1.a)

Começando pela escala de 500 mV temos:

$V_{fe} = 500\text{ mV} = (R_5 + R_A)\, I_{af}$

Logo $\rightarrow R_5 = \underline{\underline{3\text{ K}\Omega}}$

Escala de 10 V:

$V_{fe} = 10\text{ V} = (R_2 + R_5 + R_A)\, I_{af}$

$\rightarrow R_2 = \underline{\underline{95\text{ K}\Omega}}$

Escala de 30 V:

$V_{fe} = 30\text{ V} = (R_1 + R_2 + R_5 + R_A)\, I_{af}$

$\rightarrow R_1 = \underline{\underline{200\text{ K}\Omega}}$

Passemos agora à escala de 2 mA com o interruptor fechado:

$I_{af} = \frac{R_3 + R_4}{R_3 + R_4 + R_5 + R_A} I_{fe}$ (divisor de corrente) (I_{af} - corrente máxima do el. motor)

Daqui pode retirar-se para já o valor de $R_3 + R_4 = 263.16\ \Omega$

Escala de 50 mA:

$I_{af} = \frac{R_4}{R_3 + R_4 + R_5 + R_A} I_{fe}$ (divisor de corrente)

Conhecendo $R_3 + R_4$ da equação anterior retira-se $\rightarrow R_4 = \underline{\underline{10.53\ \Omega}}$ e depois $\rightarrow R_3 = \underline{\underline{252.63\ \Omega}}$

b)

Escala de 500 mV:	$R_i = R_5 + R_A = \underline{\underline{5\text{ K}\Omega}}$	$S = \frac{R_i}{V_{fe}} = \underline{\underline{10\text{ K}\Omega/\text{V}}}$
Escala de 10 V:	$R_i = R_2 + R_5 + R_A = \underline{\underline{100\text{ K}\Omega}}$	$S = \underline{\underline{10\text{ K}\Omega/\text{V}}}$
Escala de 30 V:	$R_i = R_1 + R_2 + R_5 + R_A = \underline{\underline{300\text{ K}\Omega}}$	$S = \underline{\underline{10\text{ K}\Omega/\text{V}}}$
Escala de 2 mA:	$R_i = (R_3 + R_4)\ //\ (R_5 + R_A) = \underline{\underline{250\ \Omega}}$	
Escala de 50 mA:	$R_i = R_4\ //\ (R_4 + R_5 + R_A) = \underline{\underline{10.5\ \Omega}}$	

c)

A escala mais conveniente do ponto de vista do erro intrínseco do amperímetro é a de 2 mA (corrente de fim de escala menor possível e por isso menor erro). Do ponto de vista do efeito de carga seria a escala de 50 mA (menor resistência interna), mas esse erro pode ser descontado.

Com o amperímetro inserido no circuito temos:

$$I = \frac{E}{r_i + R_A + 6.8 + 6.8\ //\ 8.2} = 1.23\text{ mA}$$

O erro absoluto máximo cometido pelo aparelho é $\delta_I = \frac{ic\ I_{fe}}{100} = 0{,}02\text{ mA}$ logo a corrente medida I situa-se no intervalo $I = 1.23 \pm 0.02\text{ mA}$

O verdadeiro valor de I (sem efeito de carga) seria $I_v = \frac{E}{r_i + 6.8 + 6.8\ //\ 8.2}$

Donde se pode concluir que $\frac{I_v}{I} = K = \frac{r_i + R_A + 6.8 + 6.8\ //\ 8.2}{r_i + 6.8 + 6.8\ //\ 8.2} = 1.02377$

e logo $I = K\, I_v = \underline{\underline{1.26 \pm 0.02\text{ mA}}}$

2.a)

Num ohmímetro série, quando medimos a resistência R = 0 (curto-circuito) devemos ter a deflexão máxima (I_{af} no elemento motor) e também a corrente máxima fornecida pela fonte de f.e.m. E:

$$I_{max} = \frac{E}{R_i} \quad , \quad R_i \text{ - resistência interna do ohmímetro}$$

Quando medimos uma resistência R diferente de 0, temos uma corrente fornecida pela fonte que é menor:

$$I = \frac{E}{R + R_i}$$

logo a deflexão do ponteiro do aparelho é: $\alpha = \frac{I}{I_{max}} = \frac{R_i}{R + R_i}$ (o circuito é linear)

