# Análise Matemática 2 - Semanas 11 e 12 – 24 e 31 de Maio, 2010

A. Integrais Duplos

$\boxed{1}$ Considere os seguintes integrais duplos

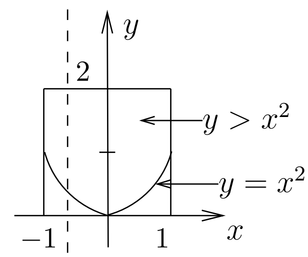
(a) $\iint_R (1)\, dx\, dy$ onde $R = [-1,\, 0] \times [3,\, 4]$

Res: Os limites dos dois integrais sendo constantes, a integração é directa:
$\iint_R dx\, dy = \int_3^4 \left. x\right|_{-1}^{0}\, dy = \int_3^4 (0+1)\, dy = \left. y\right|_3^4 = 1$

(b) $\iint_R (e^y x - x\sin(y)) dx\, dy$ onde $R = [-1,\, 1] \times [0,\, \pi]$

Res: $\iint_R (e^y x - x\sin(y)) dx\, dy = \int_{x=-1}^{1} \int_0^\pi x(e^y - \sin(y))\, dy\, dx$. O integral interior é em $y$ : podemos extrair o $x$. $\int_{x=-1}^{1} x \int_0^\pi (e^y - \sin(y))\, dy\, dx = \int_{x=-1}^{1} x\, \left.(e^y + \cos(y))\right|_0^\pi\, dx. \iff$
$\int_{x=-1}^{1} x[e^\pi + \cos(\pi) - (e^0 + \cos(0)\,)]\, dx = (e^\pi - 3)\int_{x=-1}^{1} x\, dx = (e^\pi - 3)[\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=-1}^{1}] = 0$. Este resultado não surpreende pois o integral duplo é na realidade o producto de dois integrais simples, um em $x$ e o outro em $y$. Ora o integral em $x$ é nulo, dada a sua simetria ímpar.

$\boxed{c}$ $\iint_R \left|y - x^2\right|\, dx\, dy$ onde $R = [-1,\, 1] \times [0,\, 2]$

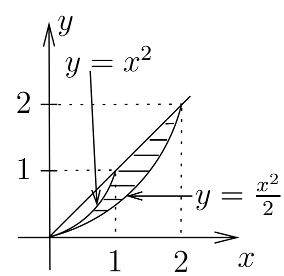



Res: A área de integração é o rectângulo da figura à direita. Observa-se que $y > x^2$ por cima da parábola e por debaixo a relação é $y < x^2$. Visto estarmos a integrar o módulo da diferença, temos de desdobrar o integral duplo em dois: por cima da parábola o módulo é $y - x^2$; por debaixo é $x^2 - y$.

De notar que podemos interpretar o integral duplo como sendo o volume compreendido entre o plano $XoY$ e o gráfico da função $\left|y - x^2\right|$. A linha vertical a tracejado corta o objecto tri-dimensional. Uma vez calculada a área do perfil cortado pela linha a tracejado, o volume é obtido varrendo em $x$, de $-1$ a 1.

$A(x) = \int_{y=0}^{x^2} (x^2 - y)\, dy + \int_{y=x^2}^{2} (y - x^2)\, dy$. Integrando vem $A(x) = [(x^2 y - \frac{1}{2}y^2)_{y=0}^{x^2}] + [(\frac{1}{2}y^2 - x^2 y)_{y=x^2}^{2}]$.
Substituindo os limites vem $A(x) = x^4 - 2x^2 + 2$. O resultado procurado é o integral desta área:
$\iint_R \left|y - x^2\right|\, dx\, dy = \int_{x=-1}^{1} A(x) dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + 2x]_{x=-1}^{1} = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 4 = \frac{46}{15}$.

$\boxed{2}$ Considere a região $D$ como sendo a região do plano onde $x,\, y \geq 0$ delimitada simultaneamente pela recta $y = x$ e pelas curvas $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{2}$. Calcule a área dessa região.



