

## VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional

*Universidade de Évora*

*14 a 16 de Abril de 2003*

### RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO ENTRE IMAGENS DE OBJECTOS DEFORMÁVEIS

Raquel Ramos Pinho<sup>1</sup>, João Manuel R. S. Tavares<sup>2</sup>

#### RESUMO

Nesta comunicação é apresentada uma abordagem que, através da resolução da equação dinâmica de equilíbrio, permite que sejam determinadas imagens intermédias de duas imagens dadas, atendendo às propriedades físicas do material virtual utilizado na modelação.

A abordagem apresentada pressupõe a modelação física dos objectos representados nas imagens por intermédio do Método dos Elementos Finitos, e que foram estabelecidas correspondências entre alguns nodos por Análise Modal. Na comunicação são apresentadas a modelação utilizada, a metodologia considerada para a determinação dos emparelhamentos, os métodos numéricos usados na resolução numérica da equação de equilíbrio, as soluções encontradas para estimar de forma razoável o deslocamento, e velocidade iniciais, as cargas envolvidas na transformação, assim como os procedimentos empregues para resolver os problemas associados aos nodos não emparelhados com êxito por análise modal.

Este processo poderá ser aplicado entre imagens de objectos distintos, ou entre imagens de um objecto em instantes diferentes (por exemplo, para fazer a reconstrução tridimensional de objectos a partir de imagens bidimensionais).

#### 1. INTRODUÇÃO

Existindo já um vasto trabalho no âmbito do estabelecimento de correspondências entre pontos de imagens distintas, nem sempre a estimação do movimento das imagens é feita de forma coerente quer com as propriedades físicas dos objectos associados, quer com as forças aplicadas em alguns pontos dos mesmos. Devido às necessidades da visão computacional em estimar alterações na posição, na orientação e na forma dos objectos em estudo, pode ser utilizada uma formulação física para modelisar os objectos.

---

<sup>1, 2</sup> LOME – Laboratório de Óptica e Mecânica Experimental, DEMEGI, FEUP – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto. {[rrpinho@hotmail.com](mailto:rrpinho@hotmail.com), [tavares@fe.up.pt](mailto:tavares@fe.up.pt)}

<sup>2</sup> Professor Auxiliar, DEMEGI, FEUP – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto.

Tomando por base o trabalho realizado por Nastar (1994), Sclaroff (1995) e Tavares (2000), utilizamos a discretização dos objectos em causa via método dos elementos finitos pelo elemento finito isoparamétrico de Sclaroff, consideramos determinadas parte das correspondências nodais entre duas imagens, e calculadas as matrizes de massa e rigidez. Desta forma, representamos o alinhamento entre imagens dadas, de acordo com as restrições físicas dos objectos associados. Foi o nosso principal objectivo, através de uma simulação física, determinar e representar as deformações aplicadas em cada intervalo de tempo por intermédio da resolução da equação dinâmica de equilíbrio, sendo as equações do elemento finito integradas no tempo até que sejam satisfeitas as condições de paragem especificadas pelo utilizador. Para resolver a equação dinâmica de equilíbrio recorremos aos métodos da Diferença Central, de Newmark e da Sobreposição de Modos, e comparamos a eficácia e exactidão de cada um.

Uma vez que neste trabalho se pretende estimar o movimento de objectos em imagens, sem informações adicionais sobre as mesmas, são descritas as soluções encontradas para estimar, satisfatoriamente, as cargas aplicadas nos nodos emparelhados, o deslocamento inicial e a velocidade inicial.

Neste trabalho assumimos que poderão existir nodos que não são emparelhados por análise modal, portanto, é apresentada a solução encontrada para estimar as cargas aplicadas nestes nodos.

Na prática, o trabalho desenvolvido pode ser utilizado para fazer o *morphing* (transformação de um objecto noutra) segundo princípios físicos, a segmentação de objectos, a reconstrução de objectos tridimensionais a partir de alguns cortes bidimensionais... Este processo pode ser aplicado quer a objectos diferentes, quer a imagens distintas do mesmo objecto.

