

Modulações digitais

3

Modulações digitais lineares
com detecção coerente

3.2

Modulações não-binárias (MPSK)

QPSK: formas de onda e componentes em fase e em quadratura

- $$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(2\pi f_c t - (2i-1)\frac{\pi}{4}\right) \quad 0 \leq t \leq T \quad f_c = n_c \frac{1}{T}, \quad n_c \text{ inteiro}$$

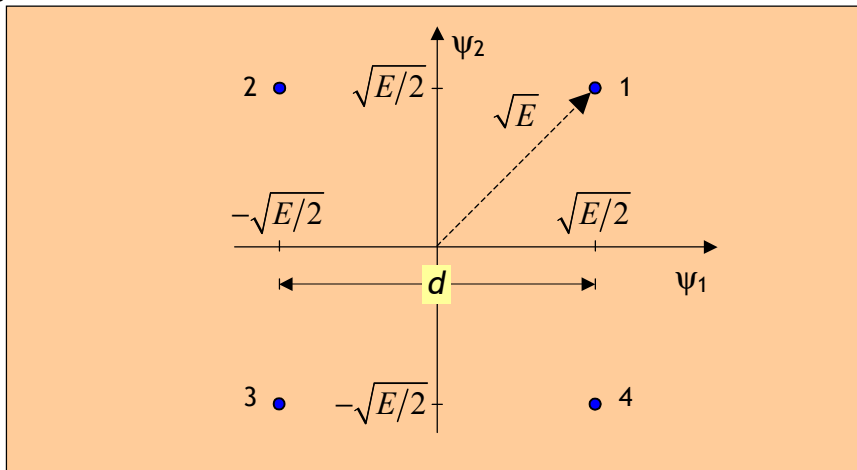
$$i = 1, 2, 3, 4$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
 s_i(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_c t - (2i-1)\pi/4) = \\
 &= \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[(2i-1)\pi/4]}_{\pm\sqrt{E/T}} \cos 2\pi f_c t + \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{T}} \sin[(2i-1)\pi/4]}_{\pm\sqrt{E/T}} \sin 2\pi f_c t = \\
 &= \underbrace{\sqrt{E} \cos[(2i-1)\pi/4]}_{s_{i1}=s_{I_i}(t) \rightarrow \text{BPSK}} \psi_1(t) + \underbrace{\sqrt{E} \sin[(2i-1)\pi/4]}_{s_{i2}=s_{Q_i}(t) \rightarrow \text{BPSK}} \psi_2(t)
 \end{aligned}$$

- Vectores: $\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \sqrt{E} \cos[(2i-1)\pi/4] \\ \sqrt{E} \sin[(2i-1)\pi/4] \end{bmatrix}$. Distância entre pontos: $d = 2\sqrt{E/2}$

Constelação:



- Temos dois "canais" BPSK independentes (um em fase e outro em quadratura). Distância entre pontos de cada canal: $d = 2\sqrt{E/2}$.
- O mapeamento bits \rightarrow símbolos deve obedecer à *codificação de Gray* para minimizar a probabilidade de *bit* errado.

QPSK: probabilidades de erro

- Probabilidade de bit errado em cada canal BPSK:

$$P' = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

- Probabilidade de decisão **correcta** em cada canal BPSK:

$$1 - P'$$

- Probabilidade de decisão **correcta** nos dois canais BPSK independentes:

$$P_c = (1 - P')^2$$

- Probabilidade de decisão **incorrecta** nos dois canais:

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - P_c \approx 2P' - P'^2 = \\ &= 2Q\left(\sqrt{E/N_0}\right) - Q^2\left(\sqrt{E/N_0}\right) \end{aligned}$$

Se $E/N_0 \gg 1$ podemos desprezar o termo quadrático:

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{E/N_0}\right)$$

Ora $E = 2E_b$ e $P_B = \frac{P_e}{k} = \frac{P_e}{2}$ com codificação de Gray. Logo,

$$P_B(QPSK) = \frac{P_e}{2} \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = P_B(BPSK)$$

Conclusões: tendo a mesma razão E_b/N_0 deve-se escolher QPSK face a BPSK porque

- Para a mesma "bit rate" QPSK precisa de metade da largura de banda
- Para a mesma largura de banda QPSK envia o dobro dos bits por segundo

Geração de QPSK a partir de dois sinais BPSK

Desejamos obter o sinal QPSK correspondente à sequência binária 01101000. Como fazer?