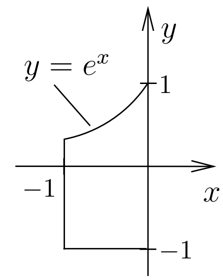

Res: A área pedida é a que aparece tracejada na figura à direita. Podemos optar por:
$i$) Calcular a área de uma tira horizontal (=integral interior), varrendo depois de baixo para cima (=integral exterior) ou
$ii$) Calcular a área de uma tira vertical (=integral interior), varrendo depois da esquerda para a direita (=integral exterior).
Há situações em que o trabalho/dificuldade depende da opção escolhida. Neste caso, vamos ter de fazer dois integrais duplos, para ambas opções.

Cálculo pela opção $i$) : Temos um integral *interior* em $x$ cujos limites, em princípio, dependem de $y$. [Estamos a integrar a função $f(x, y) = 1$.] Para a secção em que as tiras horizontais começam e acabam nas parábolas, os limites são $x_{inf} = \sqrt{y}$, obtido de $y = x^2$, e $x_{sup} = \sqrt{2y}$, obtido de $y = \frac{x^2}{2}$. A gama de valores para $y$ vai de $y_{inf} = 0$ a $y_{sup} = 1$, que são os limites de $y$ para o integral *exterior*.
O segundo integral *interior* vai da recta à parábola mais aberta: $x_{inf} = y$ e $x_{sup} = \sqrt{2y}$, sendo $y_{inf} = 1$ e $y_{sup} = 2$ os limites do segundo integral *exterior*.

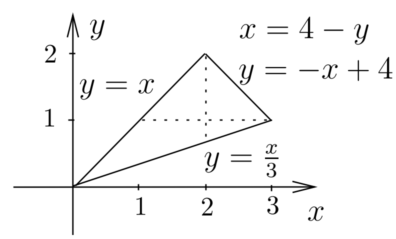
$\int_{y=0}^{1}\int_{x=\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}}(1)\,dx\,dy + \int_{y=1}^{2}\int_{x=y}^{\sqrt{2y}}(1)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1}(\sqrt{2}-1)\sqrt{y}\,dy + \int_{y=1}^{2}(\sqrt{2}\sqrt{y}-y)\,dy. \Leftrightarrow$
$(\sqrt{2}-1)\frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 + [\frac{\sqrt{2}y^{3/2}}{3/2} - \frac{(y)^2}{2}]\Big|_1^2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1) + [\frac{4}{3/2}-2] - [\frac{\sqrt{2}}{3/2}-\frac{1}{2}] = 1/2.$

Cálculo pela opção *ii*) : Temos um integral *interior* em $y$ cujos limites dependem de $x$. [Como acima, estamos a integrar a função $f(x,y)=1$.] De facto, quando as tiras verticais começam e acabam nas parábolas, os limites são $y_{inf}=\frac{x^2}{2}$ e $y_{sup}=x^2$. A gama de valores para $x$ vai de $x_{inf}=0$ a $x_{sup}=1$, que são os limites de $x$ para o integral *exterior*.
O segundo integral *interior* vai da parábola mais aberta até à recta: $y_{inf}=\frac{x^2}{2}$ e $y_{sup}=x$, sendo $x_{inf}=1$ e $x_{sup}=2$ os limites do segundo integral *exterior*.
$\int_{x=0}^{1}\int_{y=\frac{x^2}{2}}^{x^2}(1)\,dx\,dy + \int_{x=1}^{2}\int_{y=\frac{x^2}{2}}^{x}(1)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1}(x^2-\frac{x^2}{2})\,dx + \int_{x=1}^{2}(x-\frac{x^2}{2})\,dx. \iff$
$\int_{x=0}^{1}\frac{x^2}{2}\,dx + \int_{x=1}^{2}(x-\frac{x^2}{2})\,dx = [\frac{x^3}{6}]\Big|_0^1 + [\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}]\Big|_1^2 = \frac{1}{6} + [2-\frac{8}{6}] - [\frac{1}{2}-\frac{1}{6}] = 1/2$, como obtido acima. [Verificar estes resultados.]
Qual opção devemos escolher? Depende de caso para caso.

