial ligado ao próprio órgão terminal. Deste modo, o jacobiano cinemático,  ${}^n\mathbf{J}$ , é dado por

$${}^n \mathbf{J} = \begin{bmatrix} {}^n \mathbf{R}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^n \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \mathbf{J} \quad (\text{Eq. 2.100})$$

## 2.2.2 JACOBIANO DE ÂNGULOS DE EULER

O significado físico do vector velocidade angular,  ${}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0}$ , é mais intuitivo que o do vector de derivadas de ângulos de Euler,  $\dot{\xi} = [\dot{\psi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\phi}]^T$ . O vector  ${}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0}$  representa as componentes de velocidade angular do referencial  $i$ , em relação ao referencial da base, e expressas no referencial da base. As componentes do vector  $\dot{\xi} = [\dot{\psi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\phi}]^T$  não são ortogonais, sendo que representam uma velocidade angular definida em relação a um referencial variável.

Por outro lado, enquanto que o integral do vector  $\dot{\xi} = [\dot{\psi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\phi}]^T$  poderá representar a orientação do órgão terminal do manipulador, o integral do vector  ${}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0}$  não admite um claro significado físico.

Considere-se, por exemplo, um corpo rígido do qual se conhece a posição no instante  $t = 0$ . Assuma-se que a sua velocidade angular pode ser uma das especificadas abaixo:

$${}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} = [\pi/2 \quad 0 \quad 0]^T, 0 \leq t \leq 1; \quad {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} = [0 \quad \pi/2 \quad 0]^T, 1 \leq t \leq 2 \quad (\text{Eq. 2.101})$$

$${}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} = [0 \quad \pi/2 \quad 0]^T, 0 \leq t \leq 1; \quad {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} = [\pi/2 \quad 0 \quad 0]^T, 1 \leq t \leq 2 \quad (\text{Eq. 2.102})$$

em qualquer dos casos o integral de  ${}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0}$  resulta no mesmo valor. Porém, a orientação final do corpo é diferente nos dois casos (Figura 2.16).

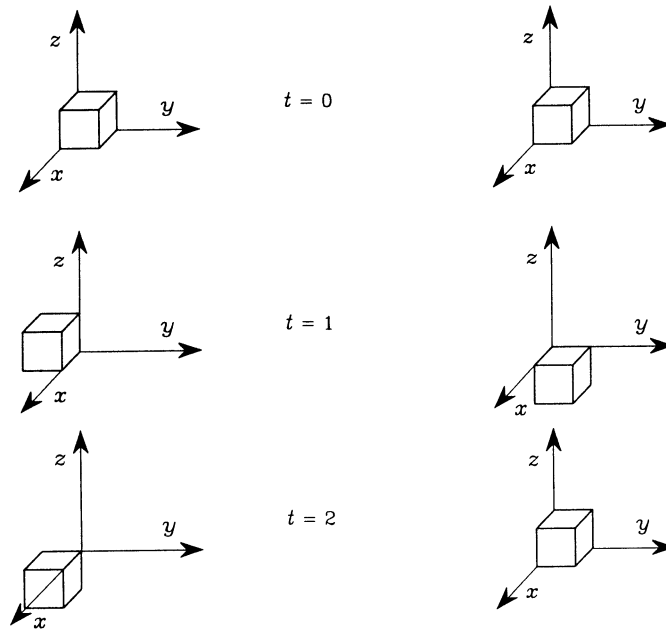


Figura 2.16 Orientação final de um corpo, obtida por integração do vector velocidade angular.

Conhecendo as equações da cinemática e um vector de coordenadas no espaço das juntas, pode determinar-se a correspondente posição e orientação do órgão terminal resolvendo a equação

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (\text{Eq. 2.103})$$

onde  $\mathbf{x}$  é um vector de coordenadas do espaço operacional de dimensão  $m$ ,  $\mathbf{q}$  é um vector de coordenadas do espaço das juntas de dimensão  $n$  ( $n = \text{número de gdm}$ ) e  $\mathbf{f}$  é uma aplicação não linear contínua e diferenciável para todo  $\mathbf{q}$  pertencente ao espaço das juntas, da forma  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ .

Diferenciando a equação (Eq. 2.103) em ordem ao tempo vem

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad (\text{Eq. 2.104})$$

ou



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_E \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{Eq. 2.105})$$

onde,  $\mathbf{J}_E = \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  é um jacobiano.

Sendo  $m = 6$  (coordenadas cartesianas e ângulos de Euler),  $\mathbf{J}_E$  é o chamado jacobiano de ângulos de Euler.

Notar que  $\mathbf{J}_E$  também poderá ser obtido a partir de  $\mathbf{J}$ . De facto, a relação entre a velocidade angular,  ${}^0\boldsymbol{\omega}_n|_0$ , e a primeira derivada temporal dos ângulos de Euler,  $\xi = [\dot{\psi} \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ , é bem conhecida da cinemática, sendo (Vukobratovic e Kircanski, 1986)

$${}^0\boldsymbol{\omega}_n|_0 = \mathbf{J}_A \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.106})$$

em que

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} 0 & -S\psi & C\theta C\psi \\ 0 & C\psi & C\theta S\psi \\ 1 & 0 & -S\theta \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.107})$$

Rescrevendo  $\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_n|_0 \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n|_0 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix}$  como

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_n|_0 \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n|_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.108})$$

e substituindo  ${}^0\boldsymbol{\omega}_n|_0$  por  $\mathbf{J}_A \xi$  vem

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_n|_0 \\ {}^0\dot{\xi}_n|_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_A^{-1} \cdot \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_A^{-1} \cdot \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} \quad (Eq. 2.109)$$

Refira-se que, quando  $\theta = 90^\circ$ , devido à indeterminação introduzida pela representação de ângulos de Euler, a transformação  $\mathbf{J}_A$  é singular ( $\det\{\mathbf{J}_A\} = 0$ ). Isto implica que  $\mathbf{J}_E$  pode ser singular, apesar dessa singularidade não corresponder a nenhuma configuração singular do manipulador. Como será fácil de compreender, deve sempre adoptar-se um sistema de ângulos de Euler tal que a singularidade por ele introduzida fique fora do espaço de trabalho do manipulador.

Matematicamente, um ponto singular corresponde a um vector de coordenadas no espaço das juntas que torna nulo o determinante do jacobiano (se  $\mathbf{J}$  é singular  $\mathbf{J}_E$  também é singular). Fisicamente, numa configuração singular, o manipulador perde um ou mais gdl, não podendo mover-se numa ou várias direcções no espaço. Significa também que nessa configuração, segundo determinadas direcções, o manipulador apresenta-se como infinitamente rígido ao ambiente; uma força externa é completamente absorvida pela estrutura. De notar que todos os pontos na fronteira do espaço de trabalho são pontos singulares.

### 2.3 CINEMÁTICA DE POSIÇÃO INVERSA

Quando se pretende determinar o vector de coordenadas operacionais (por exemplo, coordenadas cartesianas e ângulos de Euler) que corresponde a um determinado vector no espaço das juntas (problema da cinemática directa), verifica-se facilmente que as componentes relativas à posição podem ser lidas directamente da matriz  $\mathbf{T}$  do robô manipulador (quarta coluna). As componentes relativas à orientação (ângulos de Euler) não são de leitura imediata, uma vez que a orientação vem dada em termos de uma matriz de rotação de dimensão  $3 \times 3$ . No entanto, a partir da matriz de rotação não é difícil chegar aos ângulos de Euler, pois é bem conhecida a relação entre ambos.

Pelo contrário, o problema da cinemática de posição inversa, isto é, a determinação do vector de coordenadas do espaço das juntas que corresponde a um dado vector de coordenadas operacionais, envolve cálculos bem mais complexos:

- as equações a resolver são, em geral, não lineares, pelo que nem sempre é possível uma resolução analítica;
- podem existir soluções múltiplas. Em geral, o número de soluções aumenta com o número de parâmetros de D-H não nulos. Para um manipulador com 6 gdl existem no máximo 16 soluções;
- pode existir uma infinidade de soluções (redundância, singularidades);
- pode não existir solução (a posição generalizada especificada está fora do espaço de trabalho).

Em geral, o problema pode ser abordado de duas formas distintas:

- através da utilização de métodos analíticos;
- através da utilização de métodos numéricos iterativos.

Os métodos analíticos permitem a obtenção de todas as soluções, para um dado vector de coordenadas no espaço operacional. Porém, tais métodos não são gerais, podendo ser aplicados somente a manipuladores simples, com muitos parâmetros de D-H nulos (que é o caso da maioria dos manipuladores industriais). Dentro dos métodos analíticos podem ser seguidas duas estratégias: as que exploram as relações geométricas da estrutura ou as que utilizam as matrizes homogêneas que relacionam os referenciais associados aos elos. Em qualquer caso é quase sempre necessária alguma dose de intuição para resolver o problema.

Os métodos numéricos iterativos são gerais. Para um dado vector de coordenadas no espaço operacional permitem encontrar apenas uma das possíveis soluções, sendo que podem apresentar sérios problemas de convergência.

Está provado que para manipuladores de estrutura em série com 6 gdl, o problema da cinemática de posição inversa admite solução analítica quando:

- os eixos de três juntas rotativas consecutivas se intersectam num ponto;
- os eixos de três juntas rotativas consecutivas são paralelos.

### 2.3.1 CINEMÁTICA DE POSIÇÃO INVERSA DE MANIPULADORES COM 6 GDL E PUNHO ESFÉRICO

No caso particular de manipuladores com 6 gdl e punho esférico é possível desacoplar o problema em dois: um subproblema de posicionamento e um subproblema de orientação. De facto, a posição do punho apenas depende das coordenadas das três primeiras juntas, enquanto que as últimas três juntas apenas afectam a orientação.

O subproblema de posicionamento consiste na determinação da solução para as três primeiras juntas a partir da posição do punho (ponto de intersecção dos eixos das três últimas juntas).

O subproblema de orientação consiste na determinação da solução para as três últimas juntas a partir da orientação do punho e da solução do subproblema de posicionamento.

O procedimento é o seguinte:

- determinar a posição do punho, dada a posição e a orientação do órgão terminal:  ${}^0\mathbf{p}_{w|0} = \mathbf{p} - d_6\mathbf{a} = \begin{bmatrix} p_{w_x} & p_{w_y} & p_{w_z} \end{bmatrix}^T$ ;
- resolver o problema da cinemática inversa para o braço;
- calcular a matriz de orientação  ${}^0\mathbf{R}_3(q_1, q_2, q_3)$ ;
- calcular a matriz  ${}^3\mathbf{R}_6(q_4, q_5, q_6) = {}^0\mathbf{R}_3^T(q_1, q_2, q_3) \cdot \mathbf{R}_6(\psi, \theta, \phi)$ ;

- resolver o problema da cinemática inversa para o punho.

Para a resolução do problema da cinemática inversa do braço haverá que usar um qualquer método analítico, sendo útil a manipulação das matrizes homogéneas e/ou a exploração das relações geométricas ao nível do braço (alguns exemplos serão mostrados adiante).

Para a resolução do problema da cinemática inversa do punho poderá ser seguida uma metodologia em tudo igual à apresentada na secção 2.1.4.

## 2.3.2 CINEMÁTICA INVERSA DE ALGUNS MANIPULADORES

### 2.3.2.1 BRAÇO ESFÉRICO (MANIPULADOR DE STANFORD)

Dada a posição e a orientação do órgão terminal do manipulador, matriz  $\mathbf{T}$ , pode determinar-se de imediato a posição do punho:  ${}^0\mathbf{p}_{w|_0} = \mathbf{p} - d_6\mathbf{a}$ .

Neste caso, a posição do punho coincide com a origem do referencial 3, sendo que pode ser lida directamente da matriz  ${}^0\mathbf{A}_3$  (quarta coluna):

$${}^0\mathbf{A}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$$

$$= \begin{bmatrix} d_3C_1S_2 - S_1d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & d_3S_1S_2 + C_1d_2 \\ & & & d_3C_2 + d_1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.110})$$

Assim, vem

$$\begin{bmatrix} p_{w_x} \\ p_{w_y} \\ p_{w_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3C_1S_2 - S_1d_2 \\ d_3S_1S_2 + C_1d_2 \\ d_3C_2 + d_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.111})$$

Multiplicando ambos os membros da equação anterior por  $({}^0\mathbf{A}_1)^{-1}$  vem

$$\begin{bmatrix} p_{w_x} C_1 + p_{w_y} S_1 \\ -p_{w_z} \\ -p_{w_x} S_1 + p_{w_y} C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 S_2 \\ -d_3 C_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.112})$$

Fazendo  $t = \tan(\theta_1/2)$  tem-se

$$C_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad S_1 = \frac{2t}{1+t^2} \quad (\text{Eq. 2.113})$$

Substituindo nos terceiros elementos da equação (Eq. 2.112) resulta a seguinte equação de segunda ordem

$$(d_2 + p_{w_y})t^2 + 2p_{w_x}t + d_2 - p_{w_y} = 0 \quad (\text{Eq. 2.114})$$

$$t = \frac{-p_{w_x} \pm \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 - d_2^2}}{d_2 + p_{w_y}} \quad (\text{Eq. 2.115})$$

$$\theta_1 = 2 \operatorname{atan} 2 \left( -p_{w_x} \pm \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 - d_2^2}, d_2 + p_{w_y} \right) \quad (\text{Eq. 2.116})$$

Existem duas soluções para a primeira junta, desde que o discriminante da raiz quadrada seja positivo. Claro que se for negativo não existe solução.

Dos dois primeiros elementos da equação (Eq. 2.112) resulta

$$\frac{p_{w_x} C_1 + p_{w_y} S_1}{-p_{w_z}} = \frac{d_3 S_2}{-d_3 C_2} \quad (\text{Eq. 2.117})$$

$$\theta_2 = \operatorname{atan} 2(p_{w_x} C_1 + p_{w_y} S_1, p_{w_z}) \quad (\text{Eq. 2.118})$$

Elevando ao quadrado e somando as duas primeiras componentes da equação (Eq. 2.112) tem-se (só interessa a solução  $d_3 > 0$ )

$$d_3 = \sqrt{(p_{w_x} C_1 + p_{w_y} S_1, p_{w_z})^2 + p_{w_z}^2} \quad (\text{Eq. 2.119})$$

### 2.3.2.2 BRAÇO ANTROPOMÓRFICO (MANIPULADOR TI ER 6000 COM $d_2 = 0$ OU PUMA COM $d_2 = 0$ E $a_3 = 0$ )

Para facilitar a análise considerem-se os parâmetros de D-H  $d_2 = 0$  e  $a_3 = 0$ , relativamente ao manipulador PUMA e  $d_2 = 0$ , relativamente ao TI ER 6000. Assim, ambos os manipuladores serão idênticos.

