

4. SINAL E CONDICIONAMENTO DE SINAL

Sumário

4. SINAL E CONDICIONAMENTO DE SINAL

4.1 CARACTERÍSTICAS DOS SINAIS

4.1.1 Período e frequência

4.1.2 Valor médio, valor eficaz e valor máximo

4.2 FILTRAGEM

4.2.1 Circuito RC passa-alto

4.2.2 Circuito RC passa-baixo

4.3 ATENUAÇÃO

4.3.1 Atenuador RC e sua compensação

4.3.2 Pontas de prova atenuadoras

4.1 Características dos sinais

4.1.1 Período e frequência

O período T de um sinal $v(t)$ deve satisfazer a condição

$$v(t) = v(t \pm kT) \quad \text{com } k = 1, 2, \dots$$

A frequência f (em Hz) e a frequência angular ω (em rads^{-1}) de um sinal periódico são $f = \frac{1}{T}$ e $\omega = \frac{2\pi}{T}$

4.1.2 Valor médio e valor eficaz

O valor médio $V_0 = \langle v(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$

Valor eficaz de $v(t)$

$$V_{ef}^2 = \langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt$$

Exemplos de valor médio e valor eficaz de alguns sinais periódicos (período T).

Tipo de sinal	Valor médio	Valor eficaz
Sinusoidal $v(t) = V_p \text{ sen } \omega t$	0	$\frac{V_p}{\sqrt{2}}$
Sinusoidal com rectificação de meia onda $v(t) = 0$ para $0 < t < T/2$ $= V_p \text{ sen } \omega t$, para $T/2 < t < T$	$\frac{V_p}{\pi}$	$\frac{V_p}{2}$
Rectangular $v(t) = V_p$ $0 < t < T_p$ $= 0$ $T_p < t < T$; d (ciclo activo) = $\frac{T_p}{T}$	$V_p d$	$V_p \sqrt{d}$

Factor de crista FC , que tem a expressão

$$FC = \frac{V_p}{V_{ef}}$$

O quociente, K , entre o valor eficaz e o valor médio é

$$K = \frac{rms}{dam}$$

Relação entre alguns parâmetros de formas de onda típicas.

Forma de onda ($V_p = 1,0$ volt)	rms	dam^*	$K = \frac{rms}{dam}$	Factor de crista - FC
Sinusoidal	$\frac{V_p}{\sqrt{2}} = 0,707$ volt	$\frac{2V_p}{\pi} = 0,637$ volt	$\frac{0,707}{0,637} = 1,11$	1,414
Onda quadrada simétrica	$\frac{V_p}{1} = 1,00$ volt	$\frac{V_p}{1} = 1,00$ volt	$\frac{1,00}{1,00} = 1,00$	1,00
Triangular	$\frac{V_p}{\sqrt{3}} = 0,577$ volt	$\frac{V_p}{2} = 0,500$ volt	$\frac{0,580}{0,500} = 1,155$	1,73

* dam – desvio absoluto médio (valor médio do sinal após rectificação de onda completa)

EXEMPLO

Calcule o factor de crista FC dos sinais rectangulares $v_1(t)$ e $v_2(t)$ esboçados na figura. O sinal $v_2(t)$ tem valor médio nulo. Os dois sinais têm valor máximo V_p e período T . Para os dois casos, esboce graficamente FC em função do ciclo activo d , $FC(d)$. Analise os resultados obtidos.

