Mecânica Lagrangeana

Apontamentos para a disciplina

Introdução à Mecânica Clássica

2001/02

Maria Inês Barbosa de Carvalho

Aníbal Castilho Coimbra de Matos

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

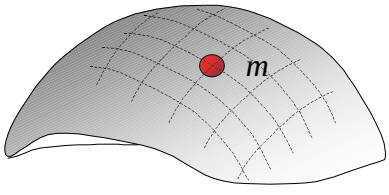
O formalismo lagrangeano permite obter as equações de movimento de um sistema de um modo elegante e sistemático. Contrariamente aos métodos baseados nas leis de Newton, este formalismo não exige a identificação das forças envolvidas, o que torna a análise mais abstracta. Contudo, é assim possível simplificar o tratamento de sistemas de maior complexidade, especialmente quando não é relevante a determinação das forças associadas às restrições ao movimento das suas partículas.

Estas notas constituem uma breve introdução à Mecânica Lagrangena. O seu conteúdo está de acordo com os sistemas físicos estudados no âmbito desta disciplina.

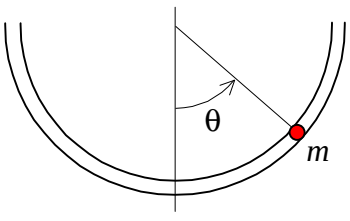
Coordenadas generalizadas

A posição de uma partícula fica definida pelo seu raio vector de posição $\vec{r}$, cujas componentes são as suas coordenadas cartesianas x, y, e z. Para especificar completamente a posição de um sistema de N partículas, serão necessários N raios vectores de posição, ou seja, $3N$ coordenadas. No entanto, é possível conhecer a posição de determinados sistemas a partir de um número de variáveis inferior a $3N$. Designa-se por **número de graus de liberdade** a quantidade de variáveis independentes que é necessário especificar para conhecer completamente a posição de um dado sistema.

Se uma partícula for obrigada a mover-se sobre uma superfície conhecida (por exemplo, sobre a superfície de uma esfera, ou sobre o plano xy), bastarão 2 parâmetros para definir completamente a sua posição no espaço. Caso a partícula se desloque ao longo de uma linha conhecida, a sua posição ficará especificada a partir de uma única variável.

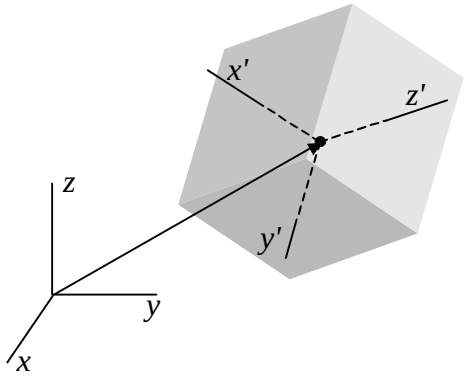


Movimento sobre uma superfície



Movimento ao longo de uma curva

As posições no espaço de todas as partículas de um corpo rígido ficam completamente definidas pela posição de um ponto do corpo (por exemplo, o seu centro de massa) e pela orientação do corpo, isto é, por apenas 6 variáveis.

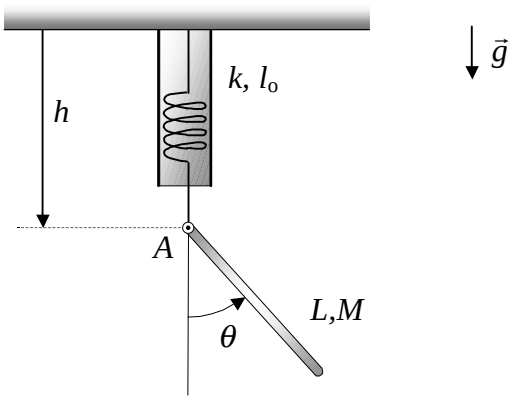


Posição de um sólido no espaço

Para definir completamente a posição de um sistema com *s* graus de liberdade são necessárias *s* variáveis independentes. Essas variáveis são designadas **coordenadas generalizadas**. A escolha das coordenadas generalizadas de um dado sistema não é única, o que permite seleccioná-las de modo a simplificar o tratamento matemático do problema. A selecção das coordenadas generalizadas é conhecida como **parametrização** do problema.