Dada a posição e a orientação do órgão terminal do manipulador (matriz  $\mathbf{T}$ ), pode determinar-se de imediato a posição do punho:  ${}^0\mathbf{p}_{w|_0} = \mathbf{p} - d_6\mathbf{a}$ .

Neste caso, a posição do punho coincide com a origem do referencial 4, pelo que pode ser lida directamente da matriz  ${}^0\mathbf{A}_4$  (quarta coluna):

$${}^0\mathbf{A}_4 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4$$

$$= \begin{bmatrix} d_4 C_1 S_{23} + a_2 C_1 C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & d_4 S_1 S_{23} + a_2 S_1 C_2 \\ & & & d_4 C_{23} - a_2 S_2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.120})$$

Assim, vem

$$\begin{bmatrix} p_{w_x} \\ p_{w_y} \\ p_{w_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_4 C_1 S_{23} + a_2 C_1 C_2 \\ d_4 S_1 S_{23} + a_2 S_1 C_2 \\ d_4 C_{23} - a_2 S_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.121})$$

Por uma questão de geometria é fácil verificar que

$$\theta_1 = \text{atan} 2(p_{w_y}, p_{w_x}) \quad (\text{Eq. 2.122})$$

ou  $\theta_1 = \pi + \text{atan} 2(p_{w_y}, p_{w_x})$ , desde que  $\theta_2$  passe a valer  $\pi - \theta_2$  (Figura 2.17).

Elevando ao quadrado e somando os elementos da equação (Eq. 2.121) e usando as relações trigonométricas  $S_{23} = S_2 C_3 + C_2 S_3$  e  $C_{23} = C_2 C_3 - S_2 S_3$  vem

$$p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2 = d_4^2 + a_2^2 + 2d_4a_2C_2(S_2C_3 + C_2S_3) - 2d_4a_2S_2(C_2C_3 - S_2S_3) \quad (Eq. 2.123)$$

$$p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2 = d_4^2 + a_2^2 + 2d_4a_2S_3 \quad (Eq. 2.124)$$

$$S_3 = \frac{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2 - d_4^2 - a_2^2}{2d_4a_2} \quad (Eq. 2.125)$$

$$C_3 = \pm\sqrt{1 - S_3^2} \quad (Eq. 2.126)$$

$$\theta_3 = \text{atan} 2(S_3, C_3) \quad (Eq. 2.127)$$

Elevando ao quadrado e somando os dois os primeiros elementos na equação (Eq. 2.121) resulta a equação

$$d_4S_{23} + a_2C_2 = \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2} \quad (Eq. 2.128)$$

Resolvendo o sistema de equações composto pela equação (Eq. 2.128) e pela equação que resulta da igualdade entre os terceiros elementos da equação (Eq. 2.121) obtém-se a solução para a junta 2:

$$\begin{cases} d_4S_{23} + a_2C_2 = \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2} \\ d_4C_{23} - a_2S_2 = p_{w_z} \end{cases} \quad (Eq. 2.129)$$

$$S_2 = \frac{d_4C_3\sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2} - (d_4S_3 + a_2)p_{w_z}}{\sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2}} \quad (Eq. 2.130)$$

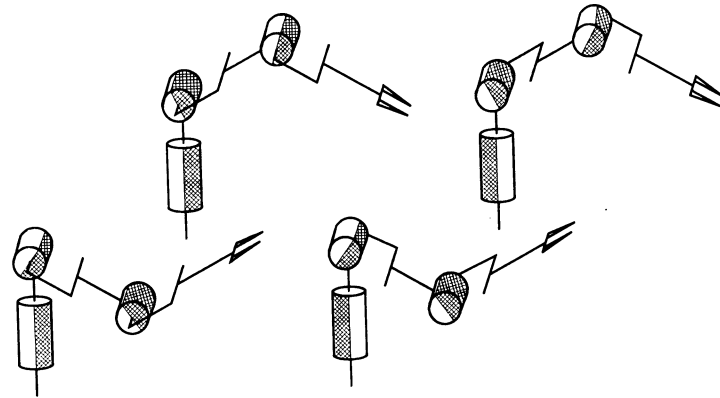
$$C_2 = \frac{p_{w_z}d_4C_3 + (a_2 + d_4S_3)\sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2}}{\sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 + p_{w_z}^2}} \quad (Eq. 2.131)$$

$$\theta_2 = \text{atan} 2(S_2, C_2) \quad (Eq. 2.132)$$

Como se pode ver existem quatro soluções para o braço, as quais correspondem às seguintes configurações (Figura 2.17):



- braço à direita e para cima;
- braço à esquerda e para cima;
- braço à direita e para baixo;
- braço à esquerda e para baixo;



*Figura 2.17 Diferentes configurações para o braço antropomórfico.*

### 2.3.3 DIFICULDADES DOS MÉTODOS ANALÍTICOS

Os métodos analíticos apresentam alguns problemas cuja resolução requer um estudo cuidadoso:

- como os métodos analíticos fornecem variadas soluções, torna-se necessário escolher a que deve ser usada;
- como a solução para cada junta resulta, em última análise, do cálculo de uma função  $\text{atan2}(x, y)$ , surge o problema dos ângulos obtidos virem sempre restringidos ao intervalo  $[-180^\circ, +180^\circ]$ . Este facto pode levantar problemas, caso o intervalo de variação dos ângulos das juntas não esteja contido nesse intervalo.

### 2.3.3.1 PROBLEMA DA ESCOLHA DA SOLUÇÃO

Depois de calculadas todas as possíveis soluções, como o intervalo de variação da juntas é conhecido, o primeiro passo deverá ser eliminar quaisquer soluções que não estejam dentro desses intervalos. Podem então ocorrer três situações:

- todas as soluções estão dentro dos limites de variação impostos às juntas. A dimensão do problema não é reduzida;
- apenas algumas das soluções não violam os limites de variação impostos às juntas. A dimensão do problema foi reduzida;
- todas as soluções violam os limites de variação impostos às juntas. Não existe solução. Isto significa que se pretende mover o manipulador para um ponto fora do seu espaço de trabalho.

Se se verificar um dos dois primeiros casos há que encontrar um critério que uma vez aplicado permita escolher a solução.

#### 2.3.3.1.1 Função custo

Um procedimento possível para seleccionar a solução é escolher aquela que minimiza uma determinada função custo. Por exemplo, escolher a solução que minimiza o erro quadrático médio entre o vector de coordenadas no espaço das juntas actual e o vector de coordenadas no espaço das juntas candidato a próxima solução. É importante notar que neste caso se tenta fazer com que as trajectórias, no espaço das juntas, sejam contínuas no tempo.

Uma outra possibilidade consiste em escolher a solução que minimiza o erro quadrático médio entre o vector de coordenadas no espaço das juntas candidato a próxima solução e o vector de coordenadas no espaço das juntas cujas componentes são os pontos médios dos intervalos de variação impostos às juntas. Neste caso, tenta-se manter as juntas o mais afastado possível dos seus limites.

### **Minimização do erro quadrático médio entre o último vector calculado e o vector candidato a solução**

Considere-se o vector  $\mathbf{q}_{act}$  de coordenadas no espaço das juntas correspondente à situação actual,  $\mathbf{x}_{act}$ , do órgão terminal. Dado o vector  $\mathbf{q}_{seg}$ , de coordenadas no espaço das juntas, candidato a solução para o vector  $\mathbf{x}_{seg}$ , de coordenadas operacionais seguinte, a função a minimizar é

$$\min \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^6 c_i (q_{i,act} - q_{i,seg})^2} \right\} \quad (Eq. 2.133)$$

em que,  $c_i > 0$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). Estes parâmetros formam um conjunto de “pesos” que pode ser ajustado por simulação de modo a obter a solução mais adequada. Assim, é necessário calcular o valor da equação (Eq. 2.133) para cada um dos vectores candidatos a solução e escolher aquele que a minimiza.

### **Minimização do erro quadrático médio entre vector candidato a solução e o vector formado pelos pontos médios dos intervalos de variação das juntas**

Dado o vector  $\mathbf{q}_{med}$ , que corresponde aos pontos médios dos intervalos de variação das juntas, e o vector  $\mathbf{q}_{seg}$  de coordenadas no espaço das juntas candidato a solução para o vector  $\mathbf{x}_{seg}$  de coordenadas operacionais seguinte, a função a minimizar é

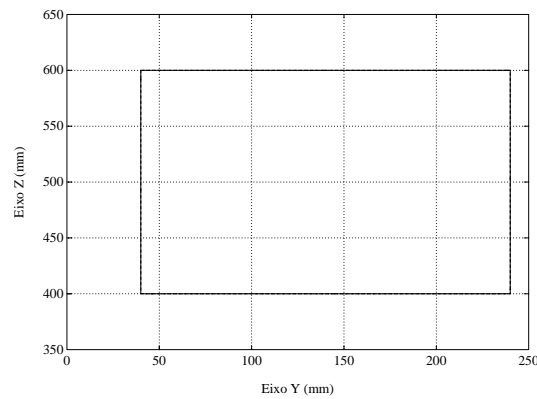
$$\min \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^6 c_i (q_{i,med} - q_{i,seg})^2} \right\} \quad (Eq. 2.134)$$

em que  $c_i > 0$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). A solução é escolhida tal como no caso anterior.

#### **2.3.3.1.2 Escolha da função custo (caso do manipulador TI ER 6000)**

A escolha da função custo adequada pode requerer alguma simulação. Assim, considere-se que no instante de tempo  $t = 0$  seg. a posição generalizada do

manipulador é  $\mathbf{x}_0 = (50, 40, 600, 10, 5, 35)^T$  (posição expressa em milímetros e orientação expressa em graus) e que as correspondentes coordenadas das juntas são  $\mathbf{q}_0 = (-6.3, -54.8, 24.2, -40.8, 54.2, 46.1)^T$  (em graus). Pretende-se que o órgão terminal do robô descreva um quadrado no plano YZ (plano vertical) demorando 2 seg para percorrer cada lado. Para tal define-se uma trajectória especificando os restantes três vértices do quadrado  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$ :  $\mathbf{x}_1 = (50, 240, 600, 10, 5, 35)^T$ ,  $\mathbf{x}_2 = (50, 240, 400, 10, 5, 35)^T$  e  $\mathbf{x}_3 = (50, 40, 400, 10, 5, 35)^T$  (Figura 2.18).

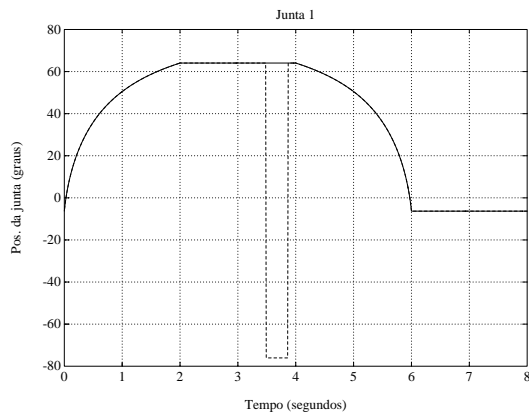


*Figura 2.18 Trajectória no plano YZ desejada para o órgão terminal.*

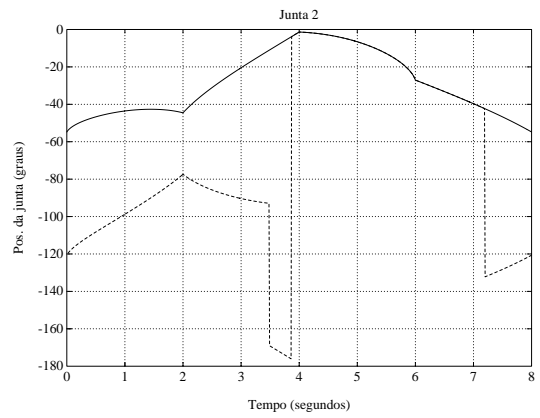
Na Figura 2.19 podem observar-se as trajectórias geradas por um método analítico, para duas funções custo: a função custo (1) minimização do erro quadrático médio entre o vector candidato a próxima solução e o vector solução anterior, e a função custo (2) minimização do erro quadrático médio entre o vector candidato a próxima solução e o vector cujas componentes são os pontos médios dos intervalos de variação das juntas. Em ambas as funções custo o vector de pesos<sup>2</sup> é  $\mathbf{c} = (10, 10, 10, 1, 1, 1)^T$ . Notar que a função custo (2) conduz à geração de trajectórias no espaço das juntas descontínuas no tempo (que implicam mudanças de configuração do manipulador). As correspondentes trajectórias no espaço operacional são coincidentes (i.e., o manipulador consegue executar a mesma trajectória no espaço operacional de várias formas diferentes (Figura 2.20)).

---

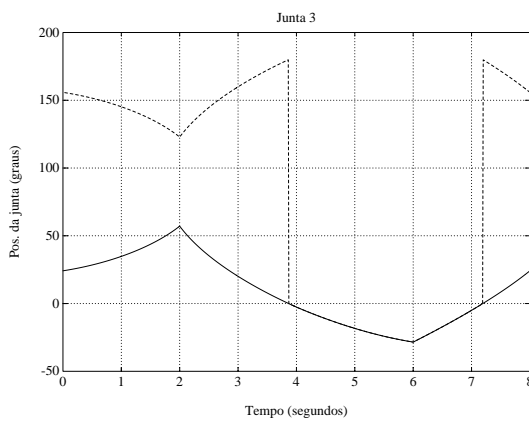
<sup>2</sup> Entende-se que se deve dar maior peso às juntas do braço uma vez que, tipicamente, estas têm menor capacidade de aceleração que as do punho. Assim, dá-se maior importância às descontinuidades das trajectórias destas juntas.



