

INTRODUÇÃO À FIABILIDADE DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE ENERGIA

F. Maciel Barbosa

Janeiro 2013

Índice

1. Introdução	7
2. Noções básicas de probabilidade	10
3. Funções de distribuição.....	12
3.1 Introdução	12
3.2 Distribuição binomial.....	14
3.3 Distribuição de Poisson.....	16
3.3.1 Dedução da distribuição de Poisson a partir da distribuição binomial	16
3.3.2 Dedução da distribuição de Poisson sem recurso à distribuição binomial	18
3.4 Distribuição normal.....	19
3.5 Distribuição exponencial.....	22
4. Fiabilidade de um componente	25
5. Tempos médios de funcionamento e de avaria	27
6. Fiabilidade de um sistema.....	29
6.1 Introdução	29
6.2 Associação em série	30
6.3 Associação em paralelo.....	31
7. Árvore de avarias	36
8. Processos de Markov	37
8.1 Introdução	37
8.2 Modelo de Markov para um elemento de um sistema eléctrico	38
8.3 Aplicação do processo de Markov a um sistema constituído por um componente	40
8.4 Aplicação do processo de Markov a um sistema constituído por um componente – sistema contínuo.....	43
8.4.1 Sistema constituído por dois componentes em série.....	48
8.4.2 Sistema constituído por dois componentes em paralelo	51
9. Frequência de ocorrência de um estado	53
10. Combinação de estados	55
11. Métodos de simulação.....	57
12. Bibliografia	59
13. Apêndice I.....	61
Problemas.....	61

Tabela de Figuras

Fig. 1.1 – Variação da taxa de avarias com o tempo	8
a) curva típica para um componente electrónico	8
b) curva típica para um componente mecânico.....	8
Fig. 2.1 -- Escala de probabilidades	10
Fig. 3.1 – Curvas típicas de uma distribuição normal.....	19
Fig. 3.2 – Probabilidade de ocorrência num intervalo, para o caso de uma distribuição normal.	21
Fig. 3.3 -- Curva da distribuição normal dividida em 7 classes	22
Fig. 3.4 – Função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição exponencial.	23
Fig. 3.5 – $R(t)$ – função exponencial.....	24
Fig. 5.1 – Representação gráfica da história de funcionamento de um componente.....	27
Fig. 5.2 – Representação gráfica da história de funcionamento de um componente (tempos médios)	28
Fig. 6.1 – Associação em série de componentes.....	30
Fig. 6.2 – Sistema constituído por dois componentes redundantes	31
Fig. 6.3 – Sistema constituído por quatro componentes ligados em paralelo.....	32
Fig. 6.4 – Configuração do sistema.....	33
Fig. 6.5 – Configuração do sistema quando se admite que o componente A está bom	34
Fig. 6.6 - Configuração do sistema quando se admitir que A está bom e.....	34
Fig. 6.7 – Configuração do sistema quando se admite que o componente A está avariado	35
Fig. 7.1- Exemplo de uma árvore de avarias.....	36
Fig. 8.1 – Representação de um componente pelos seus dois estados de residência.....	39
Fig. 8.2 – Componente com dois possíveis estados de resistência	40
Fig. 8.4 – Representação do comportamento do sistema.....	41
Fig. 8.3 – Diagrama em árvore do sistema	42
Fig. 8.5 – Diagrama de estados para um sistema constituído por um componente.	44
Fig. 8.6 – Diagrama de um sistema constituído por dois componentes.....	46
Fig. 8.7 – a) Sistema constituído por dois componentes ligados em série.....	48
b) Modelo equivalente do sistema.	48
Fig. 8.8 – Diagrama de estados do sistema equivalente ao sistema série.	49
Fig. 8.9 – a) Sistema constituído por dois componentes em paralelo.....	51
b) Modelo equivalente ao sistema a).....	51
Fig. 8.10 – Diagrama do sistema equivalente ao sistema paralelo.	52
Fig. 10.1 – Diagrama de estados para um sistema constituído por dois componentes iguais.....	55

1. Introdução

De um modo geral todas as pessoas possuem o seu conceito de fiabilidade. É usual ouvi-las dizer "o meu carro é fiável", "o meu televisor não é fiável", ou expressões análogas. De um modo geral também associam que o conceito de fiabilidade não é absoluto. Assim, sabem que pelo facto de o carro ter funcionado esta manhã nada lhes garante que o carro funcione logo.

Vejamos, como é que se pode definir fiabilidade. Entre as muitas definições possíveis uma será:

"Fiabilidade de um sistema (ou de um componente) é a probabilidade de o sistema (ou o componente) desempenhar, de uma forma adequada, a função para que foi concebido, nas condições previstas e nos intervalos de tempo em que tal é exigido."

Desta definição pode observar-se que inclui quatro conceitos básicos:

- probabilidade
- forma adequada
- tempo
- condição de funcionamento

A introdução da probabilidade num problema de engenharia muitas vezes é vista com ceticismo por aqueles que advogam a engenharia ser uma ciência determinística. É porém óbvio que as probabilidades e a estatística constituem uma ferramenta importante na análise de problemas de engenharia.

O critério de "funções adequadas" é um problema de engenharia. Envolve uma detalhada investigação dos modos de avaria de cada componente e do sistema. Uma avaria do sistema não é apenas uma perda de continuidade ou uma catástrofe. No caso de um Sistema Eléctrico de Energia, o conceito de avaria não se resume apenas a falta de tensão na alimentação, mas compreende, por exemplo, a situação em que a tensão está fora dos limites contratuais. Se a frequência não se mantiver dentro dos valores devidos, também estamos em presença de uma "avariação" do sistema.

O tempo a considerar num Sistema Eléctrico de Energia (SEE) será contínuo, mas no caso de uma unidade de recurso, será discreto, correspondendo a quando houver uma falta de alimentação do exterior.

As condições de funcionamento serão na realidade importantes para os estudos de fiabilidade. No caso de um Sistema Eléctrico de Energia a taxa de avarias de muitos componentes aumenta muito com condições meteorológicas adversas.

A análise de fiabilidade será então um método de quantificar o que se espera que aconteça e pode ser usada para indicar méritos relativos de esquemas alternativos de sistemas, tendo em atenção um predefinido nível de fiabilidade.

Para se poder calcular a fiabilidade de um sistema será necessário dispor da história do funcionamento do sistema. No caso de se não dispor dessa informação recorre-se então a

informação proveniente de sistemas análogos. Um dos índices que se utiliza para definir a fiabilidade de um Sistema Eléctrico de Energia é a taxa de avarias.

Define-se **taxa de avarias** de um componente no instante t como sendo a probabilidade do componente avariar no intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$, dividida por Δt . Considerando um universo com N componentes supostos iguais a taxa de avarias é dada por:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_a(t + \Delta t) - N_a(t) / N_f(t)}{\Delta t} = \frac{dN_a(t)}{dt} \frac{1}{N_f(t)}$$

em que

- $N_f(t)$ representa o número de componentes que funcionam até ao instante t
- $N_a(t)$ representa o número de componentes que avariaram até ao instante t
- $N_a(t + \Delta t)$ representa o número de componentes que avariaram até ao instante $t + \Delta t$

A figura 1.1 representa a variação típica da taxa de avarias com o tempo para um componente electrónico (Fig. 1.1a) e para um componente mecânico (Fig 1.1b).

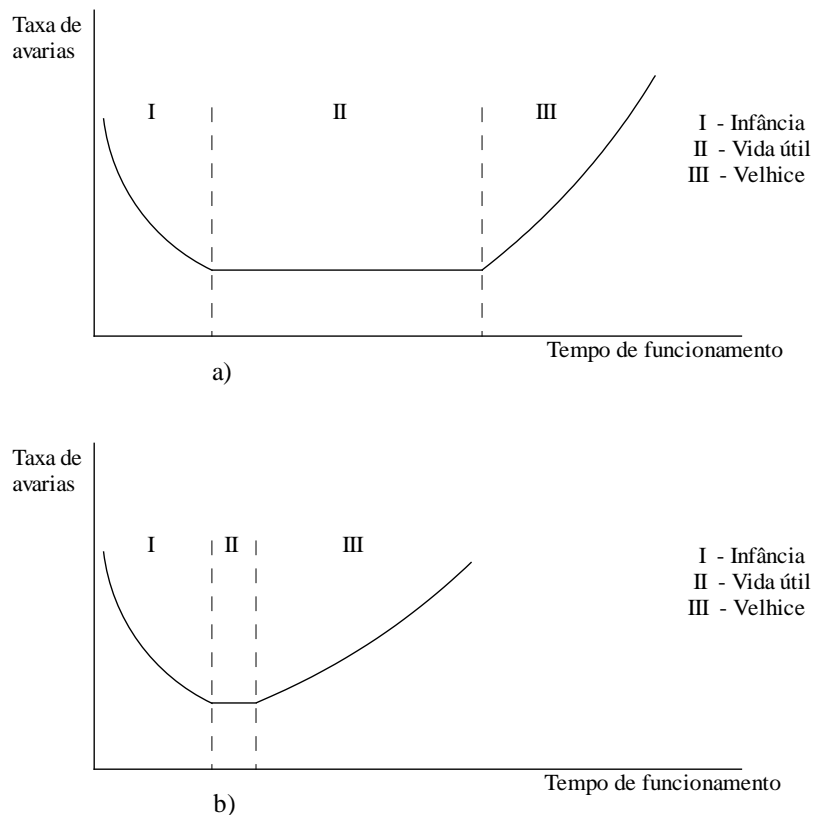


Fig. 1.1 – Variação da taxa de avarias com o tempo
a) curva típica para um componente electrónico
b) curva típica para um componente mecânico

Pela análise das curvas típicas das variações das taxas de avaria com o tempo, facilmente se vê que nos primeiros tempos de funcionamento (período I, designado por período de infância), as taxas de avaria têm um valor elevado o qual diminui contudo rapidamente com o tempo.

Passado o período de infância, a taxa de avarias é aproximadamente constante, durante o período II, designado por período de vida útil.

No período III, as taxas de avaria crescem rapidamente com o tempo e o período é designado por velhice do componente.

Por comparação das curvas típicas representadas na fig. 1.1, verifica-se que o período de vida útil de um componente eletrónico é relativamente grande, enquanto o mesmo período de um componente mecânico é bastante curto.

Analisemos então as curvas que nos dão as taxas de avaria (λ) em função do tempo, e procuremos a razão pela qual se encontram três zonas tão distintas nas referidas curvas. Procuremos em primeiro lugar a razão pela qual um componente (ou sistema) tem um elevado número de avarias nos primeiros tempos de vida. As avarias neste período podem ser causadas por defeitos na montagem dos componentes do sistema, deficiência dos componentes, deficiência dos processos de controlo de qualidade, defeitos originados durante o transporte e/ou montagem. Estas causas originam então que se verifique um elevado número de avarias nos primeiros períodos de funcionamento do sistema. Assim, a taxa de avarias no primeiro período de funcionamento tem um elevado valor que decrescerá rapidamente com o tempo.

Após o período inicial de funcionamento o sistema entra no período designado por **período de vida útil**, no qual a taxa de avarias será praticamente constante. Um dos objetivos dos estudos de fiabilidade será exatamente a determinação do período de vida útil, de modo que através de uma boa manutenção preventiva e/ou substituições em grupo se consiga que o sistema funcione permanentemente neste período. Pretende-se deste modo, que o período de velhice, no qual a taxa de avarias cresce muito rapidamente com o tempo, nunca seja atingido.

Comparando o período de vida útil típico de um componente eletrónico e de um componente mecânico, verifica-se que no primeiro caso tem uma duração relativa muito superior. Através de uma manutenção preventiva adequada consegue-se, de um modo geral, que o componente tenha um período de vida útil prolongado.

Normalmente, convém que os sistemas funcionem no seu período de vida útil e portanto é para esse período que de um modo geral são feitos os estudos de fiabilidade.

Quando uma central elétrica é ligada à rede, nos primeiros tempos de funcionamento, a taxa de avarias é relativamente grande. Passados os primeiros tempos de funcionamento, em que já foram eliminados todos os defeitos de montagem e detectados equipamentos que, por razões diversas, não satisfaziam as condições de qualidade exigidas, pode dizer-se que a central entra no seu período de funcionamento útil, com uma taxa de avarias constante.

Na análise que tem sido referida tem estado a admitir-se que os componentes e os sistemas são reparáveis. Na realidade não estamos em presença de uma característica comum a todos os tipos de sistemas, embora seja comum a um elevado número, nomeadamente sistemas eléctricos. Há todavia

sistemas cuja função é orientada para o desempenho de uma dada missão e que, por conseguinte, não são reparáveis, como é o caso de um satélite ou de um míssil.

É ao estudo da análise da fiabilidade de sistemas reparáveis no seu período de vida útil que nos iremos dedicar nestas notas..

2. Noções básicas de probabilidade

A noção de probabilidade é extremamente importante para estudos de fiabilidade.

A probabilidade é expressa numa escala de 0 a 1 como se mostra na fig. 2.1.

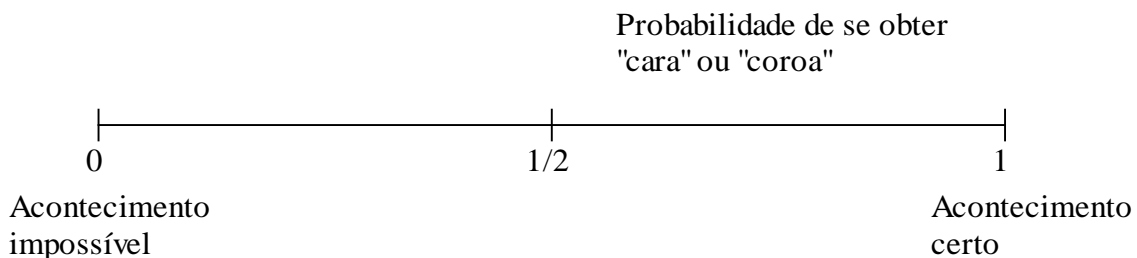


Fig. 2.1 -- Escala de probabilidades

Assim, por exemplo, a probabilidade de se obter "cara" ou "coroa", quando se lança uma moeda não viciada ao ar, é de 1/2, devido à geometria do sistema. Pode então definir-se a probabilidade de ocorrência de um acontecimento favorável (P) como:

$$P = \frac{\text{Número de acontecimentos favoráveis}}{\text{Número de acontecimentos possíveis}}$$

De um modo geral quando se trata do cálculo da probabilidade em sistemas de engenharia, a probabilidade de um acontecimento não pode ser calculada por considerações de ordem "geométrica", como no caso de uma moeda, de um dado, de uma roleta ou de um baralho de cartas. O conceito matemático de probabilidade está então associado com a regularidade de comportamento, obtida de repetitivas experiências ou de um funcionamento contínuo.

Consideremos que n é o número de vezes que a experiência é repetida e f o número de vezes de ocorrência do acontecimento. A probabilidade do acontecimento (P) será então definida como:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f}{n}$$

A frequência da ocorrência dos acontecimentos é extremamente importante na análise dos sistemas físicos que possuem regularidade estatística. Esta regularidade pode, por exemplo, ser detectada pelo número de avarias e tempos médios de funcionamento dos componentes do sistema. No caso de não haver uma evidência de regularidade, então a teoria das probabilidades não pode ser aplicada.

Um exemplo de particular importância na análise da fiabilidade de Sistemas Eléctricos de Energia é o da determinação da probabilidade de avaria de uma peça de equipamento, tal como um gerador. No caso de o gerador estar no seu período de vida útil pode dizer-se que a ocorrência de avarias é aleatória, isto é, ocorrência ao acaso e, por isso, com regularidade estatística.

A probabilidade de um alternador avariar, conhecida por "Forced Outage Rate" (FOR) será então dada por:

$$\text{FOR.} = \frac{\text{Tempo de avaria}}{\text{Tempo de funcionamento} + \text{Tempo de avaria}}$$

Para se analisar a probabilidade de ocorrência de determinados acontecimentos deve ter-se em atenção o seguinte:

- dois acontecimentos são ditos "independentes" se a ocorrência de um acontecimento não afectar a probabilidade de ocorrência do outro acontecimento
- dois acontecimentos são ditos mutuamente exclusivos se não puderem acontecer ao mesmo tempo (p. ex. o funcionamento normal e a avaria de um componente)
- a probabilidade da ocorrência simultânea de dois ou mais acontecimentos independentes é o produto das probabilidades dos respectivos acontecimentos

Assim, no caso de A e B serem dois acontecimentos independentes, a probabilidade de se verificar A e B será

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (2.1)$$

No caso de os acontecimentos A e B serem mutuamente exclusivos, a probabilidade de se verificar A, B ou A e B será

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2.2)$$

Se os acontecimentos A e B forem independentes, mas não mutuamente exclusivos, então a probabilidade de ocorrência de A ou B é

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \quad (2.3)$$

Notar que se A e B forem acontecimentos mutuamente exclusivos, a probabilidade de ocorrência simultânea dos acontecimentos, $P(A).P(B)$ é zero.

