

**Faculdade de Ciências / Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto**



José Maria Côrte-Real da Costa Pereira

Mestrado em Métodos Computacionais em Ciências e Engenharia

“Análise em Componentes Independentes na Separação Cega de Fontes Coincidentes no Espectro”

Orientador: Professor Doutor André Teixeira Puga

Sumário

- Separação Cega de Fontes (SCF) coincidentes no espectro
- Análise em Componentes Independentes (ACI)
 - Independência Estatística
 - Informação Mútua
 - Negentropia
- O método de ACI desenvolvido
 - Método de *Jacobi*
 - Estatísticas de Ordem Superior
- Aplicações e Resultados
 - Simulações
 - Extração do ECG de um feto de forma não invasiva
 - Identificação de microvasos na angiogénese do cancro da mama
 - Identificação de fibra e borracha no processo de fabrico de tela para pneus

Separação Cega de Fontes (SCF)

O problema da SCF pode ser formulado como a recolha de um conjunto de amostras através de um conjunto de (X) sensores, com o objectivo de encontrar um sistema de reconstrução, caso exista e seja estável, dos sinais fonte originais (S).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

Métodos tradicionais do Processamento de Sinal não são aplicáveis a problemas de separação que apresentem coincidência espectral das fontes.

Análise em Componentes Independentes (ACI)

A ACI consiste em estimar uma matriz (A) – designada matriz de mistura – e as componentes (S) – designadas fontes ou componentes independentes – quando só são conhecidas observações (X) que resultam de combinações lineares das fontes através da referida matriz de mistura.

$$X = A S$$

- Restrições
 - fontes independentes
 - no máximo, uma distribuição gausseana
 - matriz de mistura, quadrada e invertível
- Ambiguidades
 - permutações
 - trocas de escala

Independência Estatística

A condição de independência pode enunciar-se como:

$$p_{s_1, s_2, \dots, s_n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = p_{s_1}(s_1) p_{s_2}(s_2) \dots p_{s_n}(s_n)$$

O afastamento entre duas funções densidade de probabilidade (p e q) pode medir-se através da divergência de *Kullback-Leibler*

$$D(p\|q) = \int p(\xi) \log_2 \frac{p(\xi)}{q(\xi)} d\xi$$

Aplicada à fdp conjunta e ao produtório das fdp marginais esta medida de afastamento traduz a condição de independência

$$D\left(p_X \left\| \prod_{i=1}^n p_{x_i}\right.\right) = \int p_X(\xi) \log_2 \frac{p_X(\xi)}{\prod_{i=1}^n p_{x_i}(\xi_i)} d\xi$$

Informação Mútua

A informação mútua (I) é, exactamente, uma medida de aferição da “distância” entre a densidade conjunta e o produto das densidades marginais:

$$I(X) = D\left(p_X \left\| \prod_{i=1}^n p_{x_i}\right.\right) = \int p_X(\xi) \log_2 \frac{p_X(\xi)}{\prod_{i=1}^n p_{x_i}(\xi_i)} d\xi$$

...onde a entropia diferencial de primeira ordem(H):

$$H(x) = -\int p_x(\xi) \log_2 p_x(\xi) d\xi$$

pode simplificar a expressão para a informação mútua (I):

$$I(X) = \sum_{i=1}^n H(x_i) - H(X)$$

Negentropia

A negentropia (J) é uma medida sempre não negativa, valendo zero apenas para variáveis com distribuição gausseana. A negentropia define-se como:

$$J(X) = H(N_X) - H(X) \quad J(X) \geq 0$$

Uma propriedade interessante é que, ao contrário da entropia diferencial, ela é invariante sob quaisquer transformações lineares invertíveis. Para uma transformação $Y=MX$:

$$J(Y) = J(X) \quad H(Y) = H(X) + \log_2 |\det M|$$

Obtém-se a expressão de informação mútua recorrendo agora ao conceito de negentropia (marginal e conjunta):

$$I(X) = J(X) - \sum_{i=1}^n J(x_i) + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\prod_{i=1}^n c_{x_i}^2}{|\det c_X^{i_1, i_2}|}$$