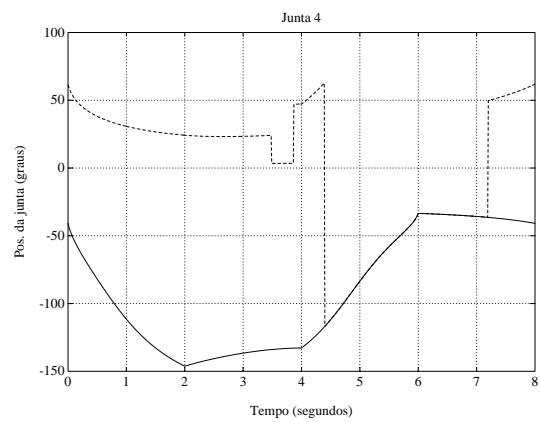
*Junta 1*



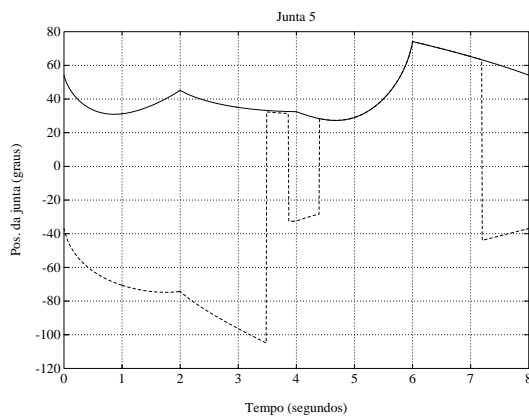
*Junta 2*



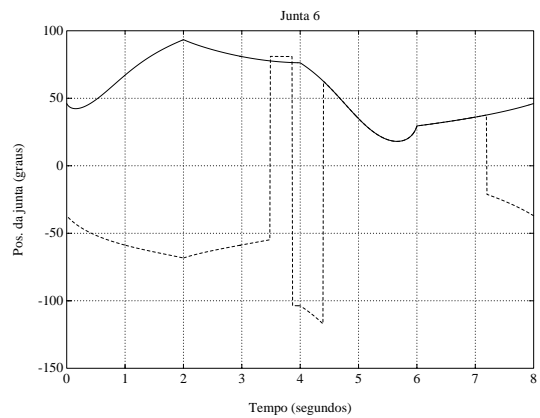
*Junta 3*



*Junta 4*

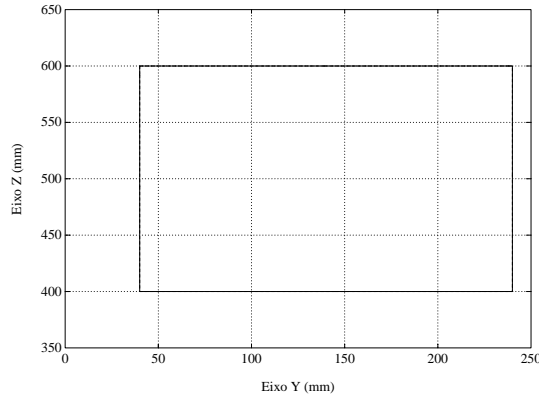


*Junta 5*



*Junta 6*

*Figura 2.19 Trajectórias das juntas geradas por um método analítico com diferentes funções custo.  
— Função custo (1); --- Função custo (2).*



*Figura 2.20 Trajetórias no espaço operacional (plano YZ) geradas por um método analítico com diferentes funções custo.  
— Função custo (1); --- Função custo (2).*

### 2.3.3.2 PROBLEMA DA RESTRIÇÃO DOS ÂNGULOS AO INTERVALO $[-180^\circ, +180^\circ]$

O facto das soluções para as juntas resultarem da aplicação de uma função  $\text{atan2}(x, y)$  faz com que os ângulos venham restringidos ao intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Se os intervalos de variação impostos às juntas não estiverem contidos dentro deste intervalo, impõe-se a correcção da solução obtida. Um procedimento possível consistirá na comparação da solução proposta com a solução anterior. Caso se verifique uma inversão de sinal, haverá que fazer a devida correcção à solução.

## 2.3.4 MÉTODOS NUMÉRICOS ITERATIVOS

### 2.3.4.1 MÉTODO BASEADO NO JACOBIANO

Seja  $\mathbf{q}$  um vector definido no espaço das juntas e  $\mathbf{x}$  um vector definido no espaço operacional:  $\mathbf{x} = f(\mathbf{q})$ ;  $\mathbf{q} = f^{-1}(\mathbf{x})$ , sendo  $f$  uma função não linear.

Considere-se  $d\mathbf{q}$  (ou  $\Delta\mathbf{q}$ ) um vector de incrementos infinitesimais (ou muito pequenos) em  $\mathbf{q}$  e  $d\mathbf{x}$  (ou  $\Delta\mathbf{x}$ ) um vector de incrementos infinitesimais (ou muito pequenos) em  $\mathbf{x}$ .

Sabe-se das relações diferenciais que

$$d\mathbf{x} = \mathbf{J}_E d\mathbf{q} \quad (\Delta\mathbf{x} = \mathbf{J}_E \Delta\mathbf{q}) \quad (\text{Eq. 2.135})$$

ou

$$d\mathbf{q} = \mathbf{J}_E^{-1} d\mathbf{x} \quad (\Delta\mathbf{q} = \mathbf{J}_E^{-1} \Delta\mathbf{x}) \quad (\text{Eq. 2.136})$$

### Algoritmo 2.2

- D1. Seleccionar o vector inicial candidato a solução  $\mathbf{q}_k \equiv \mathbf{q}_0$ ;
- D2. Determinar e inverter o jacobiano de ângulos de Euler  $\mathbf{J}_E^{-1}(\mathbf{q}_k)$ ;
- D3. Determinar o vector erro no espaço operacional  $[\mathbf{x} - f(\mathbf{q}_k)]$ ;
- D4. Fazer  $\Delta\mathbf{q}_k = \mathbf{J}_E^{-1} \cdot [\mathbf{x} - f(\mathbf{q}_k)]$ ;
- D5. Fazer  $\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta\mathbf{q}_k$ ;
- D6. Se  $\max\{\|\mathbf{x} - f(\mathbf{q}_{k+1})\|\} > \varepsilon$  voltar ao passo D2.

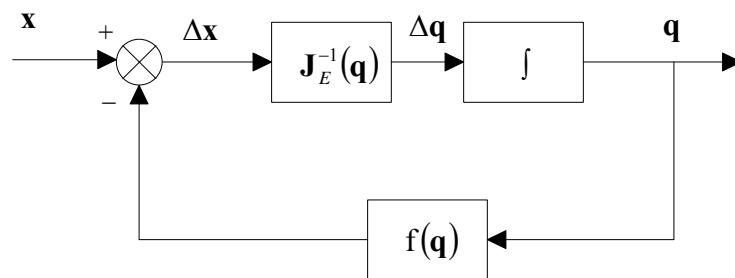


Figura 2.21 Diagrama de blocos do algoritmo de cálculo da cinemática inversa.

A rapidez de convergência do algoritmo depende fortemente da aproximação inicial  $\mathbf{q}_0$ . No seguimento de uma trajetória deve-se usar a solução encontrada no instante  $T$  para aproximação inicial à solução procurada para o instante  $T + \Delta T$ .

#### 2.3.4.2 EXEMPLO: MANIPULADOR TI ER 6000

Considere-se que se dispõe de um método eficaz de gerar uma trajectória no espaço operacional, isto é, de gerar pontos  $\mathbf{x}_i$  muito próximos pelos quais o órgão terminal do manipulador deve passar. Para o manipulador TI ER 6000 o Algoritmo 2.3 revela-se adequado no seguimento de uma trajectória. Note-se que a solução para cada ponto  $\mathbf{x}_i$  é calculada numa única passagem, i.e., sem a necessidade de iterar.

##### *Algoritmo 2.3*

- P0. Fazer  $i = 0$ .
- P1. Ler a situação inicial (vector  $\mathbf{q}_i$ ). Ler os sensores de posição das juntas. Este passo só necessita de ser executado uma vez.
- P2. Executar os passos P3 a P8 até  $\Delta \mathbf{x} = 0$ .
- P3. Calcular o vector  $\mathbf{x}_i$  que corresponde ao vector  $\mathbf{q}_i$ . Este passo é executado de um modo simples, pois corresponde à resolução do problema da cinemática directa.
- P4. Calcular  $\mathbf{x}_{i+1}$ . O cálculo de  $\mathbf{x}_{i+1}$  é efectuado por um método de geração de trajectórias.
- P5. Calcular  $\Delta \mathbf{x}$ . Fazer  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ .
- P6. Calcular  $\Delta \mathbf{q}$ . Fazer  $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}_E^{-1} \Delta \mathbf{x}$ .
- P7. Calcular  $\mathbf{q}_{i+1}$ . Fazer  $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta \mathbf{q}$ .
- P8. Fazer  $i = i+1$ .

#### 2.3.4.3 APLICAÇÃO A MANIPULADORES COM PUNHO ESFÉRICO

Segundo Coiffet (1982), desde que se verifique que os três últimos eixos do robô manipulador se intersectam no mesmo ponto, é possível separar o problema global (que implica a manipulação de matrizes de dimensão  $6 \times 6$ ) em dois



subproblemas independentes: um de posicionamento e outro de orientação (que requerem apenas a manipulação de matrizes de dimensão  $3 \times 3$ ).

Considere-se que o vector de coordenadas do espaço operacional  $\mathbf{x}$  (de dimensão  $6 \times 1$ ) e o vector de coordenadas no espaço das juntas  $\mathbf{q}$  (de dimensão  $6 \times 1$ ) podem ser representados da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \dots \\ \mathbf{x}_o \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \dots \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.137})$$

em que  $\mathbf{x}_p$  (dimensão  $3 \times 1$ ) representa a posição do órgão terminal em coordenadas cartesianas e  $\mathbf{x}_o$  (dimensão  $3 \times 1$ ) representa a orientação em termos de ângulos de Euler. Por outro lado,  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$  são vectores (de dimensão  $3 \times 1$ ) que representam as posições angulares, respectivamente, das três primeiras e das três últimas juntas.

Considere-se ainda o jacobiano,  $\mathbf{J}^{int}$ , relacionando a velocidade linear e as derivadas dos ângulos de Euler do punho (ponto de intersecção dos eixos das três últimas juntas), com as velocidades das juntas. Verifica-se que este pode ser obtido a partir de  $\mathbf{J}_E$  fazendo o parâmetro  $d_6 = 0$ , podendo ser representado na forma

$$\mathbf{J}^{int} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.138})$$

onde  $\mathbf{J}_{11}$ ,  $\mathbf{J}_{12}$  e  $\mathbf{J}_{21}$  são matrizes de dimensão  $3 \times 3$  e  $\mathbf{0}$  representa a matriz nula de dimensão  $3 \times 3$ .

O vector  $\mathbf{x}_p^{int}$  que representa a posição do ponto de intersecção dos três últimos eixos em relação ao referencial da base pode ser calculado pela equação

$$\mathbf{x}_p^{int} = \mathbf{x}_p - d_6 \mathbf{a} \quad (\text{Eq. 2.139})$$

em que  $\mathbf{x}_p$  representa a posição do órgão terminal em relação ao referencial da base.

Então o algoritmo vem:

#### Algoritmo 2.4

- P0. Fazer  $i = 0$ .
- P1. Ler a situação inicial (vector  $\mathbf{q}_i$ ). Ler os sensores de posição das juntas.
- P2. Executar os passos P3 a P10, até  $\Delta \mathbf{x} = 0$ .
- P3. Calcular o vector  $\mathbf{x}_i$  que corresponde ao vector  $\mathbf{q}_i$ . Este passo corresponde à resolução do problema da cinemática directa.
- P4. Determinar  $\mathbf{x}_i^{int}$  que corresponde a  $\mathbf{x}_i$ . Fazer  $\mathbf{x}_{i,p}^{int} = \mathbf{x}_{i,p} - d_6 \mathbf{a}$  ( $\mathbf{x}_{i,o}^{int} = \mathbf{x}_{i,o}$ ).
- P5. Calcular  $\mathbf{x}_{i+1}$ . O cálculo de  $\mathbf{x}_{i+1}$  é efectuado por um método de geração de trajectórias.
- P6. Determinar  $\mathbf{x}_{i+1}^{int}$  que corresponde a  $\mathbf{x}_{i+1}$ . Fazer  $\mathbf{x}_{i+1,p}^{int} = \mathbf{x}_{i+1,p} - d_6 \mathbf{a}$  ( $\mathbf{x}_{i+1,o}^{int} = \mathbf{x}_{i+1,o}$ ).
- P7. Calcular  $\Delta \mathbf{x}^{int}$ . Fazer  $\Delta \mathbf{x}^{int} = \mathbf{x}_{i+1}^{int} - \mathbf{x}_i^{int}$ .
- P8. Calcular  $\Delta \mathbf{q}$ . Fazer  $\Delta \mathbf{q}_1 = \mathbf{J}_{21}^{-1} \Delta \mathbf{x}_o^{int}$  e  $\Delta \mathbf{q}_2 = \mathbf{J}_{12}^{-1} [\Delta \mathbf{x}_p^{int} - \mathbf{J}_{11} \mathbf{J}_{21}^{-1} \Delta \mathbf{x}_o^{int}]$ .
- P9. Calcular  $\mathbf{q}_{i+1}$ . Fazer  $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta \mathbf{q}$ .
- P10. Fazer  $i = i+1$ .

### 2.3.5 LIMITAÇÕES DOS MÉTODOS NUMÉRICOS ITERATIVOS

Podem ser notadas algumas dificuldades inerentes aos métodos numéricos, a saber:

- conduzem a uma solução aproximada (embora, teoricamente, possa ser muito boa se forem adoptados incrementos  $\Delta \mathbf{x}$  suficientemente

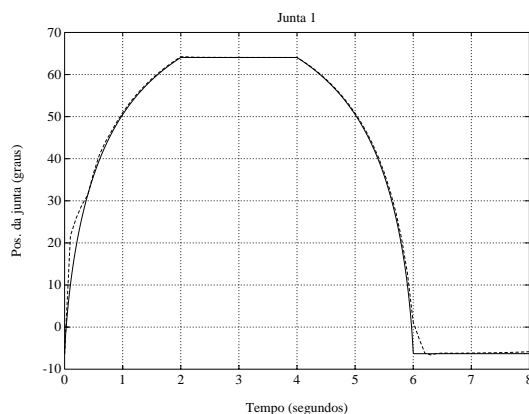
pequenos, i. e., se for seleccionando um intervalo de amostragem apropriado). Como se verá através de resultados obtidos por simulação, o erro resultante da linearização pode ser desprezado se se trabalhar a frequências de amostragem típicas entre os 60 Hz e os 100 Hz;

- pequenos incrementos  $\Delta \mathbf{x}$  no vector de coordenadas no espaço operacional não garantem, à partida, incrementos  $\Delta \mathbf{q}$  pequenos no vector de coordenadas no espaço das juntas, principalmente próximo de pontos singulares. No entanto, existem técnicas que podem ser usadas para minimizar este problema (Nakamura e Hanafusa, 1986).