Quando a ocorrência de um acontecimento está dependente da ocorrência de outro acontecimento anterior, temos uma probabilidade condicionada. A probabilidade da ocorrência simultânea dos dois acontecimentos será igual ao produto da probabilidade da ocorrência do primeiro acontecimento, pela probabilidade condicionada do segundo acontecimento, dado que o primeiro se verificou.

A probabilidade de A, dado que B se verificou é, regra geral, escrita como $P(A/B)$.

Assim

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \quad (2.4)$$

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (2.5)$$

No caso de A e B serem acontecimentos independentes, então

$$P(B/A) = P(B)$$

$$P(A/B) = P(A)$$

No caso de a ocorrência de A ser dependente de um número de acontecimentos B_j que são mutuamente exclusivos, então

$$P(A) = \sum_{i=1}^j P(A/B_i)P(B_i) \quad (2.6)$$

3. Funções de distribuição

3.1 Introdução

Seja x uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de x for finito, ou infinito numerável, designaremos x de variável aleatória discreta. A cada possível resultado x_i associaremos um número $p(x_i) = p(x = x_i)$, denominado probabilidade de x_i . Os números $p(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ devem satisfazer às seguintes condições:

$$p(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

A função p , assim definida, é denominada função de probabilidade ou de distribuição de probabilidade.

Suponhamos agora que x pode tomar qualquer valor dentro de um certo intervalo. Diremos então que x é uma variável aleatória contínua. A função densidade de probabilidade f , indicada abreviadamente por f.d.p., é uma função que satisfaz às seguintes condições

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}_x} f(x) dx = 1 \quad \mathbb{R}_x - \text{domínio de } x$$

Além disso, definimos para qualquer $c < d$ (em \mathbb{R}_x)

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x) dx$$

Define-se a função F como a função de distribuição acumulada da variável aleatória X como $F(x) = P(X \leq x)$.

Se x for uma variável aleatória discreta

$$F(x) = \sum_j P(x_j)$$

onde o somatório é estendido a todos os índices j , que satisfaçam a condição $x_j \leq x$.

Se x for uma variável aleatória contínua com f.d.p. f , então

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$$

Notar que sendo F a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua, a função densidade de probabilidade f será

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

para todo o x no qual F seja derivável.

3.2 Distribuição binomial

Há alguns acontecimentos que são constituídos por um conjunto de experiências independentes, cada uma das quais com dois possíveis estados de ocorrência apenas e com uma probabilidade fixa de ocorrência para cada um deles. Em n repetições desta experiência, a distribuição das duas classes dos possíveis resultados das experiências é discreta e do tipo binomial.

Consideremos n experiências, cada uma das quais com uma probabilidade de sucesso igual a p .

A probabilidade do insucesso será então

$$P_a = 1 - p = q$$

A probabilidade de r sucessos em r experiências é de p^r .

A probabilidade de $n-r$ insucessos em $(n-r)$ experiências é

$$q^{n-r} = (1-p)^{n-r}$$

O número de modos com exactamente r sucessos e $(n-r)$ insucessos que podem ocorrer em n experiências é

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (3.1)$$

Notar que a ordem de ocorrência não é importante. Apenas interessa que tenham ocorrido r sucessos e $(n-r)$ insucessos nas n experiências.

A probabilidade de exactamente r sucessos em n experiências é

$$P_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} = C_r^n p^r q^{n-r} \quad (3.2)$$

Um acontecimento deve ter quatro características para que se possa associar à distribuição binomial:

1. Número fixo de experiências
2. Cada experiência deve resultar num sucesso ou insucesso
3. Todas as experiências devem ter probabilidades idênticas de sucesso
4. As experiências devem ser independentes

O valor médio de uma variável com uma distribuição binomial é igual ao produto da probabilidade de ocorrência pelo número de experiências. Vejamos que na realidade assim é. Para isso consideremos uma variável, cujos estados possíveis de residência e as probabilidades associadas são respectivamente:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \text{ e } p_1, p_2, \dots, p_n$$

O valor média da variável é definido como

$$E(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (3.3)$$

No caso de uma distribuição binomial que é uma distribuição discreta, temos

$$E(x) = \sum_{x=0}^n \frac{x n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$E(x) = \sum_{x=1}^n \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

Fazendo

$$y = x - 1$$

$$n - x = n - (y + 1) = (n - 1) - y$$

Temos

$$E(x) = n p \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} p^y q^{n-1-y}$$

Mas

$$\sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} p^y q^{n-1-y} = 1$$

Porque é a soma de uma distribuição binomial, pelo que

$$E(x) = n p \quad (3.4)$$

Em Sistemas Eléctricos de Energia é possível, por exemplo, aplicar a distribuição binomial quando se pretende calcular a fiabilidade de uma central eléctrica, com várias unidades iguais e admitindo que cada unidade apenas pode residir em dois estados, a funcionar ou avariada.

3.3 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson dá a probabilidade de um acontecimento ocorrer um dado número de vezes, num intervalo de tempo ou espaço fixado, quando a taxa de ocorrência é fixa.

A ocorrência dos acontecimentos deve ser aleatória, isto é, ser afetada apenas pelo acaso. A principal característica da distribuição de Poisson é o facto de apenas a ocorrência do acontecimento ser contada (a sua não-ocorrência não o é). Como o número total de acontecimentos não é conhecido, a distribuição binomial não é aplicável a este tipo de experiência.

São exemplos de acontecimentos que podem ser analisados por uma distribuição de Poisson:

- o número de descargas atmosféricas num dado período
- o número de chamadas telefónicas num dado período

3.3.1 Dedução da distribuição de Poisson a partir da distribuição binomial

Em n experiências, a probabilidade de um acontecimento suceder r vezes é

$$P_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r} \quad (3.5)$$

Se n for grande, quando comparado com r , temos

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \approx n^r$$

pelo que:

$$P_r^n = \frac{n^r}{r!} p^r q^{n-r}$$

Se p for pequeno e r for pequeno comparado com n

$$q^{n-r} \approx (1-p)^n$$

pelo que:

$$P_r = \frac{(np)^r}{r!} (1-p)^n = \frac{(nr)^r}{r!} \left[1 - np + \frac{n(n-1)}{r!} (-p)^2 + \dots \right]$$

Se n for grande $n(n-1) \approx n^2$

$$P_r^n = \frac{(np)^r}{r!} \left[1 - np + \frac{(np)^2}{r!} + \dots \right]$$

$$P_r^n = \frac{(np)^r}{r!} e^{-np}$$

P_r^n será a probabilidade da ocorrência de r sucessos em n experiências quando o valor esperado de sucesso é (np) .

Como se pode ver pelo que acaba de ser deduzido, a distribuição de Poisson é uma boa aproximação da distribuição binomial quando o número de experiências é grande e a probabilidade de ocorrência do acontecimento é pequena. É uma boa aproximação quando $n \geq 20$ e $p \leq 0.05$ e a aproximação melhora à medida que n aumenta e p diminui.

O valor esperado ou valor médio de ocorrências de qualquer acontecimento num dado período de tempo ou num dado número de experiências é expresso por np .

No caso do período de tempo ser contínuo o valor médio de ocorrências é expresso em unidades de tempo, pelo que o valor médio de avarias pode ser designado por λt , em que λ é o número de avarias por unidade de tempo.

A expressão:

$$P_r = \frac{(\lambda t)^r}{r!} e^{-\lambda t} \quad (3.6)$$

dá a probabilidade de r avarias no intervalo de tempo t .

A probabilidade de se obterem zero avarias no instante t , isto é, a fiabilidade do componente como função do tempo será

$$P(0) = R(t) = e^{-\lambda t}$$

Notar que nesta expressão λ foi suposto constante.

3.3.2 Dedução da distribuição de Poisson sem recurso à distribuição binomial

Seja λdt a probabilidade de o acontecimento ocorrer no intervalo de tempo $(t, t + dt)$. Suponhamos que λ é constante, que o comprimento do intervalo, dt , é suficientemente pequeno e que a probabilidade do acontecimento ocorrer mais que uma vez no intervalo de tempo dt é desprezável.

Considerando $P_x(t)$ como a probabilidade de o acontecimento ocorrer x vezes no intervalo de tempo $(0, t)$, tem-se

$$P_0(t + dt) = P_0(t)(1 - \lambda dt)$$

Admitindo que os acontecimentos são independentes

$$\frac{P_0(t + dt) - P_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

e

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P_0(t + dt) - P_0(t)}{dt} = P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

Considerando a condição inicial $P_0(0) = 1$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

que é o primeiro termo da distribuição de Poisson

Se $x > 0$

$$P_x(t + dt) = P_x(t) [P(\text{zero ocorrências em } t, t+dt)] + P_{x-1}(t) [P(\text{uma ocorrência em } t, t+dt)] + P_{x-2}(t) [P(\text{duas ocorrências em } t, t+dt)]$$

mas P (de duas ou mais ocorrências em $t, t + dt$) foi suposta ser zero, pelo que

$$\begin{aligned} P_x(t + dt) &= P_x(t)(1 - \lambda dt) + P_{x-1}(t)(\lambda dt) \\ &= P_x(t) - \lambda dt(P_x(t) - P_{x-1}(t)) \end{aligned}$$

pelo que

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad (3.7)$$

A fiabilidade do sistema, isto é, a probabilidade de não terem ocorrido avarias até ao instante t será

$$R(t) = P(0) = e^{-\lambda t}$$

A probabilidade do componente avariar será então de

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Nos Sistemas Eléctricos de Energia, normalmente, $\lambda t \leq 1$ pelo que $R(t) \approx 1 - \lambda t$ e $Q(t) \approx \lambda t$

Se $\lambda t < 0,01$ teremos $R(t) = 1 - \lambda t$ com uma precisão, no mínimo, de 4 casas decimais.

3.4 Distribuição normal

Esta distribuição é descrita pela função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty \quad (3.8)$$

em que

μ – valor médio de x

σ – desvio padrão de x

Na figura 3.1 estão representadas curvas típicas de uma distribuição normal.

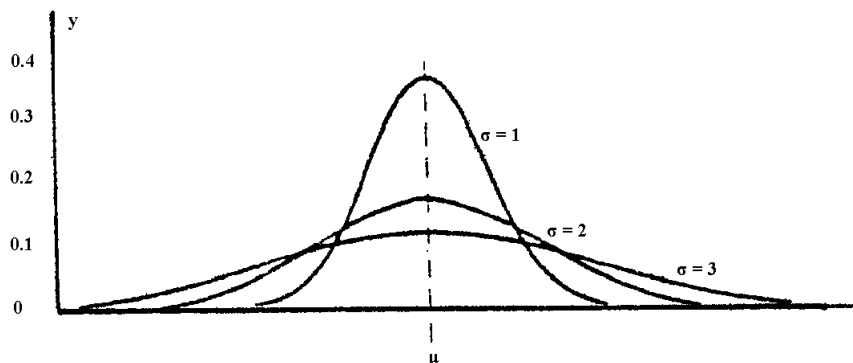


Fig. 3.1 – Curvas típicas de uma distribuição normal

Se se fizer o valor médio μ igual a zero e todos os desvios forem medidos em relação à média em termos do desvio padrão, a equação 3.8 será:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (3.9)$$

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2} ; \quad \sigma = 1 \quad (3.10)$$

Temos assim uma distribuição normal standardizada e os valores encontram-se tabelados. A Tabela 3.1 sumariza alguns valores para esta distribuição normalizada, os quais nos dão as áreas debaixo da curva standardizada.

Tabela 3.1
Valores da função de distribuição normal *standar*

$$F(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z e^{-z^2/2} dz$$

Z	F(Z)
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8646
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332
1.6	0.9452
1.7	0.9554
1.8	0.9641
1.9	0.9713
2.0	0.9772
3.0	0.9987
4.0	0.9994

Das tabelas obtêm-se:

$$P(0 < Z < t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-z^2/2} dz \quad (3.11)$$

como está representado na figura 3.2.

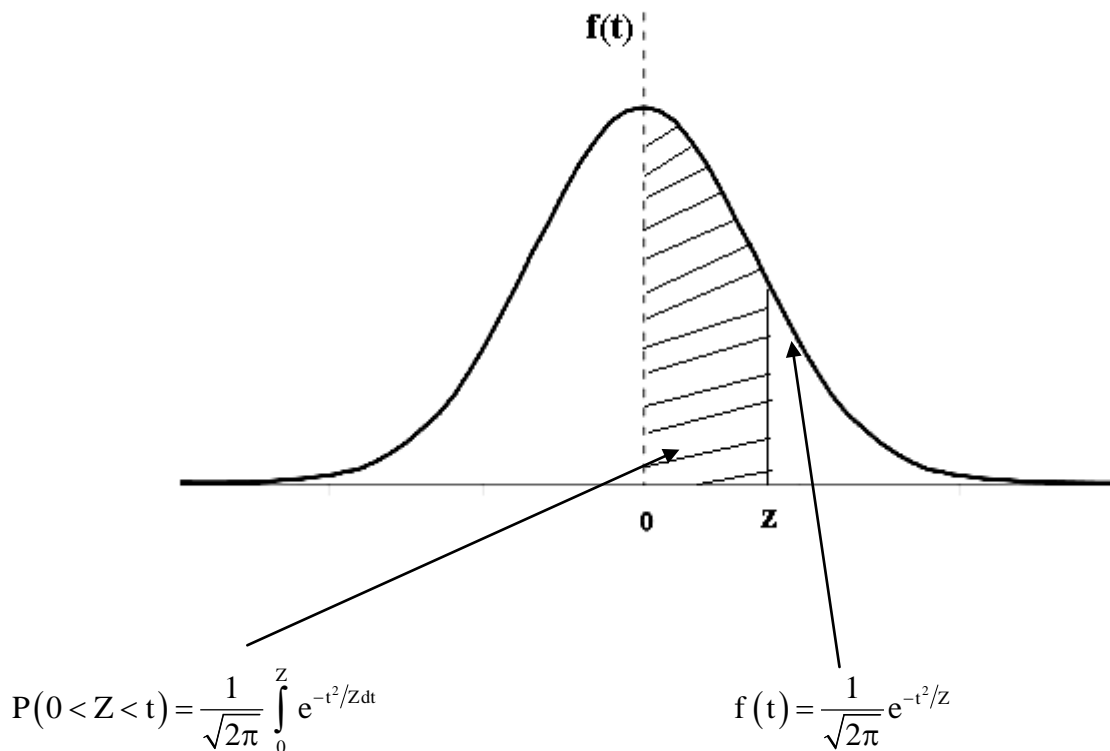


Fig. 3.2 – Probabilidade de ocorrência num intervalo, para o caso de uma distribuição normal.

Caso x tenha uma distribuição normal com parâmetros $\mu = \mu_0$ e $\sigma = \sigma_0$ e tendo Z a distribuição normal padrão, então:

$P(a < x < b) = P(c < Z < d)$ em que:

$$c = \frac{a - \mu_0}{\sigma_0} \quad e \quad d = \frac{b - \mu_0}{\sigma_0}$$

Na realidade

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_a^b e^{-(x-\mu_0)^2/2\sigma_0^2} dx = P(c < Z < d)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^d e^{-z^2/2} dz \quad \text{com } Z = \frac{x - \mu_0}{\sigma_0}$$

Notar que:

$$F(-Z) = 1 - F(Z)$$

Devido à simetria da função em torno de 0.

Computacionalmente é usual representar a função de distribuição normal por degraus, dependendo o número de degraus da precisão pretendida para os resultados. Obviamente, quanto maior for o número de degraus, maior será o tempo computacional necessário para a execução dos cálculos. Na figura 3.3 está representada uma função de distribuição discretizada em sub-classes, com a probabilidade associada a cada uma das sub-classes indicada.

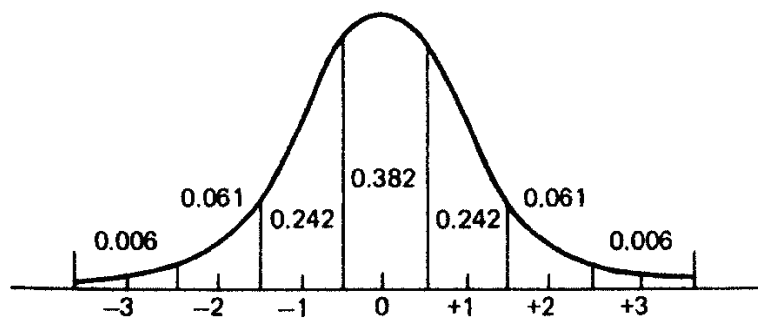


Fig. 3.3 -- Curva da distribuição normal dividida em 7 classes

3.5 Distribuição exponencial

Uma variável aleatória contínua $0 \leq X \leq \infty$ está associada a uma função de distribuição exponencial quando esta for da forma

$$F(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.12)$$

sendo λ uma constante positiva.