Exemplo

A mola da figura, colocada no interior de uma calha, está suspensa pela sua extremidade superior. Na outra extremidade encontra-se uma barra homogénea muito fina que pode oscilar em torno desse ponto, no plano da figura.



Parametrização

Da observação da figura pode concluir-se que o ponto *A* apenas se movimenta na vertical, e que a localização da barra fica definida pela sua orientação no plano e pela posição do ponto *A*. Assim, será natural escolher a distância do ponto *A* à plataforma (h) e o ângulo da barra com a vertical (θ) para coordenadas generalizadas deste sistema.

No que se segue, as coordenadas generalizadas de um sistema com s graus de liberdade serão representadas por $q_1, q_2, ..., q_s$, ou de forma compacta por $\boldsymbol{q}$.

É importante referir que deve ser usado um referencial inercial para a definição das coordenadas generalizadas.

Lagrangeana de um sistema de partículas

Na formulação da mecânica lagrangeana, cada sistema mecânico é caracterizado por uma determinada função. No caso geral, esta função depende das coordenadas generalizadas ($\boldsymbol{q}$), das suas derivadas temporais ($\dot{\boldsymbol{q}}$) e também do tempo (t). Esta função designa-se **lagrangeana** do sistema, sendo representada habitualmente por $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

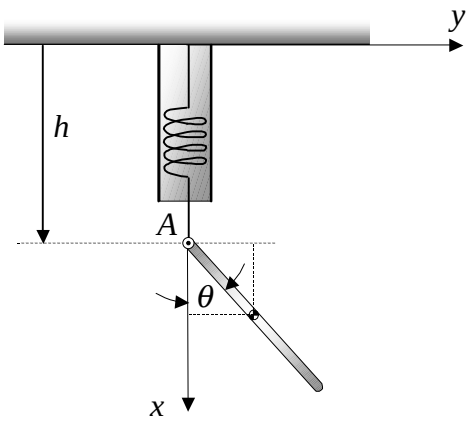
A langrangeana pode ser escrita na forma

$$L = T - U$$

onde T é a soma das energias cinéticas das partículas do sistema e U é a sua energia potencial, onde se incluem os efeitos de todas as forças conservativas.

Lagrangeana

A energia cinética do sistema, *T*, está apenas associada ao movimento da barra. Tratando-se de um corpo rígido, esta pode ser decomposta em energia cinética de translação e de rotação. A energia cinética de translação é dada por $T_{TRA,CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$, onde v_{CM} é a velocidade do centro de massa da barra. Esta velocidade pode ser facilmente determinada a partir da posição do centro de massa. Em termos das coordenadas generalizadas (*h* e *θ*), esta posição é $\vec{r}_{CM} = \left(h + \frac{L}{2}\cos\theta \right)\hat{i} + \frac{L}{2}\sin\theta\ \hat{j}$, onde $\hat{i}$ e $\hat{j}$ são os versores dos eixos *x* e *y* representados na figura.



Então, $\vec{v}_{CM} = \dot{\vec{r}}_{CM} = \left(\dot{h} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta \right)\hat{i} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\ \hat{j}$, obtendo-se facilmente $v_{CM}^2 = \dot{h}^2 - L\dot{\theta}\,\dot{h}\sin\theta + \frac{L^2\dot{\theta}^2}{4}$ e $T_{TRA,CM} = \frac{1}{2}M\left(\dot{h}^2 - L\dot{\theta}\,\dot{h}\sin\theta + \frac{L^2\dot{\theta}^2}{4} \right)$.

A energia cinética de rotação é igual a $T_{ROT,CM} = \frac{1}{2} I_{CM}\dot{\theta}^2 = \frac{ML^2\dot{\theta}^2}{24}$, onde $I_{CM} = \frac{ML^2}{12}$, para uma barra homogénea de comprimento *L* e massa *M*. Das expressões anteriores obtém-se $T = \frac{1}{2}M\dot{h}^2 - \frac{1}{2}ML\dot{\theta}\,\dot{h}\sin\theta + \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2$.

A energia potencial *U* é a soma da energia potencial gravítica U_g da barra e da energia potencial elástica U_e da mola. A energia potencial gravítica depende da altura do centro de massa em relação a um plano de referência. Fazendo passar

esse plano pela extremidade fixa da mola, tem-se $U_g = -Mg\left(h + \frac{L}{2}\cos\theta\right)$. A energia potencial elástica da mola é $U_e = \frac{1}{2}k\left(h - l_0\right)^2$.