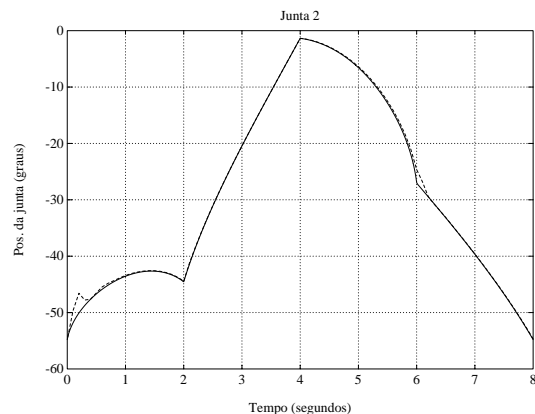
## 2.3.6 COMPARAÇÃO DOS DOIS MÉTODOS

### 2.3.6.1 EVOLUÇÃO TEMPORAL DAS TRAJECTÓRIAS GERADAS

O método analítico pode conduzir a trajectórias descontínuas no tempo e como tal as suas duas primeiras derivadas temporais são infinitas. Fisicamente, significa que para serem executadas são requeridas às juntas velocidades e acelerações infinitas. Por outro lado, a frequência de amostragem afecta, ao contrário do que acontece no método analítico, a evolução temporal das trajectórias geradas pelo método numérico iterativo (Figura 2.22 e Figura 2.23, para a trajectória definida anteriormente).



*Junta 1*



*Junta 2*

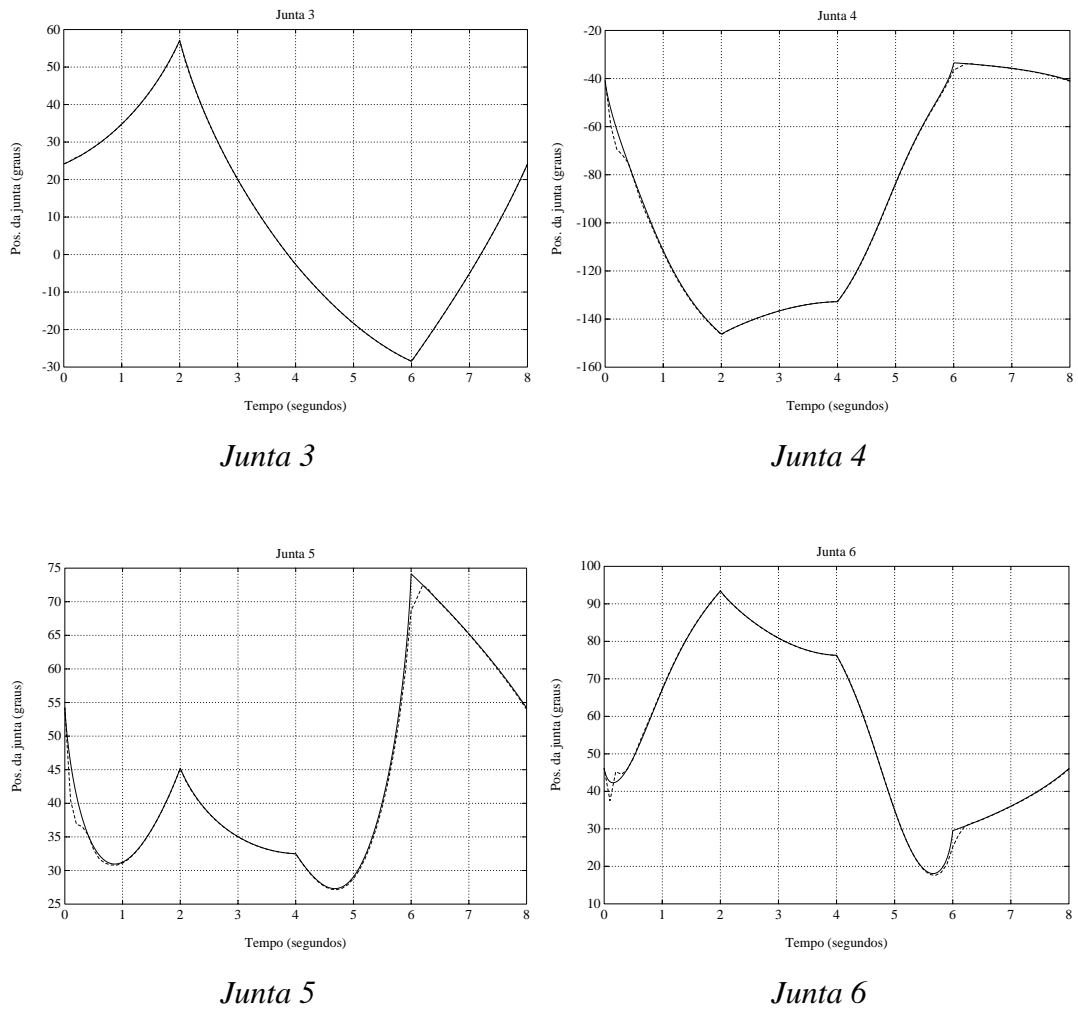


Figura 2.22 Trajetórias das juntas geradas por um método numérico iterativo para diferentes frequências de amostragem.  
 — Frequência de amostragem de 100 Hz; --- Frequência de amostragem de 10 Hz.

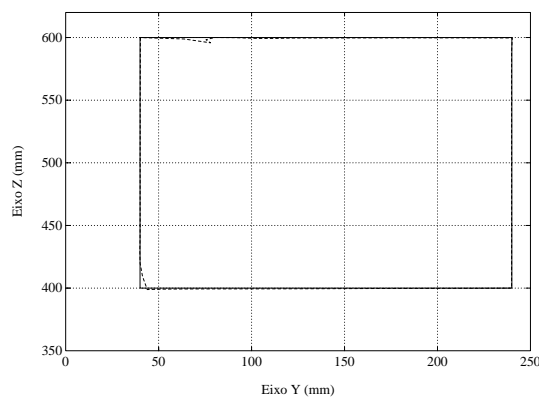


Figura 2.23 Trajetórias no espaço operacional (plano YZ) geradas por um método numérico iterativo para diferentes frequências de amostragem.  
 — Frequência de amostragem de 100 Hz; --- Frequência de amostragem de 10 Hz.

### 2.3.6.2 PESO COMPUTACIONAL

No controlo de manipuladores é muitas vezes necessário calcular em tempo-real a solução do problema da cinemática inversa. Assim, o peso computacional pode ser um importante critério de comparação dos algoritmos apresentados.

Neste aspecto, para o manipulador TI ER 6000 e para uma frequência de 100Hz, o método numérico revela-se cerca de 4.5 vezes mais rápido que o método analítico.

## 2.4 CINEMÁTICA DIFERENCIAL INVERSA

A cinemática diferencial inversa pode resumir-se à determinação do jacobiano cinemático inverso,  $\mathbf{J}^{-1}$ . Para manipuladores com 6 gdl, o cálculo analítico de tal matriz revela-se muitas vezes proibitivo face ao seu elevado peso computacional. Em alternativa, a inversão numérica de  $\mathbf{J}$  pode ser efectuada com um algoritmo clássico de inversão de matrizes. No entanto, as inversas generalizadas garantem uma superior robustez face ao eventual mau condicionamento da matriz a inverter. Uma inversa generalizada de  $\mathbf{J}$  é qualquer matriz  $\mathbf{G}$  que satisfaça a relação  $\mathbf{J}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{J} = \mathbf{J}$ . Apesar de existir uma infinidade de inversas generalizadas (Coiffet, 1981), a pseudo-inversa e o algoritmo de cálculo de Greville (Coiffet, 1981) revelam-se particularmente interessantes. Se a matriz  $\mathbf{J}$  for não-singular, a inversa,  $\mathbf{J}^{-1}$ , e a pseudo-inversa,  $\mathbf{J}^+$ , são iguais. Se  $\mathbf{J}$  for singular, a pseudo-inversa dá origem ao vector solução de menor norma euclidiana. O algoritmo de Greville permite calcular  $\mathbf{J}^+$  sem ter que inverter qualquer matriz.

### 3 MODELAÇÃO DINÂMICA

O modelo dinâmico de um sistema mecânico permite relacionar a evolução temporal da sua configuração (nomeadamente, a posição, a velocidade e a aceleração) com as forças e momentos que nele actuam.

A modelação dinâmica de manipuladores de estrutura em série é actualmente um assunto bem estabelecido. Como tal, nos últimos anos, a principal preocupação tem sido tornar os modelos computacionalmente mais eficientes, sobretudo na perspectiva da sua inclusão em algoritmos de controlo de tempo-real.

O modelo dinâmico de um manipulador série operando em espaço livre pode ser representado matematicamente por um sistema de equações diferenciais não lineares que, na forma matricial, pode ser dado por

$$\mathbf{I}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (\text{Eq. 3.1})$$

em que  $\mathbf{I}(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  representam, respectivamente, as matrizes de inércia e de Coriolis e centrípetos,  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  representa o vector de termos gravíticos,  $\mathbf{q}$  é um vector definido no espaço das juntas e  $\boldsymbol{\tau}$  é o vector de forças / momentos aplicados nas juntas.

A necessidade de melhor conhecer o comportamento dinâmico de um manipulador aumenta com a complexidade e com as exigências das tarefas a robotizar. O modelo dinâmico assume uma importância capital na simulação e no controlo do sistema:

- para controlo é necessário conhecer as forças de comando a aplicar pelos actuadores,  $\boldsymbol{\tau}$ , para que o órgão terminal cumpra a trajectória

pretendida (são conhecidas a posição e a velocidade correntes,  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ , sendo especificada a aceleração desejada,  $\ddot{\mathbf{q}}$ ): dinâmica inversa (Figura 3.1);

- para simulação é importante saber como vai reagir o mecanismo quando sujeito a uma determinada força de comando, ou seja, interessa saber a variação da posição, da velocidade e da aceleração do órgão terminal, em função do vector de forças aplicadas pelos actuadores (são conhecidas a posição e a velocidade correntes,  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ , é especificada a força de controlo,  $\boldsymbol{\tau}$ , e a actualização da velocidade e da posição é obtida por integração da aceleração): *dinâmica directa* (Figura 3.2).

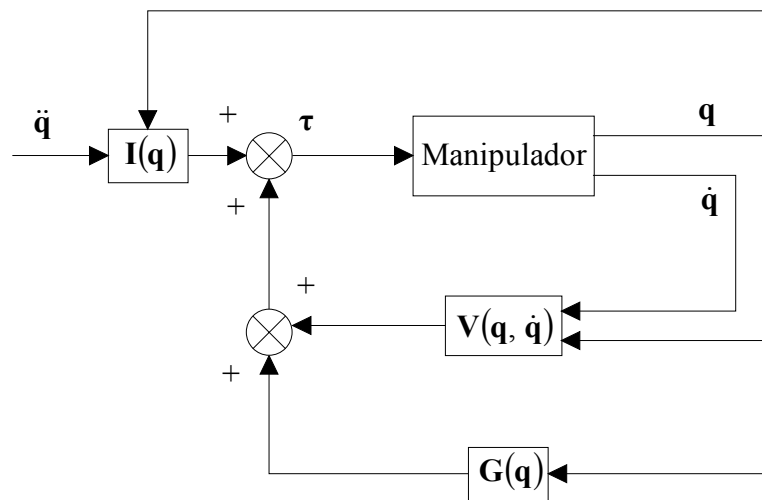


Figura 3.1 Diagrama de blocos do modelo dinâmico inverso de um manipulador.

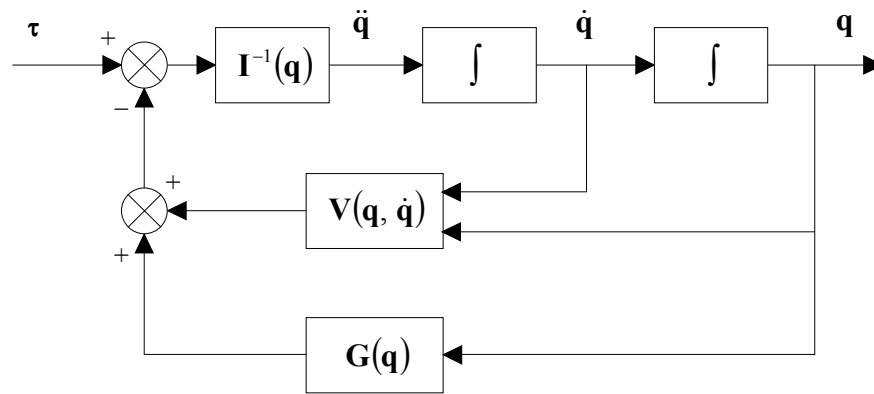


Figura 3.2 Diagrama de blocos do modelo dinâmico directo de um manipulador.

Tipicamente, a modelação dinâmica de manipuladores série baseia-se ou no método de Newton-Euler ou no método de Lagrange. O método de Newton-Euler descreve o comportamento de um sistema mecânico através das forças e momentos aplicados nos corpos que o constituem. A dinâmica de um corpo rígido é representada por duas equações: a equação de Newton, que descreve a translação do centro de massa do corpo, e a equação de Euler, que descreve a rotação do corpo em relação ao seu centro de massa.

O método de Lagrange descreve a dinâmica de um sistema mecânico a partir dos conceitos de trabalho e energia. Mais precisamente, a equação de Lagrange é função de uma quantidade escalar - o lagrangeano - (diferença entre as energias cinética e potencial), determinado em função de um qualquer conjunto de coordenadas generalizadas. O método de Lagrange permite obter de forma sistemática as equações de movimento de qualquer sistema mecânico.

### 3.1 MODELAÇÃO DINÂMICA PELO MÉTODO DE NEWTON-EULER

Nesta secção apresenta-se o método de Newton-Euler para a modelação dinâmica de manipuladores de estrutura em série.



Como é sabido, um corpo rígido em espaço livre possui 6 gdl, pelo que o seu movimento pode ser descrito por um conjunto de 6 equações diferenciais independentes. Tais equações podem ser obtidas da equação de Newton, que descreve a translação do centro de massa do corpo, e da equação de Euler, que descreve a rotação do corpo em relação ao seu centro de massa.

Considere-se a Figura 3.3, onde  $G_i$  é o centro de massa do elo  $i$ . Fixos em relação ao elo existem dois referenciais: o referencial  $i$ , estabelecido de acordo com o algoritmo de D-H; e o referencial  $G_i$  com origem no centro de massa  $G_i$ . A orientação de  $G_i$  em relação a  $i$  é dada pela matriz de rotação  ${}^i\mathbf{R}_{G_i}$  (constante).

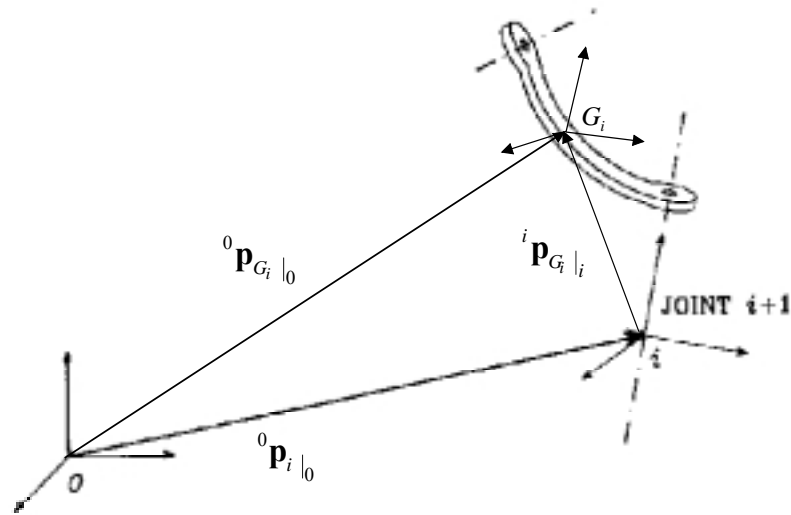


Figura 3.3 Referencial inercial e referenciais fixos ao elo  $i$ .