Esta comunicação está organizada segundo a ordem sequencial das ideias mencionadas. Assim, começamos por fazer uma breve descrição do elemento finito isoparamétrico de Sclaroff, seguindo-lhe a apresentação da solução utilizada para estabelecer as correspondências entre nodos por análise modal. No ponto seguinte é feita uma breve descrição dos métodos de integração utilizados. Após o que são descritas as soluções encontradas para estimar o deslocamento e a velocidade iniciais. É também descrita a solução adoptada para permitir a utilização de objectos com alguns nodos não emparelhados. De seguida, são apresentados alguns resultados experimentais. E, por último, são apresentadas algumas conclusões finais e perspectivas de desenvolvimentos futuros.

## 2. ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO DE SCLAROFF

Usando o método de Galerkin (ver, por exemplo, Bathe (1996)) para discretizar um dado objecto real, pode-se obter um sistema de funções de forma que relacionam o deslocamento de um único ponto com o deslocamento de todos os outros nodos do objecto, no caso presente, o elemento isoparamétrico de Sclaroff (1995).

Assim, para construir a matriz de proximidade,  $H$ , que traduz as distâncias entre os pontos do objecto, utilizam-se, as funções gaussianas

$$g_i(X) = e^{-\|X-X_i\|^2/(2\sigma^2)}, \quad (1)$$

onde  $X_i$  é o centro de dimensão  $n$  do objecto e  $\sigma$  é o desvio padrão que controla a interacção entre os dados do objecto, para construir as funções de interpolação,  $h_i$ , dadas por

$$h_i(X) = \sum_{k=1}^m a_{ik} g_k(X), \quad (2)$$

onde  $a_{ik}$  são coeficientes tais que  $h_i$  tome valores não-nulos apenas no nodo  $i$ , e  $m$  é o número de pontos amostrais da imagem.

A matriz,  $A$ , dos coeficientes de interpolação,  $a_{ik}$ , pode ser determinada por inversão da matriz  $G$  definida como:

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & \cdots & g_1(x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ g_m(x_1) & \cdots & g_m(x_m) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Deste modo, a matriz de interpolação do elemento isoparamétrico de Sclaroff, para um objecto bidimensional, será da forma

$$H(x) = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_1 & \cdots & h_m \end{bmatrix}. \quad (4)$$

A construção das matrizes de massa,  $M$ , e rigidez,  $K$ , pode ser consultada em Sclaroff (1995) ou Tavares (2000).

A matriz de amortecimento utilizada neste trabalho,  $C$ , consiste na combinação linear das matrizes de massa e rigidez previamente determinadas:

$$C = \hat{\alpha}M + \hat{\beta}K, \quad (5)$$

onde  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  são, respectivamente, as constantes de massa e rigidez do amortecimento proporcional, determinadas em função das fracções de amortecimento crítico (Cook, (1986)).

### 3. EMPARELHAMENTO MODAL

O estabelecimento das correspondências entre os  $m$  e  $n$  nodos dos modelos inicial,  $t$ , e objectivo,  $t+1$ , respectivamente, é feito através da resolução do problema de valores próprios generalizado de cada um:

$$K\Phi = M\Phi\Omega, \quad (6)$$

onde (para um modelo bidimensional com  $m$  nodos)

$$\Phi = [\phi_1 | \cdots | \phi_{2m}] = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \\ v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix}, \text{ e } \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \omega_{2m}^2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

sendo que o vector de forma do modo  $i$ ,  $\phi_i$ , para objectos bidimensionais descreve o deslocamento  $(u, v)$  para cada nodo devido a esse modo, e na matriz diagonal  $\Omega$  os quadrados das frequências de vibração são ordenados de forma crescente.