Para uma deflexão $\alpha = 3/4$ iremos ter $R = R_i/3$

Neste ohmímetro para R=0 (curto-circuito na entrada) deveremos ter no ramo do elemento motor

$$I_{af} = \frac{E}{R_v + R_A} \quad \text{donde o valor de } R_v \text{ é} \quad R_v = \underline{\underline{7.9\ K\Omega}}$$

Assim a resistência interna é $R_i = R_s // (R_v + R_A) = \underline{\underline{39.8\ \Omega}}$ e a resistência medida $R = \underline{\underline{13.27\ \Omega}}$

b)

Com a f.e.m. E envelhecida para 6 V e novo ajuste de 0 (modificando R_v) temos:

$Rv = \underline{\underline{5.9\ K\Omega}}$ $Ri = \underline{\underline{39.74\ \Omega}}$ e $R = \underline{\underline{13.25\ \Omega}}$

3. Num voltímetro AC para tensões sinusoidais com rectificação (de meia onda neste caso) transforma--se uma medição de valor médio[1] numa medição de valor eficaz, multiplicando essa medição por um factor constante[2] adequado à forma de onda considerada.

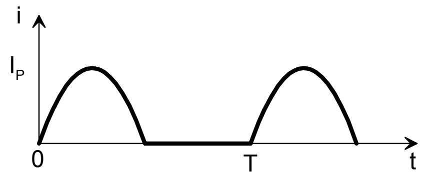
No caso presente pretendemos que quando se aplica à entrada uma tensão sinusoidal de 5 V eficazes tenhamos a deflexão máxima (valor médio da corrente que atravessa o elemento motor igual a I_{af}).

a)

Na entrada iremos ter uma tensão $v = V_P \sin \omega t$ onde $V_P = V_{ef}\sqrt{2}$

(neste caso pretendemos $V_{ef\,max} = V_{fe} = 5$ V)

Esta tensão vai dar origem a uma corrente rectificada a 1/2 onda (devido à presença do díodo) com a seguinte forma de onda em todos os ramos (e em particular no ramo com o elemento motor):



O valor de pico desta corrente (I_P) no ramo com o elemento motor é:

$$I_P = \frac{V_P}{R_i}\,\frac{R_s}{R_s + R_A} \quad , \quad \text{onde a resistência interna } R_i = R + R_s // R_A$$

Para a forma de onda apresentada o seu valor médio vale $\langle i \rangle_{1/2\ onda} = \frac{1}{T}\int_0^T i\, dt = \frac{I_P}{\pi}$

[1] o elemento motor tem uma deflexão proporcional ao valor médio da corrente periódica que o atravessa, se a gama de frequências significativas dessa corrente se situar num certo intervalo, que depende da sua construção.

[2] determinado pelo dimensionamento das resistências do aparelho.

Fazendo todas as substituições anteriores temos:

$$\langle i \rangle_{1/2\ \text{onda}} = \frac{V_{ef}\sqrt{2}}{\pi\, R_i} \frac{R_s}{R_s + R_A}$$

Pretende-se que quando $V_{ef} = V_{fe} = 5$ V (eficazes) então $\langle i \rangle_{1/2\ \text{onda}}$ seja igual a I_{af} o que nos permite dimensionar R_i e R:

$$R_i = \underline{\underline{22.5\ \text{K}\Omega}} \qquad R = Ri - R_s//R_A = \underline{\underline{22.0\ \text{K}\Omega}}$$

A sensibilidade deste voltímetro será então $S_{AC} = \dfrac{R_i}{V_{fe\ (ef)}} = \underline{\underline{4{,}5\ \text{K}\Omega/\text{V}}}$

b)

A deflexão do ponteiro do aparelho é dada por: $\alpha = \dfrac{\langle i \rangle_{1/2\ \text{onda}}}{I_{af}}$

Como a escala está graduada entre 0 e V_{fe} a indicação do ponteiro é sempre: $V_m = \dfrac{\langle i \rangle_{1/2\ \text{onda}}}{I_{af}} V_{fe}$

(V_m - tensão medida)

