Análise Matemática 2 - Semana 9: 10 de Maio, 2010

$\boxed{1}$ Considere a função $F(x,y,z) = (\frac{1-e^{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2},\ \ln(1-x-y-z))$

Determine o seu domínio e calcule $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F(x,y,z)$

Res: Seja $F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$. A origem é o único ponto onde f_1 pode ter um problema. Usando a aproximação $e^{x^2+y^2+z^2} = e^{r^2} \approx 1 + r^2$, para valores de (x,y,z) próximos da origem, vem que nessa região $f_1 \approx -1$ e o limite pedido, ou seja, o valor de f_1 na origem é -1. O domínio de f_1 é $D_{f_1} = \mathbb{R}^3$. Quanto a f_2, o argumento do logarítmo é a equação do plano $x + y + z = 1$, que passa nos pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. O domínio de f_2 é $D_{f_2} = \{(x,y,z) : x + y + z < 1\}$, ou seja, todos os pontos por debaixo do plano. O limite de f_2 é $\ln(1) = 0$. Assim, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F(x,y,z) = (-1,0)$ e $D_F = D_{f_2}$.

$\boxed{2}$ Considere as funções seguintes. Determine o domínio e o conjunto de ponto de continuidade de cada uma das funções.

$\boxed{\text{i}}$ $F(x,y) = (\cos(x+y), x^2y)$.

Res: Seja $f_1 = \cos(x+y)$ e $f_2 = x^2y$. Ambas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$, que é o conjunto de continuidade de ambas. O domínio de F é $D_F = \mathbb{R}^2$, que é também o conjunto de continuidade.

$\boxed{\text{ii}}$ $F(x,y) = (\frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{\ln(y^2+x)}{x}, x+y)$.

Res: Sejam f_1, f_2 e f_3 as componentes de F. O numerador de f_1 é contínuo em $\mathbb{R}^2$. A raíz quadrada só admite um argumento ≥ 0. Estando no denominador de f_1, temos de excluir a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e o seu exterior. $D_{f_1} = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

O logarítmo no numerador de f_2 é zero na parábola $x = -y^2$, centrada no eixo dos xx e aberta para a esquerda. Como o argumento não pode ser nulo nem negativo, o numerador só é válido para pontos por cima e por debaixo da parábola. Note que a origem é excluída do domínio do numerador. O domínio do denominador consiste de $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y) : x = 0\}$, isto é, $\mathbb{R}^2$ excluindo o eixo dos yy. O domínio de f_2 consiste de $\mathbb{R}^2$, excluindo os pontos na parábola e entre os seus dois ramos e excluindo também o eixo dos yy. O domínio de f_3 é e $\mathbb{R}^2$.

O domínio de F é a intersecção dos três domínios descritos.

$\boxed{3}$ Considere as funções $G(x,y) = (x+y, x-y)$ e $H(x,y,z) = (xy - z, -xy)$.

$\boxed{\text{a}}$ Verifique se existe $G'((0,1) : (1,0))$ e em caso afirmativo calcule essa derivada.

Res: As componentes de G são combinações lineares de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$. Assim, G é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. O que é pedido é a derivada de G no ponto $(0,1)$, que é uma matriz, na direcção do vector $(1,0)$. $G'((0,1) : (1,0)) = JG(0,1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. De notar que esta matriz tem um valor constante, isto é, não depende do ponto onde se está a calcular a derivada, como no caso geral.

$\boxed{\text{b}}$ Determine $JH(-1,2,-2)$.

Res: $JH(-1,2,-2) = \left.\begin{bmatrix} y & x & -1 \\ -y & -x & 0 \end{bmatrix}\right|_{(-1,\,2,\,-2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{c}}$ Determine $H'((-1,2,-2);(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}))$.

Res: $H'((-1,2,-2);(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})) = JH(-1,2,-2)\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{d}}$ Defina $L = G \circ H$ e calcule $JL(1,1,1)$.