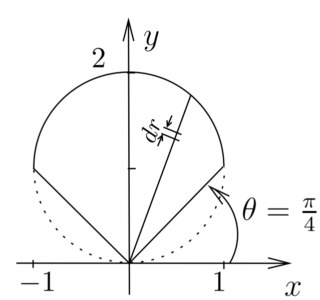
$\boxed{3}$ Calcule a área da região $D=\{(x,y): -1\le x\le 0,\ -1\le y\le e^x,\ x^2y\ge -1\}$
Res: A área pedida é a da região delimitada acima por $y=e^x$, por $y=-1$ e com $x$ como especificado. De notar que a condição $x^2y\ge -1$ é satisfeita nesta região. O gráfico de $y=-\frac{1}{x^2}$ passa por $(-1,-1)$ que é a esquina inferior esquerda.
A área pedida é facilmente obtida: $\int_{x=-1}^{0}\int_{y=-1}^{e^x}(1)\,dy\,dx = \int_{x=-1}^{0}(e^x+1)\,dx$
$\Leftrightarrow (e^x+x)_{x=-1}^{0} = 2-e^{-1}$.
De notar que se optarmos por tiras horizontais (=integral interior é em $x$), vamos precisar de ter dois integrais duplos.




$\boxed{4}$ Seja o triângulo $T$ com vértices (0, 0), (2, 2) e (3, 1). Calcule o integral $\iint_T(x^2+yx)\,dx\,dy$.
Res: Independente de qual das duas variáveis se integra primeiro, vamos ter dois integrais duplos. As duas linhas a tracejado da figura delimitam os integrais.
A área pedida é obtida por:
$\int_{x=0}^{2}\int_{y=x/3}^{x}(x^2+yx)\,dy\,dx + \int_{x=2}^{3}\int_{y=x/3}^{4-x}(x^2+yx)\,dy\,dx \Leftrightarrow$
$\int_{x=0}^{2}(x^2y+\frac{1}{2}y^2x)_{y=x/3}^{x}\,dx + \int_{x=2}^{3}(x^2y+\frac{1}{2}y^2x)_{y=x/3}^{4-x}\,dx.$
De seguida, são substituidos os limites de $y$ nos dois integrais, resultando em expressões que só dependem de $x$. Finalmente, integram-se tais expressões, seguidas das substituições numéricas dos limites em $x$.

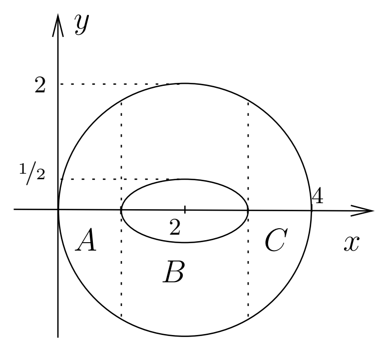



$\boxed{5}$ Considere a região $D$ como sendo a região do plano dentro da circunferência $x^2+(y-1)^2=1$ e as rectas $y=-x$ e $y=x$. Calcule o integral $\iint_T \sin(2x+3y)\,dx\,dy$.
Res: A figura à direita mostra a região $D$. Vamos usar duas abordagens ao exercício.
Primeiramente, em coordenadas cartesianas. Se optarmos por usar tiras horizontais, o integral é
$\int_{y=0}^{1}\int_{x=-y}^{y}\sin(2x+3y)\,dx\,dy + \int_{y=1}^{2}\int_{x=-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}}\sin(2x+3y)\,dx\,dy$
(Verifique/justifique os limites de integração.) Integrando o sin() com respeito a $x$ resulta $-\cos(2x+3y)(\frac{1}{2})$. Os limites em $x$ são de seguida substituidos e a integração em $y$ é feita depois.
Se forem usadas tiras verticais (=se mudarmos a ordem de integração), a expressão é
$\int_{x=-1}^{0}\int_{y=-x}^{1+\sqrt{1-x^2}}\sin(2x+3y)\,dy\,dx + \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{1+\sqrt{1-x^2}}\sin(2x+3y)\,dy\,dx$
Concluir as integrações.
Vamos usar este problema para compararmos as coordenadas cartesianas com as polares.