Finalmente, a lagrangeana é

$$L = \frac{1}{2}M\dot{h}^2 - \frac{1}{2}ML\dot{\theta}\,\dot{h}\sin\theta + \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + Mg\left(h + \frac{L}{2}\cos\theta\right) - \frac{1}{2}k\left(h - l_0\right)^2$$

Princípio da acção mínima

De acordo com o princípio da acção mínima, também conhecido como princípio de Hamilton, a evolução do sistema, ou seja $\boldsymbol{q}(t)$, entre dois instantes t_1 e t_2, desde uma posição $\boldsymbol{q}(t_1)$ até $\boldsymbol{q}(t_2)$, é tal que

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)dt$$

toma o mínimo valor possível. Este integral é designado **acção**.

Equações de Lagrange

É possível mostrar que a minimização da acção conduz a um conjunto de equações diferenciais conhecidas por equações de Lagrange. Para um sistema com *s* graus de liberdade e coordenadas generalizadas $q_1, q_2, ..., q_s$, estas equações são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,, \qquad i = 1, 2, ..., s$$

Este é um sistema de *s* equações diferenciais de segunda ordem, habitualmente por **equações diferenciais de movimento**. A resolução destas equações permite determinar $\boldsymbol{q}(t)$, ou seja, as equações da trajectória do sistema, sendo para tal necessário indicar 2*s* condições fronteira.

Estas equações são aplicáveis quando no sistema apenas actuam forças conservativas. Contudo, elas podem ser generalizadas para incluir o efeito de forças não conservativas. O tratamento desta última situação sai fora do âmbito deste curso.

Equações de movimento

Neste caso existem duas equações de movimento, uma associada ao parâmetro *h* e outra a *θ*. Calculando

$$\frac{\partial L}{\partial h} = Mg - k\left(h - l_0\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = M\dot{h} - \frac{ML}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = M\ddot{h} - \frac{ML}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{ML}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta$$

e substituindo em $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial L}{\partial h} = 0$, obtém-se a equação de movimento associada a *h*,

$$M\ddot{h} = \frac{ML}{2}\ddot{\theta}\sin\theta + \frac{ML}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + Mg - k\left(h - l_0\right).$$

Por outro lado, tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{ML}{2}\dot{\theta}\,\dot{h}\cos\theta - \frac{MgL}{2}\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta} - \frac{ML}{2}\dot{h}\sin\theta$$

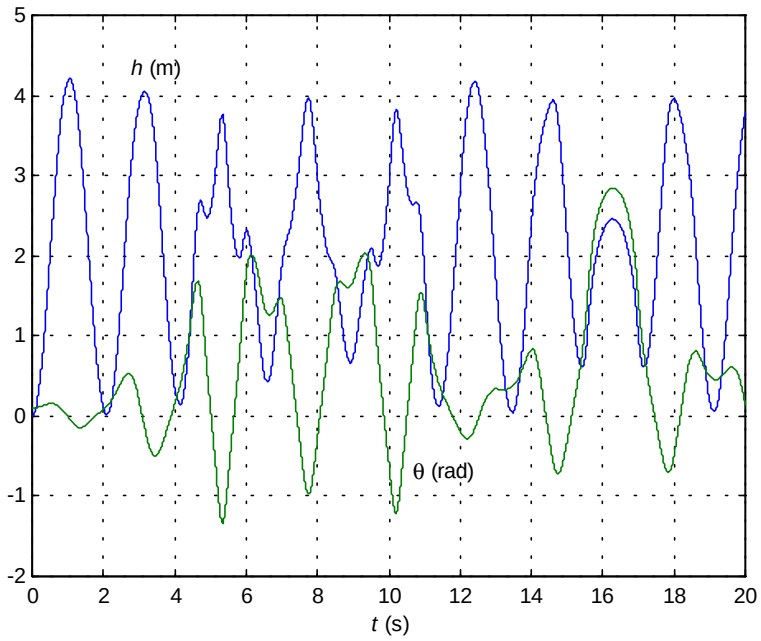
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{ML}{2}\ddot{h}\sin\theta - \frac{ML}{2}\dot{h}\dot{\theta}\cos\theta$$