Seja  $m_i$  a massa e  ${}^{G_i}\mathbf{I}_{i|G_i}$  a matriz de inércia do elo em relação ao seu centro de massa, expressa no referencial  $G_i$ .

Qualquer matriz de inércia é simétrica, pelo que pode escrever-se

$${}^{G_i}\mathbf{I}_{i|G_i} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{xx} & \hat{I}_{xy} & \hat{I}_{xz} \\ \hat{I}_{xy} & \hat{I}_{yy} & \hat{I}_{yz} \\ \hat{I}_{xz} & \hat{I}_{yz} & \hat{I}_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.2})$$

onde o símbolo “^” significa que os momentos e os produtos de inércia estão referidos ao centro de massa do elo.

Sabe-se, da mecânica clássica, que a matriz de inércia de um corpo é constante quando expressa num referencial fixo em relação ao próprio corpo. Além disso, se o referencial tiver origem no centro de massa e se as direcções dos eixos do referencial coincidirem com as direcções principais de inércia, então os produtos de inércia são todos nulos e a matriz é diagonal (Torby, 1984).

A matriz de inércia do elo  $i$  em relação a um referencial  $A$  (fixo ao elo) paralelo a  $G_i$ , com origem num ponto,  $A$ , do elo, que não o seu centro de massa, pode ser calculada da seguinte forma:

$${}^A \mathbf{I}_{i|A} = {}^A \mathbf{I}_{i|G_i} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (Eq. 3.3)$$

em que

$$I_{xx} = \hat{I}_{xx} + m_i (y_{G_i}^2 + z_{G_i}^2) \quad (Eq. 3.4)$$

$$I_{yy} = \hat{I}_{yy} + m_i (x_{G_i}^2 + z_{G_i}^2) \quad (Eq. 3.5)$$

$$I_{zz} = \hat{I}_{zz} + m_i (x_{G_i}^2 + y_{G_i}^2) \quad (Eq. 3.6)$$

$$I_{xy} = \hat{I}_{xy} - m_i x_{G_i} y_{G_i} \quad (Eq. 3.7)$$

$$I_{xz} = \hat{I}_{xz} - m_i x_{G_i} z_{G_i} \quad (Eq. 3.8)$$

$$I_{yz} = \hat{I}_{yz} - m_i y_{G_i} z_{G_i} \quad (Eq. 3.9)$$

e  $x_{G_i}$ ,  $y_{G_i}$  e  $z_{G_i}$ , representam as coordenadas do centro de massa  $G_i$  em relação ao referencial  $A$ .

Seja  ${}^0\dot{\mathbf{p}}_{G_i|0}$  a velocidade linear do centro de massa e  ${}^0\boldsymbol{\omega}_{G_i|0} = {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0}$  a velocidade angular do elo, ambas em relação ao referencial da base e expressas no referencial da base.

O momento linear do corpo expresso no referencial da base é  $\mathbf{Q}_{i|0}$ , e o momento angular do corpo em relação ao seu centro de massa, expresso no referencial da base, é  ${}^{G_i}\mathbf{H}_{i|0}$ . Assim,

$$\mathbf{Q}_{i|0} = m_i {}^0\dot{\mathbf{p}}_{G_i|0} \quad (\text{Eq. 3.10})$$

$${}^{G_i}\mathbf{H}_{i|0} = {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0} \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{G_i|0} = {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0} \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \quad (\text{Eq. 3.11})$$

Em que  ${}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0}$  é a matriz de inércia do elo, em relação ao seu centro de massa, expressa no referencial da base (i.e., num referencial paralelo ao da base). Note-se que  ${}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0}$  não é uma matriz constante, pois a orientação do corpo em relação ao referencial da base é variável (o referencial da base vê a geometria do elo a variar).

Usando a matriz de rotação,  ${}^0\mathbf{R}_i$ , que representa a orientação do referencial  $i$  em relação ao referencial da base, pode escrever-se

$$\mathbf{Q}_{i|0} = {}^0\mathbf{R}_i \mathbf{Q}_{i|i} \quad (\text{Eq. 3.12})$$

$${}^{G_i}\mathbf{H}_{i|0} = {}^0\mathbf{R}_i {}^{G_i}\mathbf{H}_{i|i} \quad (\text{Eq. 3.13})$$

e, ainda

$${}^0\mathbf{R}_i {}^{G_i}\mathbf{H}_{i|i} = {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0} {}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|i} \quad (\text{Eq. 3.14})$$

$${}^{G_i}\mathbf{H}_{i|i} = {}^i\mathbf{R}_0 {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0} {}^0\mathbf{R}_i \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|i} \quad (\text{Eq. 3.15})$$

O vector  ${}^{G_i}\mathbf{H}_{i|i}$  representa o momento angular do elo  $i$ , em relação ao seu centro de massa, expresso no referencial  $i$ .

Da equação (Eq. 3.15), a matriz de inércia do elo  $i$  em relação ao seu centro de massa, expressa no referencial  $i$  será

$${}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} = {}^i \mathbf{R}_0 {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|0} {}^0 \mathbf{R}_i \quad (\text{Eq. 3.16})$$

ou então, expressa no referencial da base, em função de  ${}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i}$ , vem

$${}^{G_i} \mathbf{I}_{i|0} = {}^0 \mathbf{R}_i {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} {}^i \mathbf{R}_0 \quad (\text{Eq. 3.17})$$

Note-se que, pela mesma ordem de ideias, podem ser obtidas as seguintes relações:

$${}^{G_i} \mathbf{I}_{i|G_i} = {}^{G_i} \mathbf{R}_i {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} {}^i \mathbf{R}_{G_i} \quad (\text{Eq. 3.18})$$

$${}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} = {}^i \mathbf{R}_{G_i} {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|G_i} {}^{G_i} \mathbf{R}_i \quad (\text{Eq. 3.19})$$

Tipicamente, é mais fácil começar por determinar  ${}^{G_i} \mathbf{I}_{i|G_i}$ , escolhendo para isso os eixos de  $G_i$  coincidentes com os eixos principais de inércia do elo. Para formas geométricas simples (regulares) os momentos de inércia são bem conhecidos e estão tabelados.

Pela segunda lei de Newton, a força total aplicada no centro de massa do elo, expressa no referencial da base será (Yoshikawa, 1990)

$$\mathbf{F}_{G_i|0} = \frac{d}{dt} (\mathbf{Q}_{i|0}) \quad (\text{Eq. 3.20})$$

$$\mathbf{F}_{G_i|0} = \frac{d}{dt} m_i ({}^0 \dot{\mathbf{p}}_{G_i|0}) = m_i {}^0 \ddot{\mathbf{p}}_{G_i|0} \quad (\text{Eq. 3.21})$$

O momento total aplicado no elo, em relação ao seu centro de massa, expresso no referencial da base será

$$\mathbf{N}_{G_i|0} = \frac{d}{dt} \left( {}^{G_i} \mathbf{H}_{i|0} \right) \quad (\text{Eq. 3.22})$$

$$\mathbf{N}_{G_i|0} = \frac{d}{dt} \left( {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|0} \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \quad (\text{Eq. 3.23})$$

O momento angular do elo  $i$  é um vector definido em relação a um referencial fixo ao corpo, com origem em  $G_i$ . Assim, tem-se

$${}^{G_i} \dot{\mathbf{H}}_{i|0} = {}^{G_i} \dot{\mathbf{H}}_{i|0} \Big|_{rot} + {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{G_i} \mathbf{H}_{i|0} \quad (\text{Eq. 3.24})$$

$${}^{G_i} \dot{\mathbf{H}}_{i|i} = {}^{G_i} \dot{\mathbf{H}}_{i|i} \Big|_{rot} + {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|i} \times {}^{G_i} \mathbf{H}_{i|i} \quad (\text{Eq. 3.25})$$

$${}^{G_i} \dot{\mathbf{H}}_{i|i} = {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} \cdot {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|i} + {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|i} \times \left( {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|i} \right) \quad (\text{Eq. 3.26})$$

$${}^i \mathbf{R}_0 \cdot {}^{G_i} \dot{\mathbf{H}}_{i|0} = {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} \left( {}^i \mathbf{R}_0 \cdot {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \right) + \left( {}^i \mathbf{R}_0 \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times \left( {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} \left( {}^i \mathbf{R}_0 \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \right) \quad (\text{Eq. 3.27})$$

$${}^{G_i} \dot{\mathbf{H}}_{i|0} = \left( {}^0 \mathbf{R}_i \cdot {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} \cdot {}^i \mathbf{R}_0 \right) \cdot {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} + {}^0 \mathbf{R}_i \left( \left( {}^i \mathbf{R}_0 \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times \left( {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} \left( {}^i \mathbf{R}_0 \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \right) \right) \quad (\text{Eq. 3.28})$$

$${}^{G_i} \dot{\mathbf{H}}_{i|0} = \left( {}^0 \mathbf{R}_i \cdot {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} \cdot {}^i \mathbf{R}_0 \right) \cdot {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} + {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^0 \mathbf{R}_i \cdot {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} \cdot {}^i \mathbf{R}_0 \right) \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \quad (\text{Eq. 3.29})$$

$${}^{G_i} \dot{\mathbf{H}}_{i|0} = {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|0} \cdot {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} + {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|0} \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \quad (\text{Eq. 3.30})$$

em que  ${}^{G_i} \dot{\mathbf{H}}_{i|0} \Big|_{rot}$  representa uma derivada em relação ao referencial que está a rodar.

Assim, da equação (Eq. 3.23) vem

$$\mathbf{N}_{G_i|0} = \frac{d}{dt} \left( {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|0} \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) = {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|0} \cdot {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} + {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|0} \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \quad (\text{Eq. 3.31})$$

Note-se que a equação (Eq. 3.31) pode ser obtida derivando directamente a equação (Eq. 3.23). Assim,

$$\frac{d}{dt} \left( {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|0} \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) = \frac{d}{dt} \left( {}^0 \mathbf{R}_i \cdot {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|i} \cdot {}^i \mathbf{R}_0 \right) \cdot {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|0} + {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|0} \cdot {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \quad (\text{Eq. 3.32})$$

A primeira parcela do segundo membro da equação anterior pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( {}^0\mathbf{R}_i {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} {}^i\mathbf{R}_0 \right) {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= \left( \frac{d}{dt} \left( {}^0\mathbf{R}_i {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} \right) {}^i\mathbf{R}_0 + {}^0\mathbf{R}_i {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} {}^i\dot{\mathbf{R}}_0 \right) {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \\ &= \left( {}^0\dot{\mathbf{R}}_i {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} {}^i\mathbf{R}_0 + {}^0\mathbf{R}_i {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} {}^i\dot{\mathbf{R}}_0 \right) {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \quad (\text{Eq. 3.33}) \\ &= {}^0\dot{\mathbf{R}}_i {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} {}^i\mathbf{R}_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} + {}^0\mathbf{R}_i {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} {}^i\dot{\mathbf{R}}_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \end{aligned}$$

Dado que (Yoshikawa, 1990)

$$\begin{aligned} {}^B\dot{\mathbf{R}}_P {}^P\mathbf{p}_{|P} &= {}^B\mathbf{R}_P \left( {}^B\boldsymbol{\omega}_{P|P} \times {}^P\mathbf{p}_{|P} \right) = {}^B\mathbf{R}_P {}^B\boldsymbol{\omega}_{P|P} \times {}^B\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{p}_{|P} \\ &= {}^B\boldsymbol{\omega}_{P|B} \times {}^P\mathbf{p}_{|B} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.34})$$

vem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( {}^0\mathbf{R}_i {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} {}^i\mathbf{R}_0 \right) {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= {}^0\mathbf{R}_i \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|i} \times \left( {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} {}^i\mathbf{R}_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \right) + \\ &= {}^0\mathbf{R}_i {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} {}^i\mathbf{R}_0 \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \quad (\text{Eq. 3.35}) \\ &= {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|i} {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \end{aligned}$$

### 3.2 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO DE UM ELO DA ESTRUTURA

A velocidade linear de um elo da estrutura do manipulador pode ser determinada de acordo com a seguinte equação

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\dot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^0\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}}_{i|i-1} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} \times \left( {}^0\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|i-1} \right) \\ &= {}^0\dot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\mathbf{v}_{i|0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} \times \left( {}^0\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|i-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.36})$$

que representa a velocidade linear do elo  $i$  (origem do referencial  $i$ ) em relação ao referencial da base (expressa no referencial da base), em função das velocidades

linear e angular do elo  $i-1$  (referencial  $i-1$ ). Notar que  ${}^{i-1}\mathbf{v}_{i|0} = {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}}_{i|0}$  representa a velocidade da origem do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$ , expressa no referencial da base.

A velocidade angular pode ser obtida a partir da seguinte equação

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} + {}^0\mathbf{R}_{i-1} \quad {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|i-1} \\ &= {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.37})$$

que representa a velocidade angular do referencial  $i$  em relação à base (expressa no referencial da base), em função da velocidade angular do referencial  $i-1$  em relação à base (expressa na base) e da velocidade do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$ .

Se a junta  $i$  for prismática, dado que a orientação do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$  se mantém constante, tem-se

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= 0 \\ {}^{i-1}\mathbf{v}_{i|0} &= \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.38})$$

onde  $\mathbf{z}_{i-1}$  é o vector unitário segundo o eixo da junta  $i$ .