A função densidade de probabilidade que lhe corresponde é dada pela expressão

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \quad 0 \leq t < \infty$$

O valor médio duma variável aleatória com distribuição exponencial é dada por

$$E(X) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (3.13)$$

Integrando por partes:

$$\mu = t$$

$$dv = \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$\int \mu dv = \mu v - \int v d\mu$$

Então, podemos escrever

$$E(t) = \left[-t e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda t} dt = 0 + \frac{1}{\lambda} = 1/\lambda \quad (3.14)$$

A distribuição exponencial é a distribuição mais usada em estudos de fiabilidade como se pode ver no parágrafo 4 em que se concluiu que a probabilidade de um componente, com uma taxa de avarias constante, sobreviver até ao instante t é dada por:

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (3.15)$$

A fig. 3.4 mostra graficamente a função $f(t)$

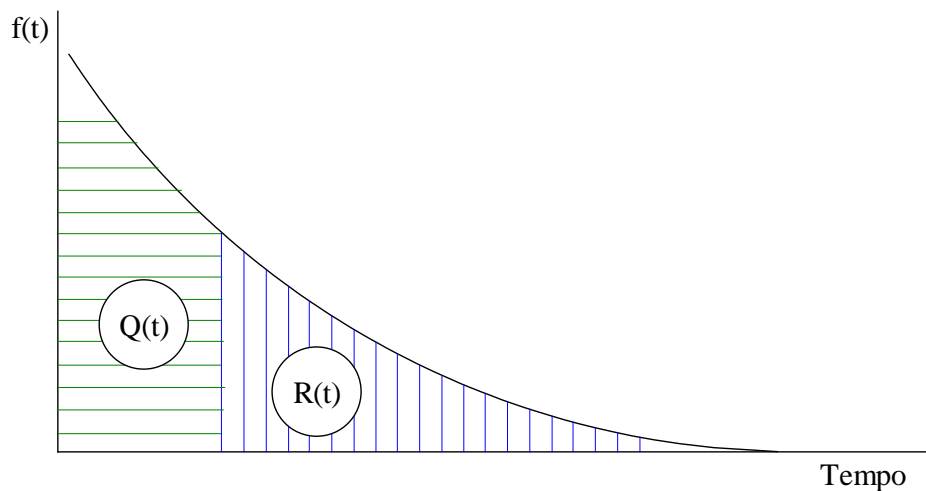


Fig. 3.4 – Função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição exponencial.

A probabilidade de avariar até ao instante t é $Q(t)$

$$Q(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t} \quad (3.16)$$

A probabilidade de sobreviver até ao instante t é

$$R(t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t} \quad (3.17)$$

Consideremos agora um componente que funcionou pelo período de tempo T , como mostra a Fig. 3.5. Pretende calcular-se a probabilidade do componente avariar no período $(T, T + dt)$. Estamos agora em presença de um problema de probabilidade condicionada.

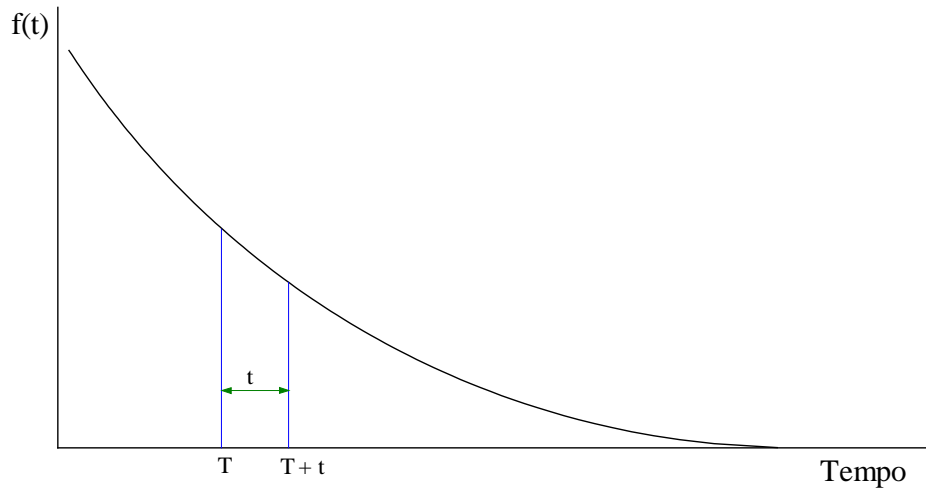


Fig. 3.5 – $R(t)$ – função exponencial

Como já foi referido (parágrafo 2)

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \quad (3.18)$$

e

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3.19)$$

Se

$$P(A/B) = P[\text{avariar durante o tempo } t \text{ dado que o componente sobreviveu até ao instante } T] = Q_c(t)$$

$$P(A \cap B) = P[\text{funcionar até ao instante } T \text{ e avariar durante o intervalo } (T, T + t)]$$

$$= \int_T^{T+t} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(T+t)}$$

$$P(B) = [P \text{ funcionar até ao instante } T] =$$

$$= \int_T^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda T}$$

Então:

$$P(A/B) = Q_c(t) = \frac{e^{-\lambda T} - e^{-\lambda T} \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda T}} = 1 - e^{-\lambda t} \quad (3.20)$$

Podemos pois concluir que a probabilidade de um componente avariar durante qualquer intervalo de tempo t , é independente do tempo de funcionamento anterior, supondo o componente no seu período de vida útil.

4. Fiabilidade de um componente

Consideremos que conhecemos a “história” de N_0 componentes idênticos e que desejamos conhecer a expressão geral da fiabilidade de um componente.

Seja:

N_0 = número de componentes

$N_f(t)$ = número de componentes que funcionam até ao instante t

$N_a(t)$ = número de componentes que avariaram até ao instante t

$$N_0 = N_f(t) + N_a(t)$$

No instante t , a probabilidade de um componente não ter avariado, ou seja a fiabilidade do componente, será dada por:

$$R(t) = \frac{N_f(t)}{N_0} = \frac{N_0 - N_a(t)}{N_0} = 1 - \frac{N_a(t)}{N_0} \quad (4.1)$$

Definindo taxa de avarias de um componente no instante t , como sendo a probabilidade do componente avariar no intervalo de tempo $(t, t + dt)$, dividida por dt , isto é:

$$\lambda(t) = \frac{\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{N_a(t+dt) - N_a(t)}{dt}}{N_f(t)} = \frac{\frac{dN_a(t)}{dt}}{N_f(t)} = \frac{1}{N_f(t)} \frac{dN_a(t)}{dt} \quad (4.2)$$

Como

$$R(t) = 1 - \frac{N_a(t)}{N_0}$$

Temos

$$\frac{dR(t)}{dt} = - \frac{1}{N_0} \frac{dN_a(t)}{dt}$$

Pelo que:

$$\frac{dN_a(t)}{dt} = -N_0 \frac{dR(t)}{dt}$$

Substituindo em (4.2) e atendendo a (4.1) teremos:

$$\lambda(t) = -\frac{N_0}{N_f(t)} \frac{dR(t)}{dt} = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \quad (4.3)$$

Multiplicando ambos os membros da equação anterior por dt teremos

$$\lambda(t)dt = -\frac{1}{R(t)} dR(t) \quad (4.4)$$

Integrando a equação (4.4) entre os instantes 0 e t, vem

$$\int_0^t \lambda(t) dt = -\int_1^{R(t)} \frac{dR(t)}{R(t)}$$

ou seja,

$$\int_0^t \lambda(t) dt = -\log R(t)$$

de onde se conclui

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (4.5)$$

Notar que na expressão (4.5), que dá a fiabilidade de um componente, a taxa de avarias é uma função do tempo, e não foi feita qualquer restrição acerca dessa função.

Se admitirmos que $\lambda(t)$ é uma constante de valor λ , e por isso independente do tempo, então

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (4.6)$$

que, como se viu, trata-se do primeiro termo da função de distribuição de Poisson.

Como foi referido na introdução, para muitos componentes, nomeadamente componentes eletrónicos ou componentes mecânicos com uma constante manutenção preventiva, pode considerar-se que, após o seu período de funcionamento inicial, funcionam no seu período de vida útil, em que a taxa de avarias é constante.

Em Sistemas Eléctricos de Energia, por uma adequada manutenção preventiva, pode admitir-se que geradores, transformadores, disjuntores, etc., após o seu período inicial de funcionamento, funcionam no seu período de vida útil.

O modelo matemático adotado nos conceitos que a seguir se descrevem pressupõe que os componentes funcionam no seu período de vida útil, enquanto se encontram ao serviço. Esta hipótese é na realidade extremamente importante porque, os estudos de fiabilidade feitos, admitindo que os componentes estão no seu período de vida útil são extremamente otimistas, no caso de os componentes funcionarem no seu período de velhice.

5. Tempos médios de funcionamento e de avaria

Consideremos a história de um componente (fig. 5.1) e seja:

F – estado de funcionamento

A – estado de avaria

t_{f1} – tempo de funcionamento

t_{a1} – tempo de avaria (tempo de reparação)

n_f – número de vezes que o estado F ocorreu

n_a – número de vezes que o estado A ocorreu

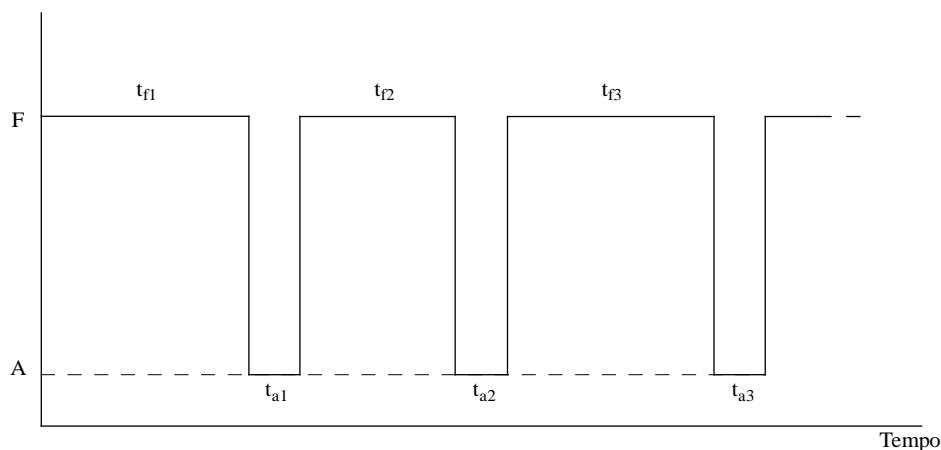


Fig. 5.1 – Representação gráfica da história de funcionamento de um componente

Podemos então definir os tempos médios de funcionamento m (MTTF – “mean time to failure”), de avaria ou reparação (r) e o tempo médio entre avarias (MTBF – “mean time between failure”) ou período.

Tem-se então:

$$m = \text{MTTF} = \frac{\sum_{i=1}^{n_f} t_{fi}}{n_f} \quad (5.1)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n_a} t_{ai}}{n_a}$$

$$\text{MTBF} = m + r \quad (5.2)$$

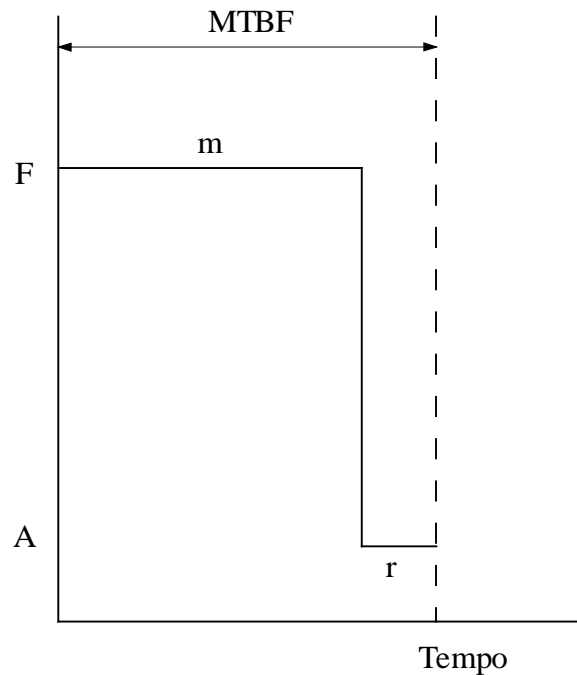


Fig. 5.2 – Representação gráfica da história de funcionamento de um componente (tempos médios)

A probabilidade de se encontrar um componente de um sistema fora de serviço por avaria (no seu período de vida útil) num qualquer instante, é dada pelo quociente entre o valor do tempo médio de reparação do componente (r) e o tempo médio entre avarias ($m + r$)

$$P(A) = \frac{r}{m + r} \quad (5.3)$$

Do mesmo modo a probabilidade de se encontrar o componente em funcionamento num qualquer instante é

$$P(F) = \frac{m}{m + r} \quad (5.4)$$

Ao se analisar determinado modelo de risco, o MTTF, para a distribuição de probabilidade definida pelo modelo, é dado por

$$\text{MTTF} = E(t) = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (5.5)$$

Notar que só faz sentido definir o tempo médio entre avarias (MTTF) em sistemas continuamente reparáveis.

Como foi visto no ponto 4, para um componente com uma taxa de avarias constante, $E(t) = \frac{1}{\lambda}$. Este resultado significa que o tempo médio antes de uma avaria (MTTF – “mean time to failure”), de um componente, com uma taxa de avarias constante é igual ao inverso da taxa de avarias.

$$m = \text{MTTF} = \frac{1}{\lambda} \quad (5.6)$$

O mesmo é dizer que a taxa de avarias é inversamente proporcional ao tempo médio de vida.

6. Fiabilidade de um sistema

6.1 Introdução

Procuremos agora analisar a fiabilidade de um sistema, constituído por vários componentes. A fiabilidade do sistema dependerá da fiabilidade dos componentes do sistema, da forma como os componentes estão ligados - estrutura do sistema e da definição de funcionamento do sistema.

Examinemos as associações dos componentes em série, paralela, mista e o caso em que de n unidades idênticas ligadas em paralelo apenas é necessário o funcionamento de m ($m \leq n$) para o sucesso do sistema.

Quando a estrutura do sistema não puder ser enquadrada em nenhuma das estruturas atrás referidas, terão que ser analisadas técnicas mais gerais, tais como, definição de cortes, árvores de avarias, etc.

Notar que a definição das estruturas de fiabilidade resulta das condições de trabalho impostas aos componentes e não apenas do tipo de ligação física dos componentes. Pode assim, obter-se um diagrama de fiabilidade diferente da associação real. Assim, por exemplo, quando duas linhas de transmissão estão em paralelo, se uma das linhas for suficiente para alimentar a carga, o sistema diz-se redundante, porque apenas é necessário que uma das linhas esteja em funcionamento para que o sistema esteja operativo. A estrutura do sistema sob o aspeto de fiabilidade é análoga à real. Porém, se tiverem que estar as duas linhas em serviço para alimentar a carga, porque a capacidade de uma das linhas não é suficiente, o diagrama de fiabilidade consiste em dois componentes em série.

6.2 Associação em série

Neste caso, fig.6.1, o funcionamento do sistema exige a operação correta de todos os seus componentes

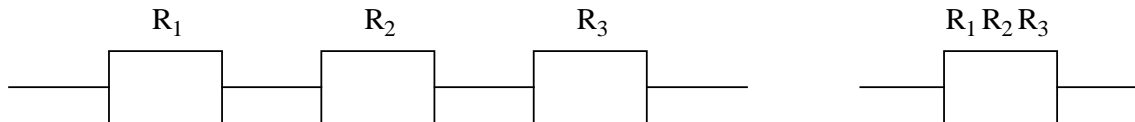


Fig. 6.1 – Associação em série de componentes

No caso mais vulgar de os componentes serem independentes, a fiabilidade do sistema é dada por

$$R_s = R_1 R_2 R_3 \dots R_n = \prod_{i=1}^n R_i \quad (6.1)$$

No caso de os componentes serem iguais a fiabilidade do sistema será:

$$R_s = R^n$$

Facilmente se vê, que, como era de esperar, a fiabilidade do sistema diminui à medida que o número de componentes ligados em série aumenta, pois R_i é sempre menor que 1.