De $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ resulta a equação de movimento associada a *θ*

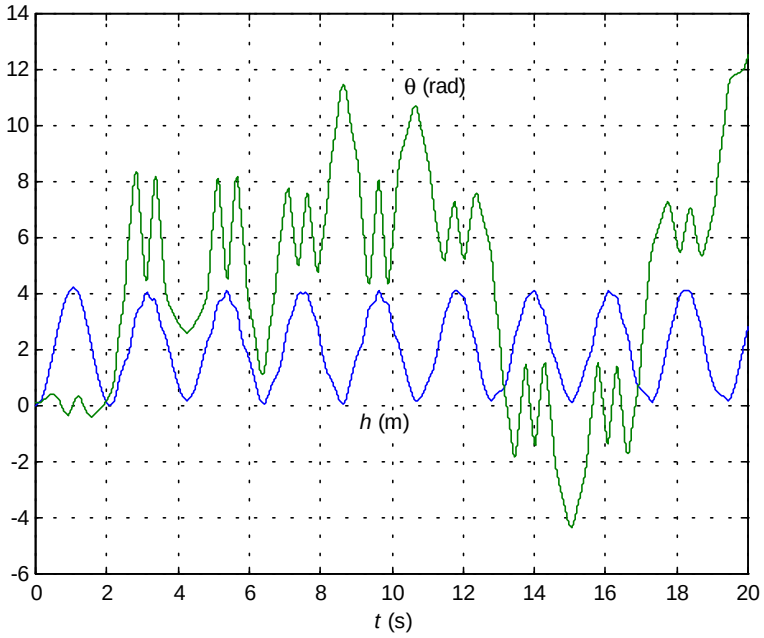
$$\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} = \frac{ML}{2}\ddot{h}\sin\theta - \frac{MgL}{2}\sin\theta\,.$$

Nas figuras seguintes apresenta-se a evolução das coordenadas generalizadas do sistema para diferentes valores do comprimento da barra *L* e da constante da mola *k*. Em todas as situações considerou-se que *M* = 1 kg, l_0 = 1 m e g = 10 m/s^2.

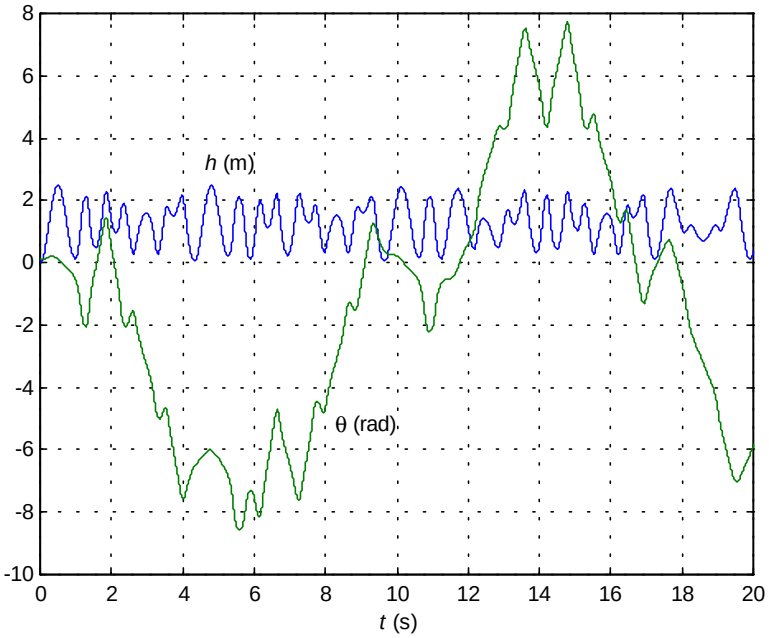
Caso I: $L = 2$ m , $k = 9$ kg/s^2



Caso II: $L = 0.4$ m , $k = 9$ kg/s^2



Caso III: $L = 2$ m , $k = 40$ kg/s^2



Bibliografia

L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Butterworth-Heinemann, 1976.

G. R. Fowles, *Analytical Mechanics*, CBS International Edition, 1986.

C. Espain Oliveira, *Introdução à Mecânica Clássica - apontamentos da disciplina*, FEUP, 2001.