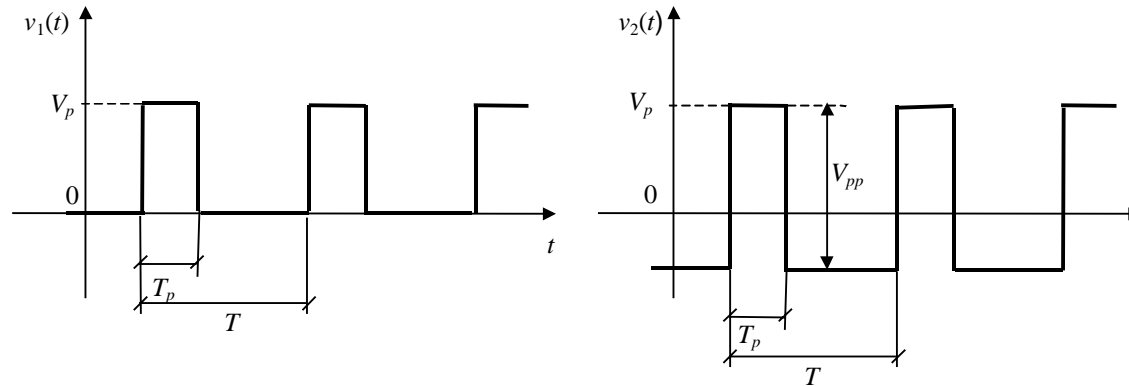
Resolução

Sinal $v_1(t)$: O quadrado do valor eficaz de $v_1(t)$ é

$$V_{1ef}^2 = \langle v_1^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_1^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T_p} V_p^2 dt = V_p^2 \frac{T_p}{T} = V_p^2 d \quad \text{com} \quad d = \frac{T_p}{T}$$

ou
$$V_{1ef} = V_p \sqrt{d}$$

Finalmente, resulta $FC = \frac{V_p}{V_{1ef}} = \frac{1}{\sqrt{d}}$



Sinais rectangulares $v_1(t)$ e $v_2(t)$.

Sinal $v_2(t)$: Como $v_2(t)$ apresenta valor médio nulo, observa-se a condição

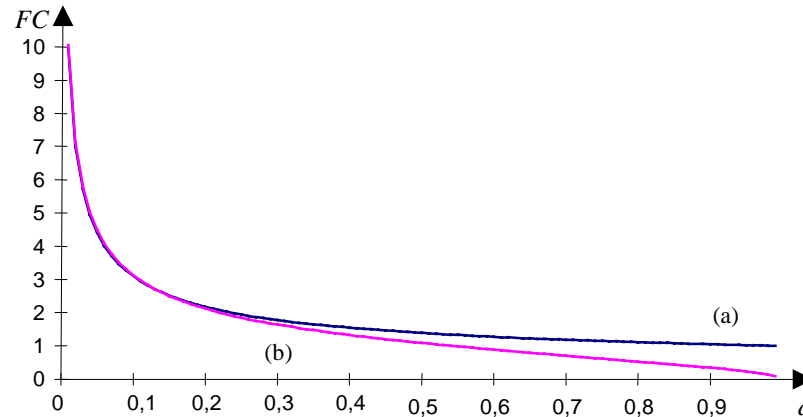
$$V_p T_p = (V_{pp} - V_p) (T - T_p) \quad (V_{pp} = \text{Valor de pico-a-pico})$$

O quadrado do valor eficaz é

$$V_{2ef}^2 = \langle v_2^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_2^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T_p} V_p^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T_p}^T (V_{pp} - V_p)^2 dt = \frac{1}{T} [V_p^2 T_p + (V_{pp} - V_p)^2 (T - T_p)]$$

como $V_{pp} - V_p = \frac{V_p T_p}{T - T_p}$ resulta $V_{2ef}^2 = \frac{1}{T} [V_p^2 T_p + \frac{(V_p T_p)^2}{T - T_p}]$

Finalmente, após simplificação $V_{2ef} = V_p \sqrt{\frac{T_p}{T - T_p}}$ ou $FC = \sqrt{\frac{T - T_p}{T_p}} = \sqrt{\frac{1 - d}{d}}$



Factor de crista de ondas rectangulares em função de d : (a) $FC = \sqrt{1/d}$; (b) $FC = \sqrt{(1-d)/d}$.

4.2 Filtragem

Um sinal sinusoidal ao atravessar um sistema linear, não altera a sua forma. Com uma entrada $v_i(t) = A_1 \sin wt$ ($w=2\pi f$)

A saída é do tipo $v_o(t) = A_2 \sin(wt - \phi(w))$

A função $\phi(w)$ caracteriza a variação da fase com a frequência; $|H(w)| = A_2/A_1$ é o módulo da função de transferência $H(w)$. A função de transferência do sistema é uma grandeza complexa, que à frequência w , apresenta o módulo $|H(w)|$ e fase $\phi(w)$, isto é

$$H(w) = |H(w)| e^{j\phi(w)}$$

4.2.1 Circuito RC passa-alto

A função de transferência $H(s)$ do circuito RC passa-alto é
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s\tau}{1 + s\tau}$$