Aproximação da Negentropia

Recorrendo às séries de *Edgeworth* e *Taylor*, obtém-se uma aproximação para o cálculo da negentropia:

$$J(x) \approx \frac{1}{48 \ln 2} (c_x^4)^2$$

Minimizar a informação mútua entre componentes de uma v.a. (X) é equivalente à maximização da soma das negentropias marginais que possui uma relação de proporcionalidade directa com a soma dos quadrados das *kurtosis*.

$$\sum_{i=1}^n J(x_i) \propto \sum_{i=1}^n [(c_{x_i}^4)^2]$$

Método de ACI desenvolvido

Para a maximização da *kurtosis* com a consequente maximização das negentropias marginais e minimização da informação mútua, define-se o índice de diagonalidade de um cumulante:

$$di(c_X^{i_1, i_2, \dots, i_r}) = \frac{\|diag(c_X^{i_1, i_2, \dots, i_r})\|_F^2}{\|c_X^{i_1, i_2, \dots, i_r}\|_F^2}, r \geq 2$$

Com sucessivas transformações lineares sobre o cumulante pretende-se anular as entradas fora da diagonal do mesmo, fazendo com que o índice de diagonalidade se aproxime de 1 (situação ideal). Para o cumulante de ordem dois (c_X), a influência de uma transformação linear (T) traduz-se num novo cumulante (c_Y) dado por:

$$c_Y(i, j) = \sum_{p_1=1}^N \sum_{p_2=1}^N T(i, p_1) T(j, p_2) c_X(p_1, p_2)$$

Estatísticas de Ordem Superior

Em ordem quatro (c_X) uma transformação (T) resulta num novo cumulante (c_Y):

$$c_Y(i, j, k, l) = \sum_{p_1=1}^N \sum_{p_2=1}^N \sum_{p_3=1}^N \sum_{p_4=1}^N T(i, p_1)T(j, p_2)T(k, p_3)T(l, p_4)c_X(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

Para o cancelamento das entradas que dependem de exclusivamente de l_1 e l_2 resulta o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_Y(l_1, l_1, l_1, l_2) = 0 \\ c_Y(l_1, l_1, l_2, l_2) = 0 \\ c_Y(l_1, l_2, l_2, l_2) = 0 \end{cases}$$

... este sistema não linear, no caso geral, é de difícil tratamento.

A sugestão de *Comon* aponta no sentido da maximização do índice de diagonalidade:

$$di(c_Y^{i,j,k,l}) = di(c_X^{i,j,k,l}) + \frac{\Delta \ln(c_X^{i,j,k,l}, G_{l_1, l_2, \theta})}{\|c_X^{i,j,k,l}\|_F^2}$$

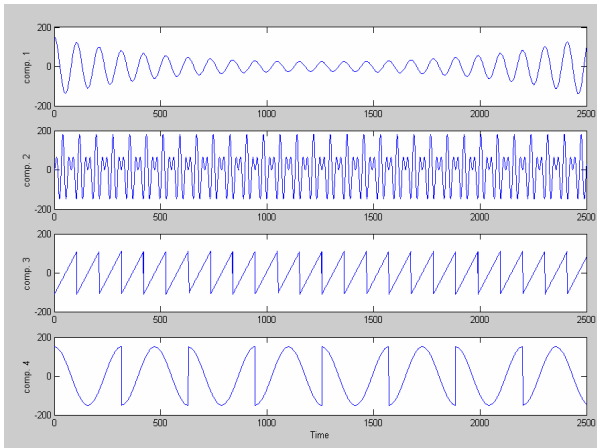
Nesse sentido optou-se pela solução particular de uma das equações do sistema.

Aplicações e Resultados

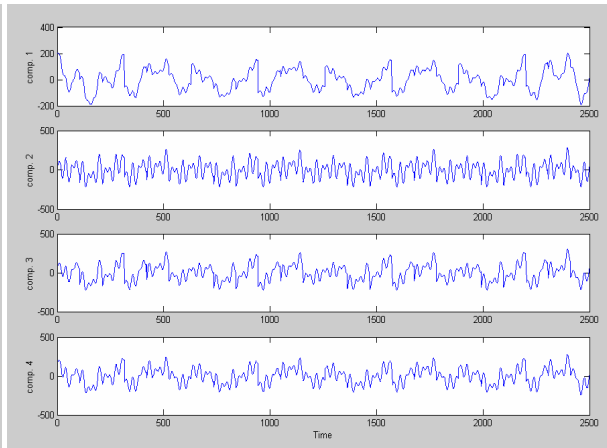
- Simulações
 - Um exemplo
 - Comportamento do método de ACI
- 3 casos reais
 - Extracção do ECG de um feto de forma não invasiva
 - Identificação de microvasos na angiogénese do cancro da mama
 - Identificação de fibra e borracha no processo de fabrico de tela para pneus

