Espaços vectoriais com produto interno

1. Produto interno : definição e propriedades

Seja E um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Definição : Chama-se *forma linear* a toda a aplicação linear $\varphi : E \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K}$ é visto como um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$).

Exemplo 8: $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, x_2) \mapsto \varphi(x) = x_1 + x_2$$

é uma forma linear. (Verifique!).

Definição : Uma aplicação $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ diz-se uma *forma bilinear*, se verifica as seguintes propriedades:

(1) *Linearidade relativamente ao 1º argumento*, i.e.:

$$\varphi(\alpha x + \beta x', y) = \alpha\,\varphi(x, y) + \beta\,\varphi(x', y) \qquad \forall x, x', y \in E \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

(2) *Linearidade relativamente ao 2º argumento*, i.e.:

$$\varphi(x, \alpha y + \beta y') = \alpha\,\varphi(x, y) + \beta\,\varphi(x, y') \qquad \forall x, y, y' \in E \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Exemplo 9: $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\varphi_i : E \times E \to \mathbb{K}$ $(i=1,2)$,

$$\varphi_1(x,y) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$$
$$\varphi_2(x,y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

$x = (x_1, x_2)$
$y = (y_1, y_2)$

φ_1 não é uma forma bilinear ; φ_2 é uma forma bilinear. (Verifique!).

Definição: Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, diz-se que $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ é uma forma sesquilinear caso satisfaça as seguintes propriedades:

(1) Linearidade relativamente ao 1º argumento.

(2) Semi-linearidade relativamente ao 2º argumento, i.e.:

$$\varphi(x, \alpha y + \beta y') = \bar{\alpha}\,\varphi(x,y) + \bar{\beta}\,\varphi(x,y') \qquad \forall x, y, y' \in E \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Observação: Uma vez que para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\bar{\alpha} = \alpha$ e $\bar{\beta} = \beta$, se o corpo $\mathbb{K}$ for igual a $\mathbb{R}$ a propriedade (2) da definição anterior é equivalente à linearidade relativamente ao 2º argumento. Assim:

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: φ é uma forma bilinear

$\Leftrightarrow$

φ é uma forma sesquilinear □

Exemplo 1º $E = \mathbb{C}$ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$(x, y) \rightsquigarrow \bar{y}x$$

é uma forma sesquilinear.

Uma forma sesquilinear φ é <u>hermítica</u> se $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$ $\forall x, y \in E$. Diz-se que uma forma sesquilinear hermítica φ é <u>definida positiva</u> se $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}^+$ $\forall x \in E \setminus \{0\}$.

<u>Definição</u>: Seja E um espaço vectorial real ou complexo (i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$); $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ é um <u>produto interno</u> se φ é uma forma sesquilinear hermítica definida positiva.

<u>Observação</u>: No caso de E ser um espaço vectorial real, como já foi mencionado, a sesquilinearidade é equivalente à bilinearidade. Além disso, dado que $\varphi(y,x) \in \mathbb{R}$, temos que $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)} \iff \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$, e a hermiticidade é equivalente à <u>simetria</u>. Diz-se que uma forma é <u>simétrica</u> se $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ $\forall x, y \in E$. Portanto, um <u>produto interno</u> num espaço vectorial <u>real</u> é uma <u>forma bilinear simétrica definida positiva</u> □

<u>Notação</u>: Se φ é um produto interno denotamos $\langle x, y \rangle$ em vez de $\varphi(x,y)$.

Exemplos de produtos internos

(1) $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\langle x, y \rangle = x \cdot y$

(2) $E = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ com $\langle x, y \rangle = \overline{y}\, x$

(3) $E = \mathbb{C}^{n \times 1}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^{n \times 1} \times \mathbb{C}^{n \times 1} \to \mathbb{C}$ com $\langle U, V \rangle = V^* U$

onde $V^* := \overline{V}^T$.

(4) $E = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua} \}$; $I = [a, b]$ com $a < b$,
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ com $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$.

Definição : Um e.v. **unitário** é um espaço vectorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ munido de um produto interno. Um e.v. **euclidiano** é um espaço vectorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno.

Notação : O espaço vectorial E munido com o produto interno $\langle \, , \, \rangle$ é denotado por $(E, \langle \, , \, \rangle)$.

Definição : Dois vectores u, v de $(E, \langle \, , \, \rangle)$ dizem-se **ortogonais** se $\langle u, v \rangle = 0$. **Notação**: $u \perp v$.

Propriedades de um produto interno:

Seja $(E, <,>)$ um espaço vectorial com produto interno, com $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

P1: O vector nulo é ortogonal a todos os vectores de E.

Dem.: $\forall u \in E \quad <0_E, u> = <0.u, u> = 0<u,u> = 0.$

P2: $<u,u> = 0 \iff u = 0_E$

Dem.: "$\Leftarrow$" é uma consequência imediata de P1.

"$\Rightarrow$" $<u,u> = 0 \Rightarrow <u,u> \notin \mathbb{R}^+ \Rightarrow u = 0_E$

(uma vez que $<,>$ é definida positiva).

P3: **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$|<u,v>|^2 \leq <u,u>.<v,v> \qquad \forall u,v \in E$$

Demonstração: Seja $\lambda \in \mathbb{K}$; então:

$$0 \leq <\lambda u + v, \lambda u + v> = \lambda\bar{\lambda}<u,u> + \lambda<u,v> + \bar{\lambda}<v,u> + <v,v> =$$

$$|\lambda|^2<u,u> + \lambda<u,v> + \bar{\lambda}\overline{<u,v>} + <v,v>$$

$$= <u,u>\left(|\lambda|^2 + \lambda\frac{<u,v>}{<u,u>} + \bar{\lambda}\frac{\overline{<u,v>}}{<u,u>} + \frac{<v,v>}{<u,u>}\right) \quad \text{se } u \neq 0$$

$$\therefore \quad 0 \leq |\lambda|^2 + \lambda\frac{<u,v>}{<u,u>} + \bar{\lambda}\frac{\overline{<u,v>}}{<u,u>} + \frac{<v,v>}{<u,u>} \quad \text{pois } <u,u> \in \mathbb{R}^+$$

$$= \left(\bar{\lambda} + \frac{<u,v>}{<u,u>}\right)\underbrace{\left(\lambda + \frac{\overline{<u,v>}}{<u,u>}\right)}_{\overline{\left(\bar{\lambda} + \frac{<u,v>}{<u,u>}\right)}} + \frac{<v,v>}{<u,u>} - \frac{<u,v>\overline{<u,v>}}{<u,u>^2}$$

Tomando $\bar{\lambda} = -\dfrac{<u,v>}{<u,u>}$, a desigualdade anterior fica:

$$0 \leq \frac{<v,v>}{<u,u>} - \frac{<u,v>\overline{<u,v>}}{<u,u>^2} \iff \underbrace{<u,v>\overline{<u,v>}}_{|<u,v>|^2} \leq <u,u><v,v>$$

■

2. Norma euclidiana

Definição : Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ munido com produto interno $\langle , \rangle$. Dado $u \in E$ define-se a norma euclidiana de u como:

$$\|u\|_e = \sqrt{\langle u, u \rangle} .$$

Propriedades :

(1) $\|u\|_e \geq 0 \quad \forall u \in E \quad ; \quad \|u\|_e = 0 \iff u = 0_E .$

(2) $\|\lambda u\|_e = |\lambda| \, \|u\|_e \quad \forall u \in E , \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

(3) $\|u + v\|_e \leq \|u\|_e + \|v\|_e \quad \forall u, v \in E$

Dem. :

(1) A primeira parte é óbvia .

$$\|u\|_e = 0 \iff \sqrt{\langle u, u \rangle} = 0 \iff \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0_E .$$

(2) $$\|\lambda u\|_e = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle u, u \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle u, u \rangle}$$
$$= |\lambda| \sqrt{\langle u, u \rangle} = |\lambda| \, \|u\|_e .$$

(3) $$\|u+v\|_e^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$
$$= \|u\|_e^2 + \|v\|_e^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle$$

($\langle v, u \rangle \hookrightarrow \overline{\langle u, v \rangle}$; $\langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} \hookrightarrow 2 \, \mathrm{Re}(\langle u, v \rangle)$)

$$2 \, \mathrm{Re}(\langle u, v \rangle) \leq 2 \sqrt{\mathrm{Re}(\langle u, v \rangle)^2 + \mathrm{Im}(\langle u, v \rangle)^2}$$
$$= 2 \, |\langle u, v \rangle| \leq 2 \, \|u\|_e \, \|v\|_e$$

Portanto :

$$\|u+v\|_e^2 \leq \|u\|_e^2 + \|v\|_e^2 + 2\|u\|_e\|v\|_e = (\|u\|_e + \|v\|_e)^2$$

$$\Leftrightarrow \|u+v\|_e \leq \|u\|_e + \|v\|_e \quad \blacksquare$$

Num espaço vectorial **real** $(E, <,>)$ munido de um produto interno podemos definir a noção de <u>ângulo entre os vectores $u, v \in E$</u>, que denotaremos por $\measuredangle(u,v)$.

$$\measuredangle(u,v) \text{ é tal que } \cos \measuredangle(u,v) := \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|_e \|v\|_e}$$

Note que se $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$ o ângulo entre dois vectores de E definido acima coincide com a noção geométrica de ângulo.

<u>Exemplo 11</u> $E = \{$ polinómios de coeficientes reais com grau não superior a $4\}$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$E = \{ a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}.$$

$$<\ ,\ > : E \times E \to \mathbb{R}$$

$$\langle a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \rangle := \sum_{i=0}^{4} a_i b_i$$

$$\| a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \|_e = \sqrt{\sum_{i=0}^{4} a_i^2}$$

Consideremos os elementos $u = x^2 + 1$ e $v = 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - x + 4$.
Então:

$$\|u\|_e = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|v\|_e = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{55}$$

$$\langle u, v \rangle = 0.2 + 0.3 + 1.5 + 0.(-1) + 1.4 = 5 + 4 = 9$$

$$\cos \measuredangle (u, v) = \frac{9}{\sqrt{2}\sqrt{55}} = \frac{9}{\sqrt{110}}$$

$$\measuredangle (u, v) = \text{arc cos} \frac{9}{\sqrt{110}} \qquad \square$$

Exercício 12 :

Mostre que, no exemplo anterior, E é isomorfo a $\mathbb{R}^5$. Qual é o produto interno em $\mathbb{R}^5$ correspondente ao produto interno definido em E ?

3. Espaços vectoriais normados

Conforme mencionamos no §2 (pág. 36), a introdução de um produto interno num espaço vectorial permite definir uma norma, a norma euclidiana associada ao produto interno considerado.
Convém no entanto notar que o conceito de norma é independente do de produto interno, no sentido de que nem todas as normas estão associadas a um produto interno.

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição: Uma norma é uma função $\|.\| : E \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica as seguintes condições.

(i) Positividade $\quad \|u\| > 0 \quad \forall u \in E \setminus \{0_E\}$
$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$

(ii) Homogeneidade $\quad \|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall u \in E$

(iii) Desigualdade triangular

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad \forall u, v \in E$$

Exercício:

Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno definido em E, e $\|\cdot\|_e$ a norma euclidiana associada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Mostre que $\|.\|_e$ é uma norma no sentido da definição anterior.

Exemplos de normas

(1) Em $\mathbb{R}^n$: $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} := u$$

Esta é uma norma euclidiana associada ao produto interno usual em $\mathbb{R}^n$: $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

(2) Em $\mathbb{R}^n$: $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|$$

(3) Em $\mathbb{R}^n$: $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$

$$\|u\|_\infty = \max \{ |u_1|, \ldots, |u_n| \}$$

As normas indicadas em (2) e (3) não são euclidianas □

Definição : Um <u>espaço vectorial normado</u> é um espaço vectorial E munido de uma norma $\|\cdot\|$.
Notação : $(E, \|\cdot\|)$.

No que se segue concentraremos a nossa atenção no estudo de espaços vectoriais munidos de um produto interno e da norma euclidiana correspondente.

4 Espaços vectoriais euclidianos e unitários

4.1. Propriedades

$(E, <,>)$ → espaço vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; $\| \ \|$ → norma euclidiana

P1 $\|u+v\| \geq |\,\|u\| - \|v\|\,| \quad \forall u, v \in E$

P2 $\forall v \in E \ \ \forall u \in E \setminus \{0_E\} \ \ \exists \lambda \in \mathbb{K} : \ v = \lambda u + w$

com $w \perp u$

P3 u e v são linearmente dependentes $\Leftrightarrow$

$|<u, v>| = \|u\| . \|v\|$

Demonstração:

(P1) $\|u\| = \|u+v-v\| \leq \|u+v\| + \|-v\| = \|u+v\| + \|v\|$

$\|v\| = \|u+v-u\| \leq \|u+v\| + \|-u\| = \|u+v\| + \|u\|$

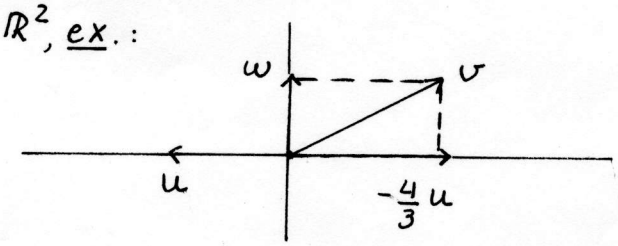
$\therefore$

$$\left.\begin{array}{l} \|u+v\| \geq \|u\| - \|v\| \\ \|u+v\| \geq \|v\| - \|u\| = -(\|u\| - \|v\|) \end{array}\right| \Leftrightarrow \|u+v\| \geq |\,\|u\| - \|v\|\,|$$

□

(P2) Interpretação: v pode ser decomposto como a soma de um vector colinear com u e de um vector ortogonal a u.

Em $\mathbb{R}^2$, ex.:



$v = -\frac{4}{3}u + w$

Dem.: Seja $\lambda := \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2}$ (note que λ está bem definido, uma vez que $u \neq 0_E$ e portanto $\|u\|^2 \neq 0$), e seja ainda $w = v - \lambda u$.

Vamos ver que $w \perp u$, i.e. que $\langle w, u\rangle = 0$.

$$\langle w, u\rangle = \langle v - \lambda u, u\rangle = \langle v, u\rangle - \lambda \langle u, u\rangle$$

$$= \langle v, u\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} \cdot \langle u, u\rangle = \langle v, u\rangle - \langle v, u\rangle = 0$$

↳ pois $\langle u, u\rangle = \|u\|^2$

Temos então que:

$$v = \lambda u + w \quad \text{com} \quad w \perp u \qquad \square$$

(P3) "$\Rightarrow$" Se $u = 0_E$ ou $v = 0_E$, temos que $\langle u, v\rangle = 0$ e $\|u\|.\|v\| = 0$ e portanto a igualdade $|\langle u, v\rangle| = \|u\|.\|v\|$ verifica-se.

Suponhamos agora que $u \neq 0_E$ e $v \neq 0_E$. Então a **dependência** linear de u e v é equivalente à existência de $\lambda \neq 0$ tal que $u = \lambda v$.

Deste modo $|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda|\,|\langle v, v\rangle| = |\lambda|\,\|v\|^2$

$$= \underbrace{|\lambda|\|v\|}_{\|u\|}\|v\| = \|u\|\,\|v\|$$

Portanto: u, v linearmente dependentes $\Rightarrow$ $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$

"$\Leftarrow$" Se $u = 0_E$, u e v são linearmente dependentes.

Suponhamos que $u \neq 0_E$, e que $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$. Vamos ver que $v = \lambda u$ com $\lambda = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2}$, ou, equivalentemente que $\langle v - \lambda u, v - \lambda u\rangle = 0$.

$$\langle v - \lambda u, v - \lambda u\rangle = \langle v, v\rangle - \lambda\langle v, u\rangle - \bar{\lambda}\langle u, v\rangle + |\lambda|^2\langle u, u\rangle$$

$$= \langle v, v\rangle - 2\,\mathrm{Re}\,\lambda\langle v, u\rangle + \lambda^2\|u\|^2 = \|v\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\overline{\langle v, u\rangle}\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} + |\lambda|^2\|u\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \frac{2|\langle v, u\rangle|\,|\langle v, u\rangle|}{\|u\|^2} + |\lambda|^2\|u\|^2$$

$$= \|v\|^2 + |\lambda|^2\|u\|^2 - 2\frac{\|u\|^2\|v\|^2}{\|u\|^2} = |\lambda|^2\|u\|^2 - \|v\|^2$$

$$= \frac{|\langle v, u\rangle|^2}{\|u\|^4}\|u\|^2 - \|v\|^2 = \frac{\|u\|^4\|v\|^2}{\|u\|^4} - \|v\|^2 = 0$$

(*)

(*) já que $|\langle v, u\rangle|^2 = |\langle u, v\rangle|^2$ e $|\langle u, v\rangle|^2 = (\|u\|\,\|v\|)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$.

↳ por hipótese ↗

Concluimos então que $\langle v-\lambda u, v-\lambda u\rangle = 0 \quad \therefore \quad v-\lambda u = 0$

$\therefore \quad v = \lambda u$ e portanto v e u são linearmente dependentes ■

Motivados pela propriedade P2 introduzimos a seguinte

Definição: Sejam $u \in E\setminus\{0_E\}$ e $v \in E$. A projecção ortogonal de v sobre u é dada por:

$$proj_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2}\, u \ .$$

4.2 Bases ortonormadas (ou ortonormais) e o método de ortogonalização de Gram-Schmidt

4.2.1. Seja $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ um espaço vectorial unitário ou euclidiano com dimensão n.

Definição: Diz-se que $B = (e_1, \ldots, e_n)$ é uma base ortonormada de E (ou base ortonormal de E) se: $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$ onde o símbolo de Kronecker δ_{ij} é definido do seguinte modo:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \ .$$

Portanto, todos os elementos de uma base ortonormada têm norma euclidiana unitária e são ortogonais dois a dois.

Será que todo o espaço unitário / euclidiano possui uma base ortonormada ?

Dada uma base qualquer de E, $B = (e_1, \ldots, e_n)$, não é difícil transformar esta base de modo a que todos os elementos tenham norma euclidiana unitária. Basta para tal dividir cada e_j pela sua norma $\|e_j\|$ $(j = 1, \ldots, n)$, obtendo-se assim uma nova base $B' = (u_1, \ldots, u_n)$, com $u_j = \frac{e_j}{\|e_j\|}$ $(j = 1, \ldots, n)$, tal que $\|u_j\| = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Será possível construir a partir de B uma base de elementos ortogonais dois a dois ?

A resposta a esta questão é afirmativa. Tal base pode ser obtida através do seguinte processo.

4.2.2. Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

$(E, \langle , \rangle)$ espaço vectorial com produto interno ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

$\dim E = n$.

$B = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E.

Defina-se $\mu_1 := e_1$

Para $i = 2, \ldots, n$:

defina-se $\mu_i := e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \text{proj}_{\mu_j}(e_i)$

Lema : $M = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ é uma base de E constituída por vectores ortogonais dois a dois.

Demonstração:

Vamos primeiro ver que os vectores $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são não nulos e ortogonais dois a dois. Mais tarde provaremos que isto implica a independência linear dos μ's (e portanto o facto de M ser uma base).

Uma vez que $\mu_1 = e_1$ e e_1 é um elemento de uma base, $\mu_1 \neq 0_E$.

$\mu_2 = e_2 - \text{proj}_{\mu_1} e_2 = e_2 - \text{proj}_{e_1} e_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 \neq 0_E$ pois

e_1 e e_2 são elementos da mesma base e portanto linearmente independentes. Além disso $\mu_2 \perp \mu_1$ (verifique que $\langle \mu_2, \mu_1 \rangle = 0$).

Suponhamos agora que $\mu_1, \ldots, \mu_k$ são não nulos e ortogonais dois a dois. Vamos ver que o mesmo é válido para $\mu_1, \ldots, \mu_k, \mu_{k+1}$.

$$\mu_{k+1} = e_{k+1} - \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1}, \mu_j \rangle}{\|\mu_j\|^2} \mu_j}_{\in \mathcal{L}(\{e_1, \ldots, e_k\})}$$

pelo modo como os μ_j $(j = 1, \ldots, k)$ foram definidos (Verifique!)

$\therefore \mu_{k+1} = 0_E \Leftrightarrow e_{k+1} \in \mathcal{L}(\{e_1, \ldots, e_k\})$, o que é absurdo pois $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}$ são linearmente independentes.

$\therefore \mu_{k+1} \neq 0_E$.

Uma vez que supusemos que $\mu_1, \ldots, \mu_k$ são ortogonais dois a dois, basta agora ver que:

$$\mu_{k+1} \perp \mu_i \qquad i = 1, \ldots, k.$$

$$\langle u_{k+1}, u_i \rangle = \langle e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1}, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j \, , \, u_i \rangle$$

$$= \langle e_{k+1}, u_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1}, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \underbrace{\langle u_j, u_i \rangle}_{=0 \text{ se } j \neq i}$$

$$= \langle e_{k+1}, u_i \rangle - \frac{\langle e_{k+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_i \rangle$$

$$= \langle e_{k+1}, u_i \rangle - \langle e_{k+1}, u_i \rangle = 0$$

Portanto concluimos que:

$u_1, \ldots, u_n$ são vectores não nulos e ortogonais dois a dois.

Finalmente vamos mostrar que estes n vectores são linearmente independentes.

Suponhamos que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

Então

$$0 = \langle \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \, , \, u_1 \rangle = \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle u_j, u_1 \rangle}_{0}$$

$\therefore \quad 0 = \alpha_1 \|u_1\|^2$ (pela ortogonalidade)

Isto equivale a dizer que $\alpha_1 = 0$ ou $u_1 = 0_E$. Como u_1 é não nulo, terá que ser $\alpha_1 = 0$.

Analogamente se prova que todos os outros coeficientes α_j $(j = 2, \ldots, n)$ da combinação linear acima indicada também são necessariamente nulos. Isto significa que $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes ■

Observação: Como já foi mencionado, $N = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right)$ é uma base cujos elementos têm norma euclideana unitária (i.e., estão normalizados). Tal como os elementos de M, os elementos de N são ortogonais dois a dois. Portanto N é uma base ortonormada.

Exemplo 13

Sejam $E = \mathbb{R}^3$, $\langle , \rangle$ o produto interno usual, e $B = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$ com $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 1, 2)$.

Para construir uma base ortonormada N a partir de B tomemos:

$$u_1 := e_1 = (1, 2, 1)$$

$$u_2 := e_2 - \text{proj}_{u_1} e_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = (0, 1, 0) - \frac{2}{1+4+1} (1, 2, 1)$$

$$= (0, 1, 0) - \frac{1}{3} (1, 2, 1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

$$u_3 := e_3 - \text{proj}_{u_1} e_3 - \text{proj}_{u_2} e_3 = (0, 1, 2) - \frac{\langle (0,1,2), (1,2,1) \rangle}{1+4+1} (1, 2, 1)$$

$$- \frac{\langle (0,1,2), (-1/3, 1/3, -1/3) \rangle}{1/9 + 1/9 + 1/9} (-1/3, 1/3, -1/3)$$

$$= (0, 1, 2) - \frac{2}{3} (1, 2, 1) + 1.(-1/3, 1/3, -1/3)$$

$$= (-1, 0, 1).$$

Definimos $M := (u_1, u_2, u_3) = \left((1,2,1), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), (-1, 0, 1)\right)$.

Os elementos da base M são ortogonais dois a dois, mas não têm norma unitária. Para obter uma base ortonormada N basta dividir cada elemento de M pela sua norma.

$$N = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}\right) = \left(\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)\right)$$

4.2.3. Interpretação matricial do método de Gram - Schmidt

Recordando o algoritmo da pág. 42 bem como a definição de $\text{proj}_u(v)$, a relação entre os elementos de uma base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E e os elementos $\mu_1, \ldots, \mu_n$ obtidos pela ortogonalização de B é dada por:

$$\begin{cases} e_1 = \mu_1 \\ e_2 = \mu_2 + \dfrac{\langle e_2, \mu_1 \rangle}{\langle \mu_1, \mu_1 \rangle} \mu_1 \\ \vdots \\ e_n = \mu_n + \dfrac{\langle e_n, \mu_1 \rangle}{\langle \mu_1, \mu_1 \rangle} \mu_1 + \cdots + \dfrac{\langle e_n, \mu_{n-1} \rangle}{\langle \mu_{n-1}, \mu_{n-1} \rangle} \mu_{n-1} \end{cases}$$

Assim, em termos de representações matriciais numa base arbitrária C de E:

$$\underbrace{[(e_1)_C | (e_2)_C | \cdots | (e_n)_C]}_{R} = \underbrace{[(\mu_1)_C | (\mu_2)_C | \ldots | (\mu_n)_C]}_{\Omega} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\langle e_2, \mu_1 \rangle}{\langle \mu_1, \mu_1 \rangle} & \cdots & \frac{\langle e_n, \mu_1 \rangle}{\langle \mu_1, \mu_1 \rangle} \\ 0 & 1 & & \frac{\langle e_n, \mu_2 \rangle}{\langle \mu_2, \mu_2 \rangle} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \frac{\langle e_n, \mu_{n-1} \rangle}{\langle \mu_{n-1}, \mu_{n-1} \rangle} \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{T}}$$

i.e. : $\boxed{R = \Omega \tilde{T}}$

matriz triangular superior

Como já foi mencionado, $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ é uma base ortogonal, mas não normalizada. A normalização de M faz-se dividindo cada um dos seus elementos pela sua norma.
Seja $N = \left(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}, \dots, \frac{\mu_n}{\|\mu_n\|} \right)$. A representação matricial dos elementos de N é então dada por:

$$\left[\left(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|} \right) | \dots | \left(\frac{\mu_n}{\|\mu_n\|} \right) \right] = \underbrace{[(\mu_1) | \dots | (\mu_n)]}_{\Omega} \underbrace{\begin{bmatrix} \|\mu_1\|^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|\mu_n\|^{-1} \end{bmatrix}}_{D^{-1}}$$

matriz diagonal

Consequentemente:

$$\mathcal{R} = \underbrace{\Omega D^{-1}}_{U} \underbrace{D \tilde{T}}_{T} \iff \boxed{\mathcal{R} = U\,T}$$

U: matriz invertível
T: matriz triangular superior

A matriz U tem por colunas as representações matriciais dos elementos de N, que constituem uma base de E ortonormal relativamente a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Veremos adiante que esta propriedade se pode exprimir de uma forma bastante simples em termos matriciais.

4.3. Subespaços ortogonais

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espaço vectorial com produto interno ; $\dim E = n$.

$F, G \subseteq E$

Definição : Diz-se que F é ortogonal a G (notação : $F \perp G$) se

$$x \perp y \quad \forall x \in F, \forall y \in G .$$

Isto é, dois subconjuntos de E são ortogonais se todo o elemento de um é ortogonal a qualquer elemento do outro.

Dado um subconjunto $S \subseteq E$, definimos o ortogonal de S (notação : $S^\perp$) como o conjunto formado por todos os elementos de E que são ortogonais a qualquer elemento de S, i.e. :

$$S^\perp := \{ u \in E \mid u \perp v \quad \forall v \in S \}$$

Proposição :

1. $\forall S \subseteq E$: $S^\perp$ é um subespaço de E

2. $\forall F$ subespaço de E : $E = F \oplus F^\perp$

Dem. :

(1) Basta mostrar que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in S^\perp : \alpha x + \beta y \in S^\perp$

$$\alpha x + \beta y \in S^\perp \iff \langle \alpha x + \beta y, v \rangle = 0 \quad \forall v \in S$$

$$\iff \alpha \underbrace{\langle x, v \rangle}_{=0} + \beta \underbrace{\langle y, v \rangle}_{=0} = 0 \quad \forall v \in S$$

pois $x \in S^\perp$ pois $y \in S^\perp$

Portanto $\alpha x + \beta y \in S^\perp$ □

(2) Seja F um subespaço de E.
Vamos primeiro ver que $F + F^\perp = F \oplus F^\perp$, ou equivalentemente que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
Suponhamos então que $x \in F \cap F^\perp$. Atendendo à definição de ortogonal (e uma vez que $x \in F$ e $x \in F^\perp$), isto implica que $\langle x, x \rangle = 0$, ou seja $x = 0_E$.
Portanto $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

É evidente que $F \oplus F^\perp = F + F^\perp \subseteq E$. Para provar que $F \oplus F^\perp = E$ basta provar que $E \subseteq F \oplus F^\perp$.
Seja $(e_1, \ldots, e_p)$ uma base ortonormada de F. Dado $v \in E$, consideremos (a projecção ortogonal de v sobre F):

$$u := \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_p \rangle e_p \in F .$$

Vamos ver que $v - u \in F^\perp$. Para tal basta verificar que $\langle v - u, e_i \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, p$.

$$\langle v - u, e_i \rangle = \langle v - \sum_{j=1}^{p} \langle v, e_j \rangle e_j, e_i \rangle = \langle v, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{p} \langle v, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle$$

$$= \langle v, e_i \rangle - \langle v, e_i \rangle = 0$$

↳ pois $\langle e_j, e_i \rangle = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$.

Concluimos deste modo que:

$$v = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{(v - u)}_{\in F^\perp} \in F + F^\perp = F \oplus F^\perp ,$$

i.e. $E \subseteq F \oplus F^\perp$. Portanto $E = F \oplus F^\perp$ ■

5 Matriz de um produto interno

5.1. Definição

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e.v. unitário (ou euclidiano) ; $\dim E = n$.

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E.

Definamos a matriz :

$$J := \begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_2, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_1 \rangle \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_1, e_n \rangle & \langle e_2, e_n \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{bmatrix}$$

Afirmação : $\forall u, v \in E$

$$\langle u, v \rangle = (v)_{\mathcal{B}}^{*} \, J \, (u)_{\mathcal{B}}$$

ou

$$\boxed{\langle u, v \rangle = V^* J U}$$

com $V := (v)_{\mathcal{B}}$ e $U := (u)_{\mathcal{B}}$.

Notação : Para $V \in \mathbb{C}^n$

$V^* = \overline{V}^T$.

Dem. :

$$u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n$$
$$v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$$

$$\langle u, v \rangle = \langle u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n, \, v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n \rangle$$

$$= \bar{v}_1 u_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \bar{v}_2 u_1 \langle e_1, e_2 \rangle + \cdots + \bar{v}_n u_1 \langle e_1, e_n \rangle$$
$$+ \cdots + \bar{v}_1 u_n \langle e_n, e_1 \rangle + \bar{v}_2 u_n \langle e_n, e_2 \rangle + \cdots +$$
$$+ \bar{v}_n u_n \langle e_n, e_n \rangle$$

$$= \underbrace{[\bar{v}_1 | \bar{v}_2 | \ldots | \bar{v}_n]}_{(v)_{\mathcal{B}}^{*}} \underbrace{\begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_1 \rangle \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_2 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_1, e_n \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{bmatrix}}_{J} \overbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}}^{(u)_{\mathcal{B}}}$$

■

Decorre da afirmação anterior que, uma vez fixada a base B, a matriz J caracteriza completamente o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Dizemos portanto que J é a <u>matriz deste produto interno</u> na base B.

<u>Observação</u>:
Se a base B fôr uma base ortonormada (relativamente a $\langle \cdot, \cdot \rangle$), $J = I$, i.e. a matriz do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a identidade.
Neste caso $\langle u, v \rangle = V^* U$ (onde, como é usual, V e U designam as representações matriciais de v e u na base B). Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle u, v \rangle = V^T U$. □

<u>Observação</u>:
A matriz J é tal que $J = J^*$, i.e. é uma <u>matriz hermítica</u>. (verifique!).
Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, J é <u>simétrica</u>, i.e. $J = J^T$. □

5.2. <u>Mudança de base</u>

Sejam $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ uma nova base de E e S a matriz de mudança de base de B para B'.
Denotemos por J' a matriz do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na base B'.
Qual a relação entre J' e J ?

Notemos que, para todo o par u, v de elementos de E, o produto interno $\langle u, v \rangle$ é dado por:

$$\langle u, v \rangle = V^* J U = (V')^* J' U'$$

onde V' e U' denotam as representações matriciais de v e u na base B', respectivamente.

Uma vez que $V' = SV$ e $U' = SU$:

$$\langle u, v \rangle = V^* J U = (SV)^* J' (SU) = V^* (S^* J' S) U.$$

Portanto $V^* J U = V^* (S^* J' S) U \quad \forall V, U \in \mathbb{K}^n$,
o que implica que:

$$J = S^* J' S \qquad \text{(verifique!)}$$

ou equivalentemente:

$$J' = (S^{-1})^* J (S^{-1})$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $J' = (S^{-1})^T J (S^{-1})$:

Notação: Duas matrizes complexas A' e A dizem-se congruentes se $A' = P^* A P$ para alguma matriz invertível P.
No caso real, A e A' são congruentes se: $A' = P^T A P$.

5.3. Observações

Observação 5.3.1.

Vimos em 5.1 que a matriz J de um produto interno é uma matriz hermítica / simétrica. Além disso não é difícil verificar que J é definida positiva (i.e. $X^* J X > 0 \quad \forall X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$).
Reciprocamente, fixada uma base para E, dada uma matriz hermítica definida positiva existe um (e um só) produto interno que lhe está associado.
Exercício: Indique qual!

Observação 5.3.2

Dada uma matriz hermítica definida positiva J, dizemos que a matriz U é J-ortonormada/-unitária se:

$$U^* J U = I$$

Dizemos que U é ortonormada ou unitária se:

$$U^* U = I \ ,$$

i.e. se é J-ortonormada com $J = I$.
No caso de U ser real teremos $U^T J U = I$ e $U^T U = I$ respectivamente.

Nota: U é J-ortonormada se as suas colunas representam uma base ortonormada relativamente a um produto interno com representação matricial J.

Observação 5.3.3

Como consequência da interpretação matricial do método de Gram-Schmidt (cf. 3.2.3, págs. 46-47) vimos que qualquer matriz invertível R se pode decompor como um produto

$$R = UT$$

com T triangular superior e $U = [(u_1) | \ldots | (u_n)]$, onde os elementos de E $u_1, \ldots, u_n$ são ortonormados i.e.

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots, n \ .$$

Denotando por J a matriz do produto interno $\langle ., . \rangle$ temos pois que: $U^* J U = I$, i.e., U é J-ortonormada.
Assim, concluimos que:

$\forall\, R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ invertível $\forall\, J \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermítica e def. positiva $\exists\, U$ J-ortonormada $\exists\, T$ triangular sup.:

$$\boxed{R = UT}$$

Exemplo 14

Sejam $R = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2i & 4 \end{bmatrix}$, $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Definamos primeiro $u_1' := \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$ $u_2' := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{[1 \quad -2i] J_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}{[1 \quad -2i] J_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$

i.e., $u_2' = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} + \frac{8}{5} i \\ \frac{4}{5} - \frac{6}{5} i \end{bmatrix}$

Sejam agora $u_1 := \frac{u_1'}{\|u_1'\|_{J_1}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2i/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ e

$u_2 := \frac{u_2'}{\|u_2'\|_{J_1}} = \begin{bmatrix} (12+8i)/\sqrt{260} \\ (4-6i)/\sqrt{260} \end{bmatrix}$

$$R = [u_1' \quad u_2'] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & (3-8i)/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T'} = \underbrace{[u_1 \quad u_2]}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{260}/5 \end{bmatrix} T'}_{T}$$

$\therefore$

$$R = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & (12+8i)/\sqrt{260} \\ 2i/\sqrt{5} & (4-6i)/\sqrt{260} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & (3-8i)/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{260}/5 \end{bmatrix}}_{T}$$

$U \rightsquigarrow$ ortonormada (J_1-)

$T \hookrightarrow$ triangular superior.

Exercício: Efectue uma decomposição análoga agora com U J_2-unitária (onde J_2 é dada acima).

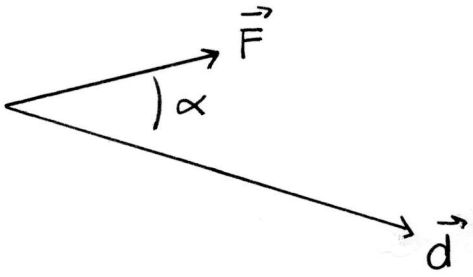
6. Aplicação do produto interno ao cálculo do trabalho realizado por uma força

Consideremos uma força $\vec{F}$ no espaço tridimensional que efectua um deslocamento rectilíneo $\vec{d}$. Tanto $\vec{F}$ como $\vec{d}$ podem ser encarados como elementos do espaço vectorial $E = \mathbb{R}^3$, munido do produto interno usual $\langle u, v \rangle = v^T u$.

Como sabemos através das leis da Dinâmica, o trabalho realizado por $\vec{F}$ no deslocamento $\vec{d}$ é dado por:

$$\tau = F \cdot d \cos\alpha$$

, onde F é a intensidade de $\vec{F}$, d o comprimento de $\vec{d}$, e α é o ângulo formado pelas direcções de $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

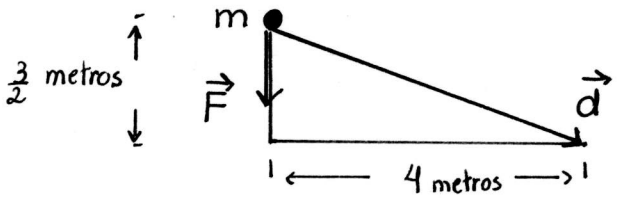


Formulando esta igualdade em termos do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vem que:

$$\tau = \langle \vec{F}, \vec{d} \rangle$$

Exemplo:

Qual o trabalho realizado pelo peso $\vec{F}$ de uma massa m de 1kg quando esta se desloca desde o topo até à base da rampa indicada na figura?



$$\vec{F} = (0, 0, -mg) = (0, 0, -g)$$

$$\vec{d} = (0, 4, -\tfrac{3}{2})$$

↯ aceleração da gravidade

$$\tau = \langle (0, 0, -g), (0, 4, -\tfrac{3}{2}) \rangle = \frac{3}{2} g \text{ (Newton} \times \text{metro)}$$

$$\tau = \frac{3}{2} g \text{ (Joule)} \quad \blacksquare$$