Construídas as matrizes modais  $\Phi_t$  e  $\Phi_{t+1}$ , para os modelos  $t$  e  $t+1$ , respectivamente, as correspondências obtém-se por comparação dos deslocamentos de cada nodo nos respectivos espaços modais. Assim, é construída uma matriz de afinidades,  $Z$ , cujos elementos são dados por:

$$Z_{ij} = \|u_{1,i} - u_{2,j}\|^2 + \|v_{1,i} - v_{2,j}\|^2, \quad (8)$$

onde os melhores emparelhamentos são indicados pelos mínimos na sua linha e na sua coluna. De salientar que a afinidade entre os pontos  $i$  e  $j$  será nula se o emparelhamento for perfeito, e aumentará à medida que o emparelhamento piora (Tavares (2000)). Na construção

desta matriz é normal desprezar-se os modos não rígidos e/ou os modos de alta ordem (Tavares e Barbosa (2000)).

#### 4. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DINÂMICA DE EQUILÍBRIO

Neste trabalho estimamos o alinhamento de dois modelos por simulação física, que é conseguido através da integração no tempo da equação do elemento finito isoparamétrico de Sclaroff. Por este processo as deformações são calculadas a cada instante através da equação dinâmica de equilíbrio de Lagrange:

$$\ddot{\tilde{U}}^t + \tilde{C}\dot{\tilde{U}}^t + \Omega\tilde{U}^t = \Phi^T R^t, \quad (9)$$

onde  $\ddot{\tilde{U}}$  e  $\dot{\tilde{U}}$  são, respectivamente, a segunda e primeira derivadas temporais do vector dos deslocamentos modais e  $\tilde{C}$  é a matriz diagonal de amortecimento global. De salientar que os deslocamentos nodais,  $U$ , que alinham pontos correspondentes podem ser descritos por:

$$U_i = X_{2,i} - X_{1,i}, \quad (10)$$

onde  $X_{1,i}$  é o  $i$ -ésimo nodo da primeira forma, e  $X_{2,i}$  o da segunda forma, e  $U_i$  é o deslocamento do nodo  $i$ . E que a matriz  $\Phi$  é a transformação de coordenadas generalizada utilizada para transformar os deslocamentos modais,  $\tilde{U}$ , nos nodais,  $U$ , e vice-versa:

$$U = \Phi\tilde{U}. \quad (11)$$

##### 4.1 Método da Diferença Central

O método da Diferença Central considera

$$\ddot{U}^t = \frac{1}{\Delta t^2}(U^{t-\Delta t} - 2U^t + U^{t+\Delta t}), \text{ e, } \dot{U}^t = \frac{1}{2\Delta t}(-U^{t-\Delta t} + U^{t+\Delta t}), \quad (12)$$

cujo erro de truncatura é da ordem de  $\Delta t^2$ . Assim, a solução do campo de deslocamentos para  $t + \Delta t$  é obtida a partir da consideração da equação dinâmica de equilíbrio no instante  $t$ ,

$$M\ddot{U}^t + C\dot{U}^t + KU^t = R^t, \quad (13)$$

onde se substituem as igualdades em (12) para obter

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right)U^{t+\Delta t} = R^t - \left(K - \frac{2}{\Delta t^2}M\right)U^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}M - \frac{1}{2\Delta t}C\right)U^{t-\Delta t} \quad (14)$$

que é resolvida em ordem a  $U^{t+\Delta t}$ .

Convém notar que para iniciar o processo resolutivo são necessários o deslocamento e velocidade iniciais, assim como as cargas aplicadas a cada instante. Também, é necessário  $U^{-\Delta t}$  (uma vez que o cálculo de  $U^{t+\Delta t}$  é feito a partir dos dois instantes de tempo imediatamente anteriores,  $U^t$  e  $U^{t-\Delta t}$ ), o que pode ser calculado a partir de (12), obtendo-se

$$U_i^{-\Delta t} = U_i^0 - \Delta t\dot{U}_i^0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{U}_i^0, \quad (15)$$

onde o índice  $i$  indica a  $i$ -ésima componente do vector considerado.

Este método geralmente só é aplicado quando se pode assumir que matriz de massa é diagonal e o amortecimento pode ser negligenciado, uma vez que nestas circunstâncias o seu custo computacional é menor (Bathe (1996)). Caso as matrizes de massa e de rigidez sejam diagonais, (13) representa um sistema de equações desacopladas, e neste caso o método apresentado é economicamente competitivo com os métodos implícitos (Cook (1989)).

Contudo, as matrizes de massa e de amortecimento de Rayleigh utilizadas, não são diagonais, e o método da Diferença Central tal como foi descrito acima é mais preciso para

matrizes de massa e de amortecimento diagonais (Cook (1989)). Este problema é contornado, substituindo as aproximações da aceleração e velocidade em (12) por

$$\dot{U}^t = \frac{1}{\Delta t} \left( \dot{U}^{t+\frac{1}{2}} - \dot{U}^{t-\frac{1}{2}} \right), \text{ e, } \dot{U}^{t-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} (U^t - U^{t-1}). \quad (16)$$

Assim a equação (13) sofre um atraso na velocidade em meio intervalo de tempo:

$$M\ddot{U}^t + C\dot{U}^{t-\frac{1}{2}} + KU^t = R^t, \quad (17)$$

e o esquema do método da Diferença Central adequado às situações em que  $C$  e  $M$  não são diagonais é dado por:

$$\frac{1}{\Delta t^2} MU^{t+1} = R^t - KU^t + \frac{1}{\Delta t^2} M \left( U^t + \Delta t \dot{U}^{t-\frac{1}{2}} \right) - C\dot{U}^{t-\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

sendo que  $\dot{U}^{t-\frac{1}{2}}$  é actualizado em cada iteração através de (16). Para ser inicializado, este método requer  $U^0$  e  $\dot{U}^{-\frac{1}{2}}$  (que foi aproximado por  $\dot{U}^0$ ).

Ainda que as equações (16) sejam de segunda ordem, este esquema tem precisão de primeira ordem quando a matriz de amortecimento é não nula, uma vez que as forças viscosas,  $C\dot{U}^{t-\frac{1}{2}}$ , estão atrasadas meio intervalo de tempo.

Contudo, uma desvantagem do método da Diferença Central é o tamanho do passo de tempo, que deve ser relativamente reduzido, já que este método é condicionalmente estável (Bathe (1996)). Se para o esquema (14) era necessário que

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}, \quad (19)$$

já o esquema (18) é mais restritivo uma vez que

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \left( \sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right), \quad (20)$$

onde  $\xi$  é a fracção de amortecimento crítico na maior frequência natural sem amortecimento,  $\omega_{\max}$  (Cook (1989)).

## 4.2. Método de Newmark

O método de Newmark considera

$$\begin{cases} \dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + \left[ (1-\delta)\dot{U}^t + \delta\ddot{U}^{t+\Delta t} \right] \Delta t \\ U^{t+\Delta t} = U^t + \dot{U}^t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{U}^t + \alpha \ddot{U}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \end{cases} \quad (21)$$

onde  $\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros a determinar por forma a que sejam obtidos resultados satisfatórios e estáveis (Bathe (1996)).

Substituindo (21) na equação dinâmica de equilíbrio obtém-se

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} C + K \right) U^{t+\Delta t} &= R^t + \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} C \right) U^t + \left( \frac{1}{\alpha \Delta t} M - \left( 1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) C \right) \dot{U}^t \\ &+ \left( \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) M - \left[ (1-\delta)\Delta t - \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \Delta t \delta \right] C \right) \ddot{U}^t \end{aligned} \quad (22)$$

Segundo Cook (1989), este método é incondicionalmente estável para  $2\alpha \geq \delta \geq 0.5$ . Contudo, convém salientar que para qualquer valor de  $\alpha$ , se  $\delta=0.5$ , este método não possui amortecimento numérico. Se  $\delta>0.5$ , é introduzido amortecimento artificial, mas também, se

obtem valores menos exactos, uma vez que os resultados obtidos têm precisão de primeira ordem. Quando

$$\alpha = \frac{1}{4} \left( \delta + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (23)$$

é maximizada a dissipação de alta frequência para qualquer valor de  $\delta > 0.5$  (Cook (1989)).

### 4.3. Método da Sobreposição de Modos

Este método propõe a seguinte transformação:

$$U(t) = \Phi X(t), \quad (24)$$

e assim, obtêm-se como equações de equilíbrio correspondentes aos deslocamentos modais generalizados

$$\ddot{X}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{X}(t) + \Omega^2 X(t) = \Phi^T R(t), \quad (25)$$

já que

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \text{ e } \Phi^T M \Phi = I, \quad (26)$$

onde  $I$  representa a matriz identidade.

O objectivo desta transformação consiste em obter novas matrizes de rigidez, massa e amortecimento com menor largura de banda, diminuindo, desta forma, o esforço computacional (Bathe, (1996)).

Neste trabalho utilizamos o método da Diferença Central ou o método de Newmark para resolver (25). Assim, a resolução do método da Sobreposição de Modos usando o método da Diferença Central é feita através de

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} I + \frac{1}{2\Delta t} \Phi^T C \Phi \right) X^{t+\Delta t} = \Phi^T R^t - \left( \Omega^2 - \frac{2}{\Delta t^2} I \right) X^t - \left( \frac{1}{\Delta t^2} I - \frac{1}{2\Delta t} \Phi^T C \Phi \right) X^{t-\Delta t}. \quad (27)$$

De salientar que quando se resolve a equação (25) pelo método da Diferença Central o esquema a utilizar é o primeiro apresentado, (14), uma vez que  $\Phi^T C \Phi$  é uma matriz diagonal.

Quando se utiliza o método de Newmark para resolver a equação dada pelo método de Sobreposição de Modos (de maneira análoga ao que foi feito para o método da Diferença Central), utiliza-se o esquema proposto anteriormente para o método de Newmark, com substituição das matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$  por  $I$ ,  $\Phi^T C \Phi$  e  $\Omega^2$ , respectivamente.

Este método possibilita que apenas alguns modos sejam utilizados nos cálculos, já que em alguns problemas os modos de alta frequência participam pouco no movimento, e apenas uma parte dos modos de baixa frequência precisa de ser usada. A medida referida reduz o custo computacional associado ao processo de resolução da equação dinâmica de equilíbrio e despreza, essencialmente, as componentes locais da transformação.

## 5. ADAPTAÇÕES

Neste ponto descreveremos a resolução de alguns problemas relacionados com a falta de informações relativas aos objectos em estudo e ao seu movimento/deformação.

### 5.1 Deslocamento e Velocidade Iniciais

Todos os métodos de integração utilizados neste trabalho requerem para o arranque do processo resolutivo o deslocamento e velocidade iniciais. A solução encontrada para estimar o deslocamento inicial e a velocidade inicial em função do deslocamento pretendido,

obedecendo a uma necessidade de comodidade da sua especificação por parte dos utilizadores da metodologia, foi a que se segue:

$$U^0(i) = c_u * (X_{2,i} - X_{1,i}), \quad (28)$$

onde  $U^0(i)$  representa a  $i$ -ésima componente do vector deslocamento inicial, e  $c_u$  é uma constante compreendida entre 0 e 1 a especificar pelo utilizador.

A velocidade inicial é calculada em função do deslocamento inicial:

$$\dot{U}^0(i) = c_v U^0(i), \quad (29)$$

onde  $c_v$  é uma constante a definir pelo utilizador.

De salientar que neste trabalho utilizamos os mesmos valores de  $c_u$  e  $c_v$  para todos os nodos.

## 5.2 Nodos não emparelhados

As cargas aplicadas sobre os nodos emparelhados foram estimadas por

$$R(i) = k * (X_{2,i} - X_{j,i}), \quad (30)$$

onde  $R(i)$  representa a  $i$ -ésima componente do vector de cargas quando  $i$  é um nodo emparelhado pelo método modal,  $X_{2,i}$  são as coordenadas na imagem final do nodo  $i$ ,  $X_{j,i}$  representa as coordenadas do nodo  $i$  na imagem  $j$ , e  $k$  é a constante global de rigidez (neste trabalho consideramos a constante global de rigidez igual para todos os componentes de  $R$ ). O problema associado aos nodos não emparelhados da imagem inicial consiste em não serem conhecidas as coordenadas desses nodos na imagem objectivo. Assim, neste trabalho se  $B$  for um nodo não emparelhado compreendido entre os nodos  $A$  e  $C$ , emparelhados com  $A'$  e  $C'$  respectivamente, e se  $B$  corresponder ao  $i$ -éssimo nodo da imagem inicial, a componente do vector de cargas referente a este nodo é dada por:

$$R(i) = k \sum_{\substack{B' \text{ todos os} \\ \text{nodos entre } A' \text{ e } C'}} \left[ \frac{D_t - D_B}{D_t} (X_{2,B'} - X_{1,i}) \right], \quad (31)$$

onde  $D_t$  representa a soma das distâncias de todos os nodos envolvidos no cálculo do vector de cargas para o nodo não emparelhado, e  $D_B$  representa a distância do nodo  $B$  ao nodo não emparelhado.

Contudo, a fórmula do deslocamento inicial, (28), não está definida para os nodos não emparelhados da imagem final. O que se optou por fazer, atendendo a que esta mesma dificuldade foi ultrapassada no cálculo dos vectores de cargas aplicadas para nodos não emparelhados, foi especificar o deslocamento inicial em função do vector de cargas inicial.

Tomando,

$$\begin{cases} U^0(i) = \frac{c_u}{k} R(i) & \text{se } k \neq 0 \\ U^0(i) = 0 & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (32)$$

notamos que (a menos que  $k$  seja nulo) o deslocamento inicial dos nodos emparelhados é idêntico ao que foi estipulado em (28). Para cada nodo não emparelhado da imagem inicial, o deslocamento inicial vai ser influenciado, tal como as cargas, pelos nodos da imagem final que estão compreendidos entre os nodos que emparelham os adjacentes ao nodo não emparelhado. O peso atribuído a cada nodo da imagem final para o vector de deslocamento inicial será igual ao que foi atribuído na constituição do vector de cargas para nodos não emparelhados.

Note-se que esta solução baseia-se no princípio de vizinhança, isto é, nodos vizinhos na imagem inicial devem manter-se como tal na imagem final.

## 6. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Este trabalho foi integrado numa plataforma genérica de desenvolvimento e ensaio de algoritmos de processamento, análise de imagem e computação gráfica (cuja apresentação detalhada poderá ser encontrada em Tavares (2000)). Apresentaremos, de seguida alguns dos resultados obtidos, mas uma análise mais cuidada pode ser encontrada em Pinho (2002).

De salientar que todas as imagens apresentadas incluem os nodos das imagens inicial e objectivo (não ligados por segmentos de recta), e os resultados obtidos estão representados em escala de cinzentos por intensidade das cargas aplicadas (unindo os nodos obtidos em cada iteração por segmentos de recta), correspondendo cargas menos intensas a níveis mais escuros de cinzento.

Consideremos os contornos, A e B, representados na figura 1, constituídos por 61 nodos (cada) dos quais 59 emparelhados por análise modal. Utilizando como material virtual o polietileno, constante de rigidez global  $k=1$ , passo de tempo  $\Delta t=1$ , níveis de amortecimento crítico entre 0.5% e 3%, e satisfazendo-nos a obtenção de uma imagem que aproxime a imagem objectivo a menos de  $140 \text{ pixels}^3$  (a que corresponde uma aproximação média de cada nodo a menos de  $2,3 \text{ pixels}$ ) obtivemos os resultados apresentados nas figuras 2 e 3. A restrição de paragem considerada permite que o processo resolutivo termine antes que seja atingido o equilíbrio, pelo que os resultados aqui apresentados poderão ser melhorados, à custa do aumento significativo do número de iterações utilizadas.

Nas condições referidas, o método da Diferença Central utilizou 8 iterações, enquanto que o método de Newmark conseguiu uma aproximação equivalente à 9ª iteração. No método de Sobreposição de Modos considerando apenas 2/3 dos modos a precisão dos resultados obtidos é afectada, pelo que aumentamos o critério de paragem para  $220 \text{ pixels}$  (isto é, uma média de  $3,7 \text{ pixels}$  de distância de cada nodo). Assim, o método de Sobreposição de Modos com o método da Diferença Central utilizou 9 iterações, enquanto que com o de Newmark utilizaram-se 10 iterações (figuras 4 e 5).

Na figura 6 estão representados os emparelhamentos dos contornos C e D, compostos por 32 e 28 nodos, respectivamente, dos quais 16 foram emparelhados por análise modal. Quando se utiliza como material virtual o polietileno, constante de rigidez global  $k=1$ , amortecimento crítico entre 0.5% e 3%, parando o processo quando os resultados obtidos distam menos do que  $30 \text{ pixels}$  da imagem objectivo, obtemos os resultados obtidos nas figuras 7 a 10. Nas condições mencionadas o método da Diferença Central pára em 8 iterações, enquanto que os restantes param em 9 iterações.

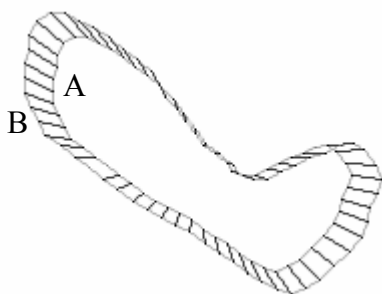


Fig. 1 – Emparelhamento modal dos contornos A e B

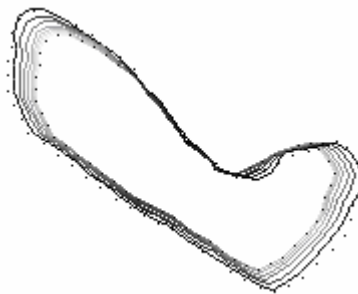


Fig. 2 – Passos do método da Diferença Central

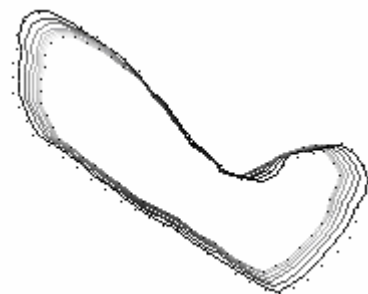


Fig. 3 – Passos do método de Newmark

<sup>3</sup> Pela forma como foram estimadas as cargas aplicadas sobre os nodos, à medida que se obtém melhores aproximações da imagem final, as intensidades das cargas aplicadas vão diminuindo. Assim, o critério de paragem referido é equivalente a um critério de equilíbrio baseado na intensidade das forças aplicadas.



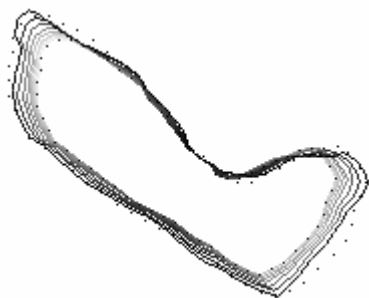


Fig. 4 – Passos do método da Sobreposição de Modos (com 2/3 dos modos), usando o método da Diferença Central

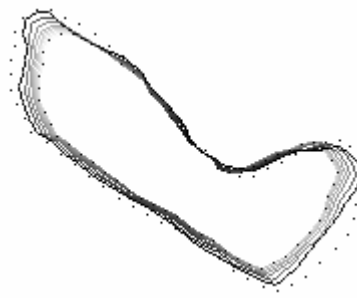


Fig. 5 – ... usando o método de Newmark

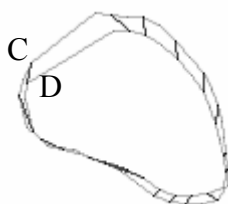


Fig. 6 -Emparelhamento modal dos contornos C e D



Fig. 7 - Passos do método da Diferença Central



Fig. 8 – ...de Newmark



Fig. 9 – ...da Sobreposição de Modos (2/3 dos modos), com o método da Diferença Central