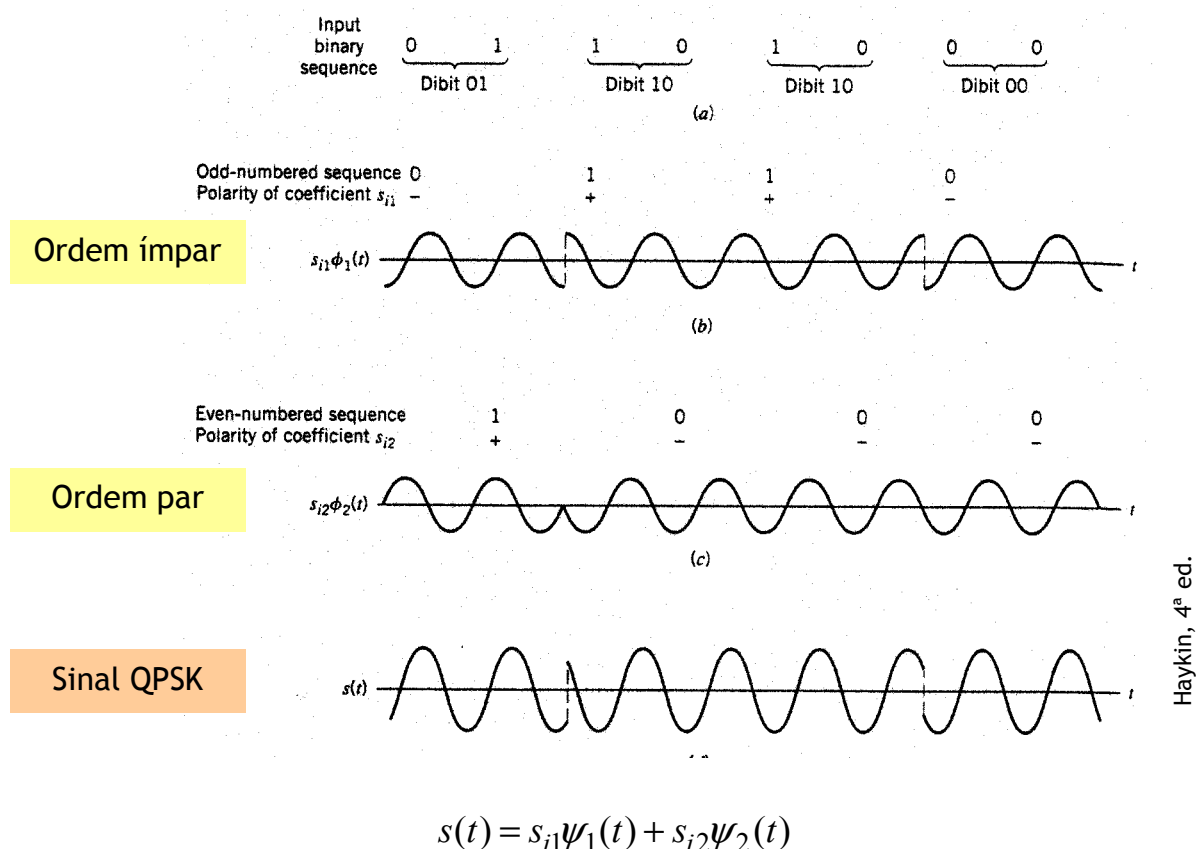
- Formamos duas sub-sequências, uma com os bits de ordem ímpar

0110

e outra com os bits de ordem par

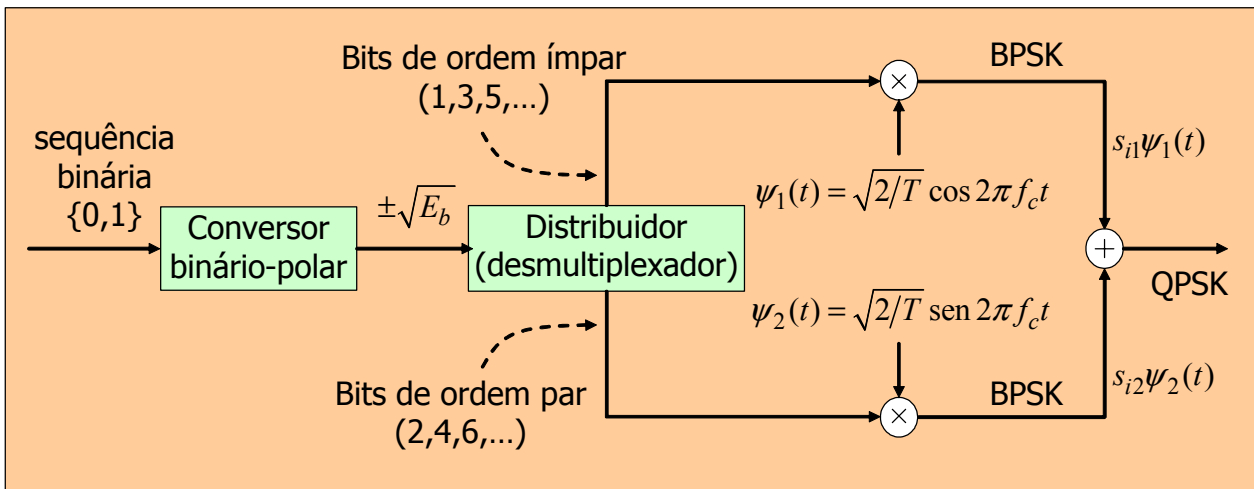
1000

- Cada subsequência dará origem a um sinal de PSK binário, o primeiro *em fase* e o segundo *em quadratura*.
- Cada um dos bits das sub-sequências tem a duração de $2T$ segundos.