Simulações – um exemplo

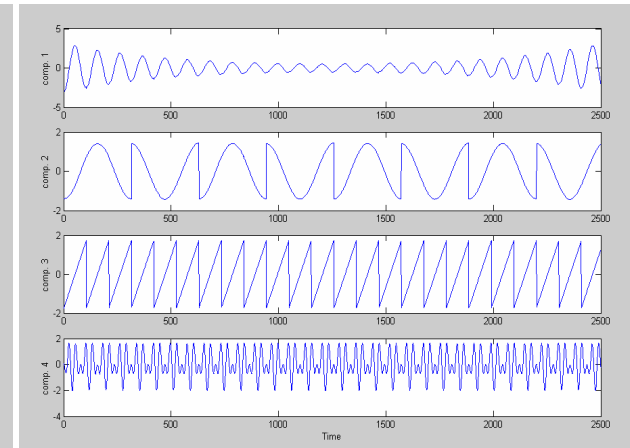
S



$X = MS$

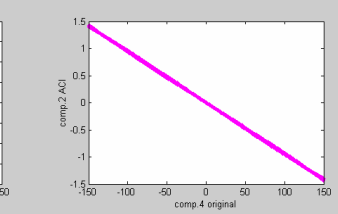
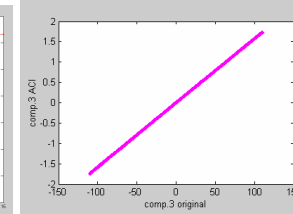
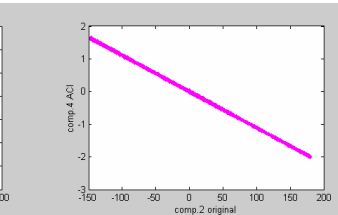
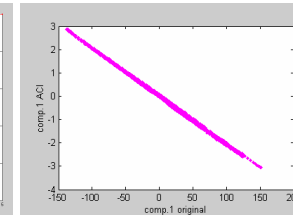
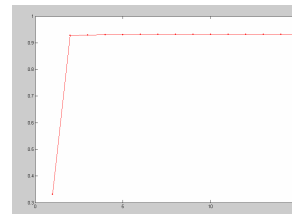
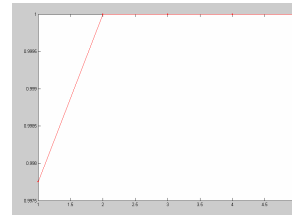


\hat{S}

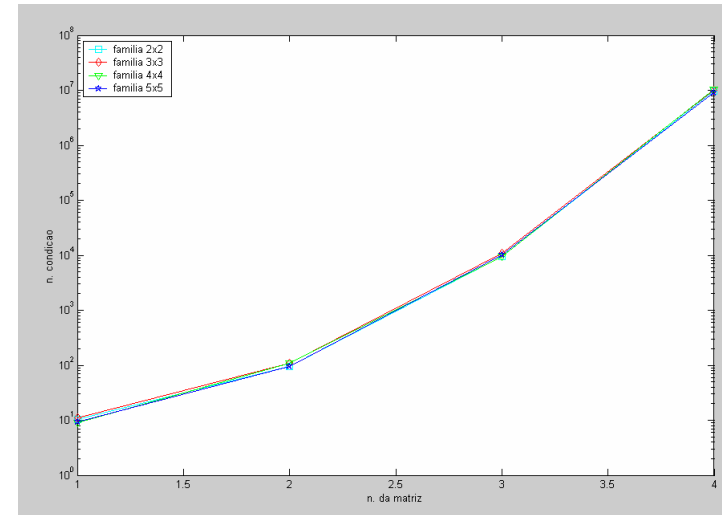
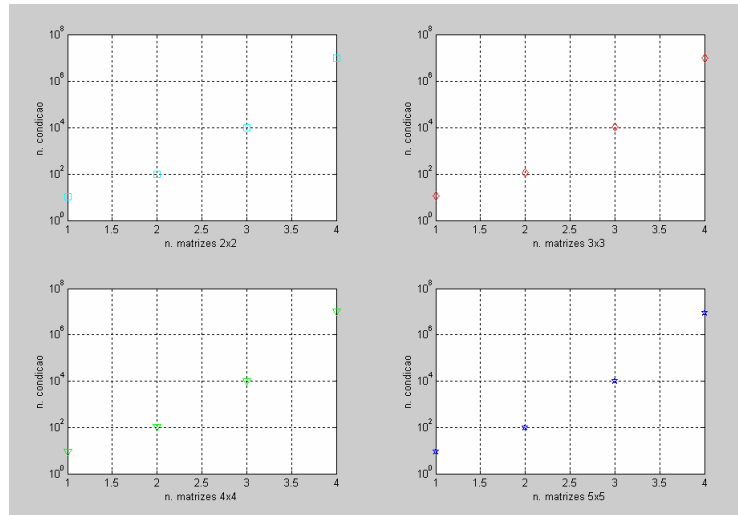