Fig. 10 – ...de Newmark

## 7. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO FUTURO

Neste trabalho propusemo-nos a estimar o campo de deslocamentos entre imagens de objectos deformáveis, atendendo às propriedades físicas dos modelos utilizados. Caso as imagens dadas tenham todos os nodos emparelhados então as cargas aplicadas são proporcionais às distâncias de cada nodo e o seu correspondente na imagem final. Mas, também utilizamos uma solução que permite alargar o domínio de aplicabilidade da resolução da equação de Lagrange a objectos cujos nodos não estejam todos emparelhados. Assim, para cada nodo não emparelhado aplicamos uma força resultante, que consiste na média ponderada das forças que atraem esse ponto para os nodos da imagem final, compreendidos entre os nodos que correspondem aos nodos emparelhados adjacentes a esse ponto (baseado no critério de vizinhança). Assim, afinando os valores da constante global de rigidez, podem obter-se aproximações razoáveis da forma objectivo, mesmo quando os objectos dados não foram totalmente emparelhadas com sucesso pela análise modal.

Neste trabalho a equação dinâmica de equilíbrio foi resolvida com o método da Diferença Central, com o método de Newmark e com o método de Sobreposição de Modos. Quanto à eficácia dos métodos de integração utilizados, verificou-se que, salvo raras excepções, todos os métodos obtiveram resultados análogos, a menos do método da Diferença Central, já que quando se utiliza o algoritmo com as forças viscosas desfasadas em meio passo de tempo, este método tem precisão de primeira ordem. Os restantes métodos

utilizados têm precisão de  $O(\Delta t^2)$  (de salientar que utilizamos o método de Newmark com  $\delta = 0.5$ ). Por outro lado, quando recorremos ao método da Sobreposição de Modos, e se utilizou apenas uma parte dos modos, o custo computacional foi reduzido, contudo a exactidão dos resultados obtidos foi, claramente, afectada.

Fizemos a análise do campo de deslocamentos entre imagens bidimensionais de objectos deformáveis. O trabalho desenvolvido pode, em trabalhos futuros, ser expandido para imagens tridimensionais.

Para estimar as cargas aplicadas sobre os nodos utilizamos uma constante de rigidez global e um intervalo de tempo fixo. Contudo poder-se-á fazer um estudo análogo ao que foi feito, mas em que se vão acrescentando as informações obtidas acerca do comportamento do objecto em cada iteração, e afinar os parâmetros iniciais, no sentido de, eventualmente, poder melhorar os resultados obtidos.

Foi necessário estimar as cargas aplicadas sobre os nodos constituintes da imagem inicial. Assim, este trabalho poderá ser desenvolvido através da procura de modelos alternativos de representação das forças aplicadas (atendendo sempre à possibilidade de existência de nodos não emparelhados).

## 8. REFERÊNCIAS

Bathe, K., Finite Element Procedures, Prentice-Hall, 1996.

Cook, R., Malkus D., Plesha M., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley, 1989.

Nastar, C., PhD Thesis: Modèles Physiques Déformables et Modes Vibratoires pour l'Analyse du Mouvement non-rigide dans les Images Multidimensionnelles, L'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.

Pinho, R., Dissertação submetida para atribuição do grau de mestre em Métodos Computacionais em Ciências e Engenharia: Determinação do Campo de Deslocamentos a partir de Imagens de Objectos Deformáveis, FCUP, FEUP, Universidade do Porto, 2002.

Sclaroff, S., PhD Thesis: Modal Matching: A Method for Describing, Comparing, and Manipulating Digital Signals, MIT, 1995.

Tavares, J., Tese de Doutoramento: Análise de Movimento de Corpos Deformáveis usando Visão Computacional, FEUP, 2000.

Tavares, J., Barbosa, J., Padilha, A., Determinação de Correspondência entre Modelos de Contorno e de Superfície, utilizando Modelização por Elementos Finitos e Análise Modal, em Visão por Computador, VI Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional, Aveiro, 2000.