Em vez de $\sin(2x+3y)$ vamos integrar a função $f(x,y)=1$, isto é, vamos calcular a área da região. Adaptando a estrutura criada acima, a área é $\int_{y=0}^{1}\int_{x=-y}^{y} dx\,dy+\int_{y=1}^{2}\int_{x=-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} dx\,dy = \int_{y=0}^{1} 2y\,dy+\int_{y=1}^{2} 2\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$.
O primeiro integral é 1. O segundo tem o valor de $\frac{\pi}{2}$, pois é a área de meio círculo com raio $r=1$. [É esse o valor que se deve obter de $\int_{y=1}^{2} 2\sqrt{1-(y-1)^2}\,dy$. Verifique.]
O cálculo da área em coordenadas polares é mais simples, devido à simetria da região. Como indica a figura acima, a região pode ser varrida com linhas radiais, começando no ângulo $\theta = \pi/4$ e terminando em $\theta = 3(\pi/4)$. A linha radial vai de zero até à circunferência, que tem de ser expressa em coordenadas polares, isto é, substituindo $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ na expressão da curva. Resulta $x^2+(y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2r\sin\theta + 1 = 1$ $\Leftrightarrow r = 2\sin\theta$. Verifique que esta expressão dá de facto o valor de $r$ para $\theta = \pi/4$, $\pi/2$ e $3(\pi/4)$, que é $\sqrt{2}$, 2 e $\sqrt{2}$, respectivamente.
A área é $\int_{\theta=\pi/4}^{3(\pi/4)}\int_{r=0}^{2\sin\theta} r dr\,d\theta = \int_{\theta=\pi/4}^{3(\pi/4)} 2\sin^2\theta\,d\theta$. Usa-se a identidade $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ no integral, do qual se obtém $(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2})\Big|_{\theta=\pi/4}^{3(\pi/4)} = 1+\pi/2$, como obtido acima. Este resultado é fácil de verificar geometricamente. Observa-se que a área da região consiste da área de um quadrado com lado $\sqrt{2}$, inscrito na circunferência, e de dois dos quatro sectores que, adicionados ao quadrado, completam a circunferência. Cada sector tem área $\frac{\pi-2}{4}$ e a área da região é $\sqrt{2}\sqrt{2}+2(\frac{\pi-2}{4}) = 1+\pi/2$.
Neste exemplo foi contrastado o uso de coordenadas polares com o uso de cartesianas. Há situações em que um sistema de coordenadas torna o exercício mais fácil/compacto. Neste caso, a área é um pouco mais fácil de calcular com as polares.

$\boxed{6}$ Considere a região $D$ como sendo a região do plano dentro da circunferência $(x-2)^2+y^2=4$ e fora da elipse $(x-2)^2+4y^2=1$. Indique como calcularia o integral $\iint_D (x^3y-3xy^2)\,dx\,dy$.
Res: Observe a figura, onde se dividiu a região dentro da circunferência em três partes: $A$, $B$ e $C$, delimitadas pelas linhas verticais a tracejado.

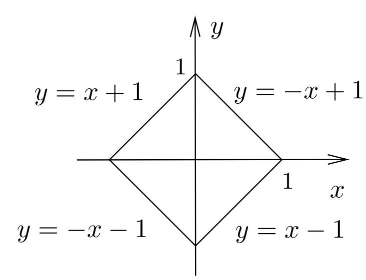



Vamos usar coordenadas cartesianas, com tiras verticais. O integral pedido consiste de três integrais, um por cada uma das três partes.
Para a parte $A$ :
$\int_{x=0}^{1}\int_{y=-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} (x^3y-3xy^2)\,dy\,dx$

Na parte $B$ temos dois integrais – para $y<0$ e $y>0$ :
$\int_{x=1}^{3}\int_{y=-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{-\sqrt{\frac{1-(x-2)^2}{4}}} (x^3y-3xy^2)\,dy\,dx$
$+\int_{x=1}^{3}\int_{y=\sqrt{\frac{1-(x-2)^2}{4}}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} (x^3y-3xy^2)\,dy\,dx$
Para a parte $C$ : $\int_{x=3}^{4}\int_{y=-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} (x^3y-3xy^2)\,dy\,dx$

O integral sobre a região $D$ é a soma dos integrais obtidos para $A$, $B$ e $C$.

$\boxed{7}$ Mostre que $\iint_T e^{x+y}\,dx\,dy = e - \frac{1}{e}$, onde $T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\}$.