As velocidades linear e angular são

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} \\ {}^0\mathbf{v}_{i|0} &= {}^0\mathbf{v}_{i-1|0} + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.39})$$

Se a junta  $i$  for rotativa, devido à rotação do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$ , causada pelo movimento da junta, tem-se ( $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ )

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} &= \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \\ {}^{i-1}\mathbf{v}_{i|0} &= {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.40})$$

As velocidades linear e angular são

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|_0} &= {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|_0} + \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \\ {}^0\mathbf{v}_{i|_0} &= {}^0\mathbf{v}_{i-1|_0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|_0} \times^{i-1}\mathbf{p}_{i|_0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.41})$$

Derivando as equações (Eq. 3.36) e (Eq. 3.37) em ordem ao tempo vem

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|_0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|_0} + {}^0\mathbf{R}_{i-1}^{i-1} \ddot{\mathbf{p}}_{i|i-1} + 2 {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|_0} \times \left( {}^0\mathbf{R}_{i-1}^{i-1} \dot{\mathbf{p}}_{i|i-1} \right) + \\ & {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|_0} \times \left( {}^0\mathbf{R}_{i-1}^{i-1} \mathbf{p}_{i|i-1} \right) + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|_0} \times \left[ {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|_0} \times \left( {}^0\mathbf{R}_{i-1}^{i-1} \mathbf{p}_{i|i-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.42})$$

$${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|_0} = {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|_0} + {}^0\mathbf{R}_{i-1}^{i-1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|i-1} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|_0} \times \left( {}^0\mathbf{R}_{i-1}^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i|i-1} \right) \quad (\text{Eq. 3.43})$$

As expressões (Eq. 3.42) e (Eq. 3.43) assumem distintas formas, consoante se trate de juntas prismáticas ou rotativas.

Se a junta  $i$  for prismática a orientação do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$  é constante, logo a velocidade e a aceleração angulares são nulas,  ${}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|_0} = {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|_0} = 0$ . A velocidade (aceleração) linear do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$  apenas tem componente não nula segundo o eixo  $\mathbf{z}_{i-1}$ , sendo  ${}^{i-1}\dot{\mathbf{p}}_{i|_0} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}$  ( ${}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}}_{i|_0} = \ddot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}$ ). Assim, tem-se

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|_0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|_0} + \ddot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + 2 {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|_0} \times \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + \\ & {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|_0} \times^{i-1}\mathbf{p}_{i|_0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|_0} \times \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|_0} \times^{i-1}\mathbf{p}_{i|_0} \right) \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|_0} &= {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|_0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.44})$$

onde  $\mathbf{z}_{i-1}$  é o vector unitário segundo o eixo da junta  $i$  (é um vector expresso no referencial da base).

Se a junta  $i$  for rotativa a velocidade (aceleração) angular do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$  apenas tem componente não nula segundo o eixo  $\mathbf{z}_{i-1}$  (Eq. 3.40) ( ${}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|_0} = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}$ ). Assim, a aceleração angular vem



$${}^0\dot{\omega}_{i|0} = {}^0\dot{\omega}_{i-1|0} + \ddot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} + {}^0\omega_{i-1|0} \times \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad (\text{Eq. 3.45})$$

Derivando a equação (Eq. 3.40), a aceleração linear do referencial  $i$  em relação ao referencial  $i-1$  é

$${}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} = {}^{i-1}\dot{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^{i-1}\omega_{i|0} \times \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \quad (\text{Eq. 3.46})$$

Substituindo a equação (Eq. 3.46) na equação (Eq. 3.42), a velocidade linear do referencial  $i$  em relação à base será

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} + 2{}^0\omega_{i-1|0} \times {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}}_{i|0} + {}^0\dot{\omega}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + \\ &\quad {}^0\omega_{i-1|0} \times \left( {}^0\omega_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \\ &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^{i-1}\omega_{i|0} \times \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + \\ &\quad 2{}^0\omega_{i-1|0} \times \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + {}^0\dot{\omega}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\omega_{i-1|0} \times \left( {}^0\omega_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.47})$$

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\dot{\omega}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + \\ &\quad \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} + 2{}^0\omega_{i-1|0} \right) \times \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + {}^0\omega_{i-1|0} \times \left( {}^0\omega_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.48})$$

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\dot{\omega}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + \\ &\quad \left( {}^0\omega_{i|0} + {}^0\omega_{i-1|0} \right) \times \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + {}^0\omega_{i-1|0} \times \left( {}^0\omega_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.49})$$

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\dot{\omega}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + \\ &\quad {}^0\omega_{i|0} \times \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + {}^0\omega_{i-1|0} \times \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + {}^0\omega_{i-1|0} \times \left( {}^0\omega_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.50})$$

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\dot{\omega}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + \\ &\quad {}^0\omega_{i|0} \times \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + {}^0\omega_{i-1|0} \times \left( \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + \left( {}^0\omega_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.51})$$

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\dot{\omega}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + \\ &\quad {}^0\omega_{i|0} \times \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + {}^0\omega_{i-1|0} \times \left( {}^0\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.52})$$

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\dot{\omega}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + \\ &\quad {}^0\omega_{i|0} \times \left( {}^{i-1}\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + \left( {}^0\omega_{i|0} - {}^{i-1}\omega_{i|0} \right) \times \left( {}^0\omega_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.53})$$

$${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} = {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) - {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \quad (\text{Eq. 3.54})$$

Usando as propriedades do produto vectorial

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.55})$$

vem

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + \\ & {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) - \\ & {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) - {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \left( {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + \\ & {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \left( {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.56})$$

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + \\ & {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.57})$$

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + \\ & {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + \left( \left( {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.58})$$

$${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} = {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \quad (\text{Eq. 3.59})$$

### 3.2.1 EQUAÇÕES DE NEWTON-EULER NO REFERENCIAL DA BASE

Definam-se os seguintes parâmetros e vectores, todos expressos no referencial da base:

- $(\mathbf{x}_{G_i}, \mathbf{y}_{G_i}, \mathbf{z}_{G_i})$  – referencial com origem no centro de massa do elo  $i$ ,  $G_i$ ;
- $m_i$  – massa do elo  $i$ ;
- ${}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0}$  – matriz de inércia do elo  $i$  em relação ao seu centro de massa;

- ${}^0\mathbf{p}_{G_i|0}$  – posição do centro de massa do elo  $i$  em relação ao referencial da base;
- ${}^i\mathbf{p}_{G_i|0}$  – posição do centro de massa do elo  $i$  em relação ao referencial  $i$ ;
- $\mathbf{F}_{G_i|0}$  – força total aplicada no centro de massa do elo  $i$ ;
- $\mathbf{N}_{G_i|0}$  – momento total aplicado no centro de massa do elo  $i$ ;
- $\mathbf{f}_{i|0}$  – força aplicada no elo  $i$  (origem do referencial  $i-1$ ) pelo elo  $i-1$ ;
- $\mathbf{n}_{i|0}$  – momento aplicado no elo  $i$  (origem do referencial  $i-1$ ) pelo elo  $i-1$ ;

A aceleração linear do centro de massa do elo  $i$  é necessária para mais tarde, pelo que poderá ser determinada desde já.

Da Figura 3.4, a posição,  ${}^0\mathbf{p}_{G_i|0}$ , a velocidade,  ${}^0\dot{\mathbf{p}}_{G_i|0}$ , e a aceleração,  ${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_i|0}$ , do centro de massa do elo  $i$  em relação ao referencial da base são, respectivamente,

$${}^0\mathbf{p}_{G_i|0} = {}^0\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{p}_{G_i|i} \quad (\text{Eq. 3.60})$$

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_{G_i|0} = {}^0\dot{\mathbf{p}}_{i|0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times ({}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{p}_{G_i|i}) \quad (\text{Eq. 3.61})$$

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_i|0} &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \times ({}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{p}_{G_i|i}) + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times ({}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times ({}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{p}_{G_i|i})) \\ &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \times {}^i\mathbf{p}_{G_i|0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times ({}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times {}^i\mathbf{p}_{G_i|0}) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.62})$$

Note-se que o referencial  $G_i$  está fixo relativamente ao referencial  $i$ , ambos fixos ao elo  $i$ . As velocidades angulares dos referenciais  $G_i$  e  $i$  em relação à base são iguais:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_{G_i|0} = {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \quad (\text{Eq. 3.63})$$

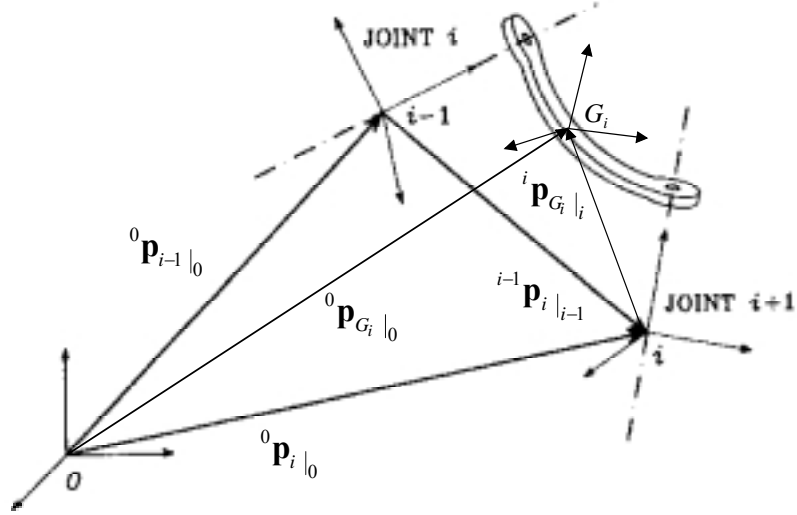


Figura 3.4 Referenciais associados ao elo  $i$ .

Os vectores de força e de momento totais aplicados no centro de massa elo  $i$  serão, respectivamente,

$$\mathbf{F}_{G_i|_0} = \frac{d}{dt} (m_i {}^0 \dot{\mathbf{p}}_{G_i|_0}) = m_i {}^0 \ddot{\mathbf{p}}_{G_i|_0} \quad (\text{Eq. 3.64})$$

$$\mathbf{N}_{G_i|_0} = \frac{d}{dt} ({}^{G_i} \mathbf{I}_{i|_0} {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|_0}) = {}^{G_i} \mathbf{I}_{i|_0} {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|_0} + {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|_0} \times ({}^{G_i} \mathbf{I}_{i|_0} {}^0 \boldsymbol{\omega}_{i|_0}) \quad (\text{Eq. 3.65})$$

Considere-se que  $\mathbf{f}_{i|_0}$  é a força e  $\mathbf{n}_{i|_0}$  é o momento exercidos pelo elo  $i-1$  no elo  $i$ , na origem do referencial  $i-1$ .

Assim sendo,

$$\mathbf{F}_{G_i|_0} = \mathbf{f}_{i|_0} - \mathbf{f}_{i+1|_0} \quad (\text{Eq. 3.66})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{G_i|_0} &= \mathbf{n}_{i|_0} - \mathbf{n}_{i+1|_0} + ({}^0 \mathbf{p}_{i-1|_0} - {}^0 \mathbf{p}_{G_i|_0}) \times \mathbf{f}_{i|_0} - ({}^0 \mathbf{p}_{i|_0} - {}^0 \mathbf{p}_{G_i|_0}) \times \mathbf{f}_{i+1|_0} \\ &= \mathbf{n}_{i|_0} - \mathbf{n}_{i+1|_0} + ({}^0 \mathbf{p}_{i-1|_0} - {}^0 \mathbf{p}_{G_i|_0}) \times \mathbf{F}_{G_i|_0} - {}^{i-1} \mathbf{p}_{i|_0} \times \mathbf{f}_{i+1|_0} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.67})$$

Note-se que  $\mathbf{f}_{i+1|_0}$  é a força exercida pelo elo  $i$  no elo  $i+1$ , na origem do referencial  $i$ , ou seja, a força que o elo  $i+1$  exerce no elo  $i$  é simétrica da anterior.

Usando a relação

$${}^0\mathbf{p}_{G_i|0} - {}^0\mathbf{p}_{i-1|0} = {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^i\mathbf{p}_{G_i|0} \quad (\text{Eq. 3.68})$$

vem

$$\mathbf{f}_{i|0} = \mathbf{F}_{G_i|0} + \mathbf{f}_{i+1|0} = m_i {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_i|0} + \mathbf{f}_{i+1|0} \quad (\text{Eq. 3.69})$$

$$\mathbf{n}_{i|0} = \mathbf{n}_{i+1|0} + {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \times \mathbf{f}_{i+1|0} + ({}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^i\mathbf{p}_{G_i|0}) \times \mathbf{F}_{G_i|0} + \mathbf{N}_{G_i|0} \quad (\text{Eq. 3.70})$$

Estas equações são recursivas, podendo ser usadas para determinar as forças e os momentos,  $\mathbf{f}_{i|0}$  e  $\mathbf{n}_{i|0}$ , nos elos do manipulador ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

É de notar que para um manipulador com  $n$  elos,  $\mathbf{f}_{n+1|0}$  e  $\mathbf{n}_{n+1|0}$ , são, respectivamente, a força e o momento aplicados pelo órgão terminal do manipulador no ambiente. Por outro lado, se a base do manipulador (elo 0) estiver fixa, então  ${}^0\boldsymbol{\omega}_{0|0} = {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{0|0} = {}^0\dot{\mathbf{p}}_{0|0} = 0$  e  ${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{0|0} = [g_x \quad g_y \quad g_z]^T$ .

Para uma junta rotativa o binário aplicado na junta será a projecção do vector  $\mathbf{n}_{i|0}$  em  $\mathbf{z}_{i-1}$  (possivelmente haverá que somar ainda o binário de atrito na junta). Para uma junta prismática a força aplicada na junta será a projecção do vector  $\mathbf{f}_{i|0}$  em  $\mathbf{z}_{i-1}$  (possivelmente também haverá que somar a força de atrito na junta) (Figura 3.5).

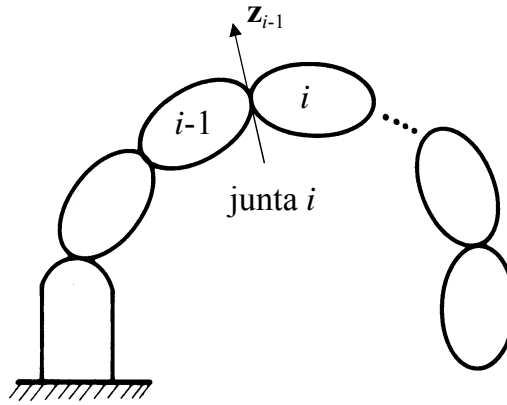


Figura 3.5 Junta i.

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{n}_{i|0}^T \cdot \mathbf{z}_{i-1}, & \text{se junta R} \\ \mathbf{f}_{i|0}^T \cdot \mathbf{z}_{i-1}, & \text{se junta P} \end{cases} \quad (\text{Eq. 3.71})$$

O método de Newton-Euler é recursivo. As velocidades e as acelerações dos elos são calculadas começando no elo da base, em direcção ao órgão terminal (propagação para a frente – *forward equations*). Depois de calculadas todas as velocidades e acelerações, as forças e os momentos aplicados são calculados começando no órgão terminal, caminhando em direcção à base (propagação para trás – *backward equations*).