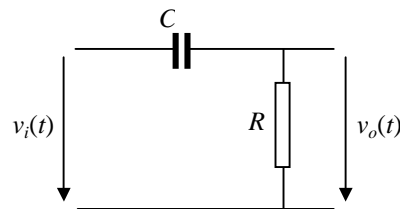
$V_i(s)$ e $V_o(s)$ são, respectivamente, as transformadas de Laplace de $v_i(t)$ e $v_o(t)$. O parâmetro τ é a constante de tempo, sendo $\tau = RC$

Resposta em frequência

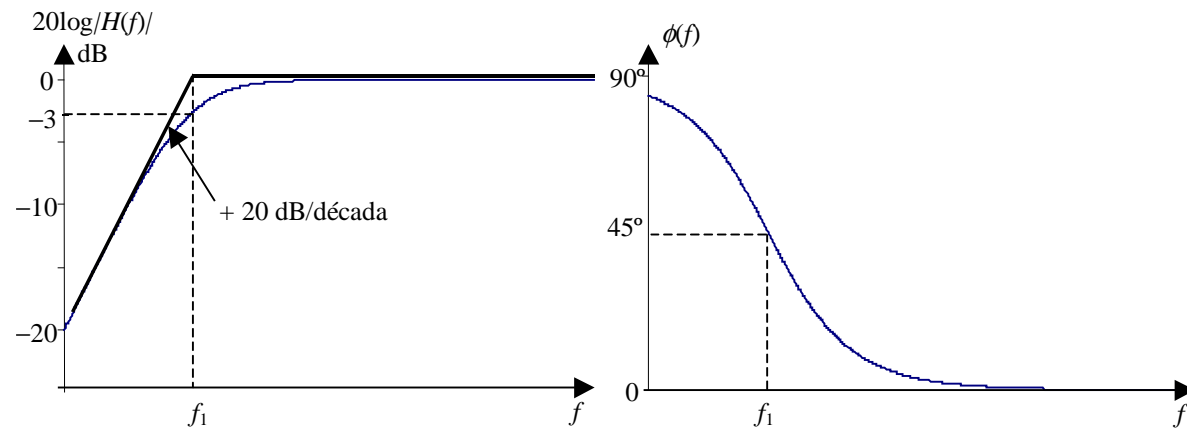
O módulo e a fase da função de transferência $H(f)$ apresentam as expressões

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f)^2}}$$

e $\phi(f) = \arctan(f_1/f)$ ($f_1 = \frac{1}{2\pi\tau}$ é a frequência inferior de corte do filtro)



a)



b)

c)

Filtro passa-alto: a) circuito RC; b) curva de módulo e c) curva de fase.

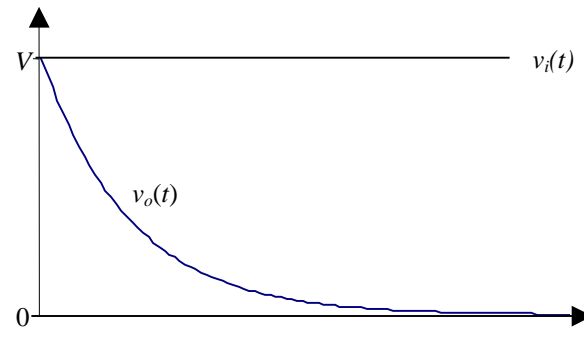
Resposta temporal

Sendo $v_i(t)$ um degrau de Heaviside $h(t)$, de amplitude V , a transformada inversa é do tipo

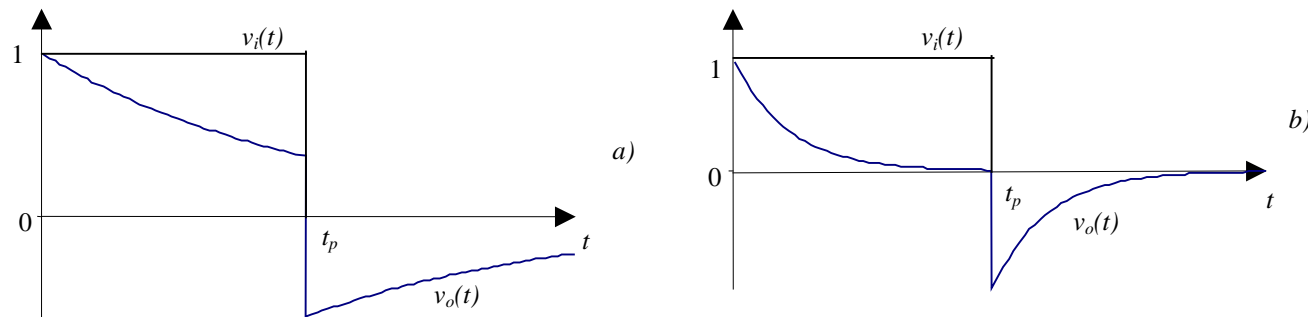
$$v_o(t) = V_f + (V_i - V_f) e^{-t/\tau}$$

V_f e V_i são, respectivamente, o valor final e o valor inicial. Com condições iniciais nulas, $V_i = V$, e $V_f = 0$, resulta

$$v_o(t) = V e^{-t/\tau}$$



Resposta a um degrau de um filtro RC passa-alto.