Res: A região de integração está na figura. O pedido é

$\int_{x=-1}^{0} e^x \int_{y=-x-1}^{x+1} e^y\,dy\,dx + \int_{x=0}^{1} e^x \int_{y=x-1}^{-x+1} e^y\,dy\,dx$

$\Leftrightarrow \int_{x=-1}^{0} (e^{2x+1}-e^{-1})\,dx + \int_{x=0}^{1} (e^1-e^{2x-1})\,dx$

Integrando, temos $\frac{e^{2x+1}}{2}\Big|_{x=-1}^{0} - xe^{-1}\Big|_{x=-1}^{0} + xe^1\Big|_{x=0}^{1} - \frac{e^{2x-1}}{2}\Big|_{x=0}^{1} = e - \frac{1}{e}$, que é o resultado a provar.

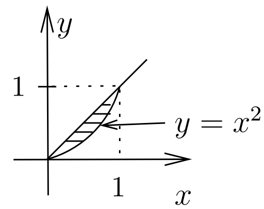
$\boxed{8}$ Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva e contínua. Em cada um dos casos esboce a região S e troque a ordem de integração.

$\boxed{a}$ $\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$

Res: A região de integração está indicada a tracejado na figura. Fica por cima da parábola e por debaixo da recta. Note que este exercício é semelhante ao $\boxed{2}$ visto acima.

Trocando a ordem de integração:

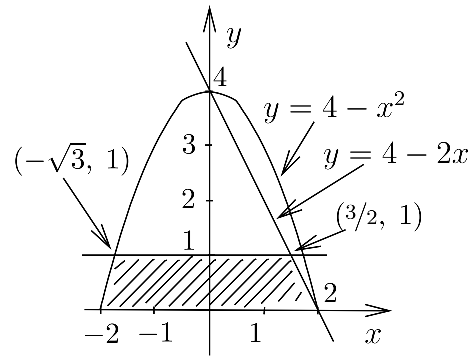
$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dy\,dx$$




$\boxed{b}$ $\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1} \int_{x=-\sqrt{4-y}}^{(4-y)/2} f(x,y)\,dy\,dx$

Res: A região de integração está indicada a tracejado na figura. Está delimitada, na vertical, entre o eixo dos $xx$ e a recta horizontal $y = 1$. Na horizontal, entre a parábola $y = 4 - x^2$ e a recta $y = 4 - 2x$. A parábola é obtida de $x = -\sqrt{4-y}$ e a recta de $x = {}^{(4-y)}/_{2}$.

Trocando a ordem de integração vamos ter três integrais. No 1º, as tiras verticais vão de $y = 0$ a $y = 4 - x^2$(=a parábola), com $x_{inf} = -2$ e $x_{sup} = -\sqrt{3}$; no 2º os limites são $y = 0 \rightarrow 1$ e $x = -\sqrt{3} \rightarrow {}^3/_2$ e no 3º são $y = 0 \rightarrow 4 - 2x$ e $x = {}^3/_2 \rightarrow 2$:




$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=-2}^{-\sqrt{3}} \int_{y=0}^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{x=-\sqrt{3}}^{3/2} \int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{x=3/2}^{2} \int_{y=0}^{4-2x} f(x,y)\,dy\,dx$$

$\boxed{9}$ O volume do sólido de base $S$ e limitado pelo parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$ é dado pelo integral:

$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y} (x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_{y=1}^{2} \int_{x=0}^{2-y} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

Esboce S e calcule o volume usando um integral em que a ordem de integração está trocada.

Res: A base, que é o triângulo a tracejado no plano $XoY$, é formada pelas três rectas: 1) eixo dos $yy$; 2) a recta $y = x$ e 3) a recta $y = 2 - x$. O "tecto" do objecto é o parabolóide.

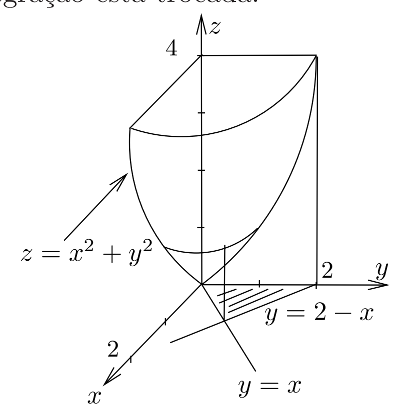
Trocando a ordem de integração:

$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{2-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1} (yx^2 + \frac{y^3}{3})_{y=x}^{2-x}\,dx \Leftrightarrow$

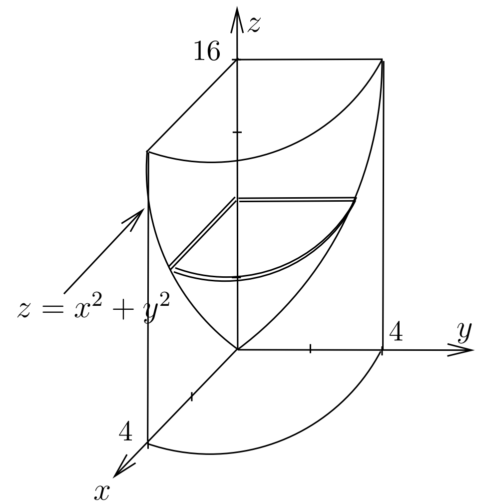
$\int_{x=0}^{1} [(2-x)x^2 + \frac{(2-x)^3}{3}) - (x^3 + \frac{x^3}{3})]\,dx = [\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{(2-x)^4}{3(4)}(-1) - \frac{x^4}{3}]_0^1$

$\Leftrightarrow$

$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - (-\frac{16}{12}) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$



$\boxed{10}$ Calcule o volume do sólido dentro do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano z = 16.
Res: Adapta-se o problema prévio a este. Há simetrias que devem ser usadas, para evitar alguma redundância. Uma é o facto que o cálculo para qualquer quadrante, multiplicado por 4, nos dá o resultado procurado.
O corte de nível $C = 16$ é a circunferência de raio 4: $4^2 = x^2 + y^2$.




Res: A figura mostra só o 1º dos quatro quadrantes.
O volume é obtido pelo integral nas coordenadas cartesianas
$V = 4V_{Quadrante1} \Leftrightarrow V = \int_{z=0}^{16} (4) \int_{x=0}^{\sqrt{z}} \int_{y=0}^{\sqrt{z-x^2}} (1)\, dy\, dx\, dz$
Sabemos que o integral duplo no interior (=em $y$ e em $x$) nos dá a área da circunferência de raio $z$, que é $\pi z^2$. [Verifique que a integração dupla nos dá esse resultado. ]
$V = \int_{z=0}^{16} \pi z^2\, dz = \pi\ \frac{z^3}{3}\Big|_0^{16} = (\frac{16^3}{3})\pi$

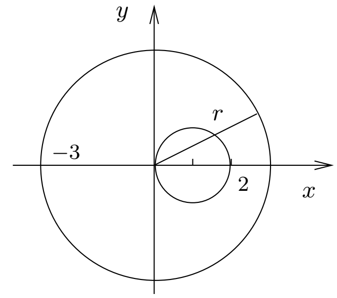
B. Integrais Duplos: mudança de variável.

$\boxed{11}$ Calcule os seguintes integrais usando coordenadas polares:
$\boxed{a}$ $\iint_S 2xy\, dx\, dy$ onde $S$ é o círculo de raio 2 e centro na origem.
Res: Há simetrias a explorar. Observa-se que para qualquer elemento de área $da = dx\, dy$ do 1º quadrante, centrado no ponto $(x_0,\, y_0)$, correspondem um elemento de área nos outros três quadrantes, com coordenadas: $(-x_0,\, y_0)$ no 2º, $(-x_0,\, -y_0)$ no 3º e $(x_0,\, -y_0)$ no 4º. O contributo (para o integral) do elemento de área no 1º quadrante é simétrico do contributo do 2º ou do 4º. Resumindo: os quatro elementos de área, quando somados (=integrados) anulam-se anulam-se aos pares. Visto isto ser verdade para um elemento arbitrário e dadas as simetrias da região e da função a ser integrada, concluimos que o integral (=a soma dos elementos de área) é zero.
Vamos comprovar isso. Aplicando as substituições que nos levam das coordenadas cartesianas às polares, $\iint_S 2xy\, dx\, dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} 2(r\cos\theta)(r\sin\theta)\, r d\theta\, dr = \int_{\theta=0}^{2\pi} (\cos\theta)(\sin\theta) \int_{r=0}^{2} 2r^3 dr\, d\theta$.
Note que o $r\, d\theta\, dr$ é um elemento de área nas polares. O $r$ que nessa expressão figura tem de ser incorporado na função a integrar. Daí, o termos $\int_{r=0}^{2} 2r^3 dr$ em vez de $\int_{r=0}^{2} 2r^2 dr$.
Integrando primeiramente em $r$ e usando a substituição $(\cos\theta)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ vem o resultado
$-2\cos(2\theta)|_0^{2\pi} = -2(\cos(4\pi) - \cos(0)) = 0$.