Res: As componentes de G são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e as de H são diferenciáveis em $\mathbb{R}^3$. Vem que a função $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está bem definida e é diferenciável, pois é a combinação linear de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} JL(1,1,1) &= JG(H(1,1,1))JH(1,1,1) \\ &= JG(0,-1))JH(1,1,1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\left.\begin{bmatrix} y & x & -1 \\ -y & -x & 0 \end{bmatrix}\right|_{(1,\,1,\,1)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Derivada da Função Composta e derivada da função inversa

$\boxed{1}$ Seja $z = x^2y$, $x = 3t+4u$ e $y = 5t-u$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial t}$ de duas formas diferentes:

$\boxed{\text{a}}$ Usando regras de derivação da função composta.

Res: $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2xy(3) + x^2(5)$. Substituindo as expressões de x e y é obtido o resultado $\frac{\partial z}{\partial t} = 2(3t+4u)(5t-u)(3) + (3t+4u)^2(5) = 135t^2 + 222tu + 56u^2$.

$\boxed{\text{b}}$ Começando por escrever z como uma função de t e u.

Res: Começando com a substituição: $z(t) = (9t^2 + 24tu + 16u^2)(5t-u) = 45t^3 + 111t^2u + 56tu^2 - 16u^3$ que, derivando parcialmente c.r.a t, resulta em $\frac{\partial z}{\partial t} = 135t^2 + 222tu + 56u^2$.

$\boxed{2}$ Em cada uma das alíneas seguintes, exprima as derivadas parciais da função dada (no ponto dado) em termos das derivadas parciais de f. Assuma que f é diferenciável.

$\boxed{\text{a}}$ $w = f(z)$, com $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ em $(x,y) = (0,0)$.

Res: Ao ponto $(x,y) = (0,0)$ corresponde $z = 1$. $\frac{\partial w}{\partial x}(1) = f'(1)\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, sendo a derivada parcial de z c.r.a x obtida por $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{z((0,0)+t(1,0)) - z(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = 1$. Assim, $\frac{\partial w}{\partial x}(1) = f'(1)$. De um modo semelhante, $\frac{\partial w}{\partial y}(1) = f'(1)\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = f'(1)$.

$\boxed{\text{b}}$ $w = f(x,y,z)$, com $x = 3\sin(t^2)$, $y = s^2t^2u^2$ e $z = s\sin(u)$, em $(s,t,u) = (\pi/3, 1, \pi/3)$.

Res: Ao ponto $(s,t,u) = (\pi/3, 1, \pi/3)$ corresponde o ponto $(x_0,y_0,z_0) = (3\sin(1), (\frac{\pi}{3})^4, (\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3}))$.
$\frac{\partial w}{\partial s}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial x}{\partial s}(\pi/3, 1, \pi/3) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial y}{\partial s}(\pi/3, 1, \pi/3) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial z}{\partial s}(\pi/3, 1, \pi/3) \Leftrightarrow$
$\frac{\partial w}{\partial s}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\ (2st^2u^2)\big|_{(\pi/3,\,1,\,\pi/3)} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\ (\sin(u))\big|_{(\pi/3,\,1,\,\pi/3)} \Leftrightarrow$

$\frac{\partial w}{\partial s}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(2(\frac{\pi}{3})^3) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(\sin(\pi/3))$.

De um modo semelhante,

$\frac{\partial w}{\partial t}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial x}{\partial t}(\pi/3, 1, \pi/3) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial y}{\partial t}(\pi/3, 1, \pi/3) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial z}{\partial t}(\pi/3, 1, \pi/3) \Leftrightarrow$

$\frac{\partial w}{\partial t}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\ (3\cos(t^2)(2t)\big|_{(\pi/3,\,1,\,\pi/3)} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\ (2ts^2u^2)\big|_{(\pi/3,\,1,\,\pi/3)} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\ (0)\big|_{(\pi/3,\,1,\,\pi/3)}$.

$\frac{\partial w}{\partial u}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial x}{\partial u}(\pi/3, 1, \pi/3) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial y}{\partial u}(\pi/3, 1, \pi/3) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial z}{\partial u}(\pi/3, 1, \pi/3) \Leftrightarrow$

$\frac{\partial w}{\partial u}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\ (0)\big|_{(\pi/3,\,1,\,\pi/3)} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\ (2t^2s^2u)\big|_{(\pi/3,\,1,\,\pi/3)} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\ (s\cos(u))\big|_{(\pi/3,\,1,\,\pi/3)}$,
com as derivadas parciais a serem calculadas como indicado. (Fazer essa substituição.)