Resposta de um filtro RC passa-alto a um impulso $v_i(t)$ com: a) $\tau \gg t_p$; b) $\tau \ll t_p$.

Genericamente, a resposta apresenta a forma da b), onde

E

Como a onda quadrada de entrada é simétrica, verificam-se as relações

Resultando

$$V'_1 = V_1 e^{-\frac{T}{2RC}} \quad \text{e} \quad V'_2 = V_2 e^{-\frac{T}{2RC}}$$

$$V_2 - V'_1 = V \quad \text{e} \quad V'_2 - V_1 = V$$

$$V_1 = -V_2 \quad \text{e} \quad V'_1 = -V'_2$$

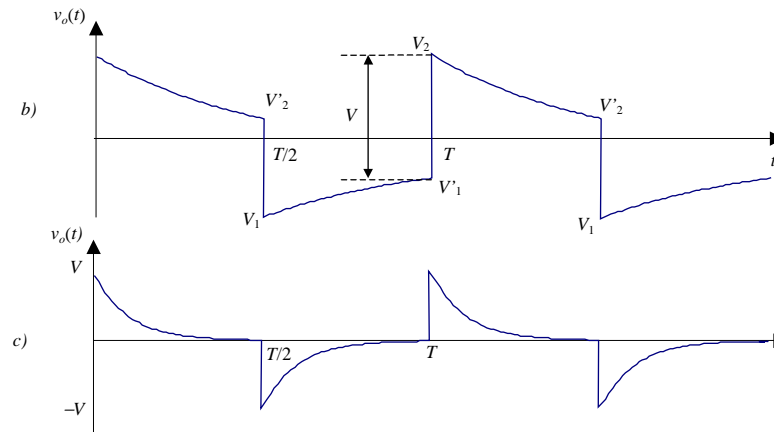
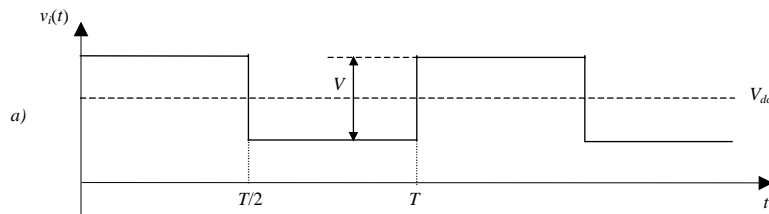
$$V_2 = \frac{V}{1 + e^{-T/2RC}} \quad \text{e} \quad V'_2 = \frac{V}{1 + e^{T/2RC}}$$

Com $T/2RC \ll 1$ e atendendo ao desenvolvimento em série de e^x ($e^x \approx 1+x$, para $x \ll 1$), as expressões anteriores são aproximadas por

$$V_2 \approx \frac{V}{2} \left(1 + \frac{T}{4RC}\right) \quad \text{e} \quad V'_2 \approx \frac{V}{2} \left(1 - \frac{T}{4RC}\right)$$

O grau de distorção deste tipo de filtros é avaliado pela flecha P , definida por

$$P = \frac{V_2 - V'_2}{\frac{V}{2}} 100\% \approx \frac{T}{2RC} 100\% = \pi \frac{f_1}{f} 100\%$$



Resposta de um filtro RC passa-alto: a) sinal de entrada; b), c) sinais de saída para $\tau \gg T/2$ e $\tau \ll T/2$, respectivamente.

EXEMPLO

Uma onda quadrada simétrica de frequência 10 Hz e tensão pico-a-pico 2,0 V é aplicada a um circuito RC passa-alto de frequência inferior de corte 5 Hz. Caracterize a onda de saída, calculando os valores instantâneos da tensão em pontos característicos. Determine o valor da flecha P . Repita a questão anterior admitindo que a frequência inferior de corte do circuito RC é: a) 0,3 Hz; b) 3,0 Hz; c) 30 Hz.