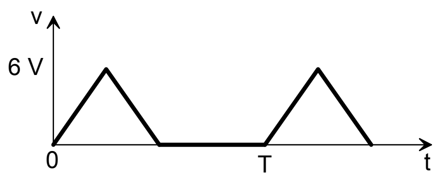
Como resultado do dimensionamento do aparelho (alínea anterior) temos $I_{af} = \dfrac{V_{fe}\sqrt{2}}{\pi\, R_i} \dfrac{R_s}{R_s + R_A}$

Reparando ainda que neste aparelho a corrente média que passa no ramo do elemento motor pode ser calculada como:

$$\langle i \rangle_{1/2\ \text{onda}} = \frac{\langle v \rangle_{1/2\ \text{onda}}}{R_i} \frac{R_s}{R_s + R_A}$$ onde $\langle v \rangle_{1/2\ \text{onda}}$ é a tensão da entrada rectificada a meia onda,

temos, fazendo as 2 últimas substituições: $V_m = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} \langle v \rangle_{1/2\ \text{onda}}$ o que é válido neste voltímetro para qualquer forma de onda, mas só está correcto para tensões sinusoidais.

No caso de uma onda triangular simétrica com valor de pico de 6 V a sua forma onda rectificada a meia onda é:



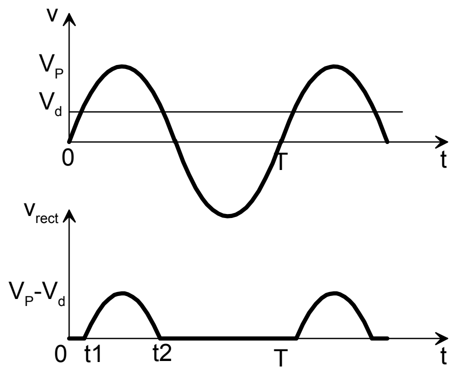
e o seu valor médio é $\langle v \rangle_{1/2\ \text{onda}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} v\, dt = \dfrac{V_P}{4}$. O valor medido com este voltímetro seria:

$$V_m = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{V_P}{4} = \underline{\underline{3.33\ \text{V}}}$$

O verdadeiro valor eficaz de uma onda periódica é: $\sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T} v^2\, dt}$ No caso da onda triangular simétrica de valor de pico V_P, este resultado é $\dfrac{V_P}{\sqrt{3}}$ que vale, para $V_P = 6$ V, $\underline{\underline{3.46\ \text{V}}}$.

c)

Com esta característica o díodo de rectificação só conduz quando a tensão de entrada no aparelho é superior a $V_d = 0.3$ V, e quando o faz a sua resistência de condução é $r_d = 200\ \Omega$. Assim a tensão rectificada e respectiva corrente vão-no ser durante menos de meio período. Veja-se o gráfico seguinte:



Nesta nova situação deveremos ter $I_{af} = \dfrac{<v>_{rect}}{R_i}\dfrac{R_s}{R_s+R_A}$ onde $R_i = R + r_d + R_s // R_A$ e $V_P = 5 \cdot \sqrt{2}$ V

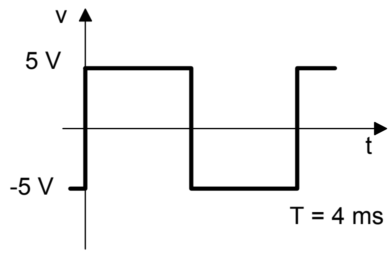
Por sua vez $<v>_{rect} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}(V_P\sin\omega t - V_d)dt$, onde t_1 e t_2 são os resultados da equação $V_P\sin\omega t = V_d$ dentro do primeiro período.

Temos então: $\omega t_1 = \arcsin\dfrac{V_d}{V_P}$ e $\omega t_2 = \pi - \omega t_1$ (devido à simetria) com $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

O integral acima tem como resultado $<v>_{rect} = \dfrac{V_P}{\pi}\sqrt{1 - \dfrac{V_d^2}{V_P^2}} - \dfrac{V_d}{2\pi}(\pi - 2\arcsin\dfrac{V_d}{V_P})$, que no nosso caso vale 2.103 V (repare-se que se $V_d = 0$ se obtém V_P/π, como na a)).