$\boxed{c}$ $r = f(x,y)$, com $x = \frac{u}{v} + w$, $y = \frac{w}{u} + v^2$, em $(u,v,w) = (1, -1, 1)$.

Res: Ao ponto $(u,v,w) = (1, -1, 1)$ corresponde o ponto $(x_0,y_0) = (0, 2)$.
$\frac{\partial r}{\partial u}(0,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\frac{\partial x}{\partial u}(1, -1, 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\frac{\partial y}{\partial u}(1, -1, 1) \Leftrightarrow$
$\frac{\partial r}{\partial u}(0,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\ (\frac{1}{v})\big|_{(1,-1,1)} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\ (-\frac{w}{u^2})\big|_{(1,-1,1)}$

$\frac{\partial r}{\partial v}(0,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\frac{\partial x}{\partial v}(1, -1, 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\frac{\partial y}{\partial v}(1, -1, 1) \Leftrightarrow$
$\frac{\partial r}{\partial v}(0,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\ (-\frac{u}{v^2})\big|_{(1,-1,1)} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\ (2v)\big|_{(1,-1,1)}$

$\frac{\partial r}{\partial w}(0,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\frac{\partial x}{\partial w}(1, -1, 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\frac{\partial y}{\partial w}(1, -1, 1) \Leftrightarrow$

$\frac{\partial r}{\partial w}(0,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\ (1)\big|_{(1,-1,1)} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\ (\frac{1}{v})\big|_{(1,-1,1)}$

As derivadas parciais obtidas têm de ser calculadas no ponto indicado. (Fazer essa substituição.)

$\boxed{3}$ Nos exercícios seguintes assuma que f é uma função diferenciável.

$\boxed{a}$ Seja $z = f(x,u,v)$ e $F(x,y) = f(x,x+y,xy)$. Verifique que $\frac{\partial F}{\partial x}\big|_{(2,1)} - \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(2,1)} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(2,3,2)} - \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(2,3,2)}$

Res: $F(x,y) = f(x,x+y,xy) = f(p,s,t)$. Ao ponto $(x,x+y,xy) = (2,3,2)$ em $\mathbb{R}^3$ corresponde o ponto $(2,1) = (x,y)$ em $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}(1) + \frac{\partial f}{\partial s}(1) + \frac{\partial f}{\partial t}(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}(0) + \frac{\partial f}{\partial s}(1) + \frac{\partial f}{\partial t}(x)$

Calculando as duas parciais de F no ponto $(2,1)$ e subtraindo os resultados vem
$\frac{\partial F}{\partial x}\big|_{(2,1)} - \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(2,1)} = \frac{\partial f}{\partial p}\Big|_{(2,3,2)} + \frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(2,3,2)} + \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{(2,3,2)}(y) - \frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(2,3,2)} - \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{(2,3,2)}(x) \Leftrightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(2,1)} - \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(2,1)} = \frac{\partial f}{\partial p}\Big|_{(2,3,2)} + \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{(2,3,2)} (y-x)$, que, para os valores de x e y do ponto, resulta no pedido.

$\boxed{\text{b}}$ Seja $w = f(x,y)$ e $x = u - v$, $y = v - u$. Mostre que $\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} = 0$

Res: $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1)$; $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1)$. A soma das duas expressões é zero, como se pretendia demonstrar.

$\boxed{\text{c}}$ Seja $w = f(xz,yz)$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Mostre que $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = z\frac{\partial w}{\partial z}$

Res: Seja $f(xz,yz) = f(u,v)$. A: $x\frac{\partial w}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial u}(z) + x\frac{\partial f}{\partial v}(0)$;
B: $y\frac{\partial w}{\partial y} = y\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = y\frac{\partial f}{\partial u}(0) + y\frac{\partial f}{\partial v}(z)$;
C: $z\frac{\partial w}{\partial z} = z\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + z\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = z\frac{\partial f}{\partial u}(x) + z\frac{\partial f}{\partial v}(y)$. A soma das parcelas A e B resulta em C.

