



FEUP Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

Guia para o estudo dos

AMPLIFICADORES DIFERENCIAIS E MULTIANDAR

Anexos

Franclim F. Ferreira

Pedro Guedes de Oliveira

Vítor Grade Tavares

Janeiro 2003

AMPLIFICADORES DIFERENCIAIS E MULTIANDAR

Índice

1. Teoremas	2
1.1. Teoremas de Thévenin e de Norton	2
1.2. Teorema da absorção da fonte.....	3
1.3. Teorema de Miller.....	3
2. Métodos	6
2.1. Método das transformações de circuito.....	6
2.2. Técnica do diporto equivalente	9
2.3. Método das constantes de tempo.....	12
2.4. Método de análise dum amplificador realimentado	15
3. Análises	18
3.1. Ganho do par diferencial com carga activa de espelho de corrente	18
3.2. Resposta da montagem EC-BC.....	19
3.3. Determinação do ganho do CC no CC-BC	20
3.4. Determinação da resposta do EC pelo método das constantes de tempo	22
3.5. Resistência de saída do multiplicador de V_{BE}	23
4. Teoremas	25
4.1. Realimentação negativa	25
4.2. Teoria da realimentação	26
4.3. Transístor como fonte controlada.....	30
4.4. Diporto.....	31
5. Exercícios	32
5.1. Resolução do Exercício 1.....	32
5.2. Resolução do Exercício 2.....	33
5.3. Resolução do Exercício 3.....	36
5.4. Resolução do Exercício 4.....	37
5.5. Resolução do Exercício 5.....	42
5.6. Resolução do Exercício 6.....	43
5.7. Resolução do Exercício 7.....	44
5.8. Resolução do Exercício 8.....	45

AMPLIFICADORES DIFERENCIAIS E MULTIANDAR

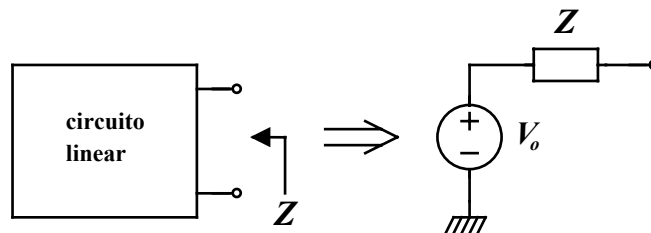
1. Teoremas

1.1. Teoremas de Thévenin e de Norton

Os teoremas de Thévenin e de Norton são dois teoremas duais aplicáveis a circuitos lineares.

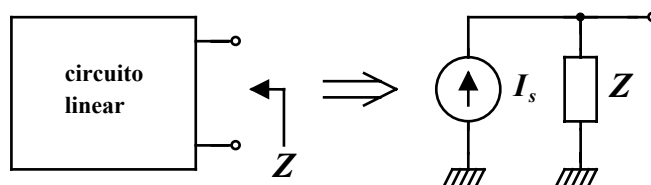
O teorema de Thévenin estabelece que qualquer circuito linear visto de um porto pode ser representado por uma fonte de tensão (igual à tensão do porto em circuito aberto) em série com uma impedância (igual à impedância do circuito vista desse porto).

A esta configuração chamamos configuração Thévenin.



O teorema de Norton estabelece que qualquer circuito linear visto de um porto pode ser representado por uma fonte de corrente (igual à corrente do porto em curto-circuito) em paralelo com uma impedância (igual à impedância do circuito vista desse porto).

A esta configuração chamamos configuração Norton.

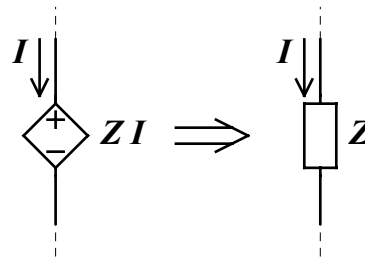


Decorre destes dois teoremas que uma configuração Thévenin pode ser transformada numa configuração Norton, e vice-versa, desde que $V_o = Z I_s$.

1.2. Teorema da absorção da fonte

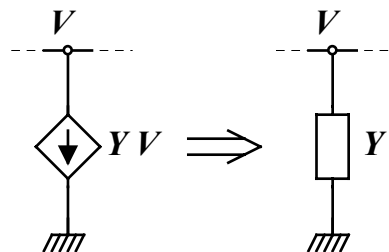
O teorema da absorção da fonte tem duas formas duais: o teorema da absorção da fonte de tensão e o teorema da absorção da fonte de corrente.

O teorema da absorção da fonte de tensão estabelece que se existir num ramo, com corrente I , uma fonte de tensão controlada por essa mesma corrente I , a fonte pode ser substituída por uma simples impedância de valor igual ao factor controlante da fonte.



A demonstração é trivial! Uma impedância Z percorrida por uma corrente I , origina a mesma queda de tensão que a fonte ZI garante nos seus terminais.

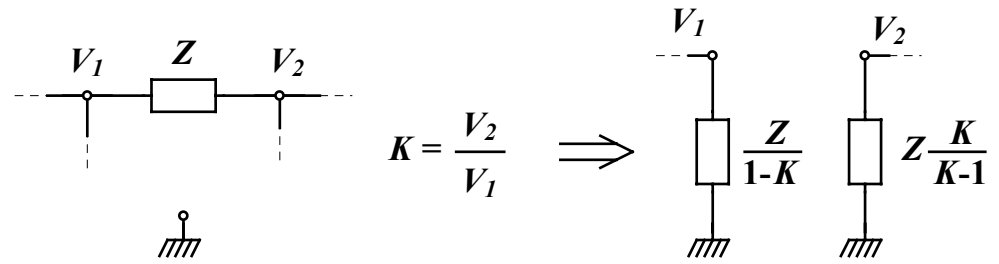
O teorema da absorção da fonte de corrente estabelece que se existir num ramo, submetido a uma tensão V , uma fonte de corrente controlada por essa mesma tensão V , a fonte pode ser substituída por uma simples admitância de valor igual ao factor controlante da fonte.



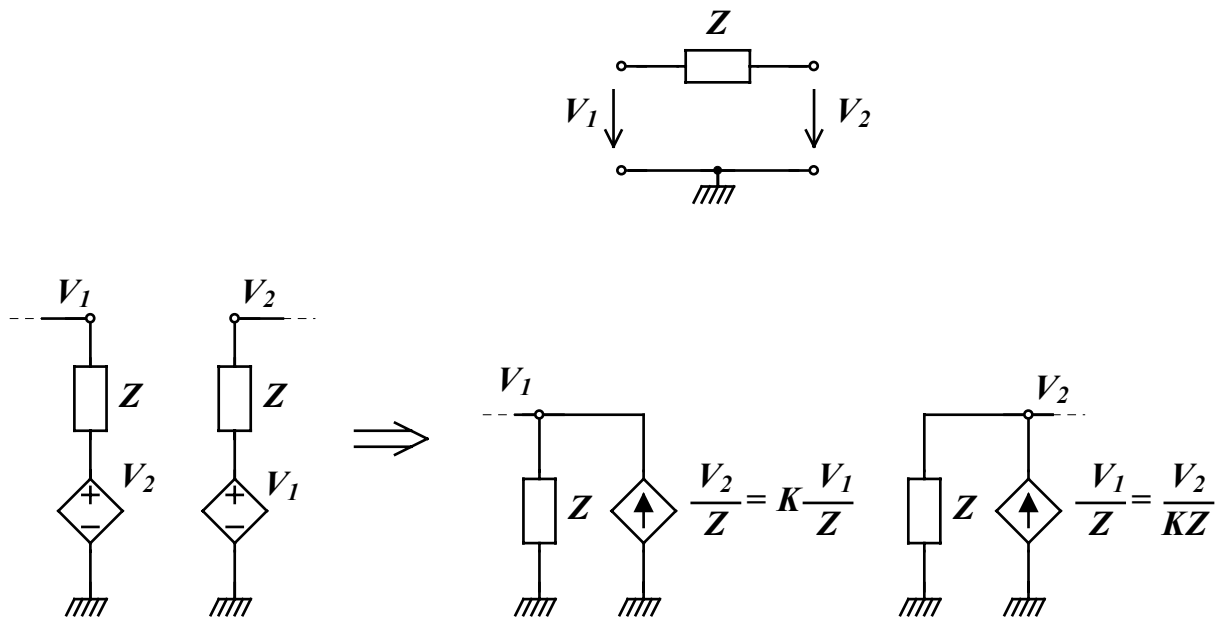
A demonstração é igualmente trivial! Uma admitância Y submetida a uma tensão V , impõe a mesma corrente que a fonte YV conduz.

1.3. Teorema de Miller

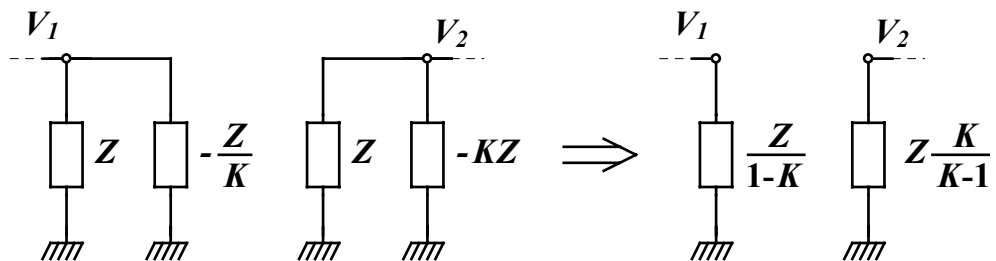
O teorema de Miller estabelece que, num circuito linear, se existir um ramo com uma impedância Z , ligando dois nós com tensões nodais V_1 e V_2 , podemos substituir esse ramo por dois ligando os referidos nós à massa, com impedâncias respectivamente iguais a $Z / (1-K)$ e $KZ / (K-1)$, em que $K = V_2 / V_1$.



Realmente, se usarmos a técnica do diporto equivalente para substituir o diporto, ao lado representado, pelo seu equivalente, resulta sucessivamente:



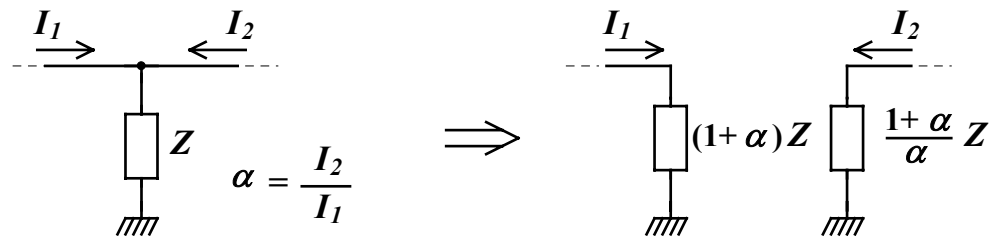
e, pelo teorema da absorção da fonte, resulta finalmente:



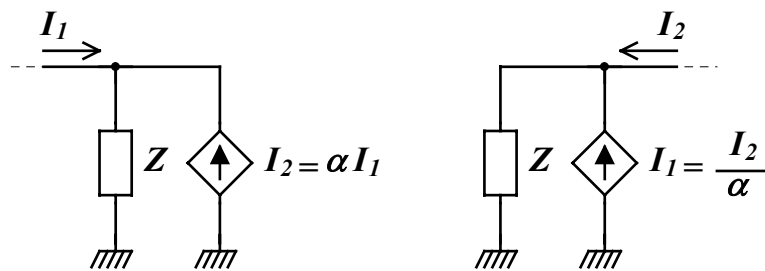
Como todos os teoremas dos circuitos lineares, o teorema de Miller admite uma forma dual:

Teorema dual de Miller

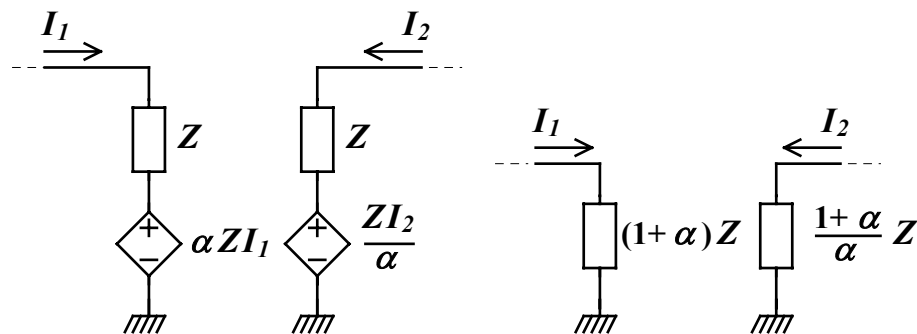
Se existir um ramo com uma impedância Z , ligando um nó onde convergem as correntes I_1 e I_2 e a massa, podemos substituir esse ramo por dois, conduzindo as referidas correntes, com impedâncias respectivamente iguais a $(1+\alpha)Z$ e $(1+\alpha)Z/\alpha$, em que $\alpha = I_2 / I_1$.



Na verdade, substituindo este diporto pelo diporto equivalente ao lado representado,



resulta sucessivamente, primeiro, o esquema abaixo à esquerda e, finalmente, aplicando o teorema da absorção da fonte, o esquema abaixo à direita.



2. Métodos

2.1. Método das transformações de circuito

O método das transformações de circuito é um método para a determinação dos parâmetros de circuitos amplificadores, como o ganho e as resistências de entrada e de saída, através de transformações simples baseadas na aplicação dos teoremas básicos dos circuitos (Thévenin, Norton, etc.).

O método foi inicialmente apresentado no artigo publicado nas IEEE Transactions on Education, vol. 42, pp. 212-216, Agosto 1999:

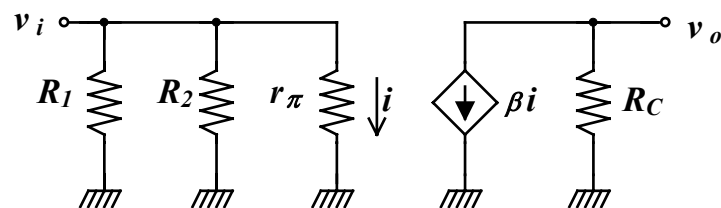
"Using Circuit Transformations for the Evaluation of Amplifier Parameters"

Nota: O uso deste artigo está submetido às regras de direitos de autor do IEEE. Assim, para qualquer utilização que não seja simplesmente o uso pessoal, é necessária a autorização expressa do IEEE (Copyrights and Trademarks - copyrights@ieee.org).

A sua aplicação é especialmente interessante quando, no âmbito de uma análise de "papel e lápis", se pretende obter, de forma expedita e com pequeno volume de cálculo, valores razoavelmente aproximados dos parâmetros do circuito.

O fio condutor da aplicação do método consiste na redução progressiva dos elementos do circuito até à obtenção de uma configuração que permita, por simples inspeção, a determinação dos parâmetros.

Assim, o primeiro passo é a resolução das eventuais séries ou paralelos de resistências existentes. Por exemplo, o circuito abaixo sugere a conveniência de realizar o paralelo de R_1 , R_2 e r_π .