Resolução

Para a onda quadrada considerada no problema, a tensão pico-a-pico é $V = 2,0$ V. O seu período é $T = 100$ ms.

Para $f_1 = 5$ Hz, a constante de tempo é $\tau = \frac{1}{2\pi f_1} = 31,8$ ms e

$$V_2 = \frac{V}{1 + e^{-T/2RC}} = 1,66 \text{ V} \quad \text{e} \quad V'_2 = \frac{V}{1 + e^{T/2RC}} = 0,34 \text{ V}; \quad V_1 = -V_2 = -1,66 \text{ V} \quad \text{e} \quad V'_1 = -V'_2 = -0,34 \text{ V}$$

$$\text{A flecha } P \text{ é} \quad P = \frac{V_2 - V'_2}{\frac{V}{2}} 100 \% = 132 \%$$

A resposta apresenta assim um decaimento apreciável, apresentando uma forma semelhante à esboçada na b).

a) Recorrendo às mesmas expressões, para $f_1 = 0,3$ Hz obtemos sucessivamente: $V_1 = -V_2 = -1,05$ V; $V'_1 = -V'_2 = -0,95$ V; $P = 10$ %

A resposta apresenta neste caso uma distorção menos significativa do que na situação anterior.

b) Para $f_1 = 3,0$ Hz obtemos sucessivamente: $V_1 = -V_2 = -1,44$ V; $V'_1 = -V'_2 = -0,56$ V; $P = 88$ %

c) Para $f_1 = 30$ Hz obtemos uma distorção muito apreciável da forma de onda, dando origem a uma resposta próxima da esboçada na c), com variações entre um valor máximo igual a +2 V e um mínimo igual a -2 V. Tratando-se de um filtro passa-alto, em qualquer um dos casos, a resposta apresenta um valor médio nulo.

4.2.2 Circuito RC passa-baixo

A função de transferência $H(s)$ do circuito RC passa-baixo é

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/\tau'}{1/\tau' + s} \quad (\tau' = R'C')$$

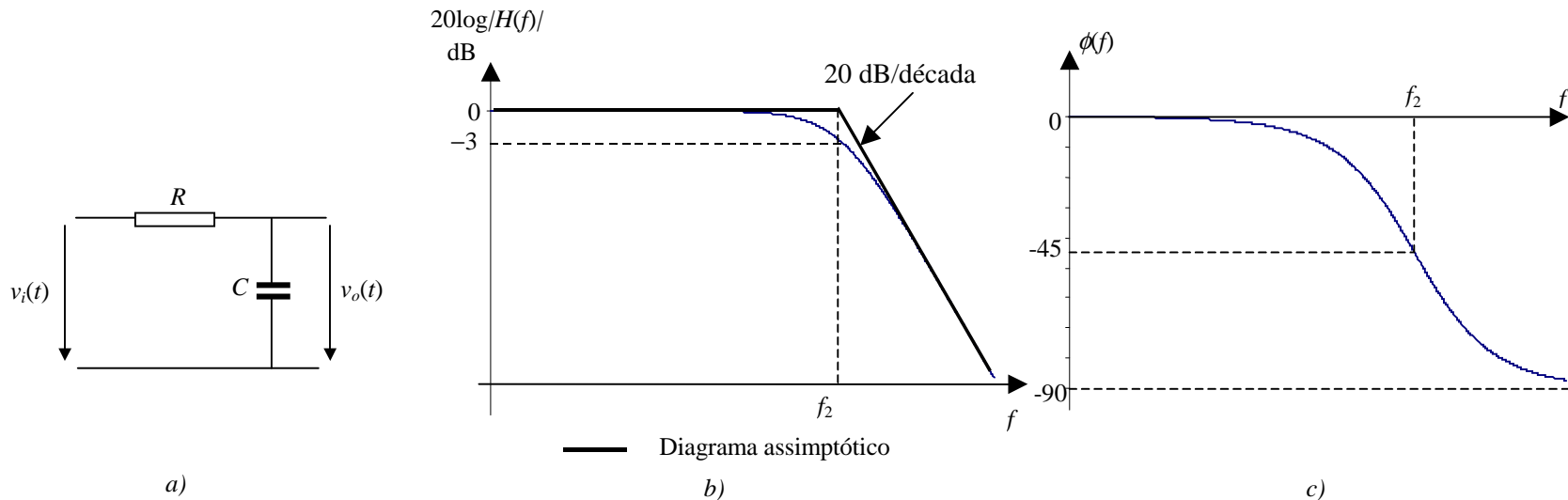
Resposta em frequência

Em regime sinusoidal, isto é, para $s = j\omega = j2\pi f$, a função de transferência é

$$H(f) = \frac{V_o(f)}{V_i(f)} = \frac{f_2}{f_2 + jf} \quad (f_2 \text{ é a frequência superior de corte, é } f_2 = \frac{1}{2\pi\tau'})$$