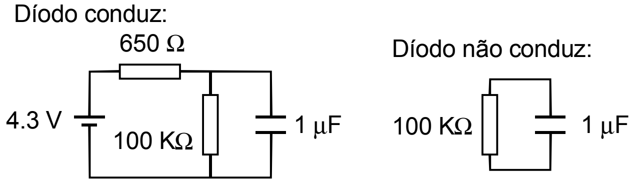
Logo $R_i = \dfrac{<v>_{rect}}{I_{af}}\dfrac{R_s}{R_s+R_A} = 21.03$ KΩ e $R = R_i - r_d - R_s // R_A = \underline{\underline{20.33 \text{ K}\Omega}}$

4. Neste circuito a tensão de condução do díodo é $V_d = 0.7$ V e a sua resistência de condução $r_d = 50$ Ω. A forma de onda da entrada é como se mostra na figura seguinte:



O díodo irá conduzir nos meios períodos de tensão de entrada positiva e irá bloquear nos meios períodos de entrada negativa.

Os circuitos equivalentes que temos nesses meios períodos mostram-se a seguir:



a)

Quando o díodo conduz a tensão nos terminais parte de um valor inicial que para já vamos considerar desconhecido $V_i = V_1$ e tende para um valor final que seria $V_f = \dfrac{100}{100.65}4.3 = 4.272$ V. A constante de tempo é de $\tau_1 = C\ (100 // 0.65) = 0.646$ ms. No entanto, ao fim de 2 ms (1/2 período) a tensão gerada muda, o díodo comuta e a configuração do circuito altera-se. A tensão que se atinge no fim desse meio período é:

$$V_2 = V_f - (V_f - V_1)\, e^{-\frac{T/2}{\tau_1}}$$

No meio período seguinte a tensão final tende exponencialmente para 0 (2º circuito acima) mas com outra constante de tempo τ_2 = 100 C = 100 ms. No final deste meio período a saída deve retomar o valor que assumimos inicialmente, V_1 (a tensão de saída é periódica em regime permanente). Assim devemos ter:

$$V_1 = V_2\, e^{-\frac{T/2}{\tau_2}}$$

Resolvendo o sistema destas duas equações temos: $V_1 = \underline{\underline{4.183\ V}}$ e $V_2 = \underline{\underline{4.268\ V}}$

b)

Quando ligamos o voltímetro para efectuar a medida colocamos a sua resistência interna em paralelo com o condensador. Essa resistência vale $R_v = S\ V_{fe}$ = 100 KΩ. Como já existe outra resistência do mesmo valor em paralelo com o condensador tudo se passa como se se substituísse essa resistência por uma de 50 KΩ nos dois circuitos equivalentes apresentados acima. O efeito de carga traduz-se numa modificação da forma de onda.

Refazendo todas as contas da a) temos:

<u>1º meio período</u>: $V_i = V_1$, V_f = (50/50.65) 4.3 = 4.245 V, τ_1 = (50//0.65) C = 0.642 ms

$$V_2 = V_f - (V_f - V_1)\, e^{-\frac{T/2}{\tau_1}}$$

<u>2º meio período</u>: $V_i = V_2$, Vf = 0 V, τ_2 = 50 C = 50 ms

$$V_1 = V_2\, e^{-\frac{T/2}{\tau_2}}$$

Resolvendo o sistema das duas equações obtemos: $V_1 = \underline{\underline{4.071\ V}}$ e $V_2 = \underline{\underline{4.237\ V}}$

Um voltímetro DC medirá o valor médio da tensão que está presente nos seus terminais (desde que as frequências significativas não caiam fora de certo intervalo).

Assim o valor medido pelo voltímetro será:

$$V_m = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} (4.245 - 0.174\, e^{-(t/\tau_1)})dt + \int_0^{T/2} 4.237\, e^{-(t/\tau_2)}dt \right) = \underline{\underline{4.173\ V}}$$

5.

a) Soluções: R_i = 1500 Ω, R_1 = 20 KΩ, R_2 = 400 Ω

b) Soluções: R_1 = 12.03 KΩ, R_i = 1498 Ω, verdadeiro valor do R medido = 374.5 Ω