Algoritmo 3.1 (Newton-Euler recursivo)

### I - Propagação de velocidades e de acelerações (*forward equations*)

- D1. Para  $i = 1, 2, \dots, n$  repetir os passos D2 a D5.
- D2.  ${}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} = \begin{cases} {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} + \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}, & \text{se junta R} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0}, & \text{se junta P} \end{cases}$
- D3.  ${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} = \begin{cases} {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|0} + \ddot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} \times \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}, & \text{se junta R} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|0}, & \text{se junta P} \end{cases}$

- $$D4. \quad {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} = \begin{cases} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \times^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) & \text{se junta R} \\ {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} + \ddot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + 2 {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \times^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) & \text{se junta P} \end{cases}$$
- $$D5. \quad {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_i|0} = {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \times^i \mathbf{p}_{G_i|0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times^i \mathbf{p}_{G_i|0} \right)$$

## II - Propagação de forças e momentos (*backward equations*)

- D6. Para  $i = n, n-1, \dots, 1$  repetir os passos D7 a D11.
- $$D7. \quad \mathbf{F}_{G_i|0} = m_i {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_i|0}$$
- $$D8. \quad \mathbf{N}_{G_i|0} = {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0} {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \times \left( {}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0} {}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right)$$
- $$D9. \quad \mathbf{f}_{i|0} = \mathbf{F}_{G_i|0} + \mathbf{f}_{i+1|0}$$
- $$D10. \quad \mathbf{n}_{i|0} = \mathbf{n}_{i+1|0} + {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \times \mathbf{f}_{i+1|0} + \left( {}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^i\mathbf{p}_{G_i|0} \right) \times \mathbf{F}_{G_i|0} + \mathbf{N}_{G_i|0}$$
- $$D11. \quad \tau_i = \begin{cases} \mathbf{n}_{i|0}^T \cdot \mathbf{z}_{i-1}, & \text{se junta R} \\ \mathbf{f}_{i|0}^T \cdot \mathbf{z}_{i-1}, & \text{se junta P} \end{cases}$$

### 3.2.2 EQUAÇÕES DE NEWTON-EULER NOS REFERENCIAIS DOS PRÓPRIOS ELOS

Se todos os vectores e parâmetros associados ao elo  $i$  estiverem expressos no referencial  $i$ , o peso computacional envolvido na determinação do modelo dinâmico de um manipulador série com  $n$  gdl baixa consideravelmente, sendo que o tempo de cálculo passa a ser proporcional a  $n$ .

*Algoritmo 3.2 (Newton-Euler recursivo nos referenciais dos próprios elos)*

#### I - Propagação de velocidades e de acelerações (*forward equations*)

- D1. Para  $i = 1, 2, \dots, n$  repetir os passos D2 a D5.

- D2.

$${}^i\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1}\left({}^{i-1}\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0} + \dot{\boldsymbol{\theta}}_i\mathbf{z}_0\right), & \text{se junta R, } \mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}\left({}^{i-1}\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0}\right), & \text{se junta P} \end{cases}$$

- D3.

$${}^i\mathbf{R}_0{}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1}\left({}^{i-1}\mathbf{R}_0{}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|0} + \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i\mathbf{z}_0 + \left({}^{i-1}\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1|0}\right) \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_i\mathbf{z}_0\right), & \text{se junta R} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}\left({}^{i-1}\mathbf{R}_0{}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1|0}\right), & \text{se junta P} \end{cases}$$

- D4.

$${}^i\mathbf{R}_0{}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} = \begin{cases} \left( \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \right) \times \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times \left( \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \right) + {}^i\mathbf{R}_{i-1}\left( {}^{i-1}\mathbf{R}_0{}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} \right), & \text{se junta R} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}\left( \ddot{d}_i\mathbf{z}_0 + {}^{i-1}\mathbf{R}_0{}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i-1|0} \right) + \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \right) \times \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) + 2\left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times \left( {}^i\mathbf{R}_{i-1}\dot{d}_i\mathbf{z}_0 \right) + \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times \left( \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \right), & \text{se junta P} \end{cases}$$

- D5. 
$${}^i\mathbf{R}_0{}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_i|0} = {}^i\mathbf{R}_0{}^0\ddot{\mathbf{p}}_{i|0} + \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \right) \times \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^i\mathbf{p}_{G_i|0} \right) + \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times \left( \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^i\mathbf{p}_{G_i|0} \right) \right)$$

## II - Propagação de forças e momentos (*backward equations*)

- D6. Para  $i = n, n-1, \dots, 1$  repetir os passos D7 a D11.

- D7. 
$${}^i\mathbf{R}_0\mathbf{F}_{G_i|0} = m_i {}^i\mathbf{R}_0{}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_i|0}$$

- D8. 
$${}^i\mathbf{R}_0\mathbf{N}_{G_i|0} = \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0}{}^0\mathbf{R}_i \right) \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i|0} \right) + \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \times \left( \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^{G_i}\mathbf{I}_{i|0}{}^0\mathbf{R}_i \right) \left( {}^0\mathbf{R}_i{}^0\boldsymbol{\omega}_{i|0} \right) \right)$$

- D9. 
$${}^i\mathbf{R}_0\mathbf{f}_{i|0} = {}^i\mathbf{R}_{i+1}\left( {}^{i+1}\mathbf{R}_0\mathbf{f}_{i+1|0} \right) + {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{F}_{G_i|0}$$

- D10. 
$${}^i\mathbf{R}_0\mathbf{n}_{i|0} = {}^i\mathbf{R}_{i+1}\left( {}^{i+1}\mathbf{R}_0\mathbf{n}_{i+1|0} + \left( {}^{i+1}\mathbf{R}_0{}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} \right) \times \left( {}^{i+1}\mathbf{R}_0\mathbf{f}_{i+1|0} \right) \right) + \left( {}^i\mathbf{R}_0{}^{i-1}\mathbf{p}_{i|0} + {}^i\mathbf{R}_0{}^i\mathbf{p}_{G_i|0} \right) \times \left( {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{F}_{G_i|0} \right) + {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{N}_{G_i|0}$$



- $$D11. \tau_i = \begin{cases} \left( {}^i \mathbf{R}_0 \mathbf{n}_{i|0} \right)^T \cdot \left( {}^i \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0 \right), & \text{se junta R} \\ \left( {}^i \mathbf{R}_0 \mathbf{f}_{i|0} \right)^T \cdot \left( {}^i \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0 \right), & \text{se junta P} \end{cases}$$

### 3.2.3 MODELO DINÂMICO DE UM MANIPULADOR CARTESIANO

Considere-se o manipulador cartesiano da Figura 3.6. Os elos têm massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , sendo  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$  as distâncias medidas desde as origens dos referenciais 1 2 e 3 aos centros de massa dos elos.

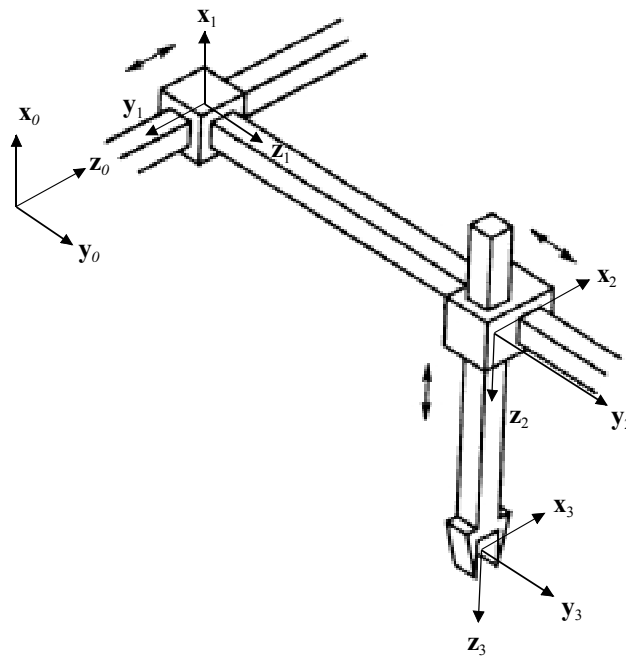


Figura 3.6 Manipulador cartesiano com 3 gdl.

Tabela 3.1 Parâmetros de D-H do manipulador cartesiano.

Junta $i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1	0	-90°	0	$d_1$
2	-90°	90°	$-a_2$	$d_2$
3	0	0	0	$d_3$

Dado que todas as juntas são prismáticas, todas as velocidades e acelerações angulares serão nulas.

Considere-se que a base está fixa ( ${}^0\dot{\mathbf{p}}_{0|0} = 0$ ) e que o manipulador não exerce qualquer força no ambiente ( ${}^0\mathbf{f}_{4|0} = 0$ ). Considere-se ainda que se faz sentir o efeito da gravidade ( ${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{0|0} = \mathbf{g} = [-g \ 0 \ 0]^T$ ).

Os vectores posição que interessa considerar para mais tarde são

$${}^0\mathbf{p}_{1|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{p}_{2|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ -a_2 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{p}_{3|0} = \begin{bmatrix} -d_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.72})$$

$${}^1\mathbf{p}_{G_1|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{p}_{G_2|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad {}^3\mathbf{p}_{G_3|0} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.73})$$

### 3.2.3.1 PROPAGAÇÃO DAS VELOCIDADES E DAS ACELERAÇÕES

$${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{1|0} = \mathbf{z}_0\ddot{d}_1 + {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{0|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.74})$$

$${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{2|0} = \mathbf{z}_1\ddot{d}_2 + {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{1|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{d}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.75})$$

$${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{3|0} = \mathbf{z}_2\ddot{d}_3 + {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{2|0} = \begin{bmatrix} -\ddot{d}_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{d}_3 - g \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.76})$$

$${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_1|0} = {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{1|0} \quad (\text{Eq. 3.77})$$

$${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_2|0} = {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{2|0} \quad (\text{Eq. 3.78})$$

$${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_3|0} = {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{3|0} \quad (\text{Eq. 3.79})$$

### 3.2.3.2 PROPAGAÇÃO DE FORÇAS E MOMENTOS

$$\mathbf{F}_{G_3|0} = m_3 {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_3|0} = m_3 \begin{bmatrix} -\ddot{d}_3 - g \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.80})$$

$$\mathbf{F}_{G_2|0} = m_2 {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_2|0} = m_2 \begin{bmatrix} -g \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.81})$$

$$\mathbf{F}_{G_1|0} = m_1 {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_1|0} = m_1 \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.82})$$

$$\mathbf{N}_{G_3|0} = \mathbf{N}_{G_2|0} = \mathbf{N}_{G_1|0} = \mathbf{0} \quad (\text{Eq. 3.83})$$

$$\mathbf{f}_{3|0} = \mathbf{F}_{G_3|0} = m_3 \begin{bmatrix} -\ddot{d}_3 - g \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.84})$$

$$\mathbf{f}_{2|0} = \mathbf{F}_{G_2|0} + \mathbf{f}_{3|0} = m_2 \begin{bmatrix} -g \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} -\ddot{d}_3 - g \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.85})$$

$$\mathbf{f}_{1|0} = \mathbf{F}_{G_1|0} + \mathbf{f}_{2|0} = m_1 \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} -g \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} -\ddot{d}_3 - g \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.86})$$

$$\mathbf{n}_{3|0} = \left\{ \begin{bmatrix} -d_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \times \mathbf{F}_{G_3|0} \quad (\text{Eq. 3.87})$$

$$\mathbf{n}_{2|0} = \mathbf{n}_{3|0} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ -a_2 \end{bmatrix} \times \mathbf{f}_{3|0} + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ -a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} \right\} \times \mathbf{F}_{G_{2|0}} \quad (\text{Eq. 3.88})$$

$$\mathbf{n}_{1|0} = \mathbf{n}_{2|0} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \times \mathbf{f}_{2|0} + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \times \mathbf{F}_{G_{1|0}} \quad (\text{Eq. 3.89})$$

Os momentos são todos absorvidos pela estrutura, pelo que têm interesse apenas do ponto de vista do dimensionamento (projecto estrutural) dessa mesma estrutura. Assim, as forças nas juntas são

$$\tau_3 = \mathbf{f}_{3|0}^T \cdot \mathbf{z}_2 = \mathbf{f}_{3|0}^T \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = m_3(\ddot{d}_3 + g) \quad (\text{Eq. 3.90})$$

$$\tau_2 = \mathbf{f}_{2|0}^T \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{f}_{2|0}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (m_2 + m_3)\ddot{d}_2 \quad (\text{Eq. 3.91})$$

$$\tau_1 = \mathbf{f}_{1|0}^T \cdot \mathbf{z}_0 = \mathbf{f}_{1|0}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{d}_1 \quad (\text{Eq. 3.92})$$

### 3.2.4 MODELO DINÂMICO DE UM MANIPULADOR 2R PLANAR

Considere-se o manipulador planar com dois gdl da Figura 3.7 (Fu *et al.*, 1987).

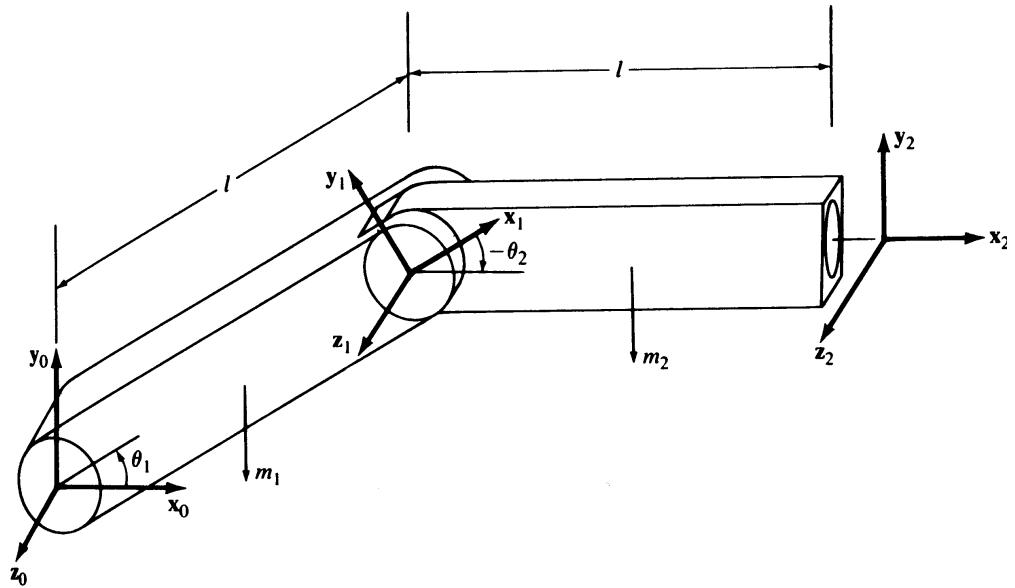


Figura 3.7 Manipulador planar com dois gdl.

Os referenciais, estabelecidos de acordo com o algoritmo de D-H, bem como os parâmetros geométricos de interesse estão assinalados na figura.