O módulo da função de transferência $H(f)$ e a fase $\phi(f)$, apresentam as expressões

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (f/f_2)^2}} \quad \text{e} \quad \phi(f) = -\arctan \frac{f}{f_2}$$



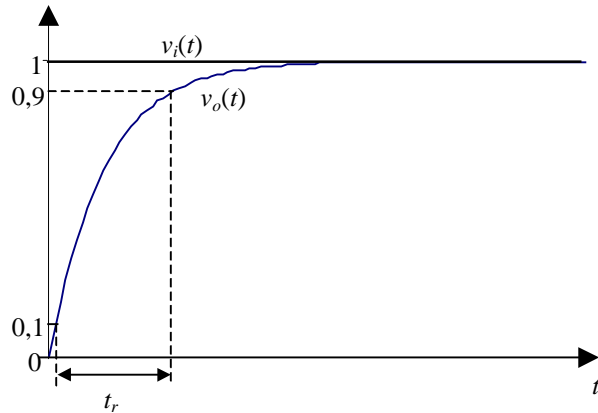
Filtro passa-baixo: a) circuito RC; b) curva de módulo e c) curva de fase.

Resposta temporal

A resposta a um degrau de Heaviside de amplitude V deste circuito RC passa-baixo apresenta a expressão

$$v_o(t) = V(1 - e^{-t/\tau'})$$

O tempo de subida é $t_r = 2,2 \tau' = \frac{2,2}{2\pi f_2} = \frac{0,35}{f_2}$



Resposta a um degrau de um filtro RC passa-alto

As duas equações da saída, $v_o(t)$, deduzem-se a partir da expressão genérica

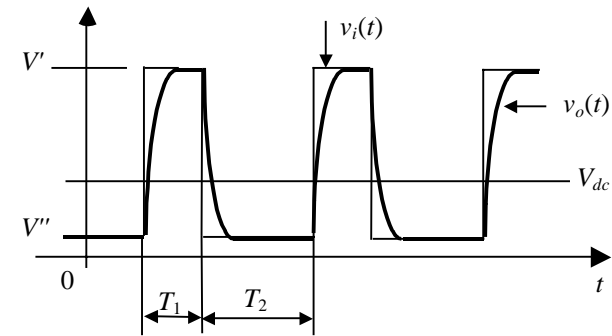
$$v_o(t) = V_f + (V_i - V_f) e^{-t/\tau'}$$

Identificando os valores inicial V_i e final V_f , em cada uma das sub-funções,

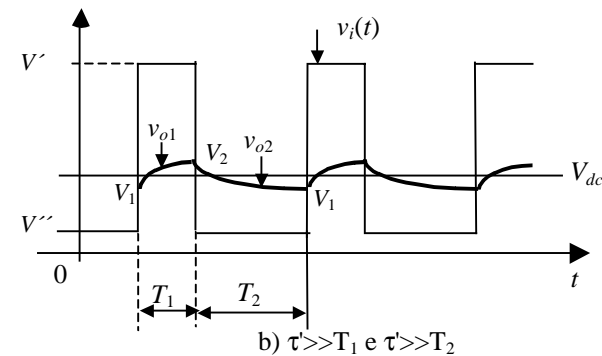
obtemos as equações

$$v_{o1}(t) = V' + (V_1 - V') e^{-t/\tau'}$$

$$v_{o2}(t) = V'' + (V_2 - V'') e^{-(t-T_1)/\tau'}$$



a) $\tau' \ll T_1$ e $\tau' \ll T_2$.

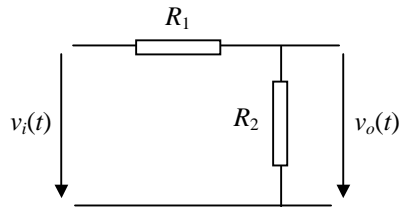


b) $\tau' \gg T_1$ e $\tau' \gg T_2$

Resposta temporal de um circuito RC passa-alto.