$$M = \begin{bmatrix} 0.8447 & 0.1939 & 0.2344 & 0.6555 \\ 0.3678 & 0.9048 & 0.5488 & 0.3919 \\ 0.6208 & 0.5692 & 0.9316 & 0.6273 \\ 0.7313 & 0.6318 & 0.3352 & 0.6991 \end{bmatrix}$$

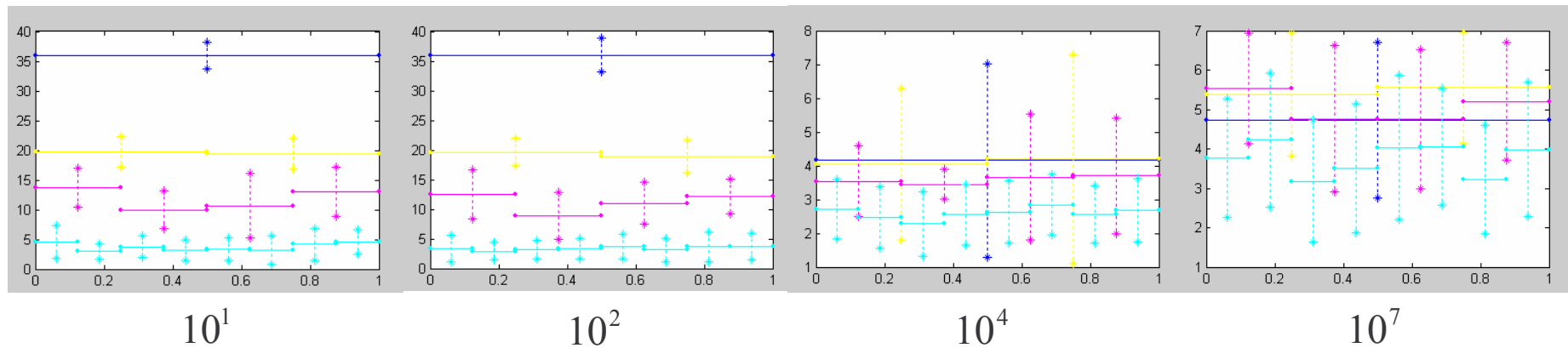
$$\text{cond}(M) = 46.4416$$



Simulações – cont.