As matrizes de rotação são

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.93})$$

$${}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.94})$$

$${}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.95})$$

Assumam-se os seguintes valores

$${}^0\boldsymbol{\omega}_{0|0} = {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{0|0} = 0 \quad (\text{Eq. 3.96})$$

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_{0|0} = 0 \quad (\text{Eq. 3.97})$$

$${}^0\ddot{\mathbf{p}}_{0|0} = [0 \quad g \quad 0]^T \quad (\text{Eq. 3.98})$$

### 3.2.4.1 PROPAGAÇÃO DAS VELOCIDADES E DAS ACELERAÇÕES

#### 3.2.4.1.1 Velocidade angular

Para  $i = 1$  tem-se:

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_{1|0} &= {}^1\mathbf{R}_0 \left( {}^0\boldsymbol{\omega}_{0|0} + \mathbf{z}_0 \dot{\theta}_1 \right) \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.99})$$

Para  $i = 2$  tem-se:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{R}_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_{2|0} &= {}^2\mathbf{R}_1 \left( {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_{1|0} + \mathbf{z}_0 \dot{\theta}_2 \right) \\ &= \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.100})$$

#### 3.2.4.1.2 Aceleração angular

Para  $i = 1$  tem-se:

$${}^1\mathbf{R}_0 {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{1|0} = {}^1\mathbf{R}_0 \left( {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{0|0} + \mathbf{z}_0 \ddot{\theta}_1 + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0|0} \times \mathbf{z}_0 \dot{\theta}_1 \right) = [0 \quad 0 \quad 1]^T \ddot{\theta}_1 \quad (\text{Eq. 3.101})$$

Para  $i = 2$  tem-se:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{R}_0 {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{2|0} &= {}^2\mathbf{R}_1 \left( {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{1|0} + \mathbf{z}_0 \ddot{\theta}_2 + \left( {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_{1|0} \right) \times \mathbf{z}_0 \dot{\theta}_2 \right) \\ &= [0 \quad 0 \quad 1]^T (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.102})$$

### 3.2.4.1.3 Aceleração linear

Para  $i = 1$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{R}_0^0 \ddot{\mathbf{p}}_{1|0} &= ({}^1\mathbf{R}_0^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{1|0}) \times ({}^1\mathbf{R}_0^0 \mathbf{p}_{1|0}) + \\
 &\quad ({}^1\mathbf{R}_0^0 \boldsymbol{\omega}_{1|0}) \times \left[ ({}^1\mathbf{R}_0^0 \boldsymbol{\omega}_{1|0}) \times ({}^1\mathbf{R}_0^0 \mathbf{p}_{1|0}) \right] + {}^1\mathbf{R}_0^0 \ddot{\mathbf{p}}_{0|0} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} gS_1 \\ gC_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -l\dot{\theta}_1^2 + gS_1 \\ l\ddot{\theta}_1 + gC_1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{Eq. 3.103}$$

Para  $i = 2$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{R}_0^0 \ddot{\mathbf{p}}_{2|0} &= ({}^2\mathbf{R}_0^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{2|0}) \times ({}^2\mathbf{R}_0^0 \mathbf{p}_{2|0}) + \\
 &\quad ({}^2\mathbf{R}_0^0 \boldsymbol{\omega}_{2|0}) \times \left[ ({}^2\mathbf{R}_0^0 \boldsymbol{\omega}_{2|0}) \times ({}^2\mathbf{R}_0^0 \mathbf{p}_{2|0}) \right] + {}^2\mathbf{R}_1 ({}^1\mathbf{R}_0^0 \ddot{\mathbf{p}}_{1|0}) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \\
 &\quad \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l\dot{\theta}_1^2 + gS_1 \\ l\ddot{\theta}_1 + gC_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} l(S_2\ddot{\theta}_1 - C_2\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + gS_{12} \\ l(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + C_2\dot{\theta}_1^2 + S_2\dot{\theta}_1^2) + gC_{12} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{Eq. 3.104}$$

### 3.2.4.1.4 Aceleração linear do centro de massa

Para  $i = 1$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{R}_0^0 \ddot{\mathbf{p}}_{G_1|0} &= ({}^1\mathbf{R}_0^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{1|0}) \times ({}^1\mathbf{R}_0^0 \mathbf{p}_{G_1|0}) + \\
 &\quad ({}^1\mathbf{R}_0^0 \boldsymbol{\omega}_{1|0}) \times \left[ ({}^1\mathbf{R}_0^0 \boldsymbol{\omega}_{1|0}) \times ({}^1\mathbf{R}_0^0 \mathbf{p}_{G_1|0}) \right] + {}^1\mathbf{R}_0^0 \ddot{\mathbf{p}}_{1|0}
 \end{aligned} \tag{Eq. 3.105}$$

onde,

$${}^1\mathbf{p}_{G_1|0} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}C_1 \\ -\frac{l}{2}S_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.106})$$

$${}^1\mathbf{R}_0 {}^1\mathbf{p}_{G_1|0} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}C_1 \\ -\frac{l}{2}S_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.107})$$

Assim,

$${}^1\mathbf{R}_0 {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_1|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \times \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} +$$

$$\begin{bmatrix} -l\dot{\theta}_1^2 + gS_1 \\ l\ddot{\theta}_1 + gC_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}\dot{\theta}_1^2 + gS_1 \\ \frac{l}{2}\ddot{\theta}_1 + gC_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.108})$$

Para  $i = 2$  tem-se:

$${}^2\mathbf{R}_0 {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_2|0} = ({}^2\mathbf{R}_0 {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{2|0}) \times ({}^2\mathbf{R}_0 {}^2\mathbf{p}_{G_2|0}) +$$

$$({}^2\mathbf{R}_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_{2|0}) \times \left[ ({}^2\mathbf{R}_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_{2|0}) \times ({}^2\mathbf{R}_0 {}^2\mathbf{p}_{G_2|0}) \right] + {}^2\mathbf{R}_0 {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{2|0} \quad (\text{Eq. 3.109})$$

onde,



$${}^2\mathbf{p}_{G_2|0} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}C_{12} \\ -\frac{l}{2}S_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.110})$$

$${}^2\mathbf{R}_0 {}^2\mathbf{p}_{G_2|0} = \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 \\ -S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}C_{12} \\ -\frac{l}{2}S_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.111})$$

Assim,

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{R}_0 {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_2|0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \\ &\begin{bmatrix} l(S_2\ddot{\theta}_1 - C_2\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + gS_{12} \\ l(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1^2) + gC_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.112}) \\ &= \begin{bmatrix} l(S_2\ddot{\theta}_1 - C_2\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + gS_{12} \\ l(C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2) + gC_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 3.2.4.2 PROPAGAÇÃO DE FORÇAS E MOMENTOS

Assuma-se que  $\mathbf{f}_{3|0} = 0$  e  $\mathbf{n}_{3|0} = 0$ .

#### 3.2.4.2.1 Forças

Para  $i = 2$  tem-se:

$$\begin{aligned}
{}^2\mathbf{R}_0\mathbf{f}_{2|0} &= {}^2\mathbf{R}_3({}^3\mathbf{R}_0\mathbf{f}_{3|0}) + ({}^2\mathbf{R}_0\mathbf{F}_{G_2|0}) = {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{F}_{2|0} = m_2 {}^2\mathbf{R}_0 {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{G_2|0} \\
&= \begin{bmatrix} m_2 l (S_2 \ddot{\theta}_1 - C_2 \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + gm_2 S_{12} \\ m_2 l (C_2 \ddot{\theta}_1 + S_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} S_2 \ddot{\theta}_2) + gm_2 C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (Eq. 3.113)
\end{aligned}$$

Para  $i = 1$  tem-se:

$$\begin{aligned}
{}^1\mathbf{R}_0\mathbf{f}_{1|0} &= {}^1\mathbf{R}_2({}^2\mathbf{R}_0\mathbf{f}_{2|0}) + {}^1\mathbf{R}_0\mathbf{F}_{G_1|0} \\
&= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \\
&\quad \begin{bmatrix} m_2 l (S_2 \ddot{\theta}_1 - C_2 \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + gm_2 S_{12} \\ m_2 l (C_2 \ddot{\theta}_1 + S_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_2) + gm_2 C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + m_1 {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\ddot{\mathbf{p}}_{1|0} \\
&= \begin{bmatrix} m_2 l [-\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} C_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} S_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)] - \\ gm_2 (C_{12} S_2 - C_2 S_{12}) - \frac{1}{2} m_1 l \dot{\theta}_1^2 + gm_1 S_1 \\ m_2 l [\ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2} S_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} C_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)] + \\ gm_2 C_1 + \frac{1}{2} m_1 l \ddot{\theta}_1 + gm_1 C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (Eq. 3.114)
\end{aligned}$$

### 3.2.4.2.2 Momentos

Para  $i = 2$  tem-se:

$${}^2\mathbf{R}_0\mathbf{n}_{2|0} = ({}^2\mathbf{R}_0 {}^1\mathbf{p}_{2|0} + {}^2\mathbf{R}_0 {}^2\mathbf{p}_{G_2|0}) \times ({}^2\mathbf{R}_0\mathbf{F}_{G_2|0}) + {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{N}_{G_2|0} \quad (Eq. 3.115)$$

onde,

$${}^1\mathbf{p}_{2|0} = \begin{bmatrix} lC_{12} \\ lS_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.116})$$

$${}^2\mathbf{R}_0 {}^1\mathbf{p}_{2|0} = \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 \\ -S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} lC_{12} \\ lS_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.117})$$

Assim,

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{R}_0 \mathbf{n}_{2|0} &= \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_2 l (S_2 \ddot{\theta}_1 - C_2 \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + gm_2 S_{12} \\ m_2 l (C_2 \ddot{\theta}_1 + S_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_2) + gm_2 C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_2 l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.118}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 (C_2 \ddot{\theta}_1 + S_2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 gl C_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para  $i = 1$  tem-se:

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{R}_0 \mathbf{n}_{1|0} &= {}^1\mathbf{R}_2 ({}^2\mathbf{R}_0 \mathbf{n}_{2|0} + ({}^2\mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{p}_{1|0}) \times ({}^2\mathbf{R}_0 \mathbf{f}_{2|0})) + \\ & ({}^1\mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{p}_{1|0} + {}^1\mathbf{R}_0 {}^1\mathbf{p}_{G_1|0}) \times ({}^1\mathbf{R}_0 \mathbf{F}_{G_1|0}) + {}^1\mathbf{R}_0 \mathbf{N}_{G_1|0} \quad (\text{Eq. 3.119}) \end{aligned}$$

onde,

$${}^0\mathbf{p}_{1|0} = \begin{bmatrix} lC_1 \\ lS_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.120})$$

$${}^2\mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{p}_{1|0} = \begin{bmatrix} lC_2 \\ -lS_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.121})$$

$${}^1\mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{p}_{1|0} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3.122})$$

Assim,

$${}^1\mathbf{R}_0 \mathbf{n}_{1|0} = {}^1\mathbf{R}_2 ({}^2\mathbf{R}_0 \mathbf{n}_{2|0}) + {}^1\mathbf{R}_2 \left( ({}^2\mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{p}_{1|0}) \times ({}^2\mathbf{R}_0 \mathbf{f}_{2|0}) \right) + \begin{bmatrix} l \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \times ({}^1\mathbf{R}_0 \mathbf{F}_{G1|0}) + {}^1\mathbf{R}_0 \mathbf{N}_{G1|0} \quad (\text{Eq. 3.123})$$

### 3.2.4.2.3 Forças aplicadas nas juntas

Para  $i = 2$  tem-se:

$$\tau_2 = ({}^2\mathbf{R}_0 \mathbf{n}_{2|0})^T ({}^2\mathbf{R}_1 \mathbf{z}_0) = \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 C_2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 g l C_{12} + \frac{1}{2} m_2 l^2 S_2 \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{Eq. 3.124})$$

Para  $i = 1$  tem-se:

$$\tau_1 = ({}^1\mathbf{R}_0 \mathbf{n}_{1|0})^T ({}^1\mathbf{R}_1 \mathbf{z}_0) = \frac{1}{3} m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{4}{3} m_2 l^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l^2 C_2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 l^2 C_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l^2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_2 l^2 S_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_1 g l C_1 + \frac{1}{2} m_2 g l C_{12} + m_2 g l C_1 \quad (\text{Eq. 3.125})$$

Querendo representar o modelo dinâmico numa forma compacta, explicitando as matrizes de inércia e de coriolis e centrípetos e o vector de termos gravíticos, é necessário rescrever as equações (Eq. 3.124) e (Eq. 3.125).

Assim, os coeficientes de termos onde surgem derivadas temporais de segunda ordem das coordenadas generalizadas, pertencem à matriz de inércia; os coeficientes de termos onde surgem produtos de derivadas temporais de primeira ordem pertencem à matriz de Coriolis e centrípetos; os termos independentes da velocidade pertencem ao vector de termos gravíticos.

## 4 REFERÊNCIAS

- Asada, H., Slotine, J., 1986, “*Robot Analysis and Control*”, John Wiley and Sons, New York;
- Coiffet, P., 1982, “*Les Robôs, Tome 1: Modélisation et commande*”, Hermes, Paris;
- Fu, K. S., Gonzalez, R. C., Lee, C. S. G., 1987, “*Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*”, McGraw-Hill International Editions;
- Klafter, R., Chmielewski, T., Negin, M., 1989, “*Robotic Engineering, an Integrated Approach*”, Prentice-Hall International Editions, London;
- Mendes Lopes, A., 2000, “*Um Dispositivo Robótico para Controlo de Força-Impedância de Manipuladores Industriais*”, Tese de Doutoramento, FEUP, Porto, Portugal;
- Mendes Lopes, A., 1995, “*Análise Cinemática e Planeamento de Trajectórias para um Robô Industrial*”, Tese de Mestrado, FEUP, Porto, Portugal;
- Nakamura, Y., Hanafusa, H., 1986, “*Inverse Kinematic Solutions With Singularity Robustness for Robot Manipulator Control*”, Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, September, vol. 108;
- Paul, R., 1982, “*Robô Manipulators: Mathematics, Programming, and Control*”, The MIT Press series in artificial intelligence”;
- Sciavicco, L., Siciliano, B., 1996, “*Modeling and Control of Robot Manipulators*”, McGraw-Hill International Editions;
- Torby, B., 1984, “*Advanced Dynamics for Engineers*”, CBS College Publishing, New York;
- Vukobratovic, M., Kircanski, M., 1986, “*Scientific Fundamentals of Robotics 3: Kinematics and Trajectory Synthesis of Manipulation Robôs*”, Springer-Verlag;
- Yoshikawa, T., 1990, “*Foundations of Robotics, Analysis and Control*”, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts;