

Modulações digitais

3

Modulações digitais lineares com detecção coerente

3.1

Modulações binárias (ASK e PSK)

Detecção de modulações digitais

Tal como na modulação analógica (AM e FM), também na modulação digital a informação, ou mensagem, a transmitir é transportada por uma portadora na sua amplitude, na sua frequência ou na sua fase, ou numa combinação destes parâmetros.

O desmodulador, ou detector, tenta extrair a informação presente na portadora. O processo de detecção pode ser realizado de duas maneiras:

- Detecção coerente
- Detecção não-coerente

Qualquer destes tipos de detecção requer o conhecimento da frequência da portadora recebida. A detecção coerente requer, adicionalmente, o conhecimento da sua fase.

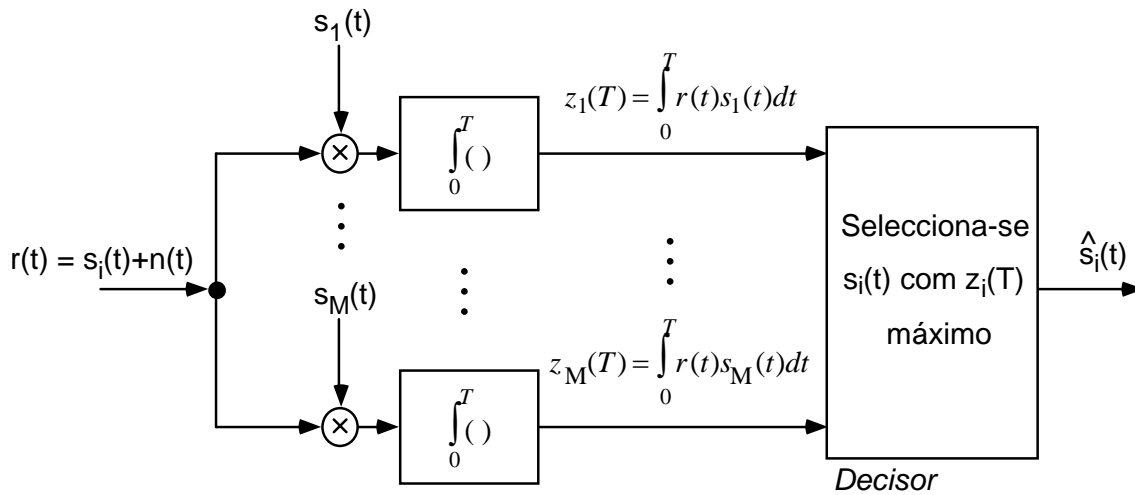
Assim, se $s_i(t) = A \cos[2\pi f_c t - \theta_i]$ representar uma portadora modulada em fase e se $r_i(t) = B \cos[2\pi f_c t - \phi_i(t)]$ for o sinal recebido após canal sem ruído, sendo B a envolvente e $\phi_i(t)$ uma fase desconhecida, $\phi_i(t) = \theta_i + \theta(t)$, um receptor coerente tem, necessariamente, de conhecer $\theta(t)$.

- O esfasamento provocado pelo canal, $\theta(t)$, tem de ser estimado por um processo de sincronização e estimação adequado.
- Se $\hat{\theta}(t)$ for a estimativa de $\theta(t)$ a menor probabilidade de erro de detecção é obtida quando $\hat{\theta}(t) = \theta(t)$. Se $\hat{\theta}(t) \neq \theta(t)$ a probabilidade de erro é maior.

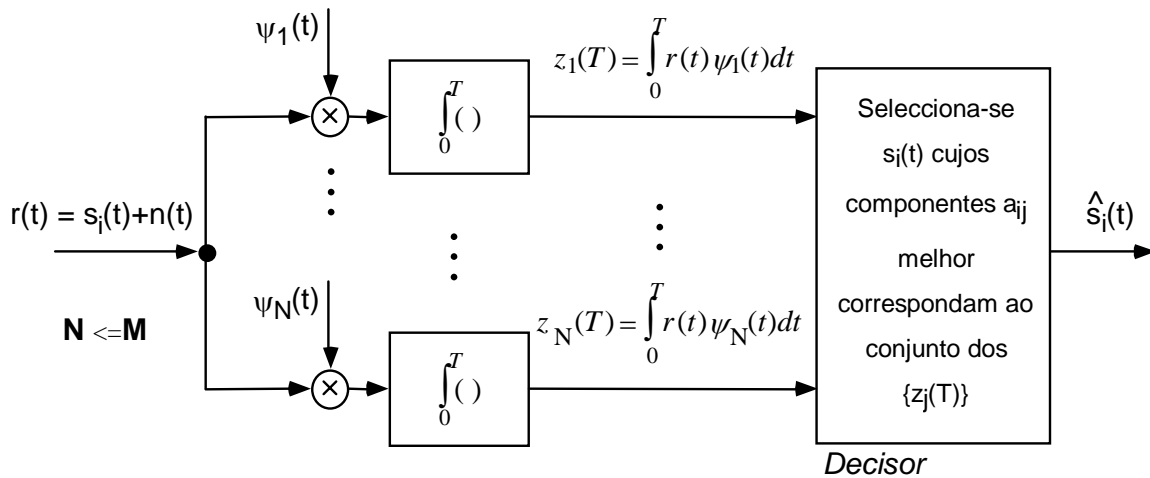
Daqui para a frente vai supor-se que na detecção coerente a estimação da fase é feita adequadamente pelo que $\theta(t)$ e $\hat{\theta}(t)$ vão deixar de ser mencionadas.

Detecção coerente com receptor de correlação

Com M sinais de referência



Com N funções-base

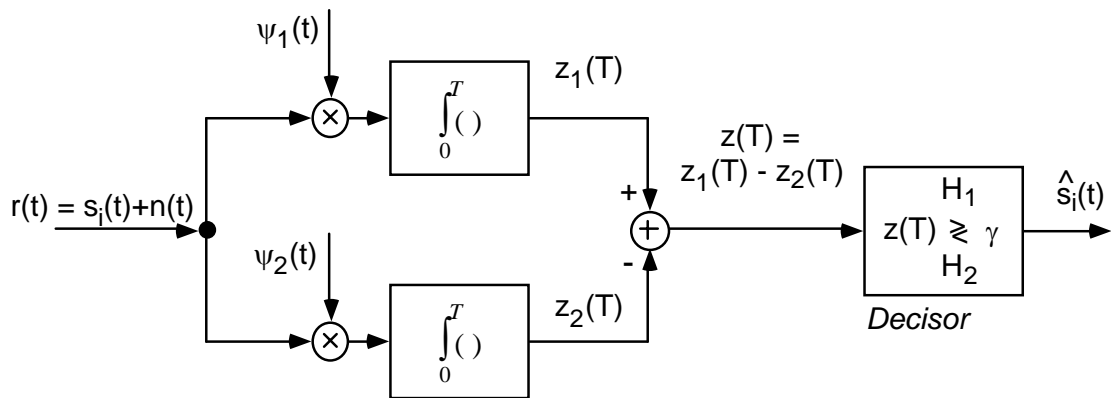


Com funções-base poupamos no número de correlacionadores porque $N \leq M$.

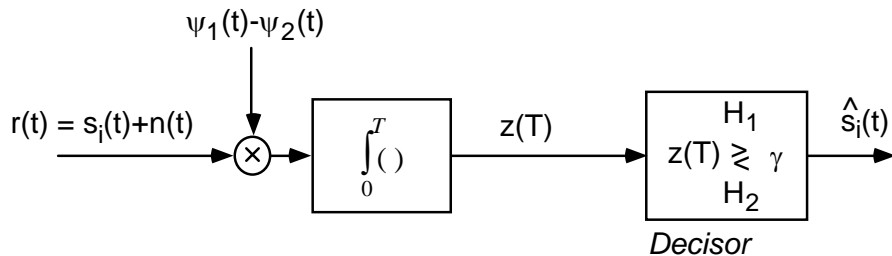
Detecção coerente com receptor de correlação binário

Quando $M = 2$ temos duas alternativas:

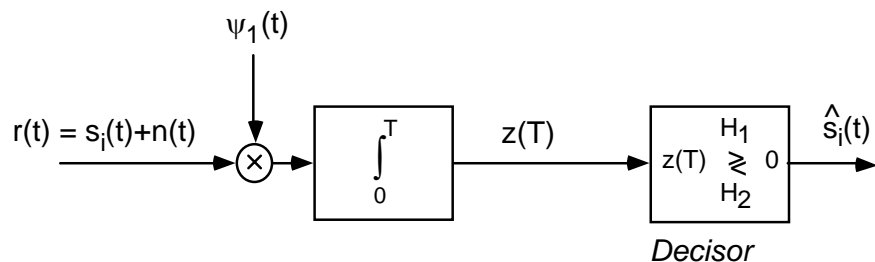
- Com dois correlacionadores:



- Com um só correlacionador:



Em PSK os dois sinais são antipodais, portanto só precisamos de uma função-base:



Detecção coerente de PSK binário (BPSK)

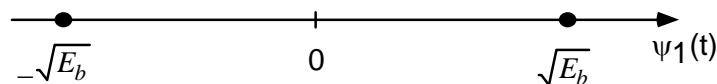
- Em PSK binário (BPSK) temos duas formas de onda antipodais:

$$\begin{cases} s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T}} \cos(\omega_c t + \phi) & (\text{seja } \phi = 0) \\ s_2(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T}} \cos(\omega_c t + \phi + \pi) = -s_1(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

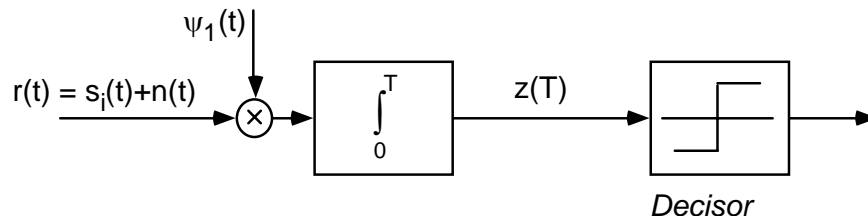
- Basta usar uma função-base: $\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_c t \quad 0 \leq t \leq T$
(a amplitude é esta para que o espaço seja ortonormal)
- Expressando os sinais PSK em função de $\psi_1(t)$ teremos

$$s_i(t) = s_{i1} \psi_1(t) = \begin{cases} s_1(t) = s_{11} \psi_1(t) = \sqrt{E_b} \psi_1(t) \\ s_2(t) = s_{21} \psi_1(t) = -\sqrt{E_b} \psi_1(t) \end{cases}$$

- No espaço de sinal a constelação respectiva é:



- Receptor:

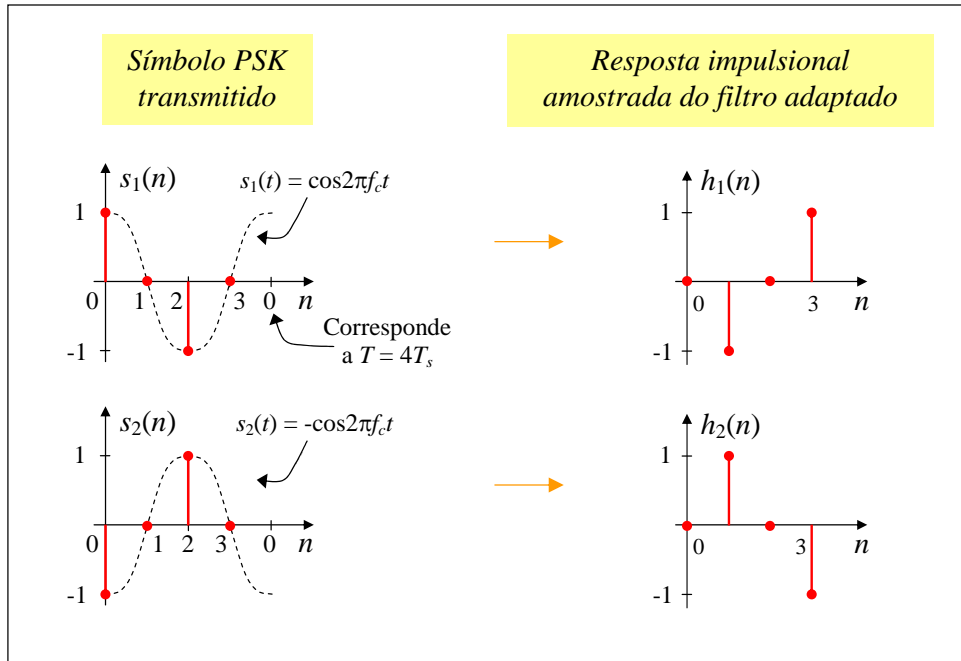


- Na saída do integrador os valores esperados são (com $E[n(t)] = 0$):

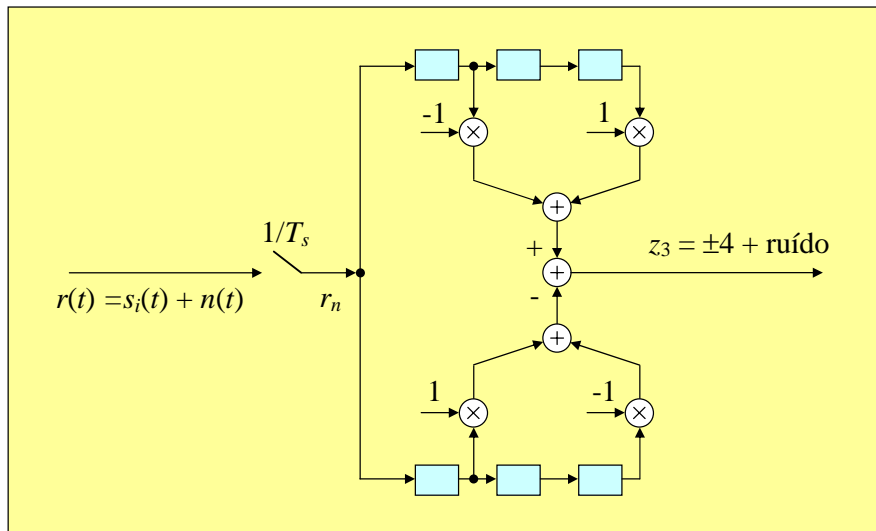
$$E[z(T)|s_1] = E\left\{ \int_0^T [\sqrt{E_b} \psi_1^2(t) + n(t) \psi_1(t)] dt \right\} = \sqrt{E_b} \quad s_1(t) \text{ transmitido}$$

$$E[z(T)|s_2] = E\left\{ \int_0^T [-\sqrt{E_b} \psi_1^2(t) + n(t) \psi_1(t)] dt \right\} = -\sqrt{E_b} \quad s_2(t) \text{ transmitido}$$

Detecção coerente de PSK: exemplo com filtro adaptado amostrado



Detector coerente com dois filtros adaptados



Tratando-se de BPSK até bastaria usar um único filtro (qual?) em vez de dois.

Detecção coerente de PSK multifase (M-PSK)

- Sinal: $s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_c t - \phi_i) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(\omega_c t - \frac{2\pi i}{M}\right)$ $0 \leq t \leq T$
 $i = 1, 2, \dots, M$

- Funções-base:
$$\begin{cases} \psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_c t) \\ \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_c t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

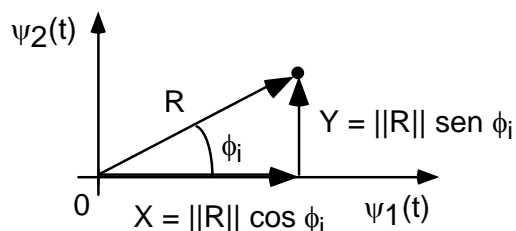
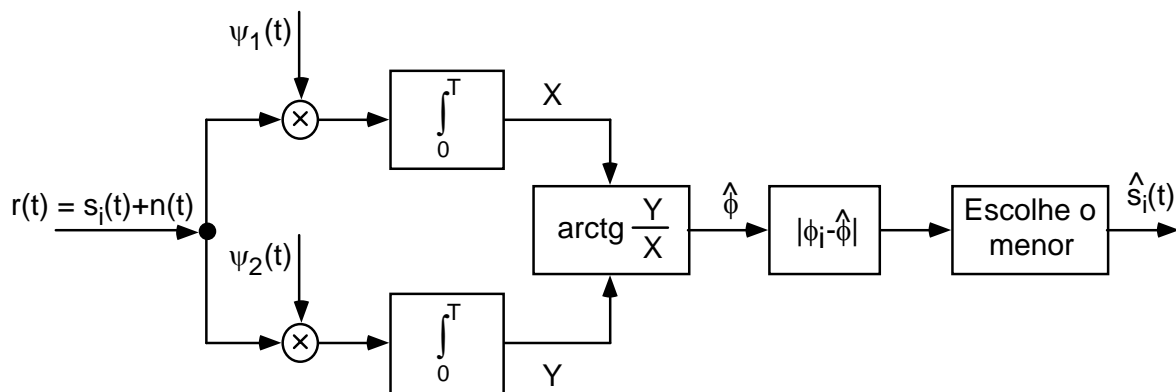
- Expressando os sinais PSK em função de $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ teremos

$$s_i(t) = s_{i1}\psi_1(t) + s_{i2}\psi_2(t) = (\sqrt{E} \cos \phi_i)\psi_1(t) + (\sqrt{E} \sin \phi_i)\psi_2(t)$$

$$0 \leq t \leq T \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Estamos a descrever um conjunto de M formas de onda (intrinsecamente não ortogonais) em função de apenas duas componentes ortogonais.

- O receptor (coerente) de correlação tem dois correlacionadores:



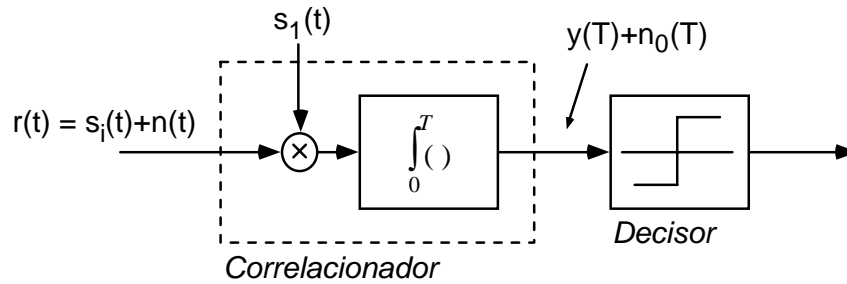
X — componente em fase do sinal recebido

Y — componente em quadratura

$\hat{\phi} = \arctg \frac{Y}{X}$ — estimativa ruidosa da fase ϕ_i

Probabilidade de bit errado em PSK binário

- Sendo o sinal de referência o próprio sinal emitido, $s_i(t) = \pm s_1(t)$:

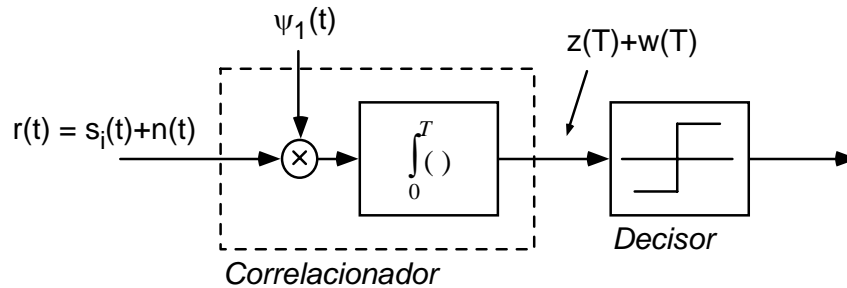


Sinal à entrada do decisor: $y(T) = \pm E_b \Rightarrow \Delta V = 2 E_b$

Ruído à entrada do decisor: $\sigma^2 = E[n_0^2(T)] = \frac{N_0 E_b}{2}$

Probabilidade de bit errado: $P_e = Q\left(\frac{\Delta V}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

- Sendo o sinal de referência a função-base $\psi_1(t)$:



Sinal à entrada do decisor: $z(T) = \pm \sqrt{E_b} \Rightarrow \Delta V = 2\sqrt{E_b}$

Ruído à entrada do decisor: $\sigma^2 = E[w^2(T)] = \frac{N_0}{2}$

Probabilidade de bit errado: $P_e = Q\left(\frac{\Delta V}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

Probabilidade de bit errado em PSK binário

Variância do ruído à saída do correlacionador

P.: Como é que a variância do ruído à saída do correlacionador vale $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$?

R.:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[w^2(T)] = E\left[\int_0^T n(t) \psi_1(t) dt \int_0^T n(u) \psi_1(u) du\right] = \\ &= E\left[\int_0^T \int_0^T \psi_1(t) \psi_1(u) n(t) n(u) dt du\right]\end{aligned}$$

Dada a linearidade das operações de integração e de cálculo do valor médio, podemos trocar-lhes a ordem:

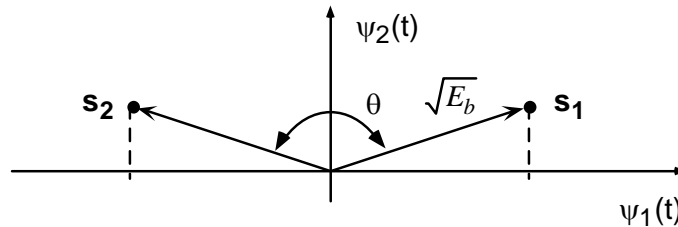
$$\sigma^2 = \int_0^T \int_0^T \psi_1(t) \psi_1(u) \underbrace{E[n(t)n(u)]}_{R_{nn}(t-u)} dt du$$

Mas, do teorema de Wiener-Khintchine, a função de autocorrelação e a densidade espectral de potência constituem um par de transformadas de Fourier. Ora a densidade espectral de potência do ruído branco gaussiano $n(t)$ na entrada é constante, $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$ (V^2/Hz), logo:

$$R_{nn}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \leftrightarrow G_n(f) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow R_{nn}(t-u) = \frac{N_0}{2} \delta(t-u)$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_0^T \int_0^T \psi_1(t) \psi_1(u) \underbrace{E[n(t)n(u)]}_{R_{nn}(t-u)} dt du = \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \psi_1(t) \psi_1(u) \delta(t-u) dt du = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \psi_1(u) \underbrace{\left[\int_0^T \psi_1(t) \delta(t-u) dt\right]}_{\psi_1(u)} du = \frac{N_0}{2} \int_0^T [\psi_1^2(u)] du = \frac{N_0}{2}\end{aligned}$$

Uma outra maneira de calcular o coeficiente de correlação em modulações binárias



P.: Quanto vale o coeficiente de correlação entre os vectores s_1 e s_2 ?

R.:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{E_b} \sin \frac{\theta}{2} \psi_1(t) + \sqrt{E_b} \cos \frac{\theta}{2} \psi_2(t) \\ s_2(t) &= -\sqrt{E_b} \sin \frac{\theta}{2} \psi_1(t) + \sqrt{E_b} \cos \frac{\theta}{2} \psi_2(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho = \cos \theta$$

Vamos calcular ρ através dos vectores do espaço de sinal:

- Coordenadas dos vectores:

$$s_1 = \left[\sqrt{E_b} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{E_b} \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad s_2 = \left[-\sqrt{E_b} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{E_b} \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

- Norma (comprimento) dos vectores:

$$\|s_1\| = \|s_2\| = \sqrt{E_b}$$

- Produto interno dos vectores s_1 e s_2 :

$$\begin{aligned} s_1 \cdot s_2 &= \left[\sqrt{E_b} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{E_b} \cos \frac{\theta}{2} \right] \cdot \left[-\sqrt{E_b} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{E_b} \cos \frac{\theta}{2} \right] = \\ &= E_b \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = E_b \cos \theta \end{aligned}$$

- Coeficiente de correlação (nova definição):

$$\rho = \frac{s_1 \cdot s_2}{\|s_1\| \|s_2\|} \Rightarrow \rho = \cos \theta$$

BPSK e BFSK: probabilidade de bit errado com detecção coerente

- Fórmula geral para símbolos binários equiprováveis e de igual energia, E_b :

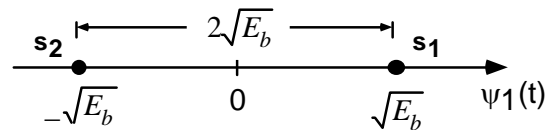
$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}(1-\rho)}\right) \quad \rho = \cos \theta \text{ (coeficiente de correlação)}$$

- θ — ângulo entre os vectores de sinal s_1 e s_2 .
- Fórmula alternativa equivalente:

$$P_b = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad d - \text{distância entre vectores } s_1 \text{ e } s_2$$

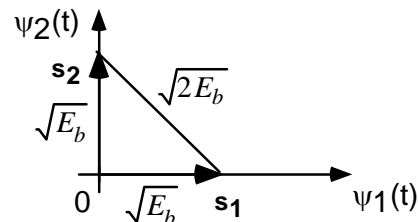
- BPSK ($\theta = \pi \text{ rad}$, $\rho = -1$, $d = 2\sqrt{E_b}$)

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



- BFSK ($\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, $\rho = 0$, $d = \sqrt{2E_b}$)

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



- Comparando as expressões de P_b verificamos que FSK binário exige mais 3 dB (um factor de 2) na relação E_b/N_0 para se conseguir a mesma probabilidade de bit errado.

Não é de admirar, pois a distância euclidiana entre os vectores de sinal em FSK ($\sqrt{2E_b}$) é menor que em PSK ($2\sqrt{E_b}$).

Probabilidade de erro em BPSK: um exemplo

P.: Um sistema BPSK a 140 Mbits/s usa impulsos de cosseno elevado com $\alpha=1$ para eliminar a interferência intersimbólica, verificando-se que no receptor com filtro adaptado a relação sinal-ruído vale 8 dB.

- Quantos erros por unidade de tempo são esperados à saída do receptor?
- Repita a alínea anterior para o caso do ângulo entre os vectores de sinal ser reduzido de 180° para 165° .

R.: Expressão da relação $\frac{E_b}{N_0}$ em função da relação sinal-ruído $\frac{S}{N}$:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{ST}{N/B} = BT \frac{S}{N} \quad \Rightarrow \quad P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2BT \frac{S}{N}}\right)$$

- Largura de banda ocupada por BPSK com impulsos de cosseno elevado:

$$B = 2 \times \frac{1}{2T} (1 + \alpha) = \frac{2}{T} \quad (\text{com } \alpha = 1) \quad \Rightarrow \quad BT = 2$$

- Relação sinal-ruído: $\frac{S}{N} = 10^{8/10} = 6,31$

$$\text{a) } P_{B_1} = Q\left(\sqrt{2BT \frac{S}{N}}\right) = Q\left(\sqrt{2 \times 2 \times 6,31}\right) = Q(5,024) = 2,533 \times 10^{-7}$$

Corresponde a $2,533 \cdot 10^{-7} \times 140 \cdot 10^6 = 35,47$ erros/s.

- Agora $\rho = \cos \theta = \cos 165^\circ = -0,97$ e

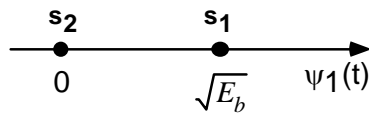
$$P_{B_2} = Q\left[\sqrt{BT \frac{S}{N} (1 - \rho)}\right] = Q(4,986) = 3,083 \times 10^{-7} \quad (> P_{B_1})$$

Corresponde a 43,16 erros/s.

Modulações digitais binárias: OOK

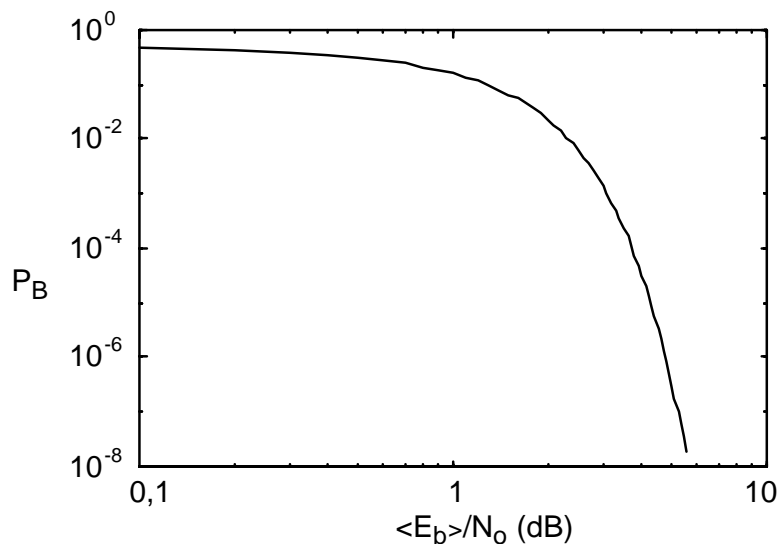
Probabilidade de bit errado com detecção coerente