4.3 Atenuação

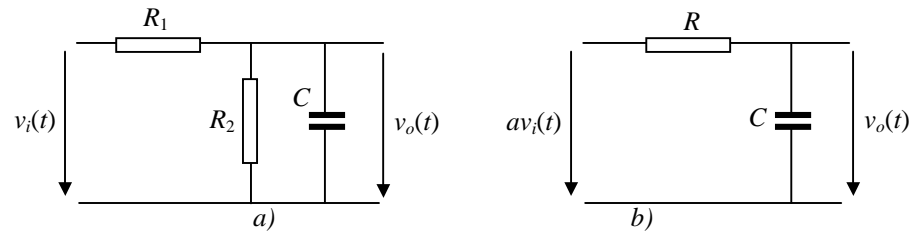
Atenuador de tensão resistivo



A atenuação a do atenuador resistivo da figura é

$$a = \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

A atenuação é independente da frequência. Na prática, a situação é mais complexa devido ao efeito de carga, usualmente de natureza capacitiva, exercido pelos andares seguintes ao atenuador. O circuito da figura vem alterado, para um circuito do tipo.



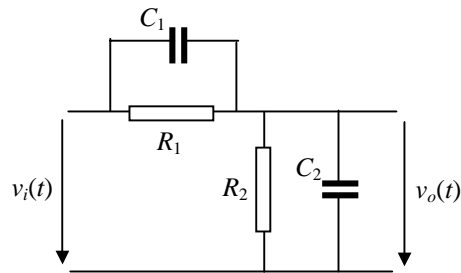
Atenuador resistivo com carga capacitiva; b) circuito equivalente (com $a = R_2 / (R_1 + R_2)$ e $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$).

A frequência superior de corte deste circuito é agora $f_2 = \frac{1}{2\pi RC}$ com $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Isto é, o divisor resistivo que tem uma resposta em frequência plana passa, por efeito de carga, a apresentar um comportamento de um filtro passa-baixo.

4.3.1 Atenuador RC e sua compensação

O efeito acima descrito é compensado, colocando em paralelo com R_1 a capacidade C_1 . A função de transferência do circuito é

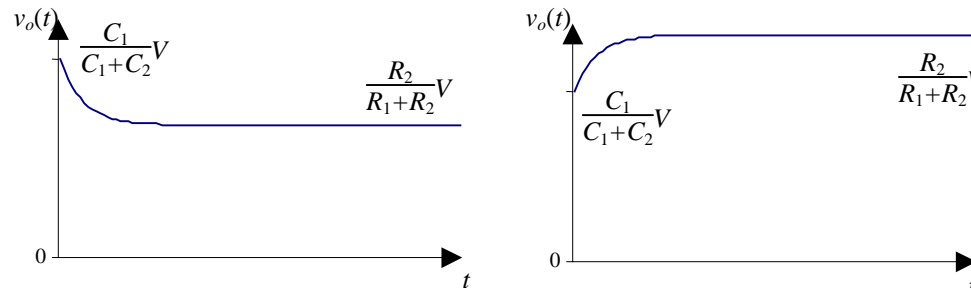


$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + sR_1C_1}{1 + sRC} \quad \text{onde} \quad R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{e} \quad C = C_1 + C_2$$

Para uma entrada em degrau, é $v_o(t) = V \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-t/\tau}$

com $\tau = RC = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)$

A resposta $v_o(t)$ é representada em duas situações: a) valor inicial superior ao valor final e b) valor final superior ao valor inicial. Em qualquer uma destas duas situações, não há manutenção da forma de onda, não estando portanto o atenuador compensado.



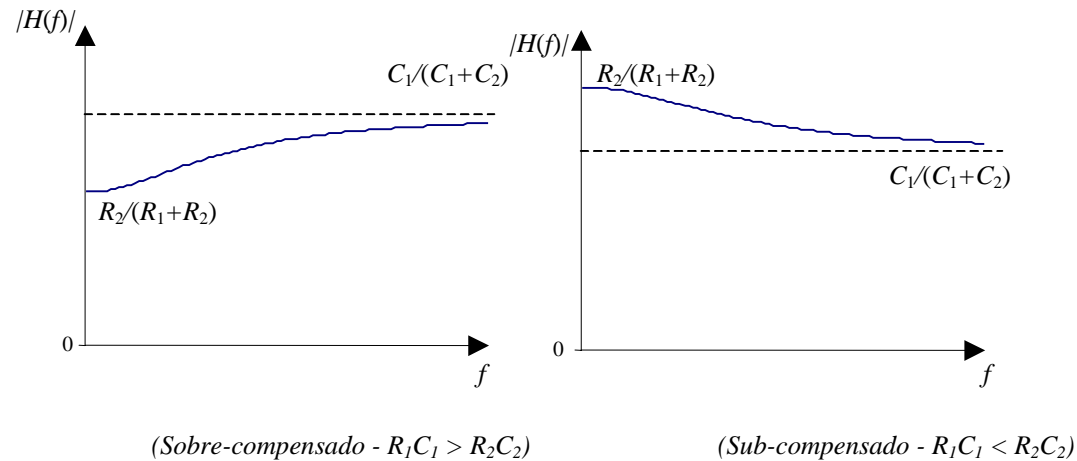
As três situações possíveis são:

- o atenuador está sobre-compensado, o que se verifica se $R_1C_1 > R_2C_2$;
- atenuador está sub-compensado, o que se verifica se $R_1C_1 < R_2C_2$;
- o atenuador está compensado se $R_1C_1 = R_2C_2$.

A função de transferência em w é

$$H(jw) = \frac{R_2}{R_1+R_2} \frac{1 + jwR_1C_1}{1 + jwRC}$$

A figura seguinte representa o módulo da função de transferência para as situações de sobre-compensação e sub-compensação.



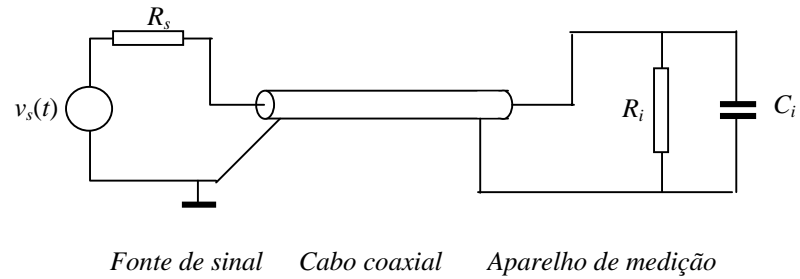
Resposta em frequência de atenuador RC não compensado.

De notar que os valores limites de $|H(jw)|$ são: $\lim_{w \rightarrow 0} |H(jw)| = \frac{R_2}{R_1+R_2}$ e $\lim_{w \rightarrow \infty} |H(jw)| = \frac{C_1}{C_1+C_2}$

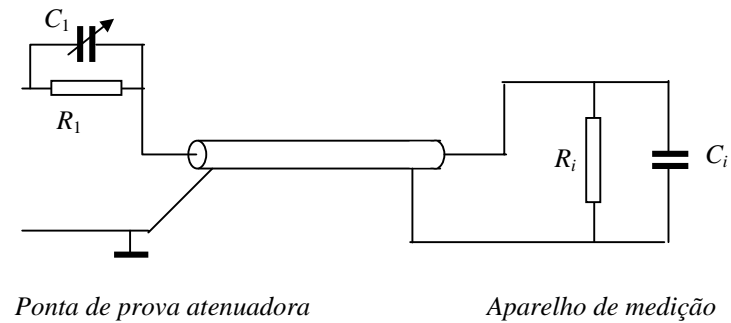
Estes resultados limites confirmam os resultados obtidos no domínio dos tempos, onde o valor final da resposta a um degrau é atenuado por $R_2/(R_1+R_2)$. Isto é, a resposta à variação lenta do degrau corresponde à resposta às baixas frequências. Inversamente, a resposta à transição rápida depende da forma como o circuito responde às altas frequências, onde a atenuação é $C_1/(C_1+C_2)$. Se estes dois valores limites forem iguais a resposta em frequência é constante, estando o atenuador compensado.

4.3.2 Pontas de prova atenuadoras

Uma ponta de prova atenuadora, usada na ligação do ponto de teste de um circuito a um osciloscópio, constitui uma aplicação directa dos atenuadores compensados. São duas as configurações básicas: a ponta de prova passiva e a atenuadora (que necessita de ser compensada).



Ponta de prova passiva na ligação de uma fonte de sinal a um aparelho de medição.



Ponta de prova atenuadora.