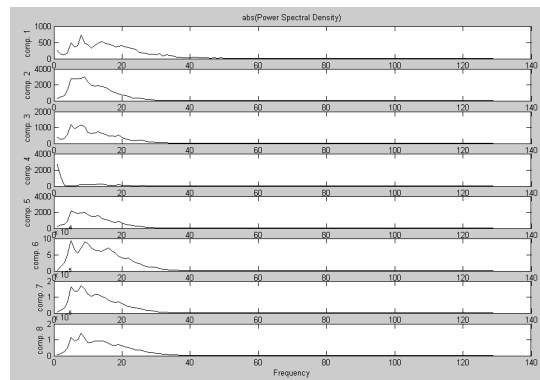
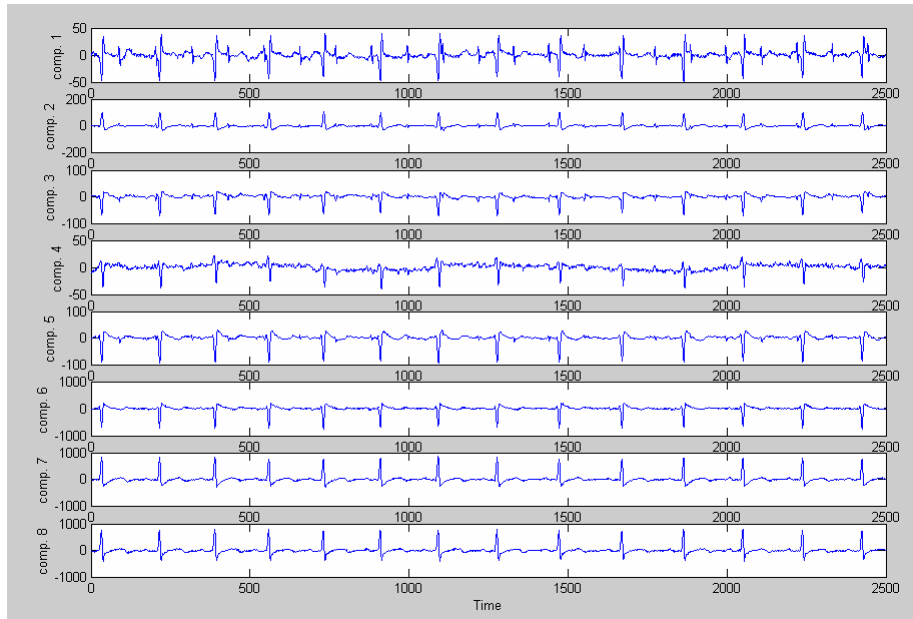


4×4



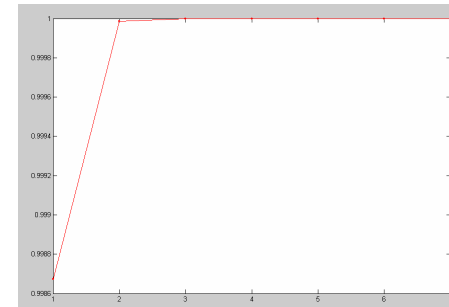
ECG de um Feto

Sinais obtidos pelos eléctrodos

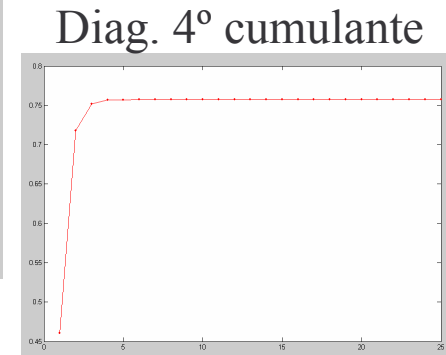


Análise em
Frequência

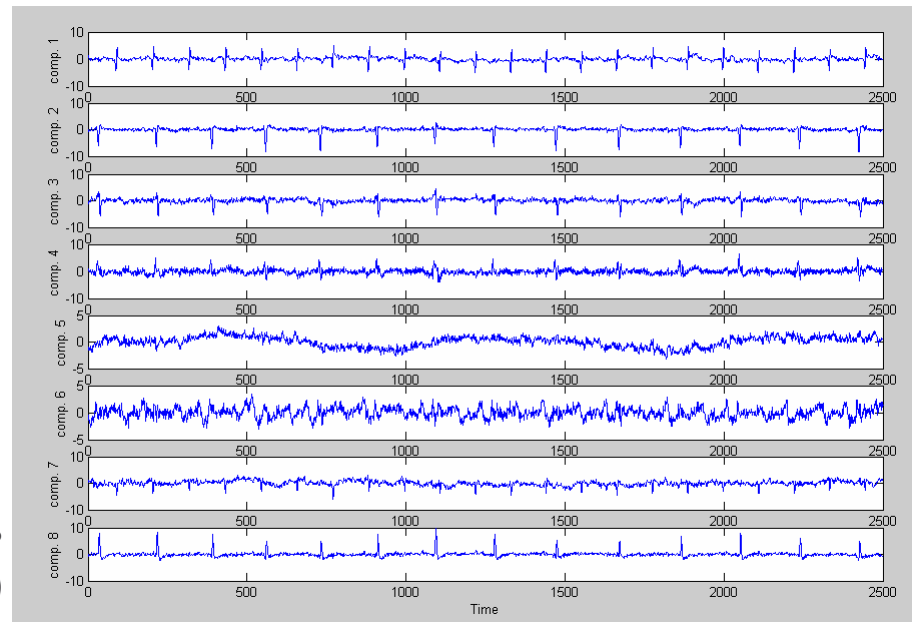
Fontes
(após ACI)