- Energia média do sinal recebido: $\langle E_b \rangle = \frac{E_b + 0}{2} = \frac{E_b}{2}$
- Distância euclidiana entre vectores do sinal: $d = \sqrt{E_b} = \sqrt{2\langle E \rangle}$
- Constelação:



- Potência do ruído à saída do correlacionador: $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$
- Probabilidade de bit errado:

$$P_b = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\langle E_b \rangle}{N_0}}\right) \quad (\text{como em FSK binário})$$



Modulações digitais binárias: OOK

Probabilidade de erro: um exemplo

P.: Um sinal modulado em OOK é detectado com um filtro adaptado. O símbolo não-nulo à entrada do filtro adaptado é um impulso sinusoidal com amplitude $A=100$ mV e duração $T=10$ ms. O ruído no mesmo ponto é gaussiano branco com um valor eficaz de 140 mV quando medido numa largura de banda de ruído de 10 kHz. Qual é a probabilidade de bit errado?

R.:

- Energia do símbolo não-nulo:

$$E_{s_1} = \frac{A^2}{2} T = \frac{(100 \times 10^{-3})^2}{2} \times 10 \times 10^{-3} = 5,0 \times 10^{-5} \text{ (V}^2\text{s)}$$

- Densidade espectral de potência do ruído:

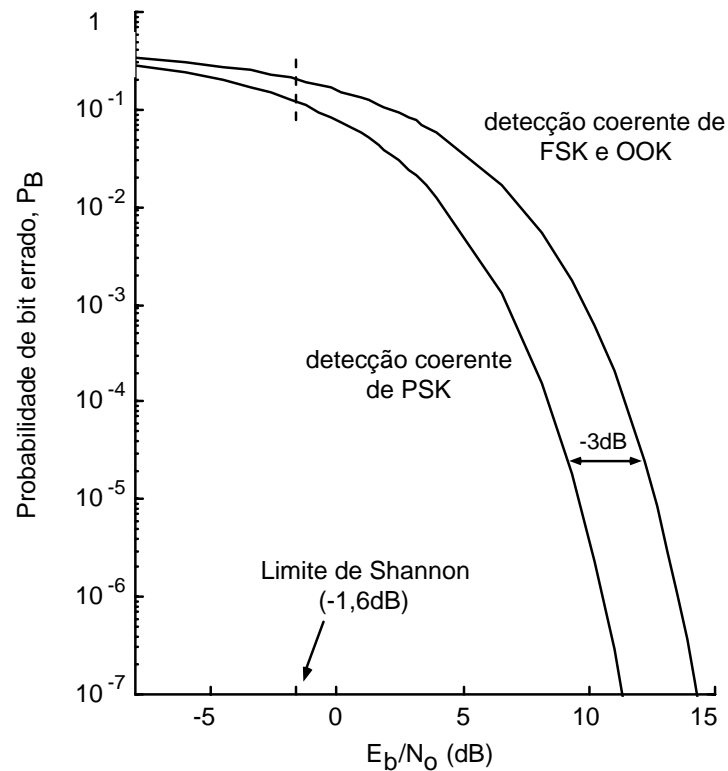
$$N_0 = \frac{N}{B_N} = \frac{(140 \times 10^{-3})^2}{10 \times 10^3} = 1,96 \times 10^{-6} \text{ (V}^2\text{/Hz)}$$

- Probabilidade de bit errado:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{5 \times 10^{-5}}{2 \times 1,96 \times 10^{-6}}}\right) = Q(3,5714) = 1,788 \times 10^{-4}$$

Modulações digitais binárias: PSK, FSK e OOK

Comparação das probabilidades de bit errado com detecção coerente



A curva relativa à modulação OOK está em função de $\frac{\langle E_b \rangle}{N_0}$.