$\boxed{\text{d}}$ Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = xh(3x-2y, -3x+2y)$, onde h é uma função de classe C^2. Mostre que $2\frac{\partial g}{\partial x} + 3\frac{\partial g}{\partial y} = 2h$.

Res: Seja $h(3x-2y, -3x+2y) = h(u,v)$.
A: $2\frac{\partial g}{\partial x} = 2x[\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}] + 2h = 2x[\frac{\partial h}{\partial u}(3) + \frac{\partial h}{\partial v}(-3)] + 2h$;
B: $3\frac{\partial g}{\partial y} = 3x[\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}] = 3x[\frac{\partial h}{\partial u}(-2) + \frac{\partial h}{\partial v}(2)]$;
A+B: $2\frac{\partial g}{\partial x} + 3\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u}(6x) + \frac{\partial h}{\partial v}(-6x) + 2h + \frac{\partial h}{\partial u}(-6x) + \frac{\partial h}{\partial v}(6x) = 2h$, que é o resultado pedido.

$\boxed{4}$ Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x,y,z) = (xy,yz,xz)$.

$\boxed{\text{a}}$ Verifique que F é invertível numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$.

Res: De $F(x,y,z) = (xy,yz,xz)$ define-se $f_1 = xy$, $f_2 = yz$ e $f_3 = xz$. Podemos resolver estas três equações em ordem a (x,y,z) numa vizinhança de $(1,1,1)$ se o determinante do Jacobiano de F no ponto for diferente de zero. O Jacobiano é

$$JF(1,1,1) = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}\right|_{(1,1,1)} = \left.\begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{bmatrix}\right|_{(1,1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, cujo determinante é 2.

Conclui-se que a função é invertível numa vizinhança do ponto dado.

$\boxed{\text{b}}$ Determine a matriz Jacobiana da função inversa no ponto $F(1,1,1)$.

Res: A matriz Jacobiana da função inversa no ponto $(1,1,1)$ é a matriz inversa da que foi obtida na alínea anterior.

$$[JF(1,1,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (1/2)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$. (Verifique este resultado.)

$\boxed{5}$ Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$\boxed{\text{a}}$ Verifique que F é invertível numa vizinhança de qualquer ponto (r,θ) para o qual $r \neq 0$.

Res: Com $F(r\cos\theta, r\sin\theta)$ define-se $f_1 = r\cos\theta$ e $f_2 = r\sin\theta$. A matriz Jacobiana genérica é

$$JF(r\cos\theta, r\sin\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$, cujo determinante é $r \neq 0$, que é o resultado desejado.

$\boxed{\text{b}}$ Verifique que $F(1,\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ e determine a matriz Jacobiana da função inversa no ponto $(0,1)$.

Res: $r\cos\theta = (1)\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$; $r\sin\theta = 1\sin\frac{\pi}{2} = 1$. A matriz pedida é a inversa da Jacobiana no ponto, ou seja,

é $$[JF(r\cos\theta, r\sin\theta)]^{-1} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix}^{-1}\right|_{(1\cos\frac{\pi}{2}, 1\sin\frac{\pi}{2})} = \left.\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1}\right|_{(1\cos\frac{\pi}{2}, 1\sin\frac{\pi}{2})}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{6}$ Averigue se o sistema seguinte pode ser resolvido em ordem a (x,y,z) numa vizinhança de $(0,0,0)$:
$u = x + xyz$; $v = y + xy$ e $w = z + 2x + 3z^2$

Res: Temos três funções definidas em termos de x, y e z. O pedido é equivalente a determinar se a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é invertível numa vizinhança de $(0,0,0)$, sendo $F = (x,y,z) = (x + xyz, y + xy, z + 2x + 3z^2)$. A resposta é dada pela matriz Jacobiana no ponto:

$$JF(0,0,0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z}\end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0,0)}=\begin{bmatrix}1+yz & xz & xy\\ y & 1+x & y\\ 2 & 0 & 1+6z\end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0,0)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$, cujo determinante é 1. Conclui-se que o sistema é resolúvel numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$.

$\boxed{\text{A}}$ Seja $u=f(r)$, com $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Mostre que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$

Res: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=f'[(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(x)]$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}==f''[(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(x)][(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(x)]+f'[-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x^2)+(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}]\Leftrightarrow$

M: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}==f''(x^2+y^2+z^2)^{-1}x^2+f'[-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x^2)+(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}]$

N: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}==f''(x^2+y^2+z^2)^{-1}y^2+f'[-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(y^2)+(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}]$

P: $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}==f''(x^2+y^2+z^2)^{-1}z^2+f'[-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(z^2)+(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}]$

A soma M+N+P simplifica-se se observarmos que:

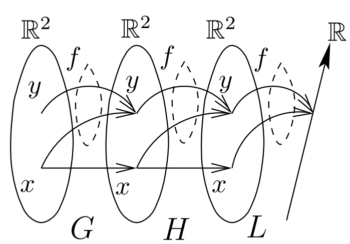
$i)$ a soma das expressões que multiplicam f'' iguala 1: $f''\{(x^2+y^2+z^2)^{-1}(x^2++y^2+z^2)\}=f''$;

$ii)$ a soma das expressões que multiplicam f' iguala $2(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$:

$f'\{-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2++y^2+z^2)+3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\}=2f'(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=2f'\frac{1}{r}$.

Resumindo: M+N+P$=f''+f'(\frac{2}{r})$, que é o resultado a provar.

$\boxed{\text{(B)}}$ Seja f uma função continuamente diferenciável tal que $f(1{,}1)=1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=a$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=b$.
Seja $\phi(x)=f(x,f(x,f(x{,}x)))$. Calcule $\phi(1)$ e $\phi'(1)$.
Res: A função f é usada recursivamente para criar ϕ. O diagrama à direita ajuda a estruturar a resolução. Aqui começamos com a situação geral, onde f é aplicada aos argumentos x e y para gerar um valor real.



ϕ usa a função f três vezes, o que se pode ver na figura pelos três pares de arcos que convergem no mesmo ponto, da esquerda para a direita. (Cada malha a tracejado mostra uma aplicação de f.) O argumento x é transferido duas vezes para a direita, para ser usado no último uso de f. Vamos denominar os mapeamentos G, H e L, da esquerda para a direita, como indicado. Com esta estrutura, podemos obter a derivada de ϕ.
Para obter o valor de $\phi(1)$ usa-se $\phi(x)=f(x,f(x,f(x{,}x))):\phi(1)=f(1,f(1,f(1,1)))\Leftrightarrow\phi(1)=f(1,f(1,1))\Leftrightarrow$ $\phi(1)=f(1,1)\Leftrightarrow\phi(1)=1$.
A função G consiste de duas funções: $G(x{,}y)=(x{,}f(x{,}y))$ e a sua derivada é dada pela matriz Jacobiana $JG(x{,}y)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}$. A função H é idêntica a G: $JH(x{,}y)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}$. Quanto à função L, a sua derivada é dada pelo gradiente, visto ser uma função real de variável vectorial: $JL(x{,}y)=(\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \ \frac{\partial f}{\partial y}\ )$.
A derivada de ϕ é $\phi'=[JL]\,[JH]\,[JG]=(\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \ \frac{\partial f}{\partial y}\ )\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}=(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})^2\,,(\frac{\partial f}{\partial y})^3)$.
[De notar a ordem da multiplicação.] Substituindo os valores dados das derivadas parciais,
$\phi'=(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})^2\,,(\frac{\partial f}{\partial y})^3)=(a+ab+ab^2,\,b^3)$

$\boxed{\text{C}}$ Seja $f(x,y) = (xy, x^2 + y^2)$. Quais os pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que $f'(X)$ é um isomorfismo?

Res: A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e a derivada de f em cada ponto (x_0,y_0) é uma aplicação linear $f'(x,y)$ representada pela matriz Jacobiana $Jf(x_0,y_0) = \left.\begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{bmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}$. Para ser um isomorfismo a Jacobiana tem de ser invertível, o que impõe a condição $\det Jf = 2y^2 - 2x^2 = 2(y-x)(y+x) \neq 0$. O determinante é nulo nas rectas $y = x$ e $y = -x$. Vem que nessas rectas $f'(X)$ não é um isomorphismo.

Os pontos nos quais f' é um isomorphismo formam o conjunto $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) : y = \pm x\}$

JJCosta, Maio 2010