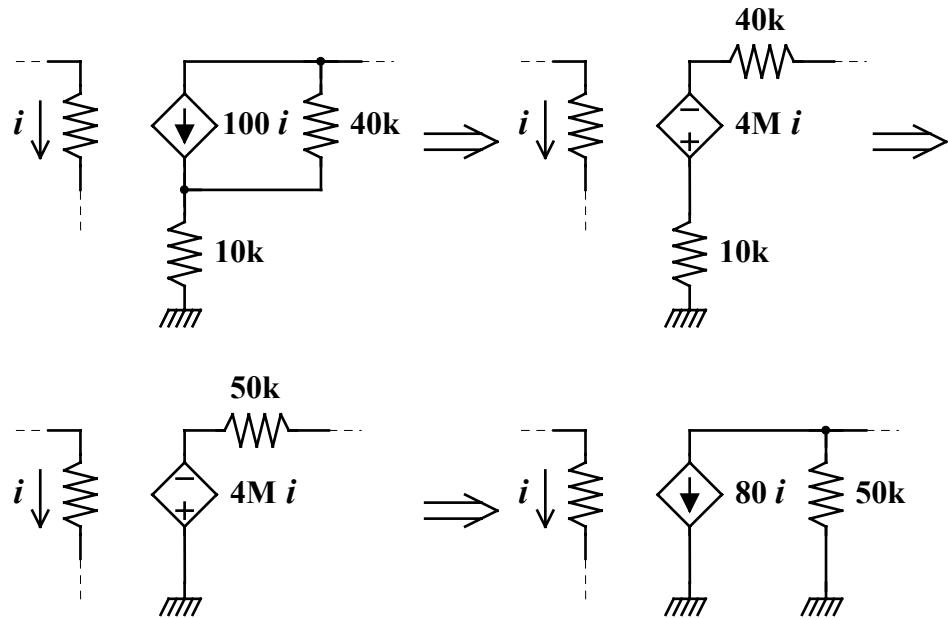


Com R_1 e R_2 não há qualquer problema, mas quanto a r_π , notemos que nesse ramo está definida a corrente controlante da fonte βi . Assim, antes de realizar o paralelo, impõe-se a simples mudança de variável $i = v_i / r_\pi$, pelo que a fonte passa a ter o valor:

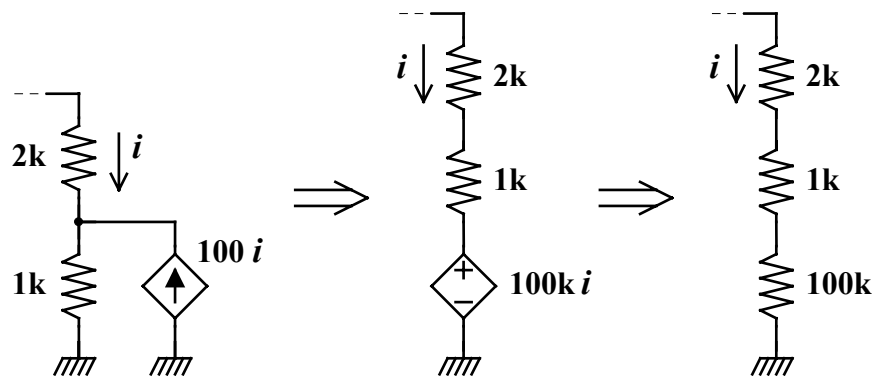
$$\beta i = \frac{\beta}{r_\pi} v_i = g_m v_i$$

e como após efectuar o paralelo, se mantém a tensão v_i , nada impede essa operação.

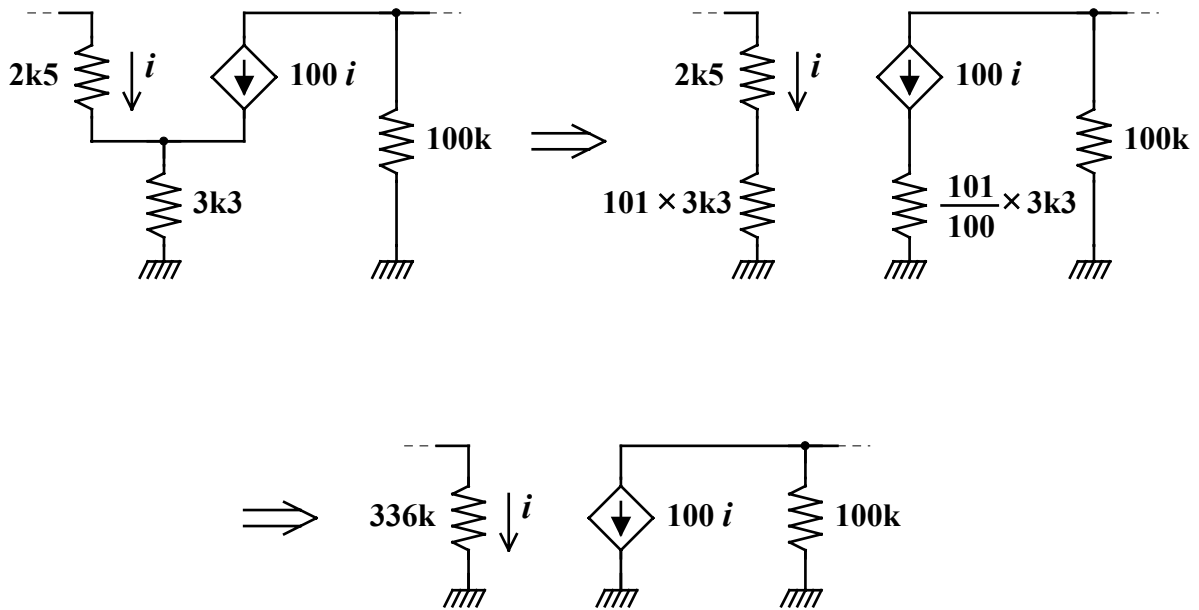
Frequentemente ocorre a série de uma configuração Norton com uma resistência (ou o paralelo de uma configuração Thévenin com uma resistência). Seja a aplicação do teorema de Norton ou do teorema de Thévenin ao conjunto, seja a sequência ilustrada na figura seguinte, permitem simplificar o circuito.



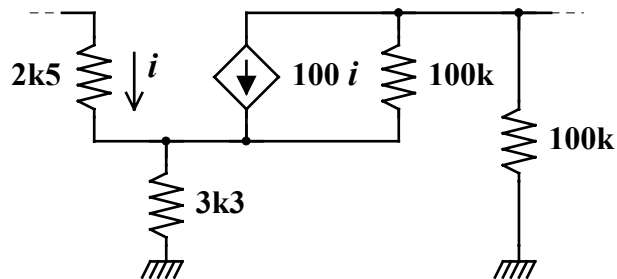
Outra situação frequente é a que requiere a aplicação do teorema da absorção da fonte numa das suas duas formas. A figura seguinte ilustra uma situação possível.



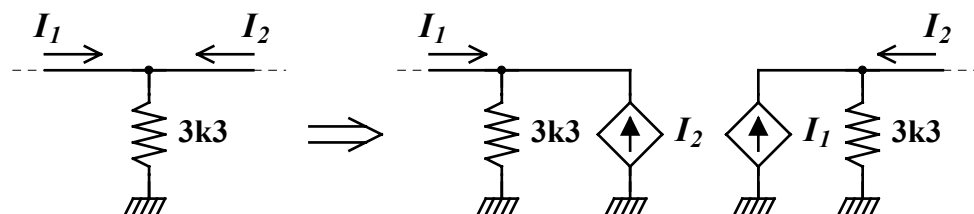
A existência de uma resistência onde se somam duas correntes conhecidas pode ser facilmente simplificada, recorrendo ao teorema dual de Miller, como se mostra na figura seguinte:



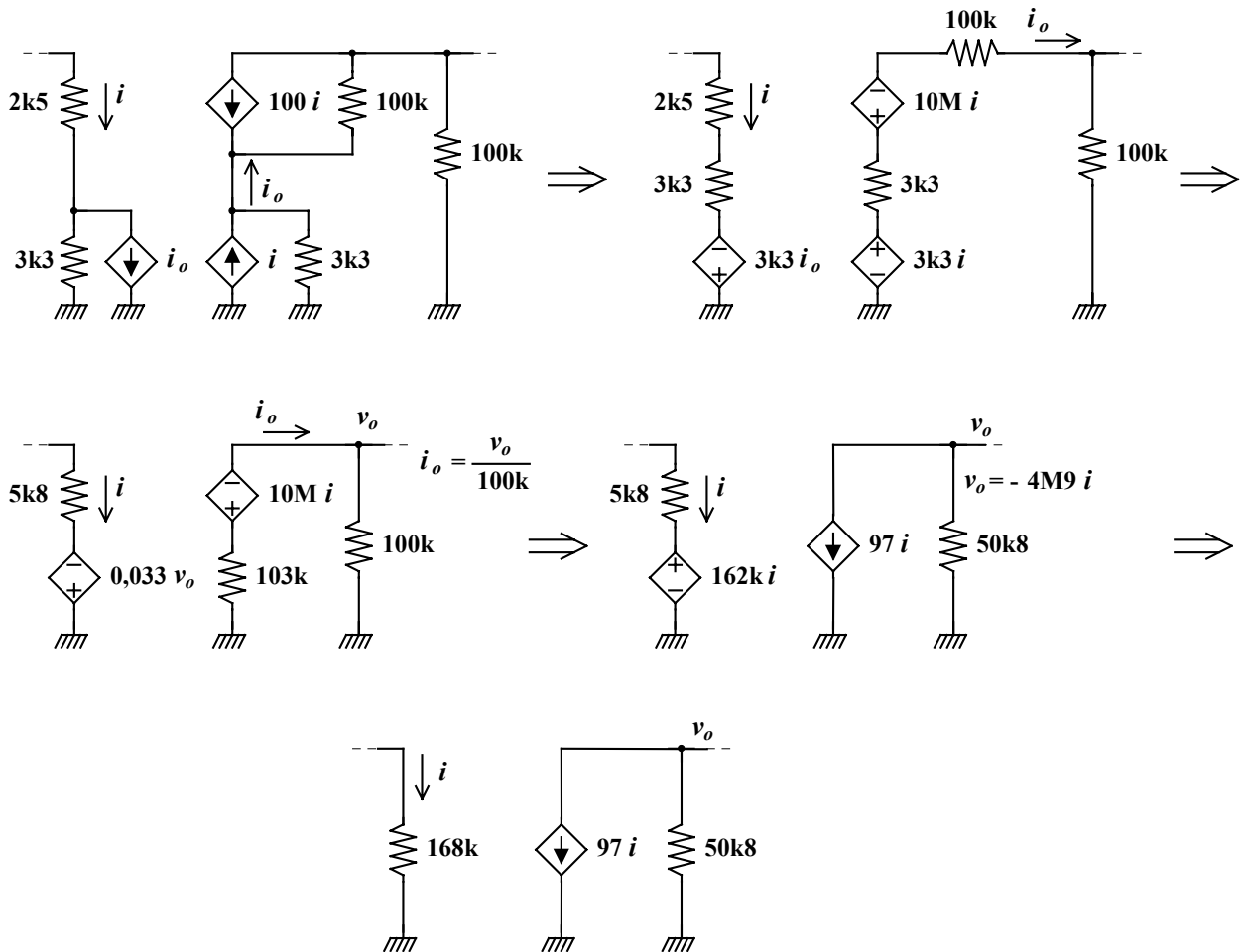
O exemplo anterior não é mais, afinal, do que um caso de realimentação: a resistência de 3,3 k Ω realiza, de facto, uma realimentação. Há, contudo, casos de realimentação que não podem ser tão facilmente resolvidos como o do caso anterior, como, por exemplo, o que se ilustra a seguir.



Podemos simplificar o circuito recorrendo à técnica do diporto equivalente, aplicada ao diporto essencialmente constituído pela resistência de 3,3 k Ω, como se mostra na figura seguinte:



Substituindo a resistência de 3,3 k Ω pelo diporto equivalente, realiza-se então a simplificação, como se mostra na sequência seguinte.



Naturalmente, podem ocorrer outras situações diferentes das atrás expostas que, contudo, poderão ser resolvidas de forma equivalente. Para melhor esclarecimento, veja na web uma utilização animada e um exemplo guiado de aplicação deste método.

2.2. Técnica do diporto equivalente

A técnica do diporto equivalente consiste em substituir um dado diporto inserido num circuito por um outro diporto equivalente em que a transmissão interna entre os dois portos é representada por fontes controladas.

Trata-se, assim, de determinar um esquema que implementa o sistema de equações que relaciona as variáveis (tensão e corrente) associadas aos dois portos. Esse sistema pode assumir quatro formas, dependendo da escolha que se faz das variáveis independentes, que terão de ser, necessariamente, uma associada a um porto e outra ao outro porto:

$$V_1, V_2 = f(I_1, I_2)$$

$$V_1, I_2 = f(I_1, V_2)$$

$$I_1, V_2 = f(V_1, I_2)$$

$$I_1, I_2 = f(V_1, V_2)$$

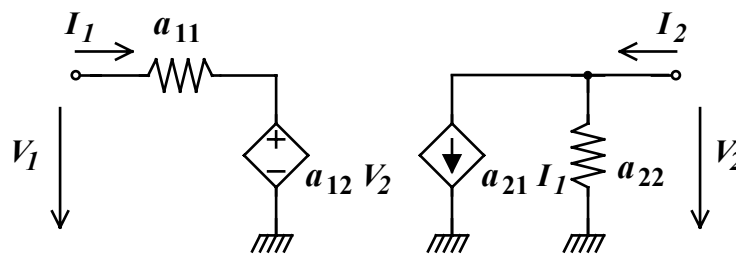
Notemos também que cada uma das equações, sendo uma soma de tensões ou uma soma de correntes, pode ser representada equivalentemente por uma configuração Thévenin ou por uma configuração Norton, respectivamente.

Por exemplo, o sistema $V_1, I_2 = f(I_1, V_2)$, que corresponde às equações

$$V_1 = a_{11} I_1 + a_{12} V_2$$

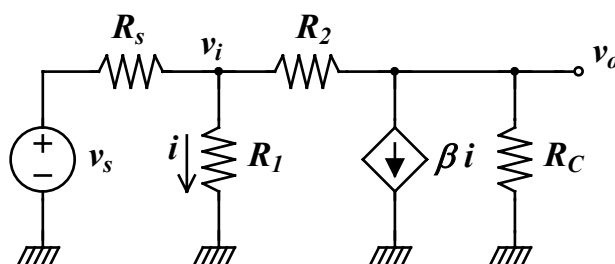
$$I_2 = a_{21} I_1 + a_{22} V_2$$

em que a_{11} é uma resistência, a_{12} e a_{21} são factores de transmissão sem dimensões e a_{22} é uma condutância, pode ser representado pelo esquema equivalente da figura ao lado.



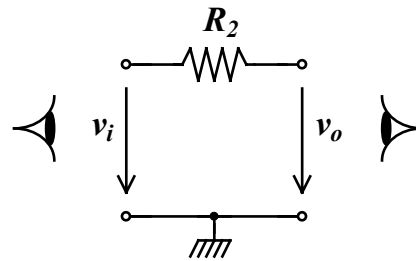
É um esquema deste tipo que procuramos determinar. Vejamos a forma de proceder através de um exemplo.

Suponhamos que desejamos analisar o circuito amplificador ao lado representado, no qual a existência da resistência R_2 dificulta a análise, pelo que decidimos aplicar a técnica do diporto equivalente a essa resistência.

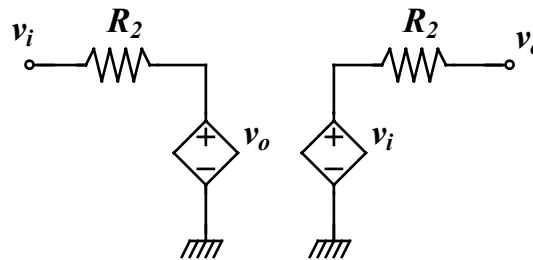


Trata-se pois de substituir o diporto abaixo representado pelo seu equivalente. A escolha mais conveniente para as variáveis independentes é, claramente, as tensões nos dois portos, tendo em conta que o nosso objectivo final é obter um esquema equivalente do circuito amplificador que

permita facilmente determinar os ganhos e as resistências de entrada e de saída.