Diag. 2º cumulante

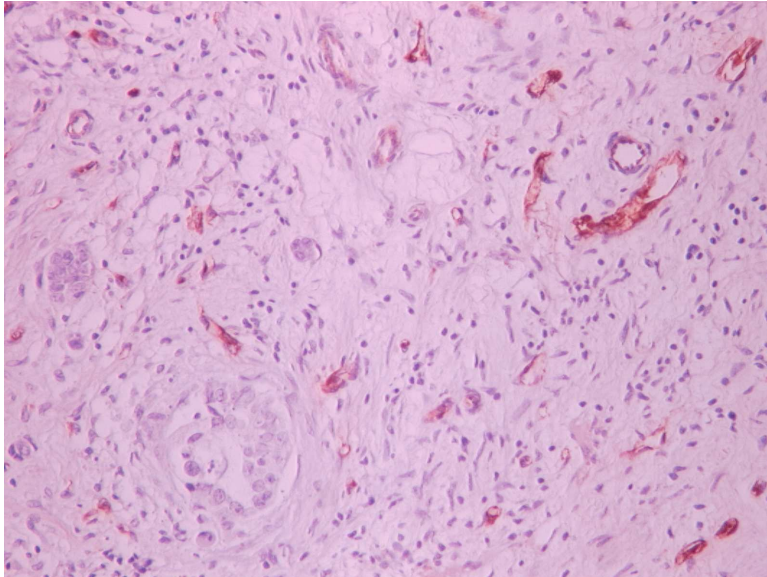


Diag. 4º cumulante

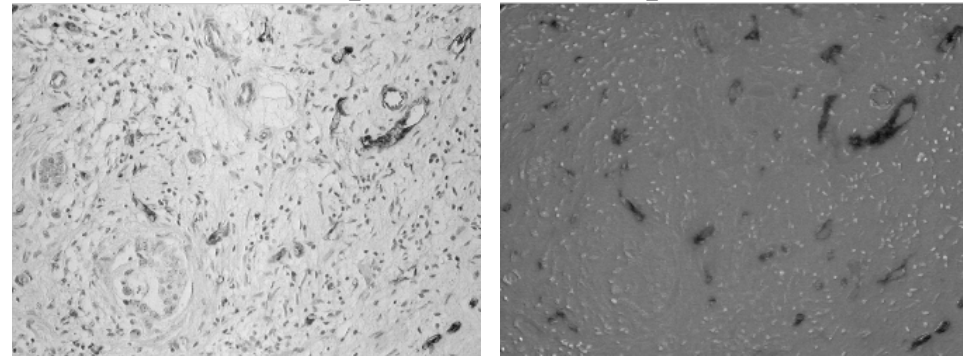


Identificação de Microvasos

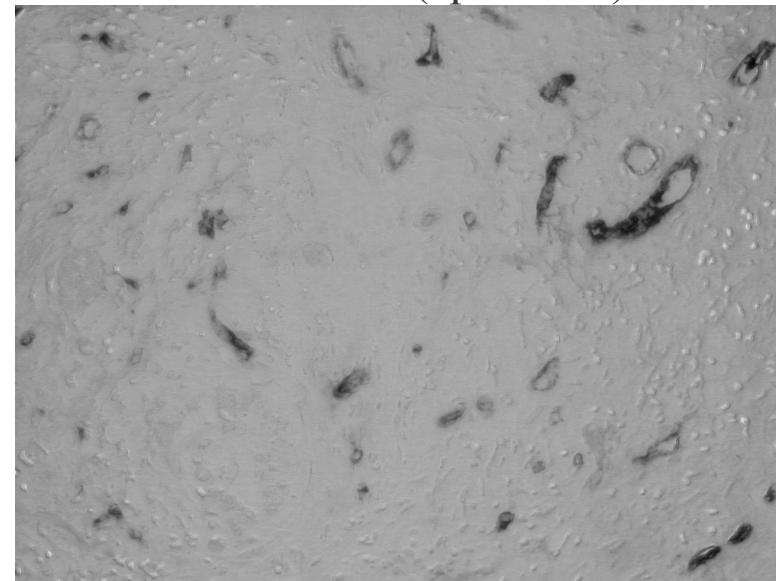
Imagem Original



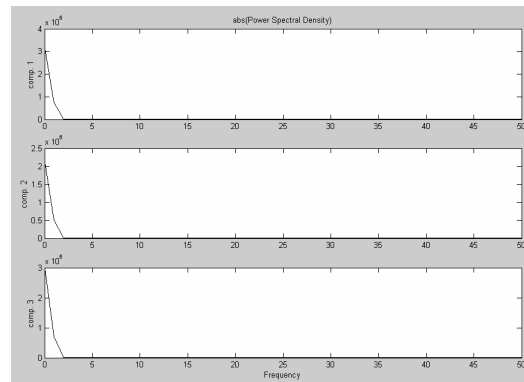
Componentes Principais



Microvasos (após ACI)



Análise em
Frequência



Fabrico de Tela para Pneus

Imagem Original



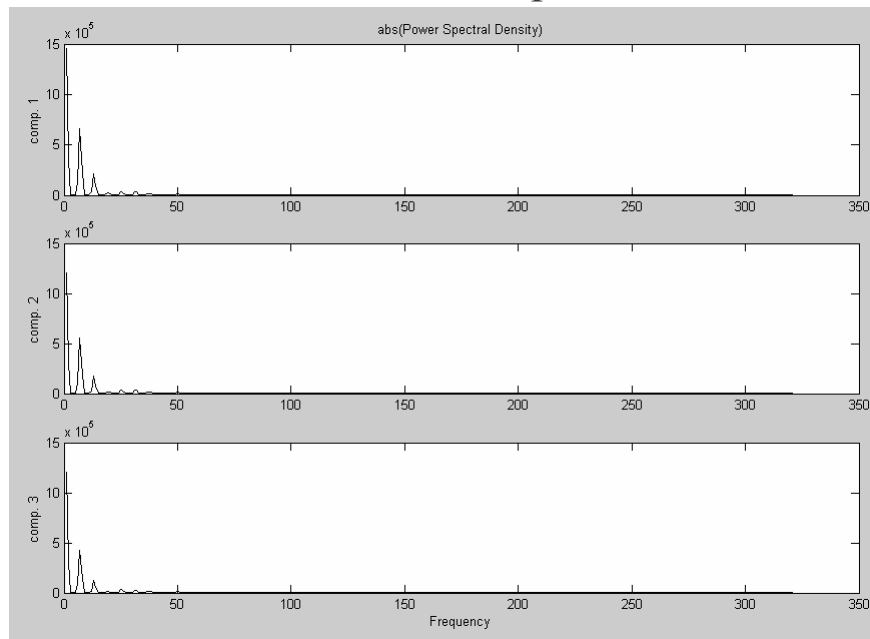
Imagem Classificada (após ACI)



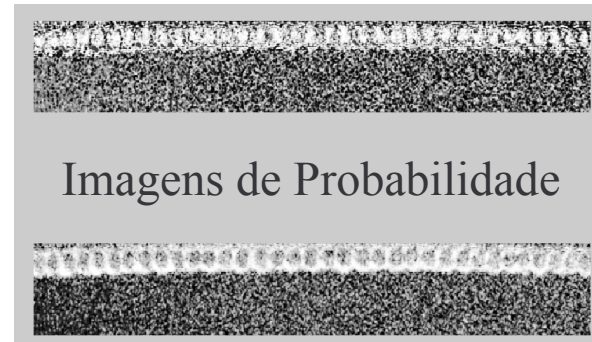
Imagens Binárias de Classificação



Análise em Frequência



Imagens de Probabilidade



Conclusões

- Implementou-se um método de Análise em Componentes Independentes com base no trabalho pioneiro de *Comon*
- Testou-se através de simulações a capacidade para separar fontes coincidentes no espectro de frequências
- Foram separadas com sucesso fontes espectralmente coincidentes em casos reais de aplicações concretas
 - Extração do ECG de um feto de forma não invasiva
 - Identificação de microvasos na angiogénese do cancro da mama
 - Identificação de fibra e borracha no processo de fabrico de tela para pneus