$\boxed{b}$ $\iint_S e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$ onde $S$ é a região dentro da circunferência de raio 3 e centro na origem e fora da circunferência de raio 1 e centro na origem.
Res: Nas coordenadas polares temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $dx\, dy$ é substituido por $r\, dr\, d\theta$:
$\iint_S e^{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} e^{r^2} (\frac{1}{2}) 2r\, dr\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2}\ e^{r^2}\Big|_1^3\, d\theta = \pi(e^9 - e)$.

$\boxed{c}$ $\iint_S 2xy\, dx\, dy$ onde S é a região delimitada dentro da circunferência de raio 3 e centro na origem e fora da circunferência de equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
Res: Antes de fazer a integração, sabemos que o seu valor é nulo. É parecido com o que vimos na alínea $\boxed{a}$ acima. Neste caso, a contribuição (ao integral) de qualquer elemento de área no 1º quadrante é anulada pela contribuição de um elemento no 4º quadrante: contribuição do elemento em $(x_0,\, y_0)$ é anulada por $(x_0,\, -y_0)$. O mesmo se diz para elementos nos quadrantes 2 e 3: contribuição do elemento em $(-x_0,\, y_0)$ é anulada por $(-x_0,\, -y_0)$. Vamos comprovar este resultado, para exercitar integrações nas coordenadas polares.

Res: A figura mostra a região de integração.




O facto da circunferência menor não estar centrada complica a situação. Temos de separar os instantes em que a linha radial corta a circunferência menor dos instantes em que não o faz. Há dois integrais a considerar: o 1º de $\theta = -\frac{\pi}{2}$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$ e o 2º de $\theta = \frac{\pi}{2}$ a $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

A circunferência menor nestas coordenadas tem como expressão $(r\cos\theta - 1)^2 + r^2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow r^2 - 2r\cos\theta = 0$, que tem como raízes $r = 0$ e $r = 2\cos\theta$. (Verificar.) Esta 2ª opção é a única de interesse.

$\iint_S 2xy\,dx\,dy = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=2\cos\theta}^{3} 2r^3\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{3} 2r^3\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta$

$\Leftrightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\ \frac{r^4}{2}\Big|_{r=2\cos\theta}^{3} d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\ \frac{r^4}{2}\Big|_{0}^{3} d\theta$

Usando $(\cos\theta)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ e substituindo os limites:

$\Leftrightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin(2\theta)\,(81 - 16\cos^4\theta)\,d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin(2\theta)\,(81)\,d\theta$

$\Leftrightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(81)\sin(2\theta)\ d\theta - \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin(2\theta)(16\cos^4\theta)\ d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin(2\theta)\,(81)\,d\theta$ De notar que somando o 1º e o 3º integrais dá um resultado nulo, pois estamos a integrar $\sin 2\theta$ num intervalo $2\pi$. Resta o 2º, que também é nulo pois estamos a integrar uma função ímpar no intervalo $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$:

$\Leftrightarrow -4\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)(\cos^4\theta)\ d\theta = \frac{4}{96}\cos(6\theta) + \frac{20}{32}\cos(2\theta) + \frac{4}{16}\cos(4\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow [\frac{4}{96}\cos(3\pi) + \frac{20}{32}\cos(\pi) + \frac{4}{16}\cos(2\pi)] - [\frac{4}{96}\cos(-3\pi) + \frac{20}{32}\cos(-\pi) + \frac{4}{16}\cos(-2\pi)]$

$\Leftrightarrow [\frac{4}{96}(-1) + \frac{20}{32}(-1) + \frac{4}{16}(1)] - [\frac{4}{96}(-1) + \frac{20}{32}(-1) + \frac{4}{16}(1)] = 0$

JJCosta, Maio 2010