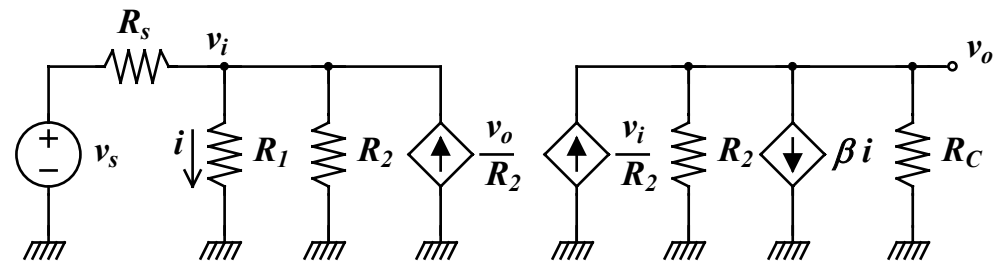


Olhando de cada um dos portos e desenhando o que vemos, obtém-se a configuração representada a seguir em que as variáveis independentes foram representadas por fontes controladas de tensão.



Notemos que este esquema não implementa nenhum dos quatro sistemas de equações referidos atrás, e que são coerentes, no sentido de que as variáveis independentes são as mesmas em ambas as equações. Mas, basta transformar as configurações Thévenin em configurações Norton, para obter um esquema equivalente coerente, no sentido indicado.

Aliás, tendo em conta a topologia do circuito global do nosso exemplo, interessa justamente utilizar configurações Norton no diporto equivalente. Substituindo no circuito global, resulta:



Este esquema pode agora ser facilmente simplificado conduzindo a um esquema equivalente simples do amplificador. Particularmente, tratando-se

de um exemplo numérico, esta técnica revela ainda maior eficiência, pois há simplificações óbvias que não são tão evidentes num caso geral.

2.3. Método das constantes de tempo

O método das constantes de tempo permite obter, em geral com boa aproximação, uma estimativa da frequência superior de corte a -3 dB, ω_H , e/ou da frequência inferior de corte a -3 dB, ω_L , da resposta em frequência de um amplificador, quando não é possível determinar, por simples inspecção, os valores dos pólos e zeros da resposta.

De facto, se for possível determinar facilmente os pólos e zeros, uma boa aproximação de ω_H é:

$$\omega_H \cong 1 / \sqrt{\frac{1}{\omega_{p1}^2} + \frac{1}{\omega_{p2}^2} + \dots - \frac{2}{\omega_{z1}^2} - \frac{2}{\omega_{z2}^2} - \dots}$$

ou até $\omega_H \cong \omega_{p1}$, se este for dominante ($\omega_{p1} \ll \omega_{p2}, \dots, \omega_{z1}, \omega_{z2}, \dots$).

Analogamente, uma boa aproximação de ω_L é:

$$\omega_L \cong \sqrt{\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2 + \dots - 2\omega_{z1}^2 - 2\omega_{z2}^2 - \dots}$$

ou mesmo $\omega_L \cong \omega_{p1}$, se este for dominante ($\omega_{p1} \gg \omega_{p2}, \dots, \omega_{z1}, \omega_{z2}, \dots$).

São, contudo, frequentes as situações em que por haver, por exemplo, condensadores interactuantes, não é possível determinar os pólos e zeros facilmente.

A função de transferência de um amplificador pode escrever-se como sendo

$A(s) = A_M F_L(s) F_H(s)$, em que A_M é o ganho às médias frequências, $F_L(s)$ é a resposta às baixas frequências e $F_H(s)$ é a resposta às altas frequências.

A $F_H(s)$ pode dar-se a forma:

$$F_H(s) = \frac{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n_H} s^{n_H}}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{n_H} s^{n_H}}$$

sendo os pólos de alta frequência as raízes do denominador e os zeros as raízes do numerador. Normalmente, os zeros ocorrem a frequências muito mais elevadas do que o primeiro ou primeiros pólos.

Ora
$$b_1 = \frac{1}{\omega_{p1}} + \frac{1}{\omega_{p2}} + \dots + \frac{1}{\omega_{pn_H}}$$

e pode demonstrar-se [Gray and Searle, 1969] que $b_1 = \sum_{i=1}^{n_H} C_i R_i^o$

em que R_i^o é a resistência vista do condensador C_i com todos os outros em circuito aberto.

Se houver um pólo P_1 dominante, então

$$b_1 \cong \frac{1}{\omega_{p1}} \quad \text{e, portanto,} \quad \omega_H \cong \omega_{p1} \cong \frac{1}{b_1}$$

isto é, podemos determinar aproximadamente ω_H através da expressão:

$$\omega_H \cong \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_H} C_i R_i^o}$$

A este método chama-se método das constantes de tempo em circuito aberto para determinar a frequência superior de corte.

A $F_L(s)$ pode dar-se a forma

$$F_L(s) = \frac{s^{n_L} + d_1 s^{n_L-1} + \dots}{s^{n_L} + e_1 s^{n_L-1} + \dots}$$

sendo os pólos de baixa frequência as raízes do denominador e os zeros as raízes do numerador. Normalmente, os zeros ocorrem a frequências muito mais baixas do que o pólo ou pólos de frequência mais alta.

Ora $e_1 = \omega_{p1} + \omega_{p2} + \dots + \omega_{pn_L}$ e pode demonstrar-se que

$$e_1 = \sum_{i=1}^{n_L} \frac{1}{C_i R_i^s} \quad \text{em que } R_i^s \text{ é a resistência vista do}$$

condensador C_i com todos os outros em curto-circuito.

Se houver um pólo P_1 dominante, então $e_1 \cong \omega_{p1}$ e, portanto,

$\omega_L \cong \omega_{p1} \cong e_1$ isto é, podemos determinar aproximadamente ω_L através da expressão:

$$\omega_L \cong \sum_{i=1}^{n_L} \frac{1}{C_i R_i^s}$$

A este método chama-se método das constantes de tempo em curto-circuito para determinar a frequência inferior de corte.

A análise da resposta às altas frequências reveste-se de maior importância na medida em que, enquanto às baixas a resposta é condicionada por condensadores de acoplamento, escolhidos pelo projectista e, portanto, este tem controlo sobre a resposta, às altas frequências a resposta é condicionada

pelas capacidades intrínsecas dos transístores, cujo controlo escapa, em larga medida, ao projectista.

Desta forma, enquanto às baixas, o projectista pode escolher as capacidades de maneira a impor a existência de um pólo dominante, às altas frequências, é importante averiguar a localização, pelo menos do segundo pólo. Esta, é determinada pelo coeficiente b_2 do denominador de $F_H(s)$.

Ora b_2 é o somatório de q termos do tipo $R_{ii}^o C_i R_{jj}^i C_j$ em que q é igual ao número de combinações de n_H (número de pólos de alta frequência, igual ao número de condensadores independentes) dois a dois.

Condensadores independentes

Diz-se que n condensadores são independentes se for possível fixar a tensão de um deles independentemente da tensão de cada um dos outros.

Assim, de n condensadores em série, ou em paralelo, apenas um é independente.

Se n condensadores e, eventualmente, uma fonte de tensão, constituírem uma malha fechada, apenas $n - 1$ são independentes.

Cada condensador independente origina um pólo da função de transferência.

R_{ii}^o é a resistência vista pelo condensador C_i com todos os outros em circuito aberto, pelo que coincide com a resistência que, atrás, designamos por R_i^o no cálculo de b_1 , e R_{jj}^i é a resistência vista por C_j com C_i em curto-circuito e todos os outros em aberto.

É de notar que $R_{ii}^o C_i R_{jj}^i C_j = R_{jj}^o C_j R_{ii}^j C_i$ o que nos permite escolher entre

R_{jj}^i e R_{ii}^j a que for mais fácil de calcular.

Desta forma, com três pólos, logo três condensadores independentes, teremos, por exemplo:

$$b_2 = R_{11}^o C_1 R_{22}^1 C_2 + R_{11}^o C_1 R_{33}^1 C_3 + R_{22}^o C_2 R_{33}^2 C_3$$

e com dois pólos, teremos, apenas $b_2 = R_{11}^o C_1 R_{22}^1 C_2 = R_{22}^o C_2 R_{11}^2 C_1$

Quando temos apenas dois pólos, podemos verificar facilmente se existe um pólo dominante (considerando que o primeiro pólo é dominante se ocorrer, pelo menos, uma década abaixo do segundo), usando a regra prática:

Se $\frac{b_1^2}{b_2} \geq 12,1$ então $\omega_{p2} \geq 10 \omega_{p1}$

e, portanto, $\omega_H \cong \omega_{p1} \cong \frac{1}{b_1}$ e $\omega_{p2} \cong \frac{b_1}{b_2}$

Regra prática

Seja $\omega_{p2} = k \omega_{p1}$ com $k \geq 10$

$$b_1 = \frac{1}{\omega_{p1}} + \frac{1}{\omega_{p2}} = \frac{k+1}{k} \frac{1}{\omega_{p1}} \Rightarrow b_1^2 = \frac{(k+1)^2}{k^2} \frac{1}{\omega_{p1}^2}$$

$$\text{e } b_2 = \frac{1}{\omega_{p1}\omega_{p2}} = \frac{1}{k\omega_{p1}^2}$$

$$\text{donde } \frac{b_1^2}{b_2} = \frac{(k+1)^2}{k} = A$$

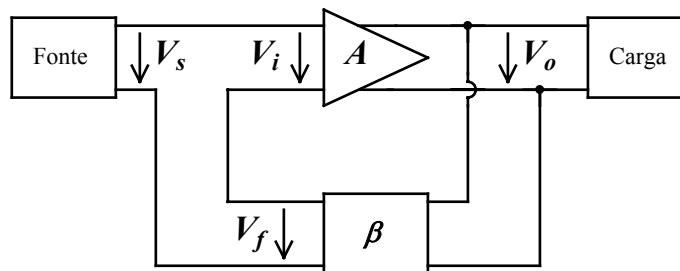
$$\text{De } k = \frac{A-2 \pm \sqrt{(2-A)^2 - 4}}{2} \geq 10 \text{ resulta } A \geq 12,1$$

$$\text{logo, se } \frac{b_1^2}{b_2} \geq 12,1 \text{ então } \omega_{p2} \geq 10 \omega_{p1}$$

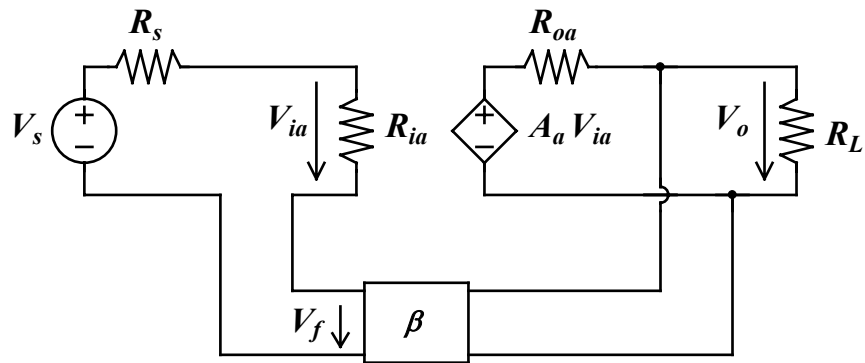
2.4. Método de análise dum amplificador realimentado

Como vimos, podemos obter facilmente os valores do ganho e das resistências de entrada e de saída, conhecendo o valor da quantidade de realimentação $1+\beta A$. Assim, o que necessitamos é de um método que nos permita, de uma forma expedita, calcular os valores de β e de A .

Usaremos, para ilustrar a forma de proceder, um exemplo de topologia tensão-série (para as outras topologias será semelhante) que, na sua forma ideal, se apresenta segundo o diagrama abaixo representado.

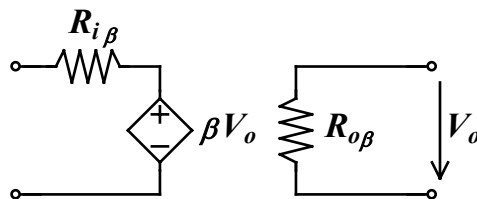


Num circuito real, o esquema apresentar-se-á como se mostra a seguir.



Uma vez que o ganho em malha aberta deve incluir os efeitos de carga da fonte e da carga, torna-se necessário incorporar as resistências R_s e R_L no amplificador básico.

Para além disso, é preciso substituir o bloco de realimentação por um esquema equivalente que traduza a sua transmissão unilateral da saída para a entrada, o que, para a topologia indicada, deverá ser do tipo a seguir figurado.



Transmissão unilateral

O bloco de realimentação é suposto ter transmissão apenas no sentido da saída do circuito para a sua entrada. Esta suposição, num caso prático, não só não é verdadeira, como a transmissão num sentido pode ser da mesma ordem de grandeza da transmissão no sentido inverso. Todavia, a transmissão da entrada para a saída é, geralmente, desprezável comparada com a transmissão através do amplificador básico. Podemos admitir, assim, em boa aproximação, que o bloco de realimentação é unilateral.

Admitimos também que o factor de realimentação β é independente, quer da resistência da fonte, quer da resistência de carga.

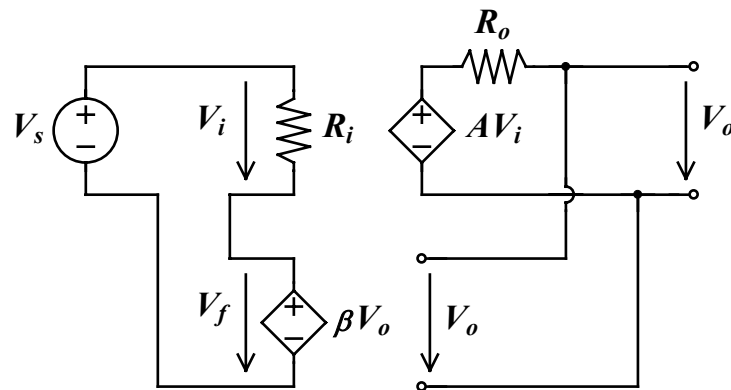
Usando a técnica do diporto equivalente, obtém-se facilmente o esquema desejado. Notemos que a escolha conveniente das variáveis independentes é, no porto de saída, a grandeza amostrada (neste caso, a tensão) e, no porto de entrada, a corrente se pretendemos uma configuração Thévenin (como é o caso), ou a tensão se pretendemos uma configuração Norton (no caso de comparação paralelo).

No esquema obtido, devemos ignorar a transmissão no sentido da entrada para a saída, o que equivale a anular a fonte controlada da malha da saída (tenha-se em atenção que uma fonte de corrente deve ser substituída por um circuito aberto e uma fonte de tensão por um curto-circuito). Trata-se de

uma imposição da hipótese de unilateralidade subjacente a este método, que constitui um erro, mas que não só é desprezável, como permite a determinação dos parâmetros do amplificador realimentado duma forma simples e muito útil em condições de projecto.

Note-se que no processo de obtenção do esquema equivalente para o bloco de realimentação, o valor do factor de realimentação, β , determina-se simplesmente como sendo o factor controlante da fonte da malha da entrada.

As resistências $R_{i\beta}$ e $R_{o\beta}$ traduzem o efeito de carga do bloco de realimentação sobre o amplificador básico, pelo que também devem ser incorporadas neste. Obtém-se, assim, um esquema equivalente que, após transformações simples, terá o aspecto seguinte.



Neste esquema, o cálculo do ganho em malha aberta, A , faz-se facilmente, impondo $\beta = 0$ e determinando V_o / V_s .

Os parâmetros do amplificador realimentado resultam então trivialmente a partir das expressões:

- ganho de tensão $A_f = A / (1 + \beta A)$
- resistência de entrada $R_{if} = R_i (1 + \beta A)$
- resistência de saída $R_{of} = R_o / (1 + \beta A)$

3. Análises

3.1. Ganho do par diferencial com carga activa de espelho de corrente

Admitindo para o espelho de corrente um funcionamento perfeitamente simétrico, i.e., desprezando o erro

$$\frac{1}{1+2/\beta} \quad (\text{ver secção 3.2.})$$

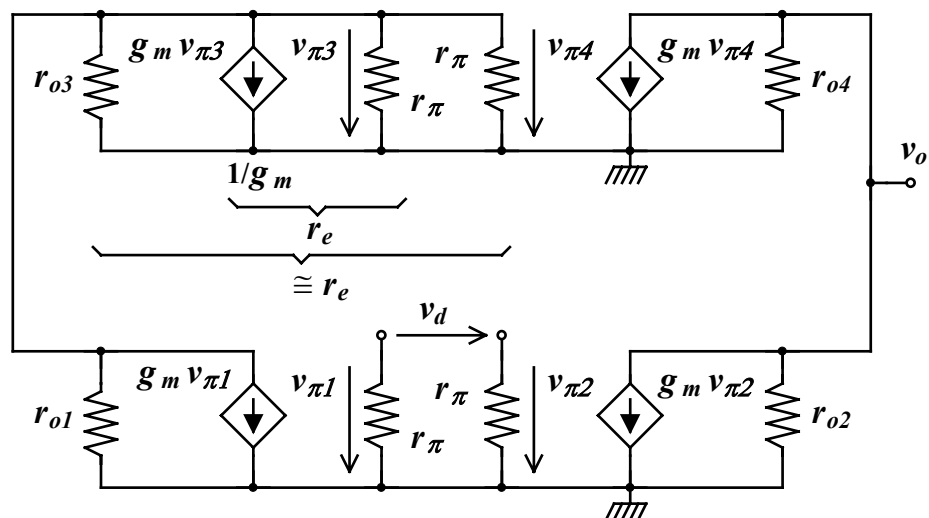
a corrente imposta ao colector de T_3 (entrada do espelho) é reproduzida no colector de T_4 (saída do espelho).

Desta forma, a corrente de saída do par (ver fig. 38) é $g_m v_d$. Como, para compensarmos o funcionamento não ideal dos transístores devemos considerar as suas resistências r_o , em paralelo com a carga, em circuito aberto, teremos:

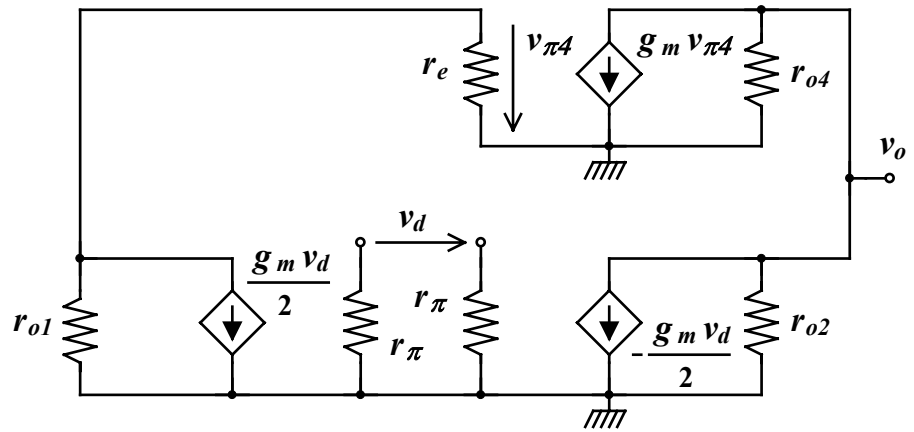
$$v_o = g_m (r_{o2} // r_{o4}) v_d$$

Podemos chegar a este mesmo resultado, de uma forma mais laboriosa, mas que tem, porventura, a virtude de suscitar menos dúvidas. Usaremos o método das transformações de circuito para, a partir do esquema equivalente do par diferencial, chegar a um esquema equivalente simplificado do seu funcionamento como amplificador.

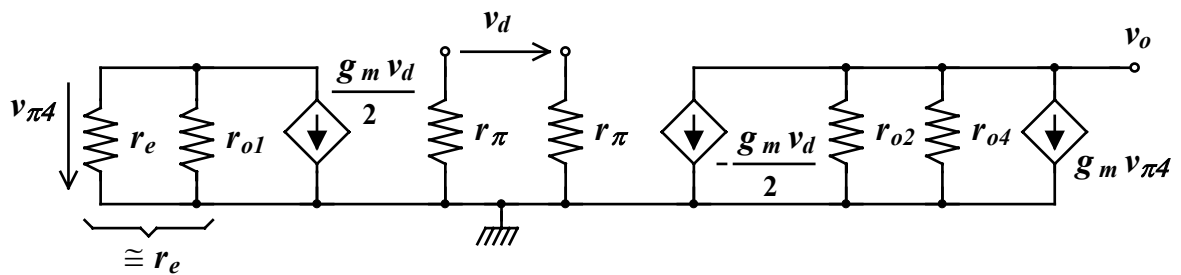
Nos esquemas seguintes, em que os transístores são supostos idênticos e com o mesmo ponto de funcionamento, os parâmetros dos modelos para pequenos sinais são iguais, embora por vezes sejam notados diferentemente para maior clareza do processo de simplificação.



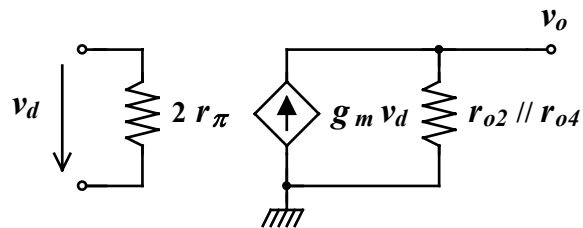
Devido à simetria do par, como $v_d = v_{\pi 1} - v_{\pi 2}$, resulta $v_{\pi 1} = -v_{\pi 2} = v_d / 2$, donde:



ou:

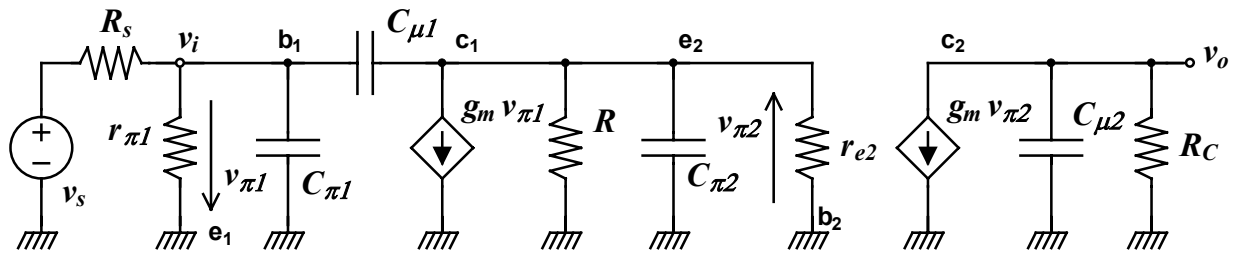


e como $v_{\pi 4} = -\frac{g_m r_e}{2} v_d \cong -\frac{v_d}{2}$ resulta finalmente:

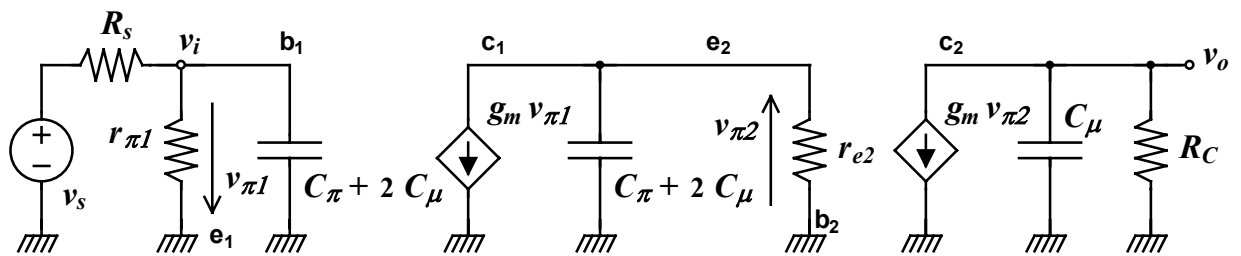


3.2. Resposta da montagem EC-BC

O esquema equivalente para sinais da montagem é:



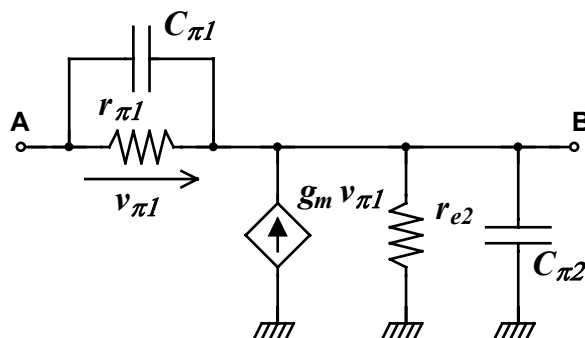
Aplicamos o teorema de Miller à capacidade $C_{\mu 1}$, usando a aproximação do ganho às médias, que é $-g_m (r_{e 2} // R) \cong -1$. Assim, resulta



onde é notório que, se a malha de entrada origina o pólo de mais baixa frequência, cuja constante de tempo associada é $\tau_1 = (C_{\pi} + 2 C_{\mu})(R_s // r_{\pi})$ nitidamente mais elevada do que τ_1 da montagem CC-BC. No caso, menos provável, de ser a malha de saída a determinar o pólo dominante, temos o mesmo valor da montagem CC-BC.

3.3. Determinação do ganho do CC no CC-BC

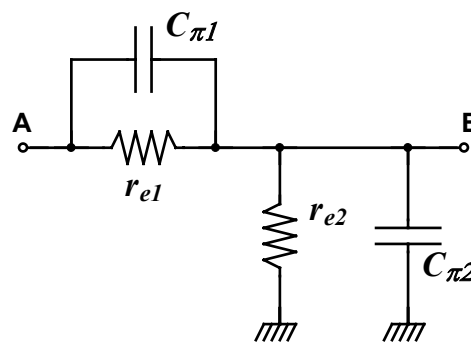
Trata-se de determinar o ganho v_B / v_A , para o que basta considerar o esquema abaixo, onde $v_{\pi 1} = v_A - v_B$.



$$v_B = \left(r_{e2} \parallel \frac{1}{sC_{\pi 2}} \right) \left(g_{m1} + \frac{1}{r_{\pi 1} \parallel \frac{1}{sC_{\pi 1}}} \right) (v_A - v_B) =$$

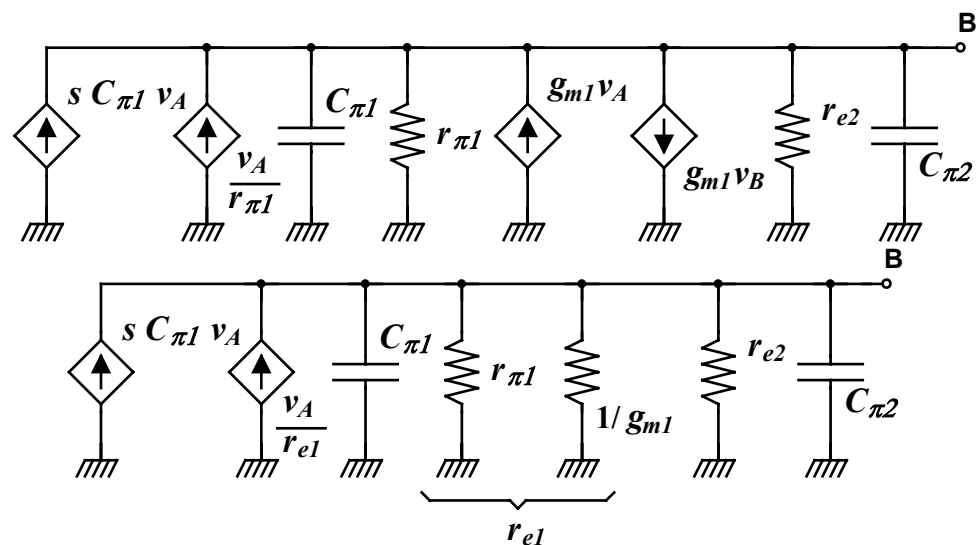
$$= \left(r_{e2} \parallel \frac{1}{sC_{\pi 2}} \right) \frac{(v_A - v_B)}{\frac{1}{g_{m1}} \parallel \left(r_{\pi 1} \parallel \frac{1}{sC_{\pi 1}} \right)} = \left(r_{e2} \parallel \frac{1}{sC_{\pi 2}} \right) \frac{(v_A - v_B)}{\left(r_{e1} \parallel \frac{1}{sC_{\pi 1}} \right)}$$

que é a mesma relação que traduz a divisão de tensões no esquema abaixo.

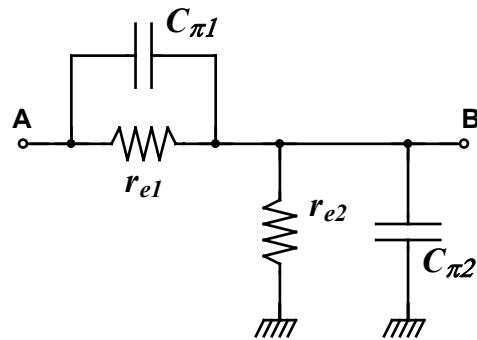


onde, sendo $r_{e1} = r_{e2}$ e $C_{\pi 1} = C_{\pi 2}$, temos o conhecido atenuador compensado, para o qual $v_B / v_A = 1 / 2$, independentemente da frequência.

Vejamos como podemos chegar ao mesmo resultado, por transformação do circuito, usando a técnica do diporto equivalente, aplicada ao paralelo $r_{\pi 1} \parallel C_{\pi 1}$.

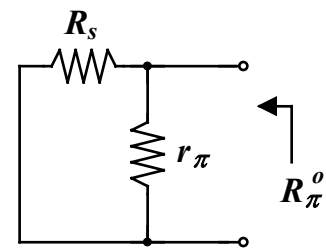
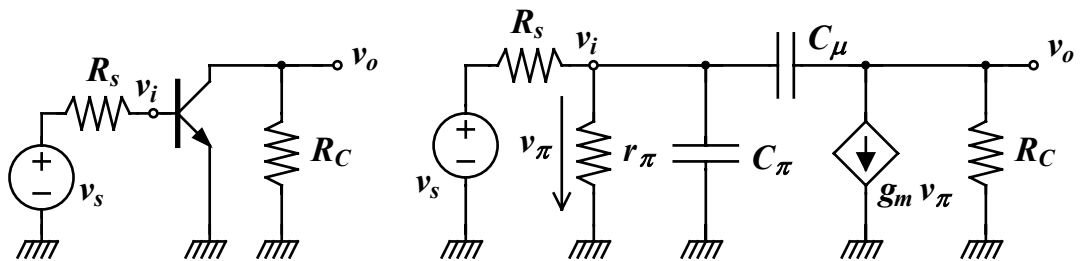


donde resulta, finalmente, o mesmo diporto que acima obtivemos.



3.4. Determinação da resposta do EC pelo método das constantes de tempo

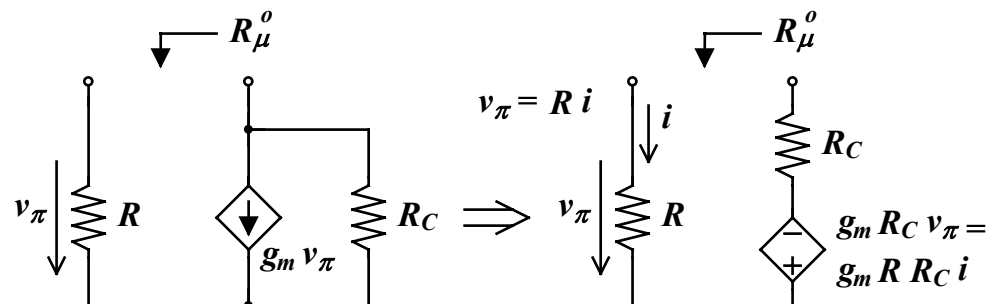
Relembremos o esquema equivalente da montagem:



Calculemos R_{π}^o (ver figura ao lado).

Por simples inspeção, resulta: $R_{\pi}^o = R_s // r_{\pi} = R$

Calculemos R_{μ}^o (ver figura).