A equação (6.1) é conhecida como a **lei do produto das fiabilidades**.

Num sistema com vários componentes em série, funcionando no seu período de vida útil, a fiabilidade do sistema é dada por:

$$R_s = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t} \quad (6.2)$$

6.3 Associação em paralelo

Consideremos dois componentes redundantes e independentes, ligados em paralelo (fig. 6.2)

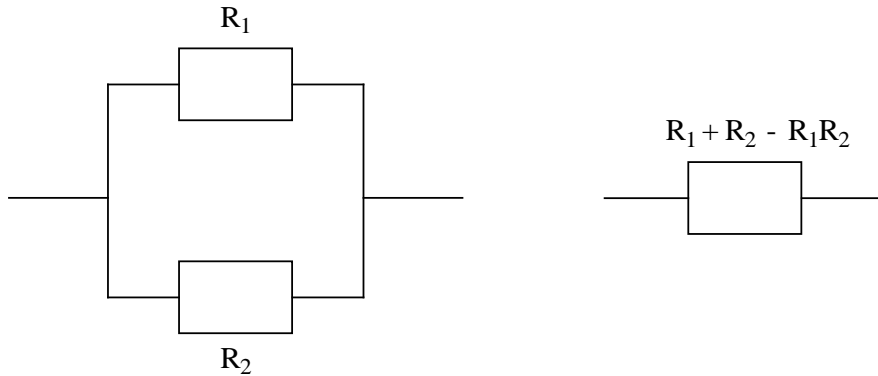


Fig. 6.2 – Sistema constituído por dois componentes redundantes

Se cada um dos componentes estiver no seu período de vida útil, R_S , a fiabilidade do sistema, é dada por:

$$R_S = R_1 + R_2 - R_1R_2 = 1 - Q_1Q_2 = 1 - Q_S \quad (6.3)$$

em que Q_1 , Q_2 e Q_S são respetivamente as indisponibilidades para os componentes 1,2 e para o sistema. Se houver n componentes ligados em paralelo

$$Q_S = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (6.4)$$

A equação (6.4) é conhecida como a **lei do produto das indisponibilidades**. A fiabilidade do sistema é então dada por

$$R_S = 1 - \prod_{i=1}^n Q_i \quad (6.5)$$

Notar que para sistemas redundantes a fiabilidade do sistema aumenta, com o número de componentes em paralelo.

Se o sistema não for redundante as condições de funcionamento e de avaria para o sistema têm que ser definidos. Consideremos por exemplo um sistema constituído por quatro componentes em paralelo (fig. 6.3).

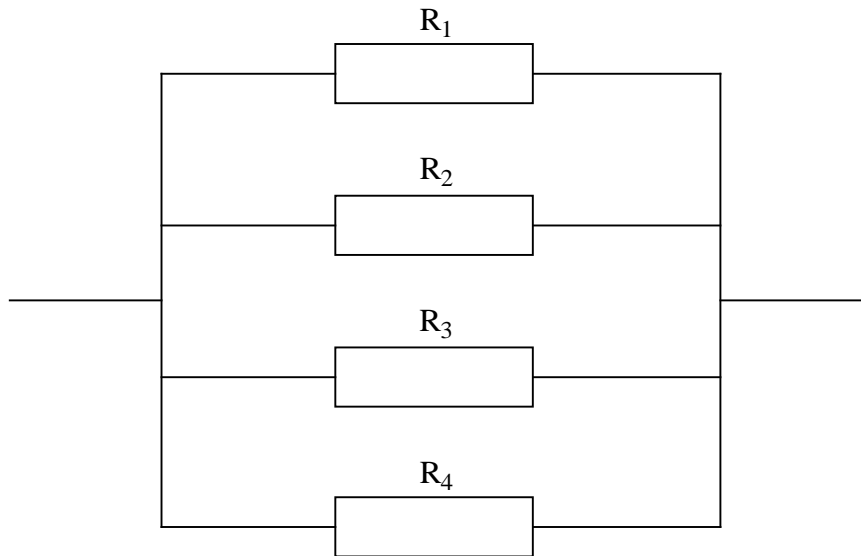


Fig. 6.3 – Sistema constituído por quatro componentes ligados em paralelo

Se os componentes forem todos idênticos, com a fiabilidade R e uma indisponibilidade Q , a probabilidade associada a cada um dos estados possíveis (0, 1, 2, 3 e 4 componentes em funcionamento) pode ser determinada pelo desenvolvimento do binómio $(R + Q)^4$

$$(R + Q)^4 = R^4 + 4R^3 Q + 6R^2 Q^2 + 4R Q^3 + Q^4$$

A probabilidade de sucesso do sistema é dada, de acordo com o número de componentes necessários para que o sistema funcione, no quadro seguinte

Nº de componentes necessários para o funcionamento do sistema	Probabilidade de o sistema funcionar
4	R^4
3	$R^4 + 4R^3 Q$
2	$R^4 + 4R^3 Q + 6R^2 Q^2$
1	$R^4 + 4R^3 Q + 6R^2 Q^2 + 4RQ$

Se os componentes não forem idênticos os valores das probabilidades podem ser obtidas a partir de

$$(R_1 + Q_1) \cdot (R_2 + Q_2) \cdot (R_3 + Q_3) \cdot (R_4 + Q_4) = 1.0 \quad (6.6)$$

Sistemas mais complicados podem ser sequencialmente analisados usando o conceito de probabilidade condicionada para acontecimentos mutuamente exclusivos. Consideremos para o efeito o sistema representado na fig. 6.4. Admitamos que para o funcionamento do sistema é necessário que exista pelo menos um percurso entre a entrada ou a saída.

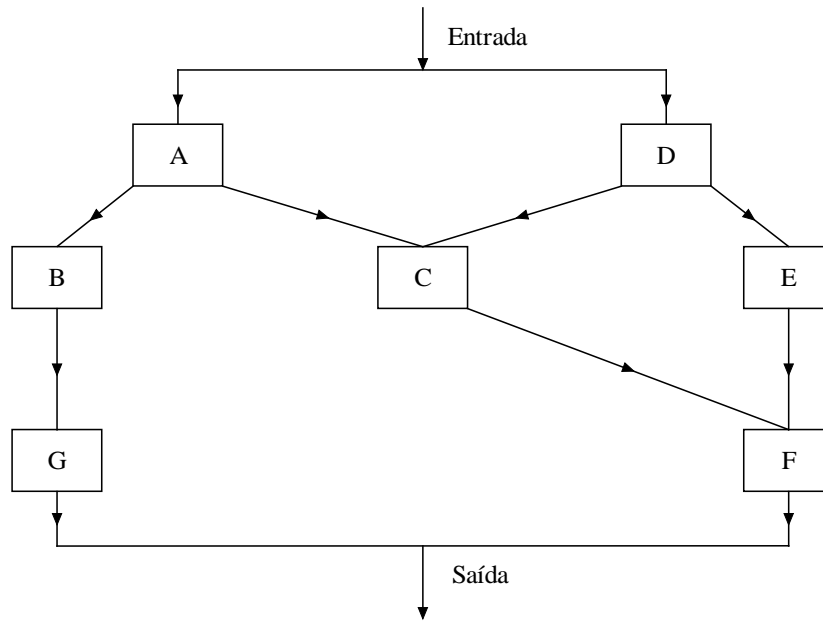


Fig. 6.4 – Configuração do sistema

Calculemos a fiabilidade do sistema se os componentes forem todos iguais e tiverem uma fiabilidade de 0.9.

Atendendo à noção de probabilidade condicionada, podemos, por exemplo, escrever

$$R_S = R_S(A \text{ está bom}) \cdot R_A + R_S(A \text{ está avariado}) \cdot Q_A \quad (6.7)$$

Em lugar de ter escrito esta expressão, poderia ter escrito qualquer outra, que contivesse o mesmo conceito, por exemplo

$$R_S = R_S(D \text{ está bom}) \cdot R_D + R_S(D \text{ está avariado}) \cdot Q_D \quad (6.8)$$

Consideremos a expressão 6.7. Admitindo que A está bom, o sistema é equivalente ao da fig. 6.5.

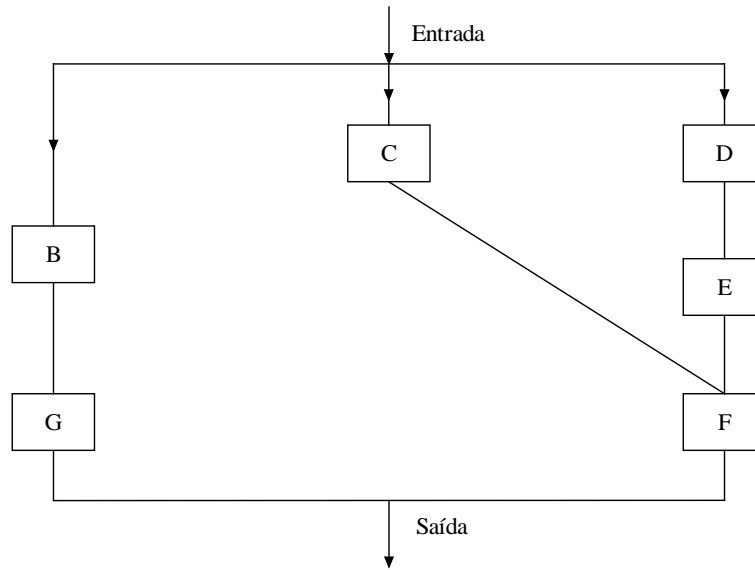


Fig. 6.5 – Configuração do sistema quando se admite que o componente A está bom

Admitindo que A é bom a expressão da fiabilidade do sistema é:

$$R_s = R_s(C \text{ é bom}) \cdot R_C + R_s(C \text{ está avariado}) \cdot Q_C \quad (6.9)$$

As figuras 6.6 a) e 6.6 b) mostram a configuração do sistema quando se admite que C está bom e C está avariado respetivamente

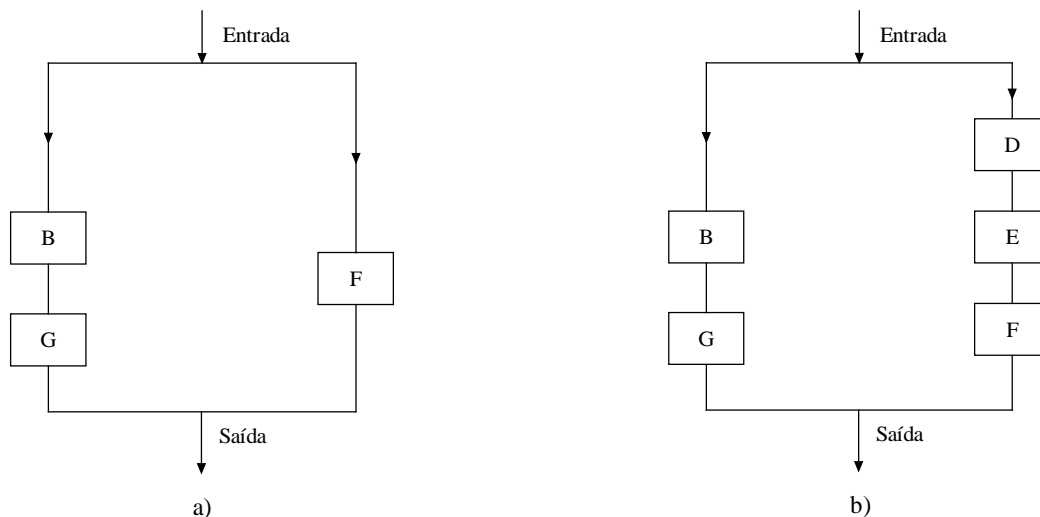


Fig. 6.6 - Configuração do sistema quando se admitir que A está bom e

- a) C está bom
- b) C está avariado

Atendendo à fig. 6.6 e à fiabilidade de um sistema formado por componentes em série e em paralelo (componentes redundantes) podemos escrever a expressão (6.9) como:

$$R_S = [1 - (1 - R_B R_G) \cdot (1 - R_F)] R_C + [1 - (1 - R_B R_G) \cdot (1 - R_D R_E R_F)] Q_C \quad (6.10)$$

Admitindo que A está avariado, o sistema terá a configuração representada na figura 6.7.

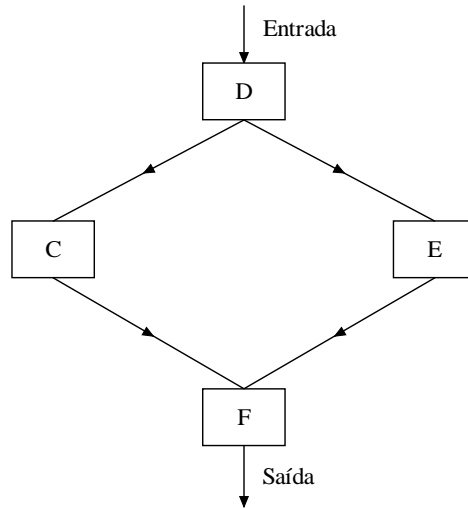


Fig. 6.7 – Configuração do sistema quando se admite que o componente A está avariado

A fiabilidade do sistema será dada pela expressão

$$R_S = R_S(C \text{ é bom}) \cdot R_C + R_S(C \text{ está avariado}) \cdot Q_C \quad (6.11)$$

Facilmente se vê que a expressão anterior pode ser escrita como

$$R_S = R_D R_F R_C + R_D R_E R_F Q_C \quad (6.12)$$

Por substituição em (6.10) obtemos a seguinte expressão geral da fiabilidade para o sistema

$$R_S = R_A \left[(1 - (1 - R_B R_G) \cdot (1 - R_F)) R_C + (1 - (1 - R_B R_G) \cdot (1 - R_D R_E R_F)) \cdot (1 - R_C) \right] + (1 - R_A) \left[(R_D R_F) R_C + (R_D R_E R_F) (1 - R_C) \right] \quad (6.13)$$

Se os componentes do sistema tiverem todos uma fiabilidade de 0.9, a fiabilidade do sistema será

$$R_S = 0.960165 \quad (6.14)$$

Este valor, como é óbvio, seria o mesmo que se obteria se em lugar de partirmos inicialmente da expressão (6.7), partíssemos da expressão (6.8) ou de qualquer outra equivalente.

7. Árvore de avarias

O conceito de árvore de avarias foi inicialmente desenvolvido para a análise da fiabilidade de mísseis e posteriormente utilizado na análise da fiabilidade de reatores nucleares.

O método consiste basicamente em identificar todos os modos possíveis de avaria e controlá-los. A árvore de avarias por si mesma, constitui uma representação gráfica da álgebra de Boole associada com o desenvolvimento de uma dada avaria do sistema.

De um modo geral, o procedimento para estabelecer uma árvore de avarias é o seguinte:

- Definir claramente os acontecimentos indesejados
- Relacionar pormenorizadamente as informações sobre o equipamento em estudo
- Desenvolver a árvore de avarias, dispondo graficamente os percursos que podem levar a ocorrência do principal acontecimento
- Com base nos dados de avaria de cada acontecimento básico, estabelecer a análise da árvore de avarias

Suponhamos que pretendemos analisar a fiabilidade da iluminação de uma sala com uma lâmpada (Fig. 7.1)

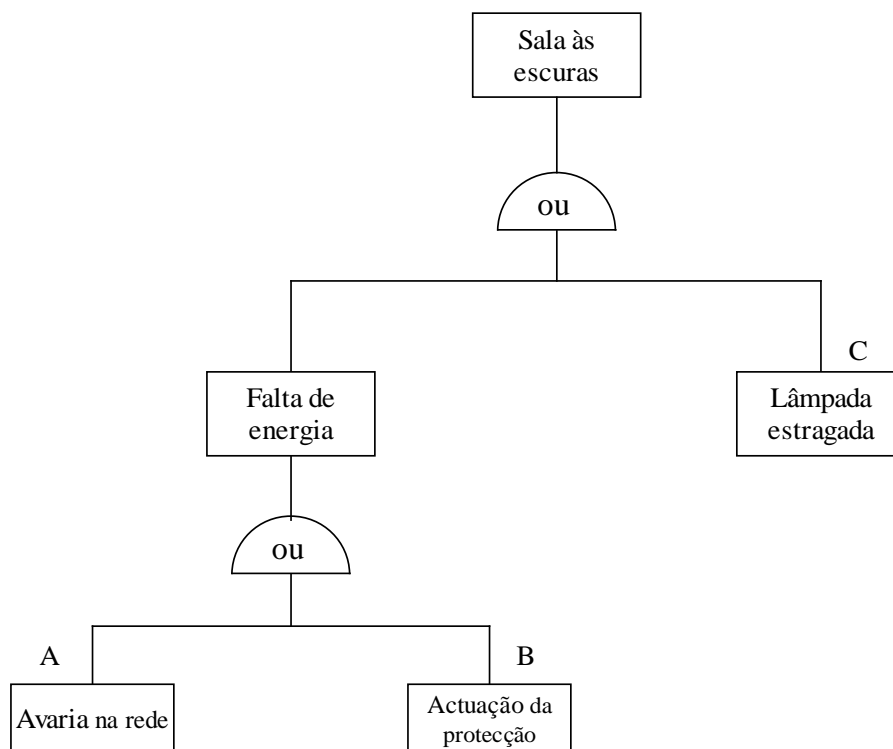


Fig. 7.1- Exemplo de uma árvore de avarias

Se o objetivo for calcular a probabilidade de falta de energia (acontecimento secundário) temos

$$P(\text{avariação}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad (7.1)$$

O acontecimento prioritário (sala às escuras) pode ser calculado pela expressão:

$$P(\text{sala às escuras}) = P(\text{falta de energia} \cup \text{lâmpada estragada}) \quad (7.2)$$

Esta metodologia pode ser aplicada a estudos de fiabilidade de sistemas de protecção e esquemas de comando.

8. Processos de Markov

8.1 Introdução

Consideremos uma experiência caracterizada pelo conjunto dos acontecimentos possíveis.

Para cada acontecimento ζ , é possível associar uma função de tempo, de acordo com uma regra definida

$$x(t, \zeta)$$

Criamos assim uma família de funções para cada ζ . Esta família é designada por **processo estocástico**. Um processo estocástico pode ser interpretado como função de duas variáveis, t e ζ .

Se o intervalo de tempo for definido continuamente, isto é, se as medições são feitas continuamente no tempo, temos um processo estocástico contínuo. Caso as observações sejam feitas em determinados intervalos de tempo, tem-se um processo estocástico a parâmetros discretos.

Para um acontecimento específico, a expressão $x(t, \zeta)$ representa uma função do tempo. Para um tempo especificado t_i , $x(t_i, \zeta)$ é uma quantidade dependente de ζ , isto é, uma variável aleatória.

Como facilmente se vê $x(t_i, \zeta)$ é um número.

É usual utilizar a notação

$$x(t)$$

para representar um processo estocástico, omitindo-se na sua expressão a sua dependência de ζ . Do exposto conclui-se que $x(t)$ tem os seguintes significados:

- uma família de funções do tempo (t e ζ variáveis)
- uma função do tempo (t variável, ζ constante)
- uma variável aleatória (t fixo, ζ variável)
- um simples valor numérico (t fixo, ζ fixo)

Como um processo estocástico envolve o comportamento de um sistema no tempo, na definição de tais processos deve-se começar pela especificação do tempo T .

Quando o processo estocástico não é afectado por uma deslocação na origem dos tempos, diz-se que o processo estocástico é estacionário.

Num processo estocástico estacionário tem-se então que

$$x(t) = x(t + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in T$$

A sequência aleatória constitui um processo de Markov se a probabilidade condicionada

$$P(i_n | i_1, i_2 \dots i_{n-1}) = P[x_n = i_n | x_1 = i_1, x_2 = i_2 \dots x_{n-1} = i_{n-1}]$$

depender somente dos valores de i_n e i_{n-1} , ou seja

$$P(i_n | i_1, i_2 \dots i_{n-1}) = P(i_n | i_{n-1})$$

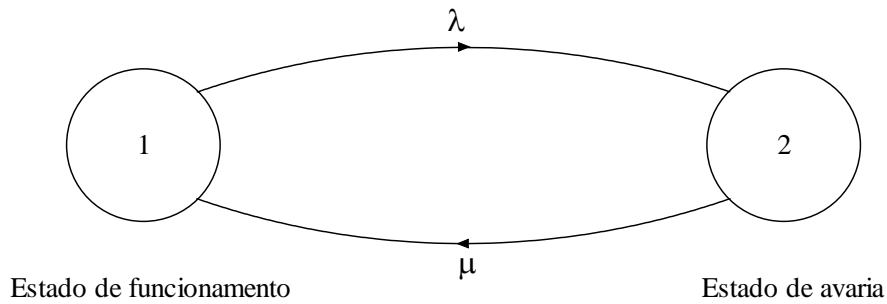
Supondo $x(t)$ como um processo de Markov, i e j como estados, a expressão que dá a probabilidade de transição do estado i para o estado j , durante o intervalo de tempo $t, t + \Delta t$ é

$$P_{ij} = P(x(t + \Delta t) = j | x(t) = i) \quad t \geq 0$$

Se esta probabilidade for constante ao longo do tempo, o processo é dito homogéneo no tempo.

8.2 Modelo de Markov para um elemento de um sistema eléctrico

Normalmente admite-se que um elemento de um Sistema Eléctrico de Energia apenas pode residir num de dois estados – estado de funcionamento e estado de avaria (Fig. 8.1). Posteriormente, será visto que em alguns casos tem interesse uma abordagem mais minuciosa do problema, considerando-se então que o componente pode residir em estados intermédios (por exemplo, caso de um gerador térmico de potência elevada, que por deficiência do sistema de produção de vapor não pode fornecer toda a sua potência).



λ - taxa de avarias (av/ano)

μ - taxa de reparações (rep/ano)

Fig. 8.1 – Representação de um componente pelos seus dois estados de residência.

Um processo de Markov a parâmetros contínuos e a estados discretos é chamado de **cadeia de Markov**. Uma cadeia de Markov possui as seguintes propriedades:

- O sistema pode ser descrito como estando num dos estados de um conjunto de estados S , discretos, exaustivos e mutuamente exclusivos.
- As mudanças de estado são possíveis em qualquer intervalo de tempo.
- A probabilidade de saída de um estado depende somente do estado actual.
- A probabilidade de dois ou mais acontecimentos ocorrerem durante um intervalo de tempo infinitesimal é desprezável.

Seja

$P_i(t)$ – probabilidade do sistema estar no estado i no tempo t .

P_{ij} – taxa de saída do estado i para o estado j .

$P_{ij} dt$ – probabilidade de transição do estado i para o estado j , no tempo dt .

A probabilidade de encontrar um sistema com n estados em qualquer um dos estados i , no tempo $t+dt$, pode ser calculada a partir de um sistema de n equações simultâneas em termos das probabilidades $P_i(t)$. Assim

$$P_i(t + dt) = P_i(t) \left[1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ij} dt \right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j(t) P_{ji} dt \quad (8.1)$$

O primeiro termo do segundo membro desta equação é a probabilidade de estar no estado i em t e não sair dele durante dt ; o segundo termo é a probabilidade de estar em j em t e ir para i durante dt .

A equação (8.1) pode ser escrita como

$$\frac{P_i(t+dt) - P_i(t)}{dt} = -P_i(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j(t) P_{ji} \quad (8.2)$$

Fazendo tender dt para 0

$$P_i(t) = -P_i(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j(t) P_{ji} \quad (8.3)$$

Dadas as condições iniciais, o sistema de equações anterior, permite calcular a probabilidade de o sistema se encontrar em cada um dos estados.

8.3 Aplicação do processo de Markov a um sistema constituído por um componente

Consideremos um componente que pode residir em dois estados (Fig. 8.2), no qual estão representadas as probabilidades de residir ou abandonar o estado num dado intervalo de tempo finito.

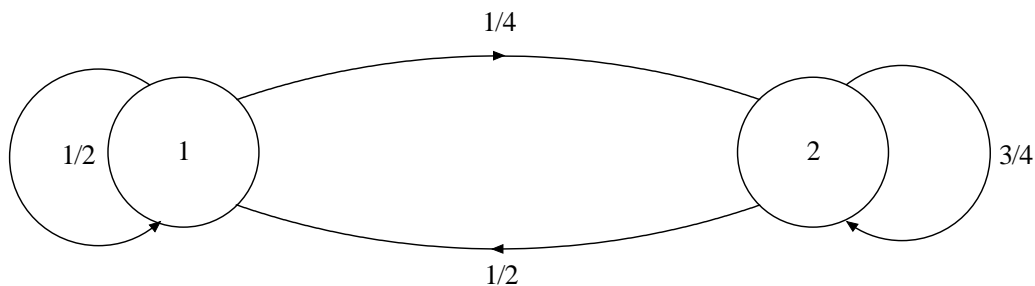


Fig. 8.2 – Componente com dois possíveis estados de resistência

O sistema representado é um sistema discreto na medida em que a passagem de um estado para o outro se realiza de uma forma discreta. A Fig. 8.3 mostra a evolução do sistema ao fim de um dado número de passos e na Fig. 8.4 está representada a probabilidade limite do sistema de acordo com o número de passos. Notar que a probabilidade de estar num qualquer dos dois estados no passo 0 é dada pelas condições iniciais do sistema.

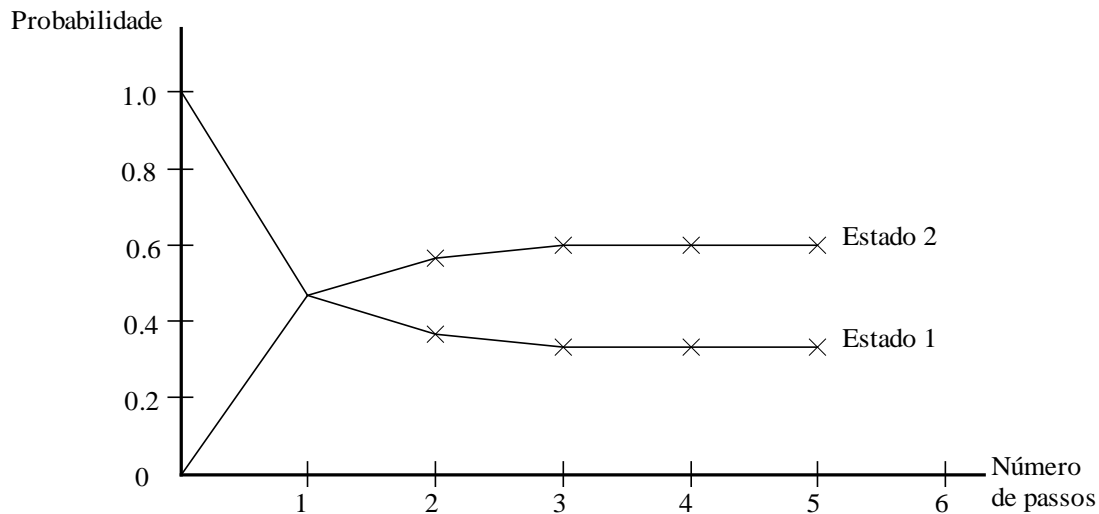


Fig. 8.4 – Representação do comportamento do sistema

À medida que o número de passos cresce a representação sob a forma de uma árvore, como a representada na Fig. 8.3, é impraticável. A transição de um estado para o outro, num simples passo, pode ser representada pela matriz P

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

em que:

P_{ii} representa a probabilidade de residir no estado i.

P_{ij} é a taxa de abandono do estado j para o estado i.

Notar que a soma dos elementos de uma coluna da matriz P é um.

A matriz P assim definida é designada **matriz estocástica de transição de probabilidades**.

A matriz P^n é definida como a matriz cujo elemento ij é a probabilidade de que o sistema esteja no estado i depois de n passos, admitindo que o sistema estava inicialmente no estado j.

Quando é possível ir de um estado para o outro, num número finito de passos, verifica-se que os elementos das colunas da matriz P^n tendem para um dado limite, sendo neste caso a probabilidade limite independente do estado inicial do sistema.

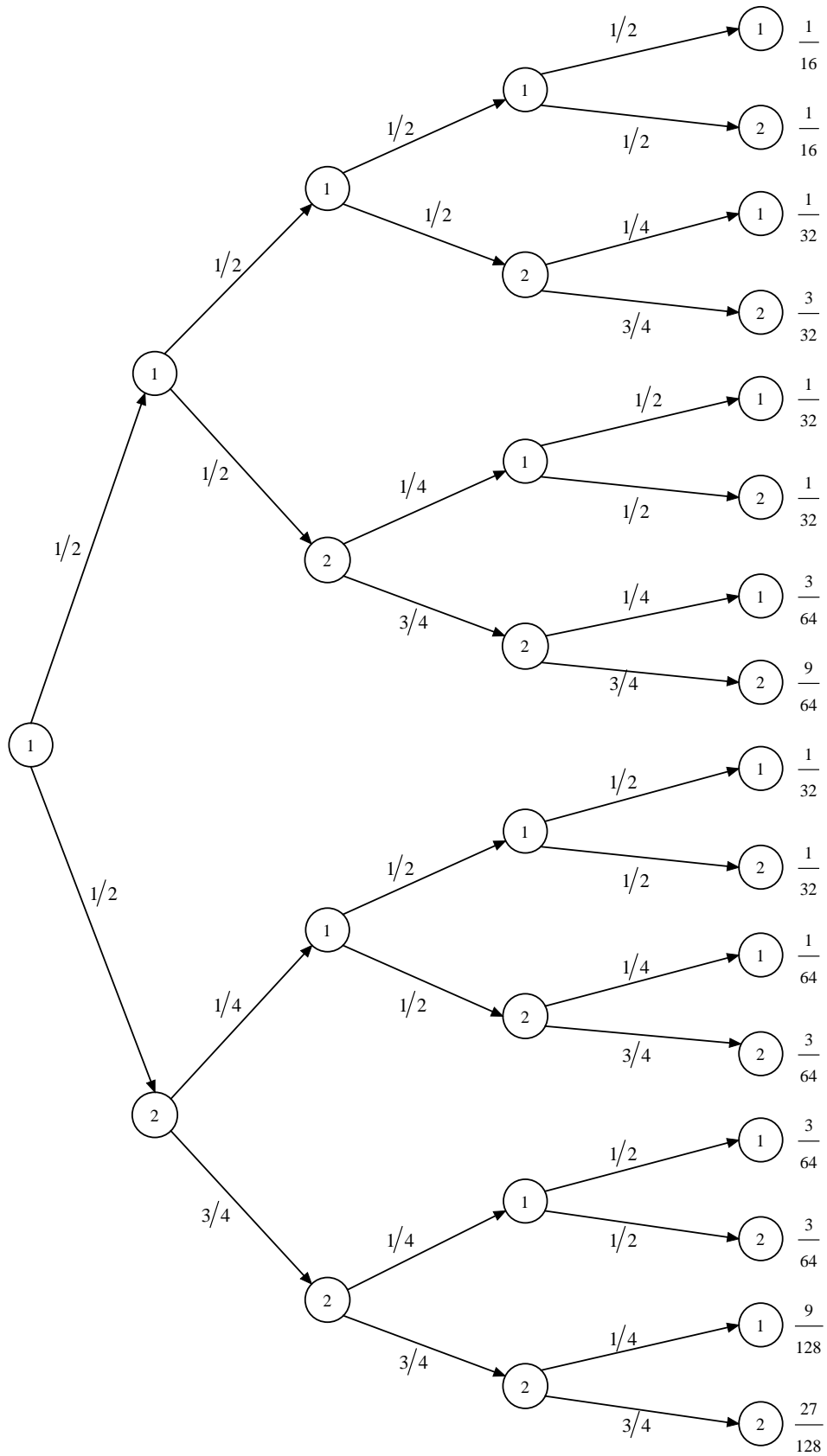


Fig. 8.3 – Diagrama em árvore do sistema

O vetor probabilidade limite α , poderá ser definido para o sistema representado como:

$$\alpha^t = [P_1 \ P_2]$$

tal que:

$$[\alpha][P] = [\alpha]$$

O número médio de passos para atingir um dado estado E_j dado que o sistema parte do estado E_i , pode ser calculado definindo E_j , como sendo um estado absorvente, isto é, uma vez atingido não pode ser abandonado antes de o processo ser iniciado novamente. Da Fig. 8.4 pode ser observado que a probabilidade de residir no estado 1, vai diminuindo à medida que o número de passos aumenta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Um sistema como este atingirá eventualmente o estado 2, o estado absorvente.

Determinemos o número médio de passos do sistema, antes de atingir o estado absorvente. Seja Q a matriz que se obtém eliminando na matriz P a linha e a coluna correspondente ao estado absorvente, e N a matriz

$$N = [I - Q]^{-1}$$

Demonstra-se que a soma dos elementos da coluna k da matriz N representa o número médio de passos para atingir o estado absorvente, supondo que se partiu do estado k .

8.4 Aplicação do processo de Markov a um sistema constituído por um componente – sistema contínuo

Na análise da fiabilidade de um Sistema Eléctrico de Energia, de um modo geral, encontram-se sistemas que são discretos no espaço e contínuos no tempo.

Se o sistema ou componente for caracterizado por uma taxa de avarias com uma função de distribuição exponencial, foi mostrado (ponto 3.5) que a probabilidade de avariar no intervalo de tempo t era constante. Esta condição é necessária para o sistema poder ser tratado como um processo de Markov estacionário.

De um modo geral num Sistema Eléctrico de Energia os componentes são reparáveis, pelo que constituem um sistema contínuo no tempo e, devido à manutenção preventiva, podem considerar-se como funcionando no seu período de vida útil.

Consideremos então o caso de um componente cujas taxas de avaria e de reparação são caracterizadas por distribuições exponenciais e seja:

$P_1(t)$ - probabilidade do componente estar no estado 1, no instante t

$P_2(t)$ - probabilidade do componente estar no estado 2, no instante t

λ – taxa de avarias

μ – taxa de reparação

Consideremos um acréscimo de tempo dt e tendo em atenção que foi admitido que a probabilidade de dois ou mais acontecimentos ocorrerem nesse intervalo é desprezável, podemos escrever

$$P_1(t + dt) = P_1(t)(1 - \lambda dt) + P_2(t) \mu dt \quad (8.5)$$

$$P_2(t + dt) = P_2(t)(1 - \mu dt) + P_1(t) \lambda dt$$

em que

$P_1(t + dt)$ é a probabilidade do componente residir no estado 1 no instante $t + dt$

$P_1(t) (1 - \lambda dt)$ é a probabilidade do componente não abandonar o estado 1 até ao instante $t + dt$, sabendo-se que no instante t reside no estado 1

$P_2(t) \mu dt$ é a probabilidade do componente atingir o estado 1 até ao instante $t + dt$ sabendo-se que no instante t reside no estado 2

O diagrama de estados para este sistema está representado na Figura 8.5.

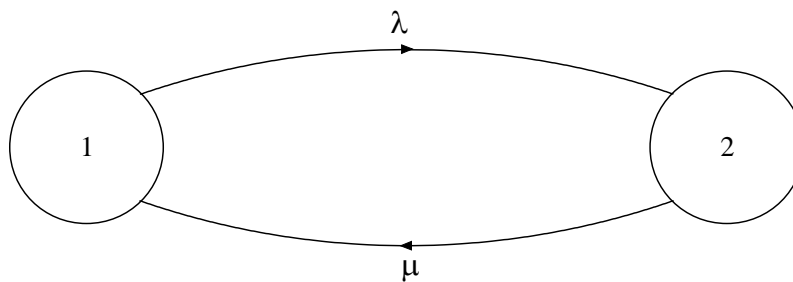


Fig. 8.5 – Diagrama de estados para um sistema constituído por um componente.

As equações (8.5) podem ser escritas como:

$$\frac{P_1(t + dt) - P_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \quad (8.6)$$

$$\frac{P_2(t + dt) - P_2(t)}{dt} = -\mu P_2(t) + \lambda P_1(t)$$

Fazendo $t \rightarrow 0$ temos, sob a forma matricial

$$\begin{bmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ +\lambda & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

O sistema (8.7) é um sistema de duas equações diferenciais lineares a coeficientes constantes, que pode ser resolvido com o emprego da transformada de Laplace.

Resolvendo o sistema (8.7) e admitindo que

$$P_1(0) = 1 \text{ e } P_2(0) = 0$$

isto é, considerando-se que o sistema não estava avariado no instante inicial teremos

$$P_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda e^{-(\lambda + \mu)t}}{\lambda + \mu} \quad (8.8)$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda e^{-(\lambda + \mu)t}}{\lambda + \mu}$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$ as equações (8.8) dão-nos a probabilidade limite ou estacionária correspondente a cada um dos estados

$$P_1(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$P_2(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

A probabilidade limite pode ser obtida de duas maneiras distintas:

- Considerando $P(t + dt) = P(t)$ (8.9)

- Considerando $P'(t) = 0$ (8.10)

Em qualquer dos casos terá porém que se verificar sempre a condição

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1.0$$

Consideremos agora um sistema constituído por dois componentes (o componente 1 e o componente 2) e com possibilidade de reparação. O sistema está representado no diagrama da figura 8.6.

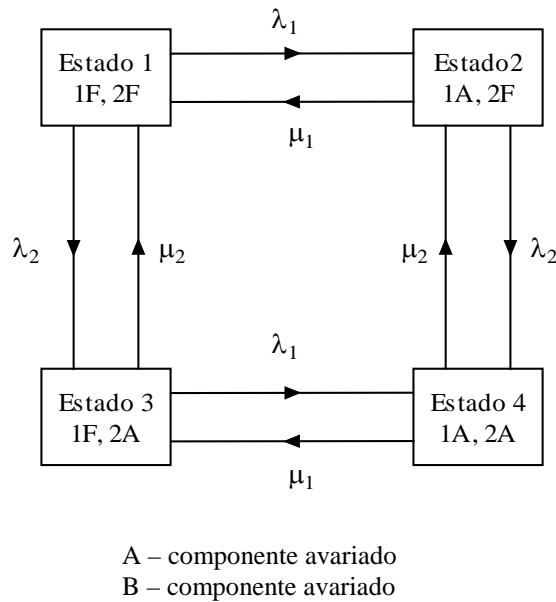


Fig. 8.6 – Diagrama de um sistema constituído por dois componentes.

A matriz estocástica de transição de probabilidades do sistema representado na fig.8.6 é a dada pela equação 8.11 .

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 - (\lambda_1 + \lambda_2) & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \lambda_1 & 1 - (\mu_1 + \lambda_2) & 0 & \mu_2 \\ \lambda_2 & 0 & 1 - (\lambda_1 + \mu_2) & \mu_1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & 1 - (\mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

A probabilidade limite do sistema pode por exemplo ser calculado pela equação (8.9) e, atendendo a que

$$\sum_{i=1}^4 P_i = 1.0$$

como foi referido. Teremos então:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1.0$$

Resolvendo o sistema de equações lineares obteremos as probabilidades estacionárias para os quatro estados possíveis do sistema

$$P_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \quad (8.13)$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \quad (8.14)$$

$$P_3 = \frac{\lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \quad (8.15)$$

$$P_4 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \quad (8.16)$$

Definindo o estado 4, como estado absorvente, o que pressupõe que o sistema é constituído por dois componentes redundantes, é possível calcular o tempo médio de funcionamento do sistema antes de avariar. Para simplificar a análise, consideremos que os dois componentes são iguais, isto é

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

Aplicando o algoritmo descrito em 8.3, consideramos os seguintes passos:

- Eliminar a linha e a coluna correspondente ao estado absorvente (estado 4) da matriz estocástica de transição de probabilidades (equação (8.11))

$$Q = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \mu & \mu \\ \lambda & 1-(\mu+\lambda) & 0 \\ \lambda & 0 & 1-(\mu+\lambda) \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

- Formar a matriz $N = I - Q$ (I matriz identidade)

$$N = I - Q = \begin{bmatrix} 2\lambda & -\mu & -\mu \\ -\lambda & \mu + \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & \mu + \lambda \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

- Calcular $[I - Q]^{-1}$

$$[I - Q]^{-1} = \frac{1}{2\lambda^2(\lambda + \mu)} \begin{bmatrix} (\lambda + \mu)^2 & \mu(\lambda + \mu) & \mu(\lambda + \mu) \\ \lambda(\lambda + \mu) & \lambda(2\lambda + \mu) & \lambda\mu \\ \lambda(\lambda + \mu) & \lambda\mu & \lambda(2\lambda + \mu) \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

- Supondo o estado inicial do sistema o estado 1, o tempo médio de funcionamento antes de atingir o estado absorvente, é dado por

$$m(\text{MTTF}) = \frac{(\lambda + \mu)^2 + \lambda(\lambda + \mu) + \lambda(\lambda + \mu)}{2\lambda^2(\mu + \lambda)} = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2} \quad (8.20)$$

Como se pode verificar, este método de análise é de difícil aplicação a sistemas complexos com um número elevado de possíveis estados de residência. Note-se que um sistema com n componentes, cada componente podendo residir em dois estados (funcionamento ou avaria), pode residir em 2^n estados.

Este método permite porém testar os vários métodos existentes bem, como as diferentes soluções que vão sendo procuradas para resolver os problemas de fiabilidade, dos Sistemas Eléctricos de Energia.

Apliquemos a análise feita a um sistema constituído por dois componentes em série e a outro constituído por dois componentes em paralelo.

8.4.1 Sistema constituído por dois componentes em série

Consideremos o sistema representado na Figura 8.7.



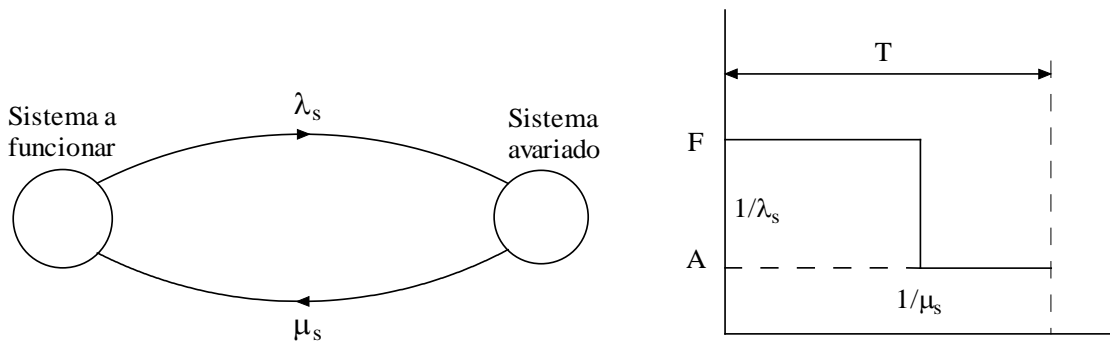
**Fig. 8.7 – a) Sistema constituído por dois componentes ligados em série.
b) Modelo equivalente do sistema.**

Como já foi analisado, para o sistema funcionar é necessário que os dois componentes funcionem. Assim, no diagrama da Figura 8.6 o estado 1 é o único que corresponde ao funcionamento do sistema.

Da análise já feita, conclui-se então que a probabilidade do sistema funcionar, corresponde à probabilidade do sistema estar no estado 1, que é dada pela equação 8.13, ou seja:

$$P_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \quad (8.21)$$

Consideremos agora o diagrama para o sistema equivalente do sistema constituído pelos dois componentes em série (Fig. 8.7)



λ_s - taxa de avarias do sistema

μ_s - taxa de reparações do sistema

Fig. 8.8 – Diagrama de estados do sistema equivalente ao sistema série.

A partir do diagrama da figura 8.8, facilmente se vê que a probabilidade de o sistema funcionar é dada por:

$$P_F = \frac{1/\lambda_s}{1/\lambda_s + 1/\mu_s} = \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s} \quad (8.22)$$

Como

$$P_F = P_1$$

e

$$\lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (8.23)$$

Temos que

$$P_1 = \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s}$$

$$\mu_s = P_1 \lambda_s + P_1 \mu_s$$

$$\mu_s = \frac{P_1}{1 - P_1} \lambda_s$$

Atendendo às equações 8.13 e 8.23

$$\mu_s = \frac{\mu_1 \mu_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1} \quad (8.24)$$

Pelo que:

$$r_s = \frac{1}{\mu_s} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1}{\mu_1 \mu_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

ou, atendendo a que $\mu_1 = 1/r_1$ e $\mu_2 = 1/r_2$

$$r_s = \frac{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_1 \lambda_2 r_1 r_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (8.25)$$

De um modo geral

$$\lambda_1 \lambda_2 r_1 r_2 \ll \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$$

pelo que, para um sistema constituído por dois componentes em série, a taxa de avarias e a duração média das avarias do sistema são respetivamente:

$$\lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (8.26)$$

$$r_s = \frac{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (8.27)$$

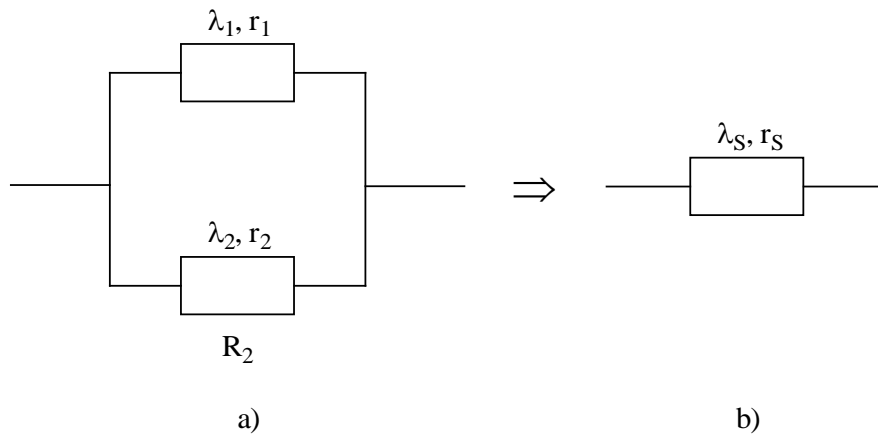
Generalizando para um sistema com n componentes ligados em série, a duração média das avarias (ou tempo médio de reparações) e a taxa de avarias são dados, respetivamente, pelas seguintes expressões:

$$r_S = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i r_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (8.28)$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (8.29)$$

8.4.2 Sistema constituído por dois componentes em paralelo

Consideremos o sistema representado na Figura 8.9



**Fig. 8.9 – a) Sistema constituído por dois componentes em paralelo
b) Modelo equivalente ao sistema a)**

Supondo os dois componentes redundantes concluimos, pela análise do sistema, que não funcionará quando os dois componentes se encontrarem avariados simultaneamente, o que corresponde no diagrama da Fig. 8.6, ao estado 4.

A probabilidade do sistema não funcionar é, como vimos então (equação (8.16))

$$P_4 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}$$

Consideremos o diagrama para o sistema equivalente (Fig. 8.10)

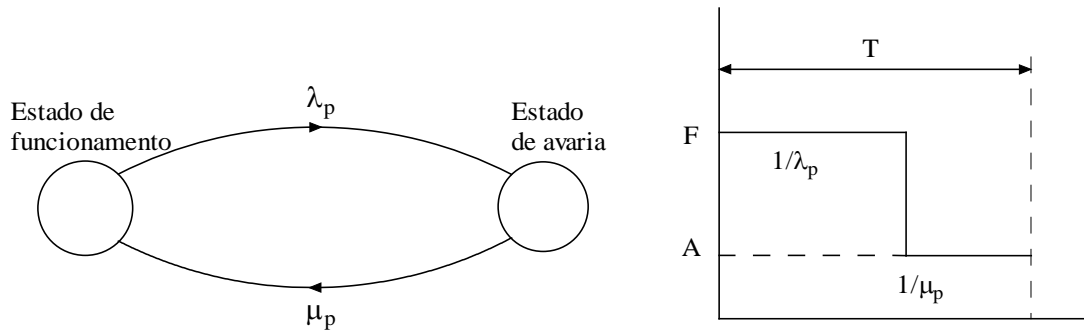


Fig. 8.10 – Diagrama do sistema equivalente ao sistema paralelo.

Pela análise do diagrama da figura 8.10, conclui-se que:

$$P_A = \frac{1/\mu_p}{1/\lambda_p + 1/\mu_p} = \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \mu_p}$$

Como

$$P_A = P_4 \quad (8.30)$$

$$\mu_p = \mu_1 + \mu_2 \quad (8.31)$$

Temos que

$$P_4 = \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \mu_p}$$

$$\lambda_p P_4 + \mu_p P_4 = \lambda_p$$

$$\lambda_p = \frac{P_4}{1 - P_4} \mu_p$$

Atendendo à equação (8.16)

$$\lambda_p = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (r_1 + r_2)}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + 1} \quad (8.32)$$

Num número muito elevado de sistemas pode considerar-se

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 \ll 1$$

pelo que, neste caso, a taxa e a duração média das avarias de um sistema constituído por dois componentes redundantes ligados em paralelo são respetivamente

$$\lambda_p = \lambda_1 \lambda_2 (r_1 + r_2) = \lambda_1 \lambda_2 r_1 + \lambda_1 \lambda_2 r_2 \quad (8.33)$$

$$r_p = \frac{1}{\mu_p} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad (8.34)$$

9. Frequência de ocorrência de um estado

O período de vida médio de um componente (T) é a soma do tempo médio de funcionamento (MTTF) e do tempo médio de reparação (ou tempo médio entre avarias – MTBF), pelo que

$$T = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \quad (9.1)$$

em que

$$m = \frac{1}{\lambda} \text{ (tempo médio de funcionamento)}$$

$$r = \frac{1}{\mu} \text{ (tempo médio de reparação)}$$

logo

$$T = m + r \quad (9.2)$$

e a frequência do ciclo será:

$$f = \frac{1}{T} \quad (9.3)$$

Como foi visto no ponto 8.4, para um sistema formado por um só componente, com dois estados de funcionamento, as probabilidades limite de cada um dos estados (estado de funcionamento e estado de avaria) são dadas respetivamente por

$$P_F = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (9.4)$$

$$P_A = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (9.5)$$

pelo que

$$P_F = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1/r}{1/m + 1/r} = \frac{m}{m+r} = \frac{m}{T} = \frac{1}{\lambda T} = \frac{f}{\lambda} \quad (9.6)$$

$$P_A = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{1/m}{1/m + 1/r} = \frac{r}{m+r} = \frac{r}{T} = \frac{1}{\mu T} = \frac{f}{\mu} \quad (9.7)$$

Das equações anteriores podemos escrever

$$f = P_F \lambda = P_A \mu$$

isto é, a frequência com que um estado ocorre, é dada pelo produto da probabilidade de residência do sistema nesse estado, pela taxa de abandono do referido estado; ou então, pelo produto da probabilidade do sistema não se encontrar nesse estado pela taxa de entrada no referido estado.

No caso de sistemas eléctricos de energia, como a fiabilidade dos componentes é elevada ($P_F \approx 1$) confunde-se normalmente a frequência com a taxa de avarias

$$P_F \approx 1 \Rightarrow f \approx \lambda \quad (9.8)$$

De um modo geral, prova-se que a duração média de permanência em qualquer estado e a frequência com a qual este ocorre, podem ser calculadas por:

$$E(T_{S_i}) = \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ij}} \quad (9.9)$$

$$f_{s_i} = P_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ij} \quad (9.10)$$

em que:

P_{ij} é a taxa de saída de um estado S_i para um estado S_j

T_i é o tempo de permanência no estado S_i .

Para exemplificar, consideremos o sistema cujo diagrama de estados é representado na Figura 8.6, sendo o estado de avaria o estado 4 (ambos os componentes avariados) e que os componentes são iguais. O tempo médio de permanência no estado 4, aplicando a equação (9.9), é dado por:

$$E(T_{S4}) = 1/2 \mu \quad (9.11)$$

e a frequência com que o estado 4 ocorre, atendendo às equações (8.16) e (9.10) é

dada por:

$$f_{S4} = \left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right]^2 \cdot 2\mu \quad (9.12)$$

Como já referido, de um modo geral, o sistema terá que ser decomposto em dois sub-conjuntos – um constituído pelos estados de avaria e outro pelos estados de sucesso do sistema. Posteriormente, por aplicação das equações (9.9) e (9.10) é possível determinar a duração média dos estados de avaria ou de sucesso e a frequência com que tais estados ocorrem.

10. Combinação de estados

Algumas vezes é muito útil combinar certos estados (por exemplo combinação dos diferentes estados de avaria e dos diferentes estados de sucesso). Nestes casos é necessário definir a frequência acumulada dos dois estados e a duração média associada a um grupo acumulado de estados. Por frequência acumulada de dois estados entende-se a soma das frequências de cada um dos estados menos a frequência de simultaneidades entre eles. Por duração média associada a um grupo acumulado de estados entende-se a razão entre a probabilidade acumulada dos estados e a frequência acumulada dos mesmos. Consideremos, por exemplo, o diagrama de estados equivalente ao da fig. 8.6, quando ambos os componentes são iguais (fig. 10.1).

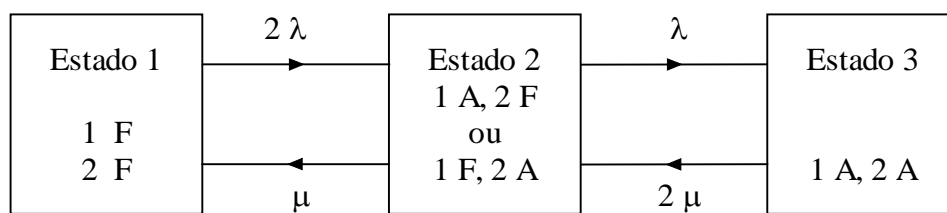


Fig. 10.1 – Diagrama de estados para um sistema constituído por dois componentes iguais

No caso de o sistema ser constituído por dois componentes redundantes, ligados em paralelo, o estado de sucesso será constituído pelos estados 1 e 2 do diagrama.

A frequência acumulada dos estados 1 e 2 será

$$f_{1,2} = f_1 + f_2 - P_1 2\lambda - P_2 \mu \quad (10.1)$$

ou

$$f_{1,2} = P_1 \cdot 2\lambda + P_2 (\lambda + \mu) - P_1 2\lambda - P_2 \mu = P_2 \lambda \quad (10.2)$$

Atendendo à equação (8.16) e ao facto de os dois componentes serem iguais

$$f_{1,2} = \frac{2\lambda^2 \mu}{(\lambda + \mu)^2} \quad (10.3)$$

O sistema foi reduzido a dois estados, os estados 0, 1 e 2, e a frequência com que se encontra cada um destes estados será a mesma, isto é

$$f_{1,2} = f_3 = \frac{2\lambda^2 \mu}{(\lambda + \mu)^2} \quad (10.4)$$

Considerando os estados 1 e 2 como estados de sucesso, a duração média associada a eles será

$$\frac{P_1 + P_2}{f_{1,2}} = \frac{2\lambda\mu + \mu^2}{(\lambda + \mu)^2} \cdot \frac{(\lambda + \mu)^2}{2\lambda^2 \mu} = \frac{2\lambda + \mu}{2\lambda^2}$$

A expressão $\frac{2\lambda\mu + \mu^2}{(\lambda + \mu)^2}$ foi obtida das equações (8.13), (8.14) e (8.15) atendendo a que os dois componentes são iguais.

Resumindo o que foi dito, pode estabelecer-se um método geral para determinar as probabilidades limites pela análise do diagrama de estados, para determinado sistema.

Os passos, seriam então os seguintes:

- 1) Definir os critérios de avaria para o sistema;
- 2) Dividir os estados do sistema em dois sub-conjuntos, um de funcionamento (F) e outro de avaria (A) ;
- 3) Calcular as probabilidades limites P_i , com $i \in A$;
- 4) Combinar todos os estados de avaria no sub-conjunto A, e todos os estados de funcionamento no sub-conjunto F;
- 5) A probabilidade de avaria do sistema será então

$$P_A = \sum_{i \in A} P_i$$

- 6) A frequência de avarias do sistema será a frequência dos estados combinados de A

$$f_A = \sum_{i \in A} P_i \sum_{j \in F} i, j$$

7) A duração média da avaria do sistema será

$$r_A = \frac{P_A}{f_A}$$

Como no decorrer do processo aparecem 2^n estados que há necessidade de considerar (quando há n componentes independentes), é usual, para reduzir o número de estados que têm que ser considerados, eliminar os estados que têm uma baixa probabilidade de ocorrência. Em Sistemas Eléctricos de Energia é frequente considerar apenas acontecimentos de primeira e segunda ordem, desprezando obviamente as de ordem superior.

11. Métodos de simulação

Nos modelos analíticos, que foram aqueles que foram descritos até ao momento, os sistemas são descritos por um modelo matemático e os índices de fiabilidades são calculados através da solução daquele modelo. Nos métodos de simulação, nomeadamente no método de Monte Carlo, o processo consiste em simular uma experiência com uma duração previamente fixada, de que depende o significado estatístico dos resultados.

Durante a experiência impõem-se condições de funcionamento, para o sistema em estudo e para os seus componentes, tanto quanto possível aproximadas das que existem na realidade.

A técnica básica, utilizada na aplicação a estudos de fiabilidade, consiste no sorteio para cada componente de tempos para avariar que obedeçam a uma distribuição estatística idêntica à que se admite melhor representar a distribuição dos tempos para avariar dos componentes reais, em funcionamento normal. De igual modo se sorteiam os tempos de reparação para todos os componentes do sistema. Após a obtenção dos valores referidos, procede-se à simulação das diversas avarias nos tempos sorteados, verificando a influência no sistema de cada avaria e simulando reparações de acordo com os tempos sorteados até que o tempo de duração da experiência seja esgotado.

Os resultados da experiência permitem obter, depois de tratamento estatístico adequado, os índices de fiabilidade do sistema.

Os maiores inconvenientes do método de Monte Carlo são o grande número de experiências necessárias na maior parte das aplicações, podendo por isso o tempo de computação necessário ser muito grande e a fixação do tempo de cada experiência.

Apesar destas manifestas desvantagens, algumas vantagens são apontadas ao método Monte Carlo:

- não há restrições para as diversas funções de distribuição a considerar
- as relações de dependência entre acontecimentos (de avaria, de reparação, etc.) podem ser incluídas facilmente
- o trabalho analítico necessário é simples, não contando com a análise do defeito das avarias

- as soluções a curto prazo podem ser obtidas com facilidade
- o aumento do sistema pode ser incorporado sem dificuldade.

12. Bibliografia

1. R Billinton, "Power System Reliability Evaluation", Gordon and Breach Publishers, Nova York, 1976 (3ª edição)
2. J. Endrenyi, "Reliability Modeling in Electric Power Systems", John Wiley and Sons, 1978
3. J. Nardi, B. Avi-Itzhak, "Electric Energy Generation - Economics, Reliability and Rates"; The MIT Press, 1981
4. F. Maciel Barbosa, "Bulk Power Systems Reliability Evaluation", Ph.D.Thesis, UMIST, Manchester, 1979
5. Discon, G.F.L.. Hammersley, H., "Reliability and its cost in distribution systems", IEE Conference on Reliability of Power Supply Systems, 1977, IEE Conf. Publ. 148, pg. 81-84.
6. A report prepared by the Working Group on Performance Records for Optimizing System Design, Power Systems Engineering Committee "Reliability Indices for Use in Bulk Power Supply Adequacy Evaluation", IEEE Transactions, Vol. PAS-97, no 4 July/Aug 1978, pg. 1097-1103
7. A report prepared by the Reliability Test System Task Force of the Application of Probability Methods Subcommittee, "IEEE Reliability System IEEE Transactions", Vol. PAS-98, nº 6 Nov/Dec. 1979, pg. 2047-2054
8. Roy Billinton, "Bibliography on the Application of Probability Methods in Power System Reliability Evaluation", IEEE Transactions, Vol. PAS-91, nº 2, March/April 1972, pg. 649-660
9. IEEE Subcommittee on the Application of Probability Methods-Power System Engineering Committee, "Bibliography on the Application of Probability Methods in Power System Reliability Evaluation", Vol. PAS-97, nº 6, Nov/Dec 1978, pg. 2242-2235
10. Billinton, R., Allan, R.N., "Reliability Evaluation of Power Systems", Plenum Press, New York, 2nd edition, 1996.
11. Allen J. Wood, Bruce F. Wollenberg "Power generation, operation and control", John Wiley, 1996.
12. Billinton, Roy, Wenyuan L "Reliability assessment of electric power systems using Monte Carlo Methods", Plenum Press, New York 1994.
13. Wenyuan Li, "Risk Assessment of Power Systems", Wiley – IEEE Press, New York 2005

14. Allan, R.N., Billinton, R., Lee, S.H., "Bibliography on the Application of Probability Methods in Power System Reliability Evaluation", Vol. PAS-103, 1984, pg. 275-282.
15. Allan, R.N., Billinton, R., Shahidehpour, S.M., Sing, C., "Bibliography on the Application of Probability Methods in Power System Reliability Evaluation", Vol. PAS-3, 1988, pg. 1555-1564.
16. Allan, R.N., Billinton, R., Breipohl, A.M., Grigg, C.H., "Bibliography on the Application of Probability Methods in Power System Reliability Evaluation", Vol. PWRS-9(1), 1994, pg. 1555-1564.
17. Allan, R.N., Billinton, R., Breipohl, A.M., Grigg, C.H., "Bibliography on the application of probability methods in power system reliability evaluation", Volume: 14 , Issue: 1, 1999, Page(s): 51 – 57.
18. Anders G. J., "Probability Concepts in Electric Power Systems", Wiley Publications, New York, 1999

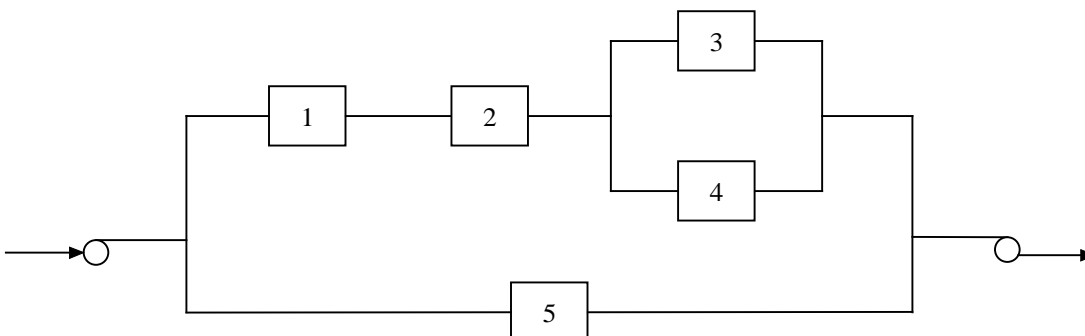
13. Apêndice I

Problemas

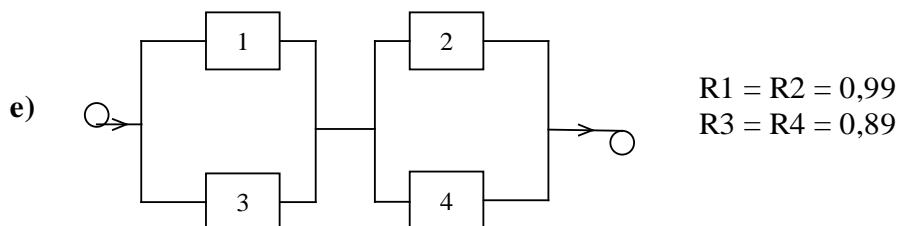
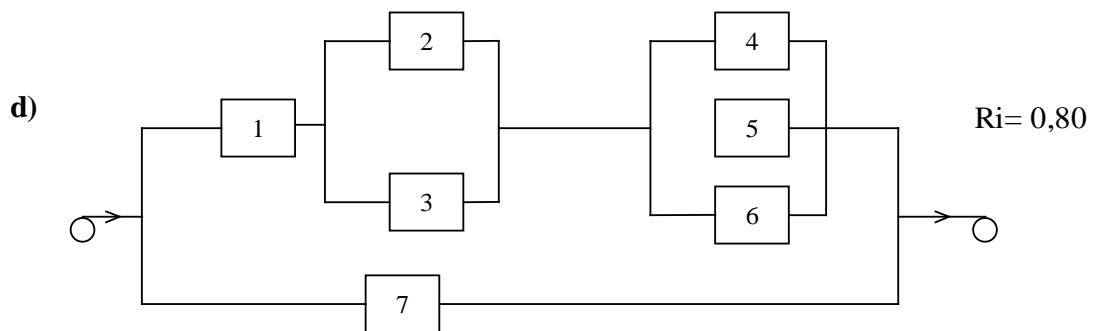
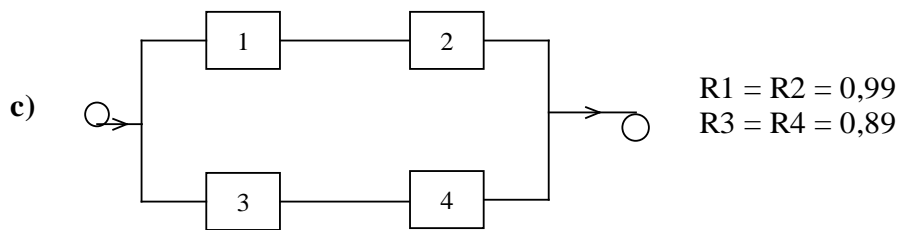
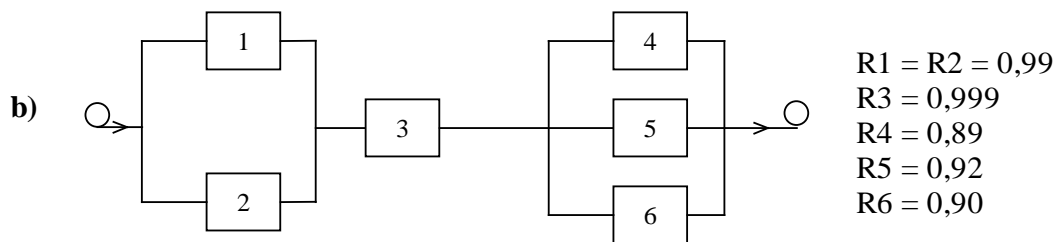
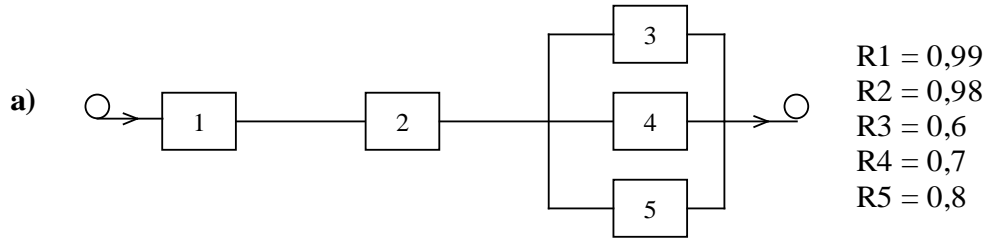
1. Considere um sistema constituído por dois componentes iguais, no seu período de vida útil, com uma fiabilidade de 0,9
 - a) Calcule a fiabilidade do sistema constituído pelos dois componentes, se para o sistema funcionar tiverem que funcionar ambos os componentes.
 - b) Calcule a fiabilidade do sistema constituído pelos dois componentes, se para o sistema funcionar for suficiente que um dos componentes funcione.
 - c) Usando o *excel* faça um gráfico que lhe permita analisar a fiabilidade do sistema série quando o número de componentes cresce de 1 até 10. Comente o resultado que encontrou.
 - d) Usando o *excel* faça um gráfico que lhe permita analisar a fiabilidade do sistema paralelo quando o número de componentes do sistema cresce de 1 até 10 e for suficiente que um componente funcione para o funcionamento do sistema. Comente o resultado que encontrou.
 - e) Resolva novamente as alíneas c) e d) considerando que a fiabilidade dos componentes é de 0,8. Compare os resultados que encontrou com os obtidos anteriormente e comente.

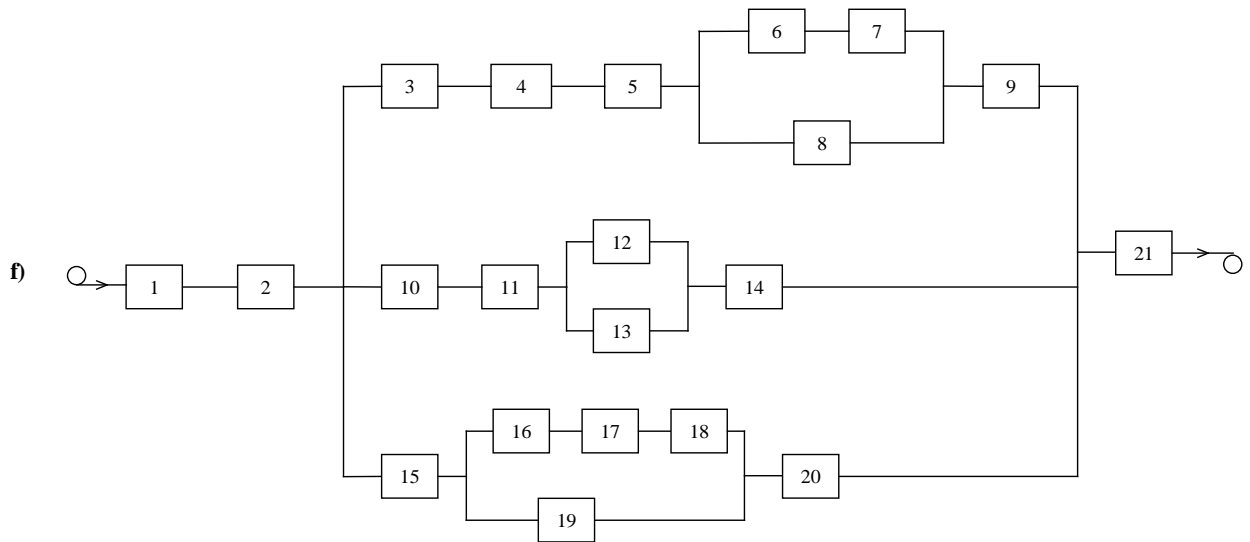
2. Um sistema é constituído por 4 componentes iguais ligados em paralelo, a funcionarem no seu período de vida útil e com uma fiabilidade de 0,9.
 - a) Calcule a fiabilidade do sistema se o sucesso do sistema requerer que pelo menos 2 componentes funcionem.
 - b) Calcule a fiabilidade do sistema se o sucesso do sistema requerer que pelo menos 3 componentes funcionem.
 - c) Calcule a fiabilidade do sistema se forem colocados 5 componentes em paralelo para executar a mesma função e se o sucesso do sistema requerer que pelo menos 2 componentes funcionem.

3. Determine a fiabilidade do sistema representado, se todos os componentes tiverem fiabilidade 0,80 e o sistema for redundante.



4. Calcular a fiabilidade de cada um dos sistemas representados, considerados redundantes e em que cada componente tem a fiabilidade indicada. Os componentes são supostos independentes.





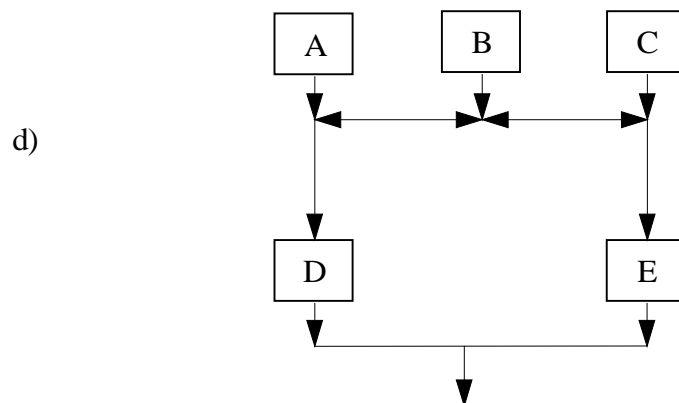
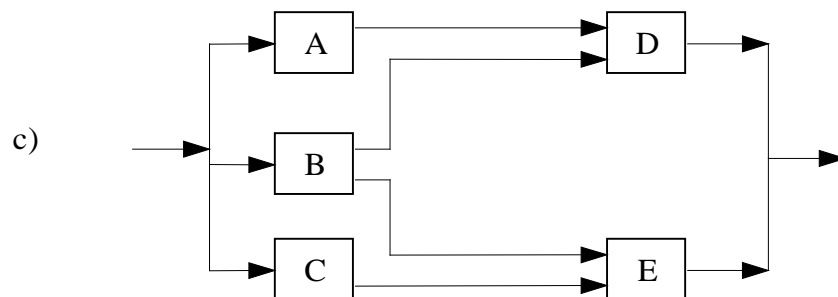
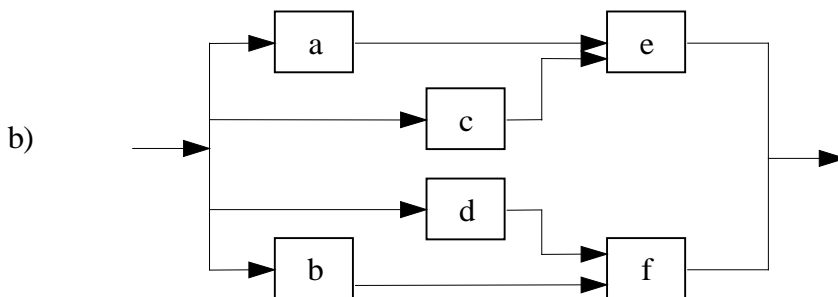
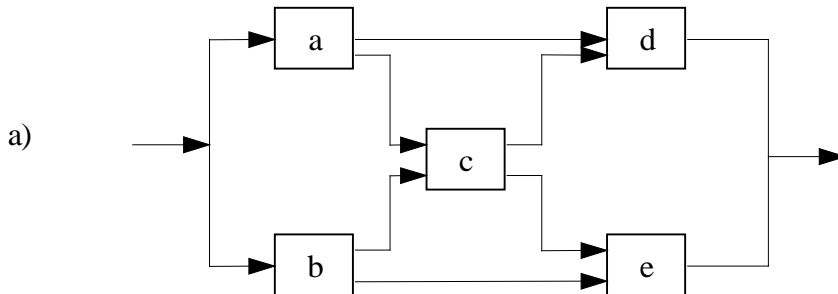
$$Q_1 = Q_2 = 10^{-7}$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_6 = Q_8 = Q_{11} = Q_{14} = Q_{15} = Q_{20} = Q_{21} = 10^{-3}$$

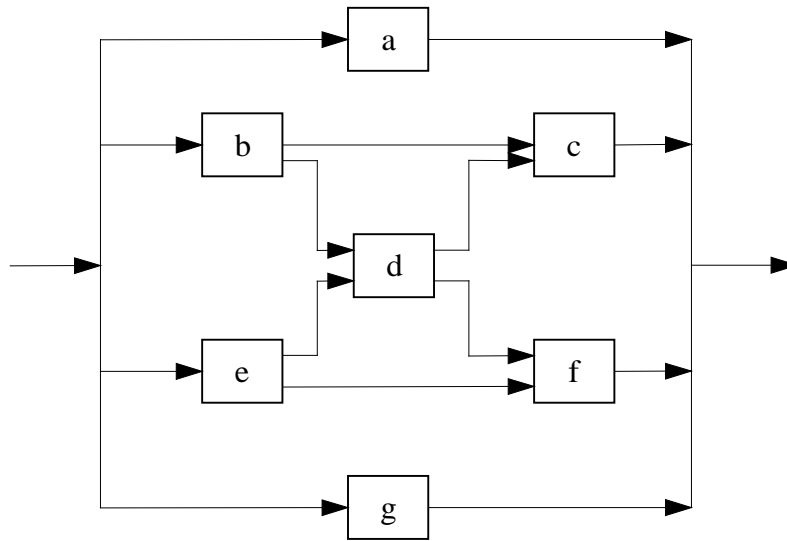
$$Q_9 = Q_{10} = Q_{12} = Q_{18} = 10^{-2}$$

$$Q_{13} = 10^{-1}$$

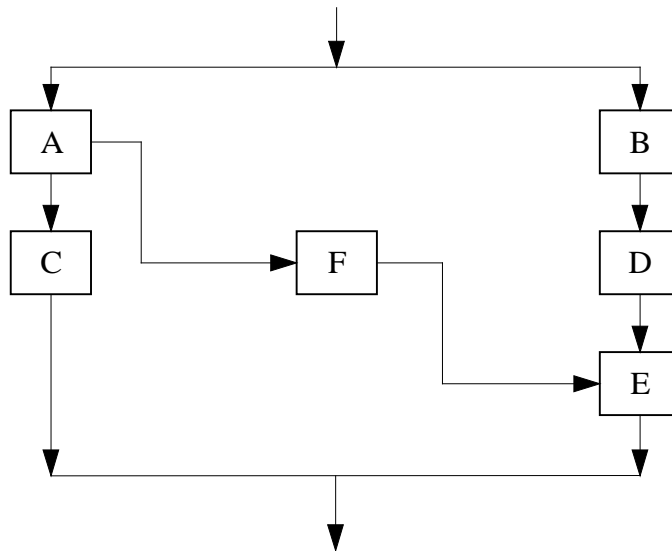
5. Escrever as expressões de fiabilidade para os sistemas representados e calcule a fiabilidade dos mesmos, admitindo que todos os componentes são iguais e têm a fiabilidade de 0,9.



e)

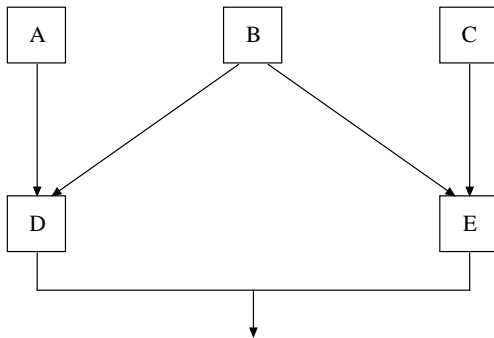


f)

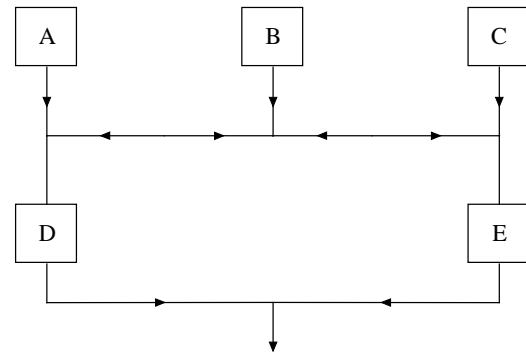


6. Considere os dois sistemas representados na figura. Para o sucesso do sistema é necessário que um dos caminhos entre a entrada e a saída esteja disponível.

- Deduza a expressão da fiabilidade para o sistema;
- Calcule a fiabilidade do sistema se todos os componentes forem iguais e tiverem uma fiabilidade de 0,9;
- Compare a fiabilidade do sistema representado em a) com a fiabilidade do sistema representado em b)

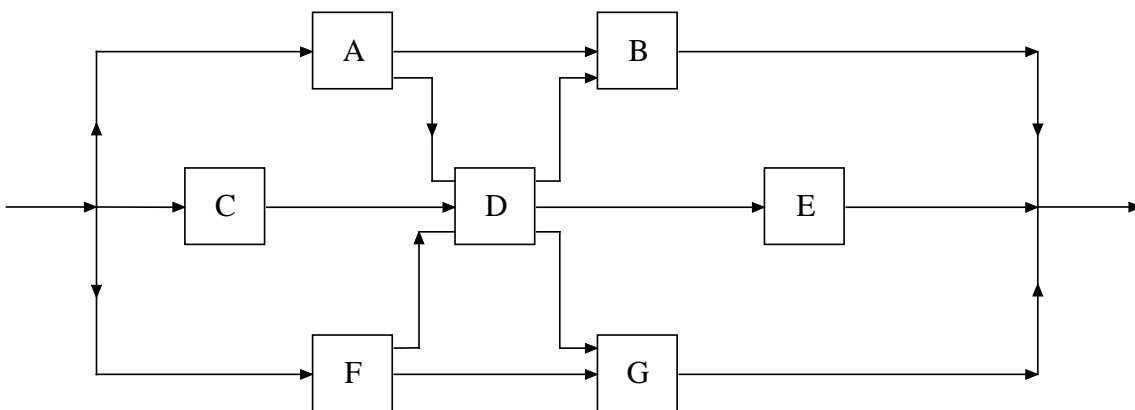


a)

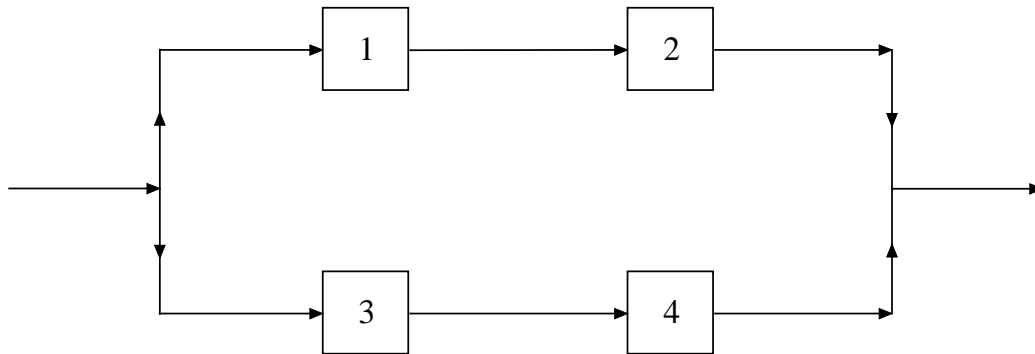


b)

7. Determine a fiabilidade do sistema representado na figura, admitindo que todos os componentes são iguais e têm uma fiabilidade de 0,90.



8. Calcule a fiabilidade do sistema usando a técnica de redução do sistema e o método dos cortes mínimos para uma missão de 1000 horas, se $\lambda_1 = 10^{-6}$ av/h, $\lambda_2 = 10 \times 10^{-5}$ av/h, $\lambda_3 = 2 \times 10^{-4}$ av/h, $\lambda_4 = 5 \times 10^{-5}$ av/h. Qual é o MTTF do sistema ?



9. A fiabilidade de um componente no seu período de vida útil é de 90% para uma missão de 50 horas. Qual será a fiabilidade do componente para uma missão de 100 horas?
10. Considere dois alternadores iguais, com uma taxa de avarias de 0,01 av/dia e com o tempo médio de reparação de 2 dias. Calcule a frequência e a duração da ocorrência de saída simultânea dos dois alternadores.