Observabilidade

Definição

(A, B, C, D) é um modelo de espaço de estados observável se se verificar a seguinte condição:

Dadas duas soluções $(u^i, x^i, y^i), i = 1, 2$, se $\exists t^* > 0$ t.q. $u^1 \equiv u^2$, $y^1 \equiv y^2$ em $[0, t^*]$ então $x^1(0) = x^2(0)$.

Interpretação: Um sistema é observável se o estado inicial puder ser obtido ("observado") a partir do conhecimento da entrada e da saída.

Nota: Atendendo à linearidade do sistema, a condição da definição pode ser substituída por:

Se $\exists t^* > 0$ t.q. $u \equiv 0$, $y \equiv 0$ em $[0, t^*]$ então $x(0) = 0$.

Caracterização da observabilidade

Defina-se a matriz de observabilidade $\mathcal{O}(C,A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

Teorema (A,B,C,D) é um sistema observável $\Leftrightarrow$ $\boxed{\operatorname{rank}\mathcal{O}(C,A) = n}$

Demonstração

(A,B,C,D) é um sistema observável $\Leftrightarrow$

$\left\{Ce^{At}x(0) = 0, t \in [0,t^*] \Rightarrow x(0) = 0\right\} \Leftrightarrow$

$\left\{CA^k x(0) = 0, k = 0,1,\ldots \Rightarrow x(0) = 0\right\} \Leftrightarrow$

$\left\{CA^k x(0) = 0, k = 0,1,\ldots,n-1 \Rightarrow x(0) = 0\right\} \Leftrightarrow \ker\mathcal{O}(C,A) = \{0\}$

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}\mathcal{O}(C,A) = n$

Dualidade entre observabilidade e controlabilidade

Sistema dual de $(A, B, C, D) \rightarrow (A^T, C^T, B^T, D^T)$

$$(\mathcal{O}(C, A))^T = \mathcal{C}(A^T, C^T)$$

Portanto $\boxed{(C, A) \text{ é observável} \Leftrightarrow (A^T, C^T) \text{ é controlável}}$

Consequências desta dualidade:

Teorema: **São equivalentes as seguintes afirmações:**

1. (C, A) é **observável**.
2. $W_o(t) := \int_0^t e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$ é **invertível** para todo $t > 0$.
3. $\text{rank}\, \mathcal{O}(C, A) = n$.
4. $\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n$ para todo o valor próprio λ de A.

Teorema:

Sejam (A, B, C, D) e $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$ dois sistemas algebricamente equivalentes. Então (C, A) é observável $\Leftrightarrow$ $(\bar{C}, \bar{A})$ é observável.

Outras consequências:

- **Decomposição de observabilidade de Kalman**

Seja (A, B, C, D) modelo de espaço de estados com (C, A) não observável.

Então existe uma matriz invertível P tal que o sistema $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D) = (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D)$ tem a seguinte estrutura.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \bar{C} = [C_1 \quad 0],$$ **onde**

- o par (C_1, A_{11}) é observável

A esta forma chama-se forma (escalonada) de observabilidade de Kalman

• Realizações observáveis para uma função de transferência

- Suponha que o sistema $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D$ está na forma escalonada de observabilidade de Kalman.

- Mostre que a função de transferência do sistema é dada por

$$T(s) = \bar{C}(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{B} + D = C_1(sI_r - A_{11})^{-1}B_1 + D$$

- Conclua que (A_{11}, B_1, C_1, D) é uma realização observável para a função de transferência do sistema.

• Realizações observáveis e controláveis para uma função de transferência

- Verifique que a aplicação de uma decomposição de observabilidade seguida de uma decomposição de controlabilidade permite obter uma realização observável e controlável para uma dada função de transferência, partindo de uma realização arbitrária dessa mesma função de transferência.