Da sequência ilustrada resulta

$$R_{\mu}^o = R(1 + g_m R_C) + R_C$$

donde

$$b_1 = \frac{1}{\omega_{p1}} + \frac{1}{\omega_{p2}} = R_{\pi}^o C_{\pi} + R_{\mu}^o C_{\mu} = R [C_{\pi} + (1 + g_m R_C) C_{\mu}] + R_C C_{\mu}$$

em que b_1 é o coeficiente do termo em s do polinómio do denominador da resposta em frequência $1 + b_1 s + b_2 s^2$

Determinemos agora $b_2 = R_{\pi}^o C_{\pi} R_{\mu}^{\pi} C_{\mu}$ onde apenas nos falta R_{μ}^{π} , a resistência vista de C_{μ} com C_{π} em curto-circuito.

Com C_{π} em curto-circuito, $v_{\pi} = 0$, logo $g_m v_{\pi} = 0$ e, portanto,

$$R_{\mu}^{\pi} = R_C.$$

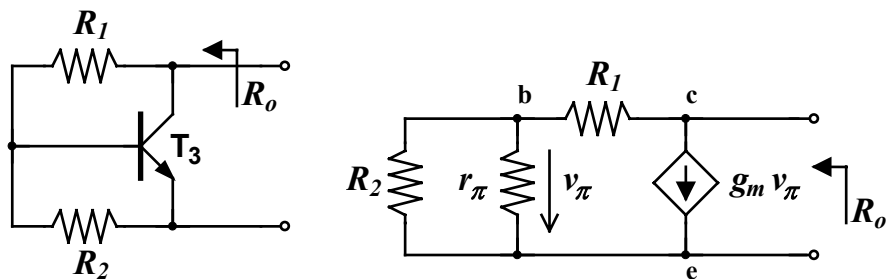
Assim
$$b_2 = \frac{1}{\omega_{p1} \omega_{p2}} = R R_C C_{\pi} C_{\mu}$$

Se ω_{p1} for dominante (como regra prática, basta verificar se $b_1^2 \geq 12,1 b_2$, o que garante que $\omega_{p2} \geq 10 \omega_{p1}$), teremos:

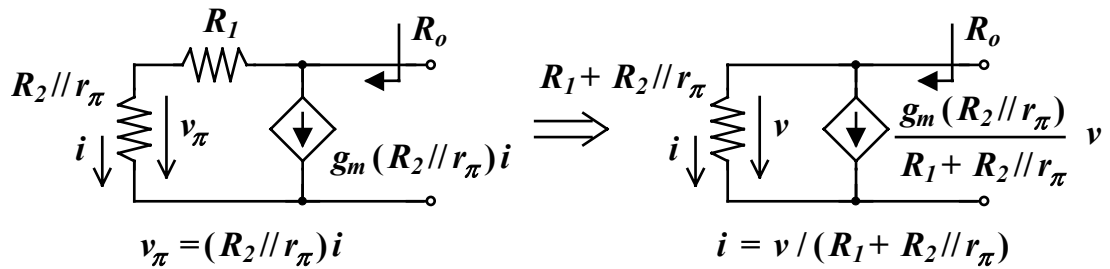
$$b_1 \cong \frac{1}{\omega_{p1}} \Rightarrow \omega_{p1} \cong \frac{1}{b_1} \quad \text{e} \quad b_2 = \frac{1}{\omega_{p1} \omega_{p2}} \Rightarrow \omega_{p2} \cong \frac{b_1}{b_2}$$

3.5. Resistência de saída do multiplicador de V_{BE}

Trata-se de determinar a resistência de saída da montagem abaixo representada à esquerda, à qual corresponde o esquema equivalente figurado abaixo à direita (cf. fig. 53).

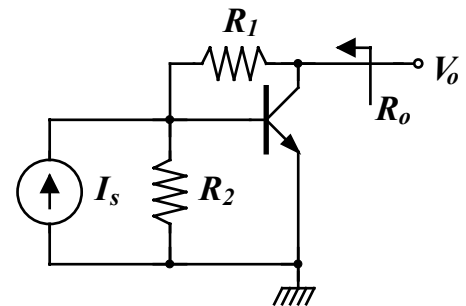


Usando o método das transformações de circuito, com as mudanças de variável $v_{\pi} = (R_2 // r_{\pi}) i$ primeiro, e $i = v / (R_1 + R_2 // r_{\pi})$ depois, obtém-se sucessivamente:



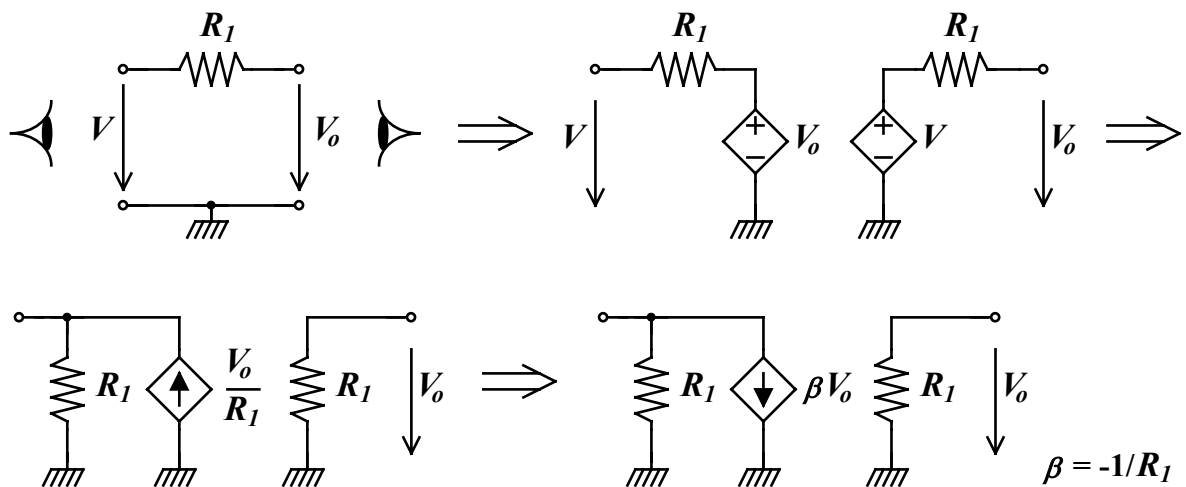
donde resulta:
$$R_o = \left(\frac{g_m (R_2 // r_\pi)}{R_1 + R_2 // r_\pi} + \frac{1}{R_1 + R_2 // r_\pi} \right)^{-1} = \frac{R_1 + R_2 // r_\pi}{1 + g_m (R_2 // r_\pi)}$$

O cálculo da resistência de saída do multiplicador de de V_{BE} pode ser visto, alternativamente, como o cálculo da resistência de saída do amplificador ao lado representado.



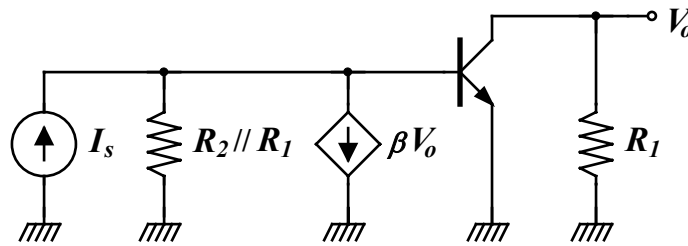
Trata-se dum amplificador realimentado, com topologia tensão-paralelo, cuja resistência de saída, de acordo com a teoria da realimentação, é igual à resistência de saída em malha aberta dividida pela quantidade de realimentação, i.e., $R_{of} = R_o / (1 + \beta A)$.

A sequência seguinte mostra a determinação do esquema equivalente do bloco de realimentação, usando a técnica do diporto equivalente, no âmbito do método de análise dum amplificador realimentado.



Substituindo o esquema obtido no circuito, resulta então o esquema a seguir figurado, donde se obtém facilmente o ganho em malha aberta ($\beta = 0$):

$$A = \frac{V_o}{I_s} = -g_m R_1 (R_2 // R_1 // r_\pi)$$



e como $R_o = R_1$ vem $R_{of} = \frac{R_o}{1 + \beta A} = \frac{R_1}{1 + g_m (R_2 // R_1 // r_\pi)}$

que se pode reescrever como $R_{of} = \frac{R_1 + (R_2 // r_\pi)}{1 + (1/R_1 + g_m)(R_2 // r_\pi)}$

Este valor difere do valor exacto acima encontrado, devido ao pequeno erro inerente ao método de análise dum amplificador realimentado. Estamos em condições de verificar que se trata, efectivamente de um pequeno erro: com os valores do Exercício 7, $1/R_1$ é 36,8 vezes menor do que g_m , o que se traduz num erro de 2,6% no cálculo da resistência de saída.

4. Teoremas

4.1. Realimentação negativa

Um amplificador genérico tem realimentação quando uma amostra do sinal de saída é reintroduzida na entrada. A ligação entre a entrada e a saída é feita através de um bloco de realimentação que, no caso mais trivial, pode ser constituído por uma simples malha resistiva.

Desta forma, o percurso através do amplificador e do bloco de realimentação constitui uma malha fechada denominada malha de realimentação. O ganho ao longo desta malha de realimentação, i.e., partindo, por exemplo, da entrada do amplificador e regressando ao mesmo ponto, chama-se ganho em anel.

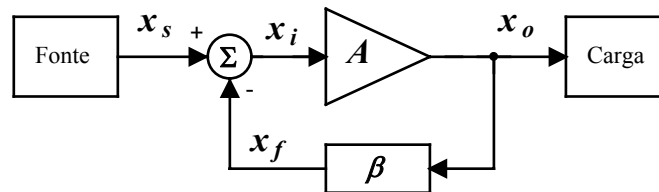
Na banda de trabalho do amplificador, o ganho em anel é dado por um número real e pode ser positivo ou negativo.

Diz-se que a realimentação é negativa quando o ganho em anel é negativo.

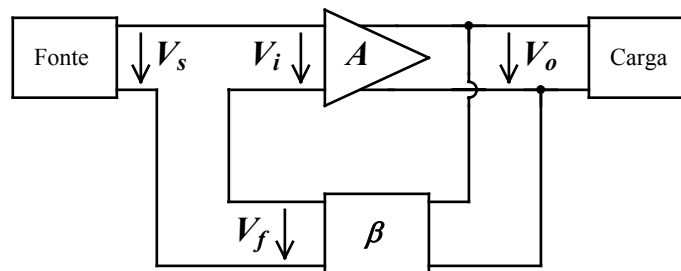
Pode documentar-se mais aprofundadamente sobre a realimentação consultando o texto complementar sobre a teoria da realimentação.

4.2. Teoria da realimentação

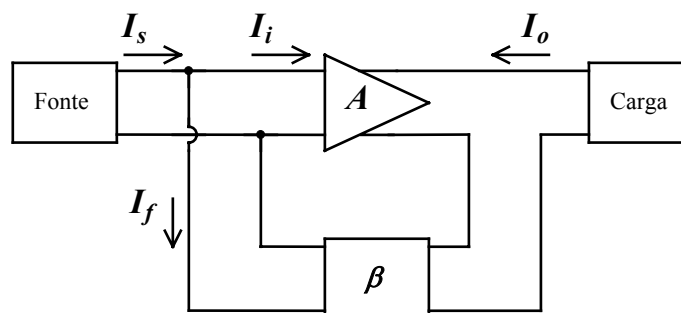
A estrutura geral dum amplificador realimentado pode ser representada pelo seguinte diagrama de fluxo de sinal, em que x pode representar quer um sinal de tensão, quer de corrente.



Exemplo de diagrama de fluxo com sinais de tensão:



Exemplo de diagrama de fluxo com sinais de corrente:



O amplificador básico A (ao qual é aplicada realimentação) tem transmissão unilateral com um ganho A , pelo que $x_o = A x_i$.

O amplificador básico é suposto ter transmissão apenas da entrada para a saída. Note-se que esta suposição, num caso prático não é rigorosamente verdadeira, uma vez que os amplificadores reais têm sempre realimentação interna, mas esta é realmente desprezável.

Admitimos também que a fonte, a carga e o bloco de realimentação não carregam o amplificador básico, i.e., o ganho A não depende de nenhum desses circuitos. Na prática, isso significa que o amplificador básico deve incluir já esses efeitos de carga.

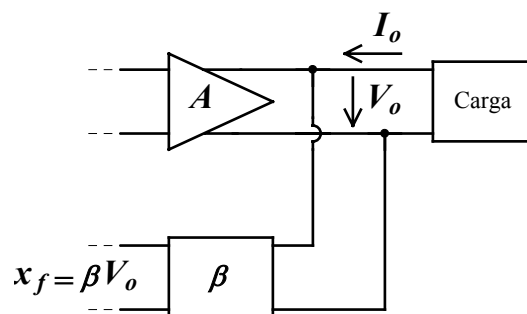
O bloco β representa a malha de realimentação que, pode ser tão simples como um simples fio de ligação ou ter uma configuração complexa. A saída x_o alimenta quer a carga, quer o bloco de realimentação, que admitimos ter transmissão unilateral com um valor β (designado factor de realimentação), pelo que produz uma amostra da saída $x_f = \beta x_o$.

O bloco de realimentação é suposto ter transmissão apenas no sentido da saída do circuito para a sua entrada. Esta suposição, num caso prático, não só não é verdadeira, como a transmissão num sentido pode ser da mesma ordem de grandeza da transmissão no sentido inverso. Todavia, a transmissão da entrada para a saída é, geralmente, desprezável comparada com a transmissão através do amplificador básico. Podemos admitir, assim, em boa aproximação, que o bloco de realimentação é unilateral.

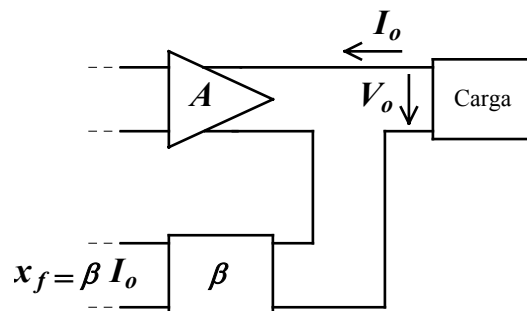
Admitimos também que o factor de realimentação β é independente, quer da resistência da fonte, quer da resistência de carga.

A forma como a saída alimenta o bloco de realimentação designa-se amostragem e pode revestir duas formas: amostragem de tensão ou amostragem de corrente.

A amostragem diz-se de tensão quando a ligação ao bloco de realimentação é feita em paralelo com a saída. Reconhece-se facilmente pois, se anularmos a tensão V_o , anula-se o sinal de realimentação x_f . Em contrapartida, se anularmos a corrente I_o , não se anula o sinal x_f .

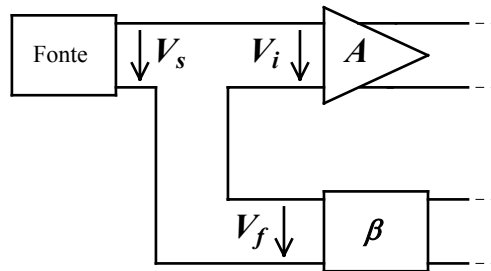


A amostragem diz-se de corrente quando a ligação ao bloco de realimentação é feita em série com a saída. Reconhece-se facilmente pois, se anularmos a corrente I_o , anula-se o sinal de realimentação x_f . Em contrapartida, se anularmos a tensão V_o , não se anula o sinal x_f .

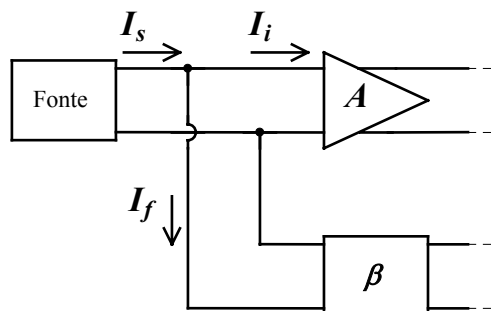


O sinal de realimentação x_f é subtraído ao sinal da fonte x_s , produzindo um sinal x_i que é a entrada do amplificador básico: $x_i = x_s - x_f$. A realização prática desta subtração denomina-se comparação ou mistura e pode ser feita de duas formas: em série ou em paralelo.

A comparação diz-se série, de tensões ou em malha, quando existe na entrada uma malha onde os sinais (tensões) envolvidos na comparação se encontram em série. Assim, a expressão analítica da comparação, $x_i = x_s - x_f$, toma a forma: $V_i = V_s - V_f$.



A comparação diz-se paralelo, de correntes ou num nó, quando existe na entrada um nó onde convergem os sinais (correntes) envolvidos na comparação. Assim, a expressão analítica da comparação, $x_i = x_s - x_f$, toma a forma: $I_i = I_s - I_f$.



Assim, da combinação dos dois tipos de amostragem com os dois tipos de comparação, resultam as quatro topologias possíveis dum amplificador realimentado: tensão-série, tensão-paralelo, corrente-série e corrente-paralelo.

Tendo em conta que $x_o = A x_i$, que $x_f = \beta x_o$ e definindo como $A_f = x_o / x_s$ o ganho realimentado (ou em malha fechada) do amplificador global, resulta facilmente:

$$A_f = \frac{A}{1 + \beta A}$$

que é a expressão fundamental da realimentação.

Notemos que, uma vez que $\beta = 0$ significa a abertura da malha de realimentação, o ganho do amplificador básico A representa, afinal, o ganho em malha aberta do amplificador global, i.e.:

$$A = \left. \frac{x_o}{x_s} \right|_{\beta=0}$$

À quantidade $-\beta A$ chamamos, apropriadamente, ganho em anel. Na verdade, trata-se do ganho ao longo do anel ou malha de realimentação. Se o ganho em anel for negativo, a realimentação diz-se negativa ou degenerativa. Vemos que, sendo $-\beta A < 0$, a quantidade $1 + \beta A$ é positiva, pelo que, $A_f < A$, i.e., o ganho realimentado é menor do que o ganho em malha aberta.

Faz, assim, sentido chamar a $1 + \beta A$ quantidade de realimentação.

A realimentação diz-se positiva ou regenerativa, se o ganho em anel for positivo. No estudo dos amplificadores lineares usa-se, quase exclusivamente, realimentação negativa.

Notemos ainda que, com realimentação negativa, se o ganho em anel for elevado, sendo $\beta A \gg 1$, então $A_f \cong 1 / \beta$, que é um resultado interessantíssimo, pois mostra que o ganho realimentado é quase inteiramente determinado pela malha de realimentação, em geral constituída por simples resistências passivas, que são dos componentes mais estáveis e invariáveis que conseguimos fabricar.

Por outro lado, o ganho realimentado resulta praticamente independente do ganho do amplificador básico, esse sim, fortemente condicionado pelas variações dos parâmetros dos transístores que o constituem. Apenas se requiere que o amplificador básico tenha um ganho suficientemente elevado para que seja $\beta A \gg 1$. É por esta razão que se fabricam AmpOps com ganhos muito elevados.

A análise dum amplificador realimentado pode fazer-se usando o método habitual de análise dum amplificador, i.e., recorrendo às leis dos circuitos para a obtenção dos valores dos seus parâmetros: ganho, resistência de entrada e de saída. Todavia, a análise clássica não permite extrair facilmente conclusões da dependência dos parâmetros do amplificador em relação aos valores dos componentes utilizados e à topologia do circuito, aspecto que é crucial em fase de projecto.

Em contrapartida, a expressão fundamental da realimentação, acima apresentada, indica, relativamente ao ganho desejado, como poderemos obtê-lo actuando sobre os valores do ganho em malha aberta e do factor de realimentação.

Acresce que, relativamente às resistências de entrada e de saída, se obtêm expressões que mostram como a partir do conhecimento dos valores dessas resistências, em malha aberta, se podem derivar os valores em malha fechada, uma vez mais recorrendo ao conhecimento de β e de A .

Assim (designando por R_x a resistência em malha aberta e por R_{xf} a resistência em malha fechada), pode obter-se:

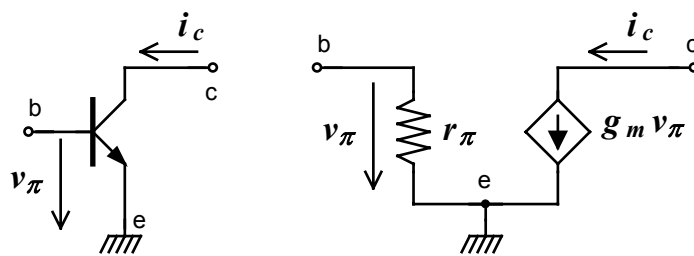
- com amostragem de tensão $R_{of} = R_o / (1 + \beta A)$
- com amostragem de corrente $R_{of} = R_o (1 + \beta A)$
- com comparação série $R_{if} = R_i (1 + \beta A)$
- com comparação paralelo $R_{if} = R_i / (1 + \beta A)$

Estas expressões põem em evidência algumas das propriedades da realimentação negativa: a amostragem de tensão reduz a resistência de saída, enquanto a amostragem de corrente a aumenta; a comparação série reduz a resistência de entrada e a comparação paralelo aumenta-a.

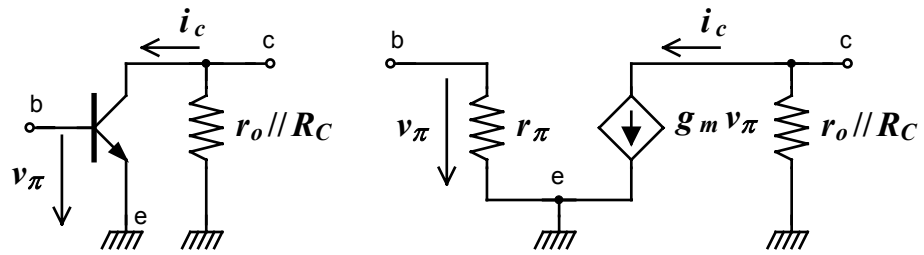
Desta forma, um método de análise baseado na determinação de β e de A reveste-se de grande utilidade prática, apesar do pequeno erro inerente ao processo, decorrente de, num circuito real, não se verificar exactamente a unilaterialidade nem do amplificador básico, nem do bloco de realimentação.

4.3. Transístor como fonte controlada

Como sabemos, um transístor implementa uma fonte controlada. O modelo equivalente (simplificado), para pequenos sinais, dum transístor bipolar traduz justamente essa funcionalidade, que pode enunciar-se da seguinte maneira: a aplicação de uma tensão v_π entre a base e o emissor determina uma corrente de colectador igual a $g_m v_\pi$.



Todavia, a corrente de colectador não é rigorosamente independente da tensão v_{ce} e, para ter em conta essa dependência, incluímos uma resistência r_o em paralelo com a fonte controlada. Se a resistência de carga do colectador R_C for pequena, comparada com r_o , o efeito desta pode ser ignorado mas, nas aplicações em que R_C tem um valor elevado, essa aproximação não é legítima. Podemos, contudo, continuar a considerar o transístor como uma fonte controlada ideal, na condição de associarmos r_o à resistência de carga:



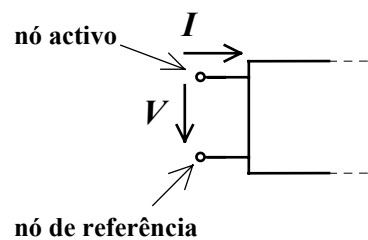
Em geral, esta aproximação é ainda aceitável no caso da montagem de EC, com resistência de emissor, desde que R_E e R_C não tenham valores muito elevados, caso em que mesmo a resistência r_μ não pode deixar de ser considerada.

Uma forma, perfeitamente equivalente, de traduzir o funcionamento para pequenos sinais do transistor, consiste em considerar que a aplicação de uma tensão v_π entre a base e o emissor determina uma corrente de emissor igual a v_π / r_e e, conseqüentemente, uma corrente de colector igual a $\alpha v_\pi / r_e$. Uma vez que $\alpha / r_e = g_m$, vemos que o valor da corrente de colector é exactamente o mesmo.

4.4. Diporto

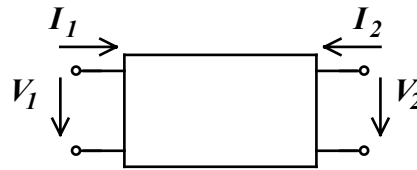
Chamamos diporto (*two-port network*, também designado por quadripólo) a um circuito com dois portos. Porto (*port*) é um par de nós acessíveis do exterior, relativamente aos quais se possa afirmar que a corrente que sai de um deles é igual à corrente que entra pelo outro. A um dos nós chamamos nó activo e ao outro nó de referência.

Desta forma, um porto é caracterizado por duas grandezas: a tensão e a corrente (ver figura).



Por convenção, chamamos tensão do porto à tensão entre o nó activo e o nó de referência e corrente do porto à corrente que entra pelo nó activo.

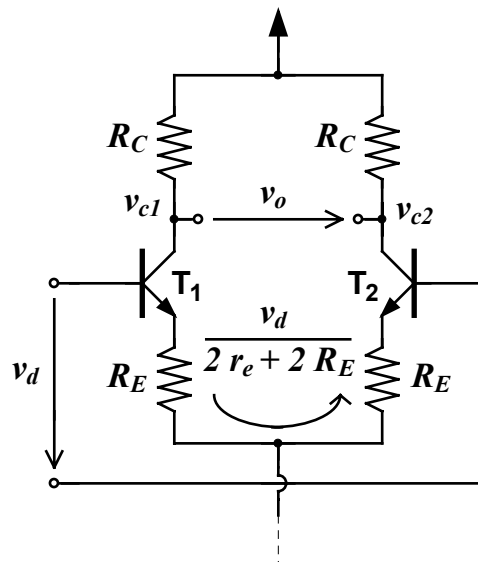
Assim, a caracterização terminal de um diporto pode ser feita através das tensões e correntes nos dois portos.



5. Exercícios

5.1. Resolução do Exercício 1

Se considerarmos a malha definida pelos nós de entrada (bases dos transístores), as junções de emissor dos dois transístores e as duas resistências R_E , a corrente nessa malha é dada, pela lei de Ohm, como sendo o quociente da tensão aplicada (v_d) pela resistência total.



Esta é a série das duas resistências R_E com as resistências das duas junções de emissor.

Assim, a corrente é:
$$\frac{v_d}{2r_e + 2R_E}$$

Desta forma, admitindo que a corrente de colectores é praticamente igual à de emissor, e como a resistência total entre os colectores é $2R_C$, a tensão de saída é:

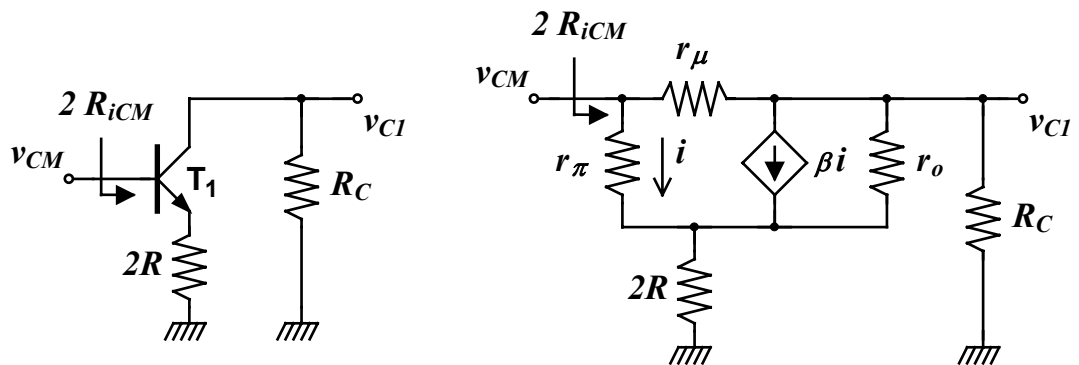
$$v_o = v_{c1} - v_{c2} = 2R_C \frac{v_d}{2r_e + 2R_E} \quad \text{donde} \quad A_{dd} = \frac{v_o}{v_d} = -\frac{R_C}{r_e + R_E}$$

Quanto à resistência de entrada diferencial, como é a resistência entre as bases dos dois transístores, é a resistência acima referida ($2 r_e + 2 R_E$) referida ao circuito de base, i.e.:

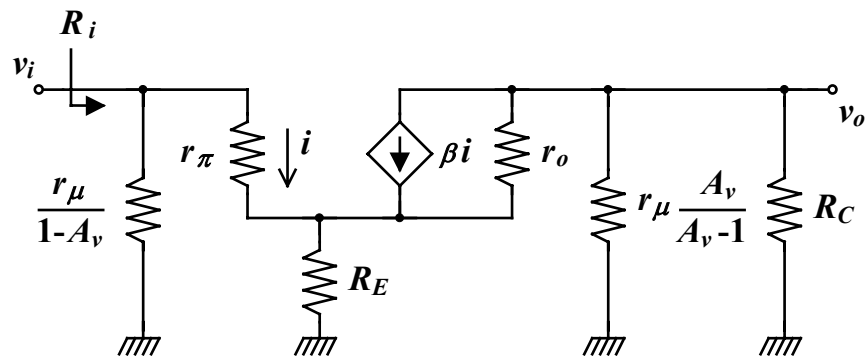
$$R_{id} = (\beta + 1)(2r_e + 2R_E)$$

5.2. Resolução do Exercício 2

Trata-se de determinar a resistência de entrada da seguinte montagem:



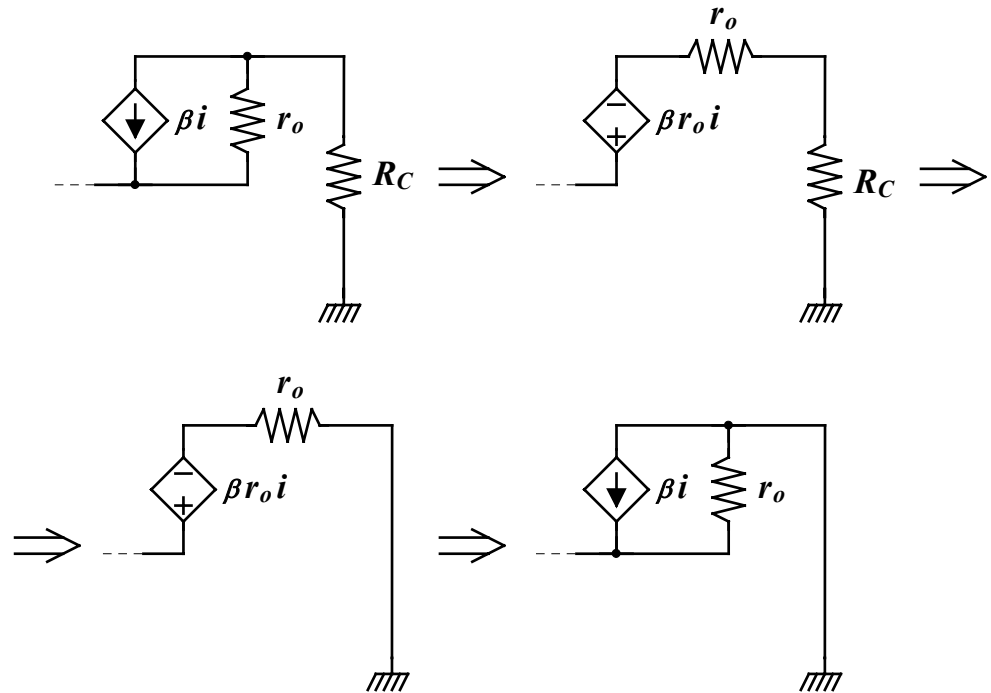
Notemos que se trata de um caso particular do problema geral de uma montagem EC com resistência de emissor R_E . Assim, comecemos por rever esse caso geral. Se aplicarmos o teorema de Miller à resistência r_μ , obtemos:



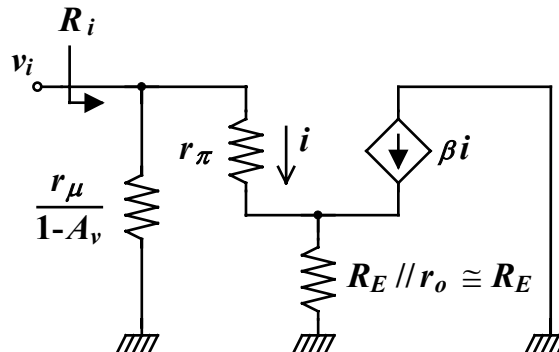
Tipicamente, sendo A_v da ordem de grandeza de algumas unidades, resulta:

$$r_\mu \frac{A_v}{A_v - 1} \gg R_C \quad \text{logo} \quad r_\mu \frac{A_v}{A_v - 1} // R_C \cong R_C$$

Aplicando o método das transformações de circuito à malha da saída, tendo em conta que, tipicamente, será $r_o \gg R_C$, obtêm-se sucessivamente as configurações a seguir representadas.



Finalmente, como $r_o \gg R_E$, resulta o esquema abaixo figurado.



Neste circuito, a resistência de entrada obtém-se por simples inspecção como sendo:

$$R_i \cong \frac{r_\mu}{1 - A_v} // [r_\pi + (\beta + 1)R_E]$$

Como, tipicamente,

$$(\beta + 1)R_E \gg r_\pi \quad \text{e} \quad \frac{r_\mu}{1 - A_v} \gg (\beta + 1)R_E$$

ainda podemos escrever: $R_i \cong (\beta + 1)R_E$

que é a expressão habitualmente utilizada para a resistência de entrada da montagem de EC com resistência de emissor.

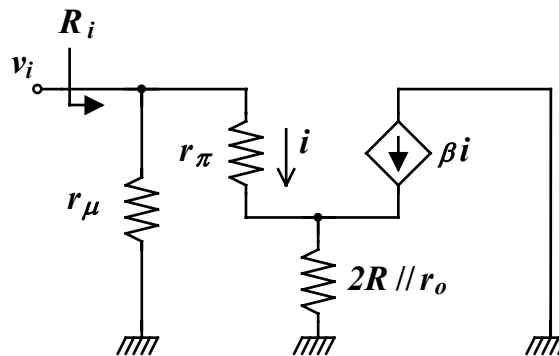
Veamos agora o caso particular em que $R_E = 2R$, uma resistência muito elevada. Decorre daqui que A_v tem um valor muito menor do que a unidade.

Desta forma, $\frac{r_\mu}{1 - A_v} \cong r_\mu$ e $r_\mu \frac{A_v}{A_v - 1} \cong -A_v r_\mu$

que é uma resistência positiva que poderá ser da ordem de grandeza de R_C .

De qualquer forma, $-A_v r_\mu // R_C < R_C$

Assim, o mesmo procedimento seguido para o caso geral conduz-nos ao esquema seguinte:



donde obtemos facilmente:

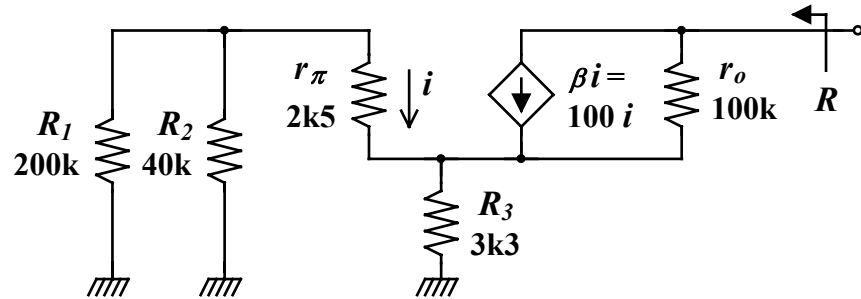
$$2R_{iCM} = R_i \cong r_\mu // [(\beta + 1)(2R // r_o)]$$

expressão onde, como r_μ e $(\beta + 1)(2R // r_o)$ poderão ser da mesma ordem de grandeza, não há lugar para maior simplificação.

Finalmente, resulta: $R_{iCM} \cong \frac{r_\mu}{2} // \left[(\beta + 1) \left(R // \frac{r_o}{2} \right) \right]$

5.3. Resolução do Exercício 3

O esquema equivalente da montagem para a determinação da resistência de saída é o circuito seguinte, onde



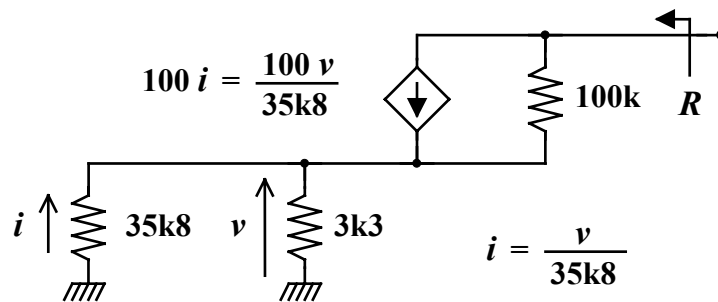
$$r_{\pi} = \frac{\beta V_T}{I_C} = \frac{100 \times 25}{1} = 2,5 \text{ k}\Omega$$

e

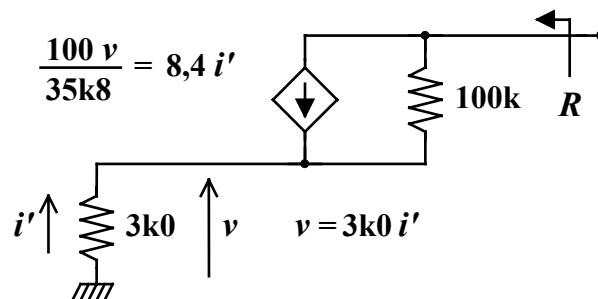
$$r_o = \frac{V_A}{I_C} = \frac{100}{10^{-3}} = 100 \text{ k}\Omega$$

Usaremos o método das transformações de circuito.

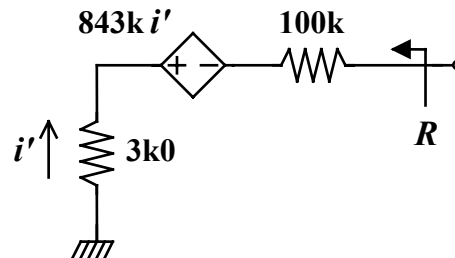
Resolvendo a série de r_{π} com o paralelo $R_1 // R_2$, obtemos o esquema abaixo, onde fizemos a substituição de variável $i \rightarrow v$.



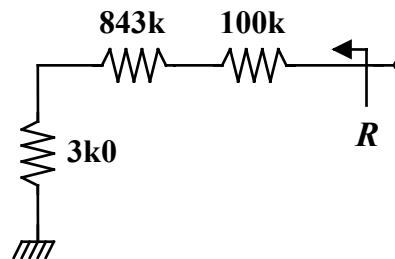
Resolvendo agora o paralelo $35k8 // 3k3 \cong 3,0 \text{ k}\Omega$ e fazendo a mudança de variável $v \rightarrow i'$, obtemos o circuito representado seguinte.



Substituindo agora a configuração Norton pelo seu equivalente Thévenin, resulta o esquema abaixo



onde, finalmente, a aplicação do teorema da absorção da fonte permite substituir a fonte $843k i'$ por uma resistência de $843 k \Omega$, conduzindo ao esquema final,



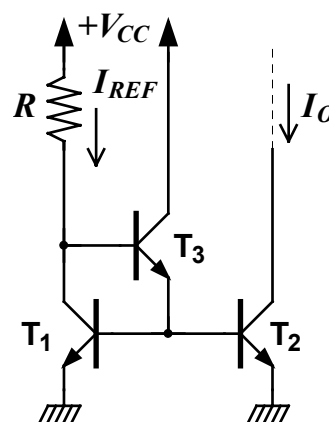
donde é trivial concluir:

$$R = 3k + 843k + 100k = 946 k\Omega .$$

5.4. Resolução do Exercício 4

a) espelho com compensação da corrente de base

Por inspeção do esquema seguinte (fig. 21)

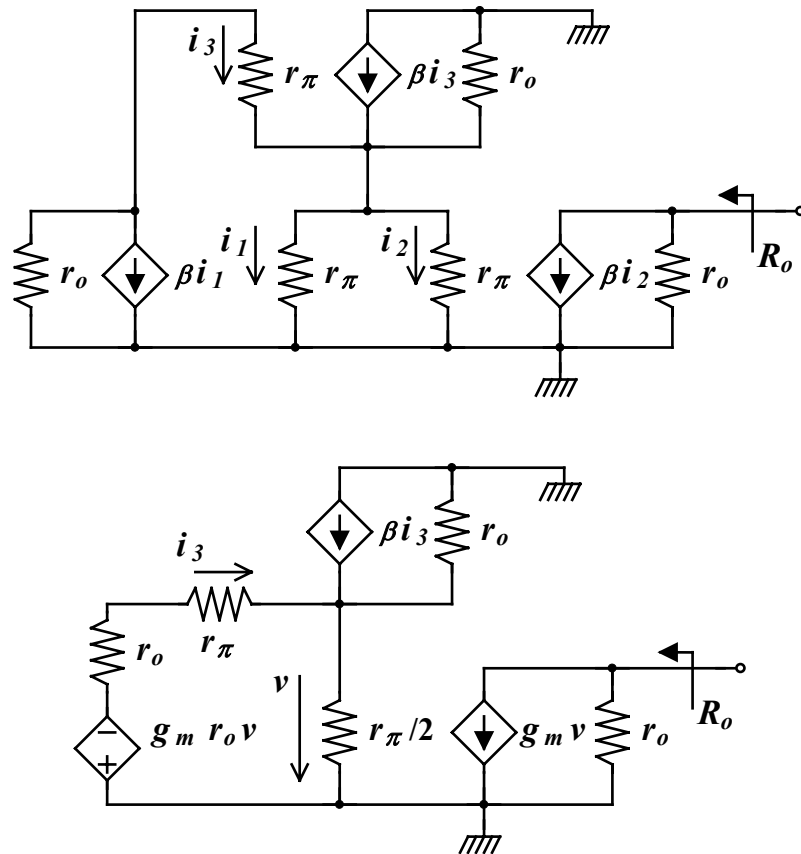


resulta:

$$I_{REF} = I_{C1} + I_{B3} = I_{C2} + \frac{I_{B1} + I_{B2}}{\beta + 1} = I_O + \frac{2I_{C2} / \beta}{\beta + 1} = I_O \left(1 + \frac{2}{\beta(\beta + 1)} \right) = I_O \left(1 + \frac{2}{\beta^2} \right)$$

donde.... $\frac{I_O}{I_{REF}} = \frac{1}{1 + 2 / \beta}$

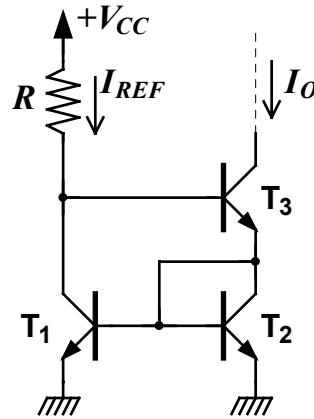
Quanto à resistência de saída, é $R_o = r_o$. Vejamos uma prova simples. Substituindo os transistores, supostos idênticos, pelos seus modelos, obtém-se o primeiro dos esquemas seguintes, do qual, fazendo a mudança de variável $i_1 = i_2 = v / r_\pi$, resulta o segundo esquema.



Nesta altura é já claro que na malha da esquerda não há qualquer fonte independente, nem nenhuma fonte controlada por uma grandeza exterior à malha. Assim, todas as correntes são nulas e é nula a tensão v , pelo que $R_o = r_o$.

b) espelho de Wilson

Por inspeção do esquema seguinte (fig. 22)



resulta:

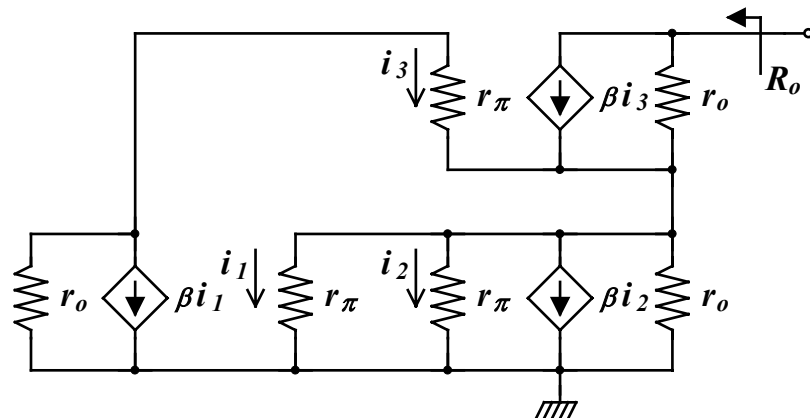
$$I_{REF} = I_{C1} + I_{B3} = I_{C2} + \frac{I_O}{\beta}$$

$$e \quad I_{C2} = I_{E3} - I_{B1} - I_{B2} = I_{E3} - 2\frac{I_{C2}}{\beta} \quad \therefore \quad I_{C2} = \frac{\beta}{\beta+2} I_{E3} = \frac{\beta+1}{\beta+2} I_O$$

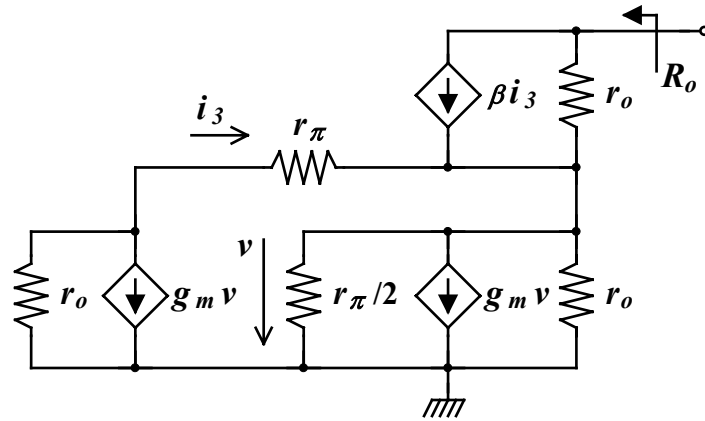
$$\text{donde} \quad I_{REF} = \frac{\beta+1}{\beta+2} I_O + \frac{I_O}{\beta} \cong \left(1 + 2/\beta^2\right) I_O$$

$$\text{e finalmente} \quad \frac{I_O}{I_{REF}} \cong \frac{1}{1 + 2/\beta^2}$$

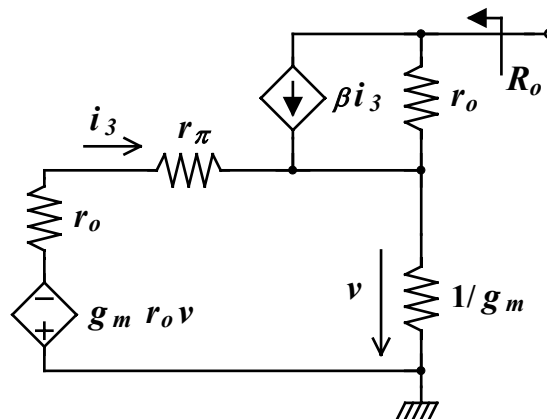
Quanto à resistência de saída, substituindo os transístores, supostos idênticos, pelos seus modelos, obtém-se o esquema equivalente abaixo representado.



Usando o método das transformações de circuito, e fazendo a mudança de variável $i_1 = i_2 = v / r_\pi$, obtém-se o esquema seguinte.

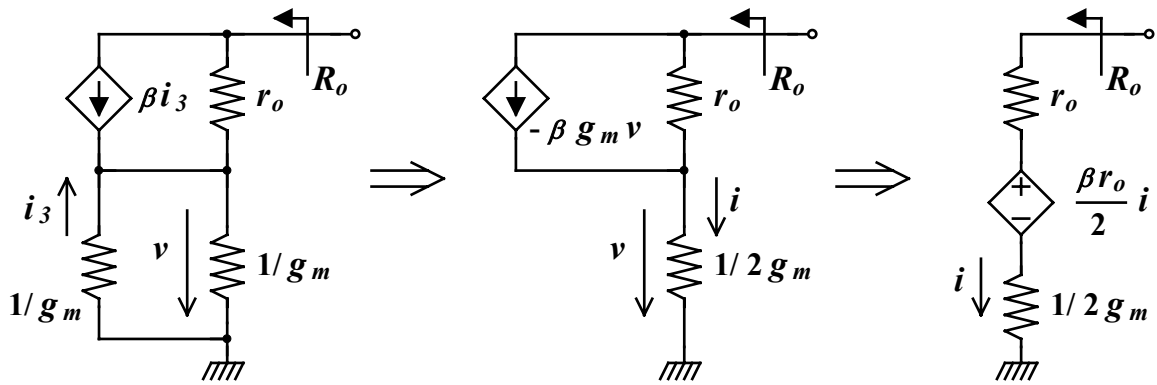


Notemos que a fonte $g_m v$ da direita é substituível por uma resistência $1/g_m$ que domina o paralelo com $r_\pi / 2$ e r_o . Transformando a configuração Norton da esquerda no seu equivalente Thévenin, obtém-se então o esquema abaixo.



Vemos agora que se pode desprezar r_π face a r_o e se, revertermos a configuração Thévenin para Norton, a fonte de corrente resultante $g_m v$ é substituível por uma resistência $1 / g_m$, que domina o paralelo com r_o .

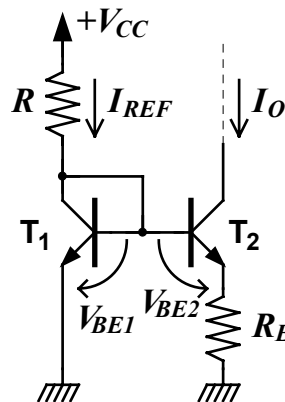
O circuito obtido pode transformar-se sucessivamente, como se mostra na figura seguinte, tendo em conta que $i_3 = - g_m v$, que $v = i / 2 g_m$ e que a fonte $\beta r_o i / 2$ é substituível por uma resistência $\beta r_o / 2$.



Finalmente, resulta:
$$R_o = r_o + \frac{\beta r_o}{2} + \frac{1}{2g_m} \cong \frac{\beta r_o}{2}$$

b) fonte de Widlar

Por inspeção do esquema seguinte (fig. 23)



resulta:

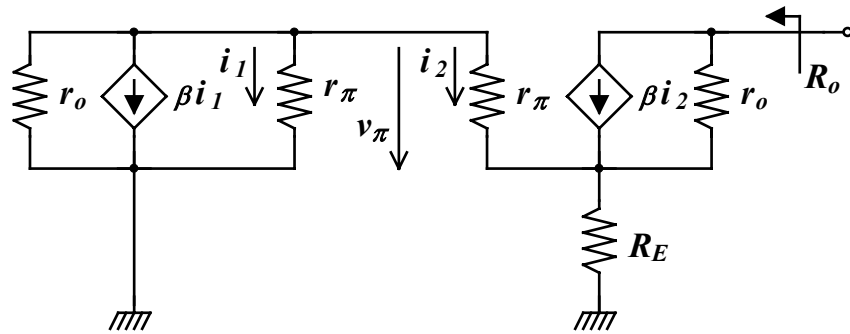
$$V_{BE1} = V_{BE2} + R_E I_{E2} \cong V_{BE2} + R_E I_O \Rightarrow V_{BE1} - V_{BE2} \cong R_E I_O$$

Como
$$I_C = I_S e^{V_{BE1}/V_T} \Rightarrow V_{BE} = V_T \ln \frac{I_C}{I_S}$$

podemos escrever:
$$V_{BE1} - V_{BE2} = V_T \ln \frac{I_{C1}}{I_{C2}} = R_E I_O$$

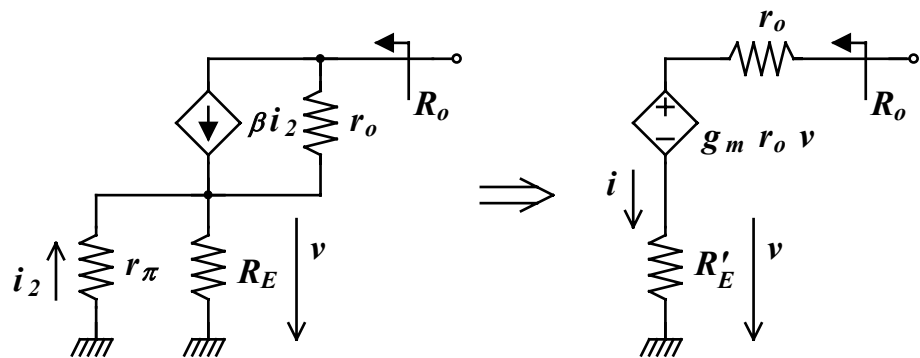
e como $I_{C1} \cong I_{REF}$ e $I_{C2} = I_O$, vem finalmente:
$$I_O R_E = V_T \ln \frac{I_{REF}}{I_O}$$

Vejamos agora a resistência de saída, para cujo cálculo usaremos, uma vez mais, o método das transformações de circuito. Substituindo os transístores pelos seus modelos, obtém-se o esquema abaixo.



Uma vez que $i_1 = v_\pi / r_\pi$, a fonte $\beta i_1 = g_m v_\pi$ pode substituir-se por uma resistência $1 / g_m$ que domina o paralelo com r_π e r_o e é muito menor do que r_π do transistor T₂.

Assim, resulta o esquema (da esquerda) da figura abaixo que é transformável no esquema (da direita), em que $R'_E = R_E // r_\pi$ e onde a fonte $g_m r_o v = g_m r_o R'_E i$ é transformável numa resistência de valor $g_m r_o R'_E$.



Desta forma, a resistência de saída resulta:

$$R_o = r_o + g_m r_o R'_E + r_\pi \cong r_o (1 + g_m R'_E)$$

5.5. Resolução do Exercício 5

Notemos que a corrente na resistência R_s é:

$$\frac{v_s - v_i}{R_s} = v_i \left(\frac{1}{r_\pi} + sC_\pi \right) + sC_\mu (v_i - v_o)$$

donde
$$\frac{v_s}{R_s} = v_i \left[\frac{1}{R} + s(C_\pi + C_\mu) \right] - sC_\mu v_o \quad (a)$$

Por outro lado a corrente em C_μ é:
$$sC_\mu (v_i - v_o) = g_m v_i + \frac{v_o}{R_C}$$

Donde
$$v_i = v_o \frac{\frac{1}{R_C} + sC_\mu}{sC_\mu - g_m} \quad (b)$$

Substituindo (b) em (a), resulta sucessivamente:

$$\frac{v_s}{R_s} = \frac{\left[\frac{1}{R} + s(C_\pi + C_\mu) \right] \left(\frac{1}{R_C} + sC_\mu \right) - sC_\mu (sC_\mu - g_m)}{sC_\mu - g_m} v_o$$

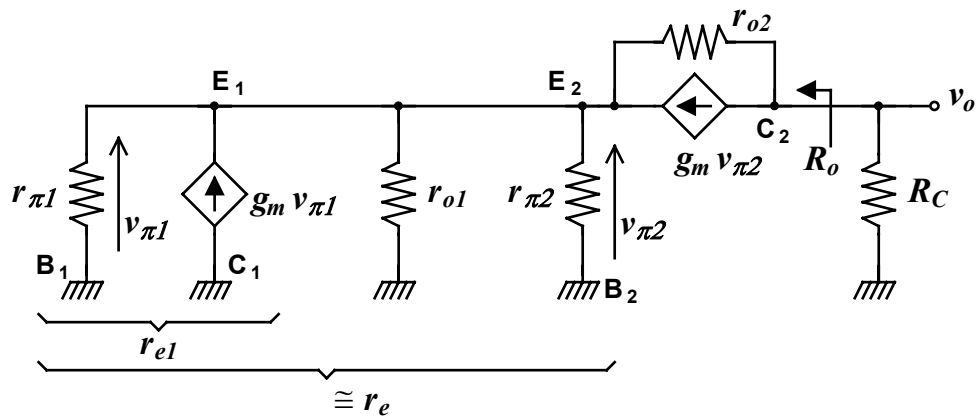
$$\frac{v_s}{R_s} = \frac{1}{RR_C} \frac{\left[R_C + s(C_\pi + C_\mu)RR_C \right] \left(\frac{1}{R_C} + sC_\mu \right) - sRR_C C_\mu (sC_\mu - g_m)}{sC_\mu - g_m} v_o$$

$$v_s = \frac{R_s}{RR_C} \frac{1 + s \left[R(C_\pi + C_\mu) + R_C C_\mu + g_m RR_C C_\mu \right] + s^2 RR_C C_\pi C_\mu}{sC_\mu - g_m} v_o$$

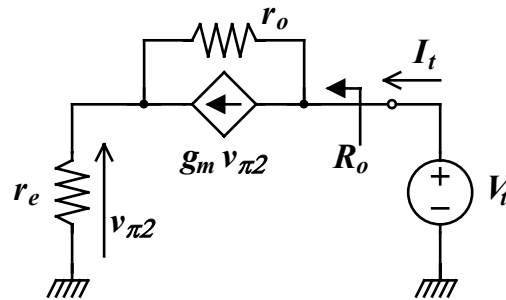
$$\frac{v_o}{v_s} = - \frac{g_m RR_C}{R_s} \frac{1 - sC_\mu / g_m}{1 + s \left[R(C_\pi + C_\mu (1 + g_m) + R_C C_\mu) \right] + s^2 RR_C C_\pi C_\mu}$$

5.6. Resolução do Exercício 6

Usando o esquema da fig 32 (a), abaixo reproduzido, a simplificação aí indicada constitui o primeiro passo.



A resistência de saída de T₁ será $r_e \parallel r_o \cong r_e$ e o paralelo desta com $r_{\pi 2}$ é aproximadamente r_e . Resulta então o esquema seguinte:



donde:

$$V_t = r_o (I_t - g_m v_{\pi 2}) - v_{\pi 2} = -(1 + g_m r_o) v_{\pi 2} + r_o I_t$$

e
$$v_{\pi 2} = -r_e I_t$$

Assim
$$V_t = [(1 + g_m r_o) r_e + r_o] I_t$$

e, finalmente,
$$R_o = \frac{V_t}{I_t} = r_e + g_m r_e r_o + r_o \cong 2 r_o$$

5.7. Resolução do Exercício 7

Desprezando as correntes de base de T_1 e de T_2 , a lei dos nós na base de T_1 dá:

$$I = I_{C3} + \frac{V}{R_1 + R_2} = I_{C3} + \frac{V_{BE3}}{R_2}$$

e como $V_{BE3} = V_T \ln \frac{I_{C3}}{I_{s3}}$ vem
$$I = I_{C3} + \frac{V_T}{R_2} \ln \frac{I_{C3}}{I_{s3}}$$

Sendo $R_1 = R_2 = 7,5 \text{ k}\Omega$,

a equação implícita
$$I_{C3} = 200 - \frac{10}{3} \ln \frac{I_{C3}}{10^{-8}} \quad (I_{C3} \text{ em } \mu\text{A})$$

permite, após quatro iterações, obter $I_{C3} \cong 122,57 \mu\text{A}$, donde:

$$V = 2 V_T \ln \frac{I_{C3}}{10^{-14}} = 1,161 \text{ V}$$

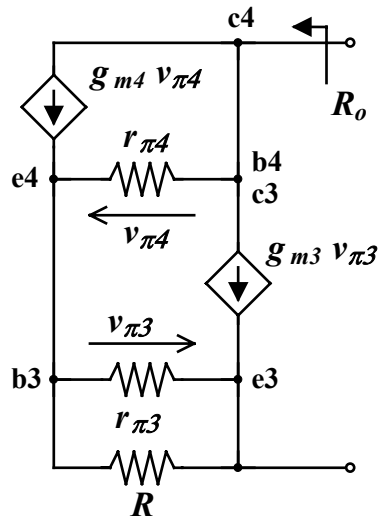
Assim, resulta:

$$V_{BE1} = V_{EB2} = 0,581 \text{ V}$$

e
$$I_{C1} = I_{C2} = I_{s1} e^{V_{BE1}/V_T} = 3 \times 10^{-14} e^{0,581/25 \times 10^{-3}} \cong 368 \mu\text{A}$$

5.8. Resolução do Exercício 8

Substituindo os transístores do esquema da fig. 52 pelos seus modelos, obtém-se o esquema equivalente para a determinação de R_o abaixo representado.



Tendo em conta que $r_{\pi} = \beta V_T / I_C$ e $g_m = \beta / r_{\pi}$, obtemos:

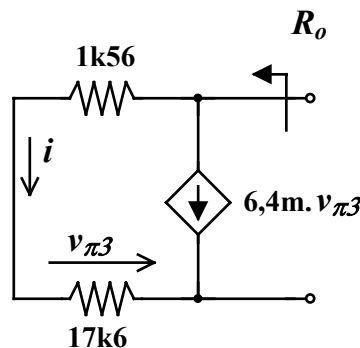
$$r_{\pi 3} = 31,3 \text{ k}\Omega \quad r_{\pi 4} = 313 \text{ k}\Omega$$

$$g_{m3} = 6,4 \text{ mA/V} \quad g_{m4} = 0,64 \text{ mA/V}$$

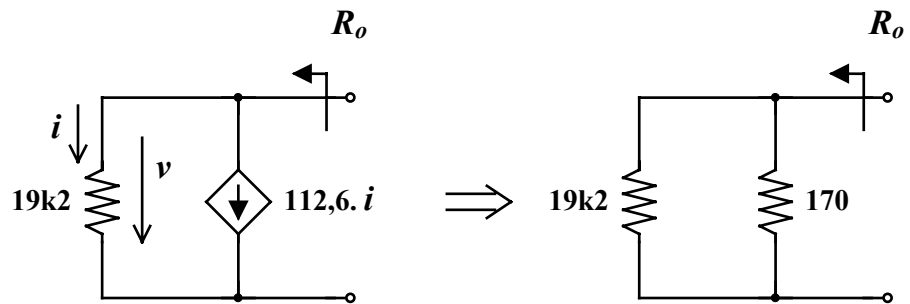
Usaremos o método das transformações de circuito.

Registemos, em primeiro lugar, que a fonte $g_{m4} v_{\pi 4}$ é substituível por uma resistência igual a $1/g_{m4}$.

Assim, o esquema anterior é redutível à configuração seguinte, onde fazendo agora $v_{\pi 3} = 17k6 i$



e depois $i = v / 19k2$, vem sucessivamente:



donde $R_o = 19k2 // 170 \cong 169 \Omega$.

Na resolução atrás exposta, tornou-se evidente que o transistor T_4 se comporta, para sinais, como uma simples resistência de valor r_{e4} . Desta forma, o circuito da fig. 52 é equivalente, para sinais, ao circuito da fig. 51, na condição de substituírmos R_1 por r_{e4} , e R_2 por R . Consequentemente, a resistência de saída do circuito da fig. 52 pode ser também obtida através da equação correspondente ao circuito da fig. 51, fazendo as substituições indicadas e ainda substituindo r_π por $r_{\pi3}$ e g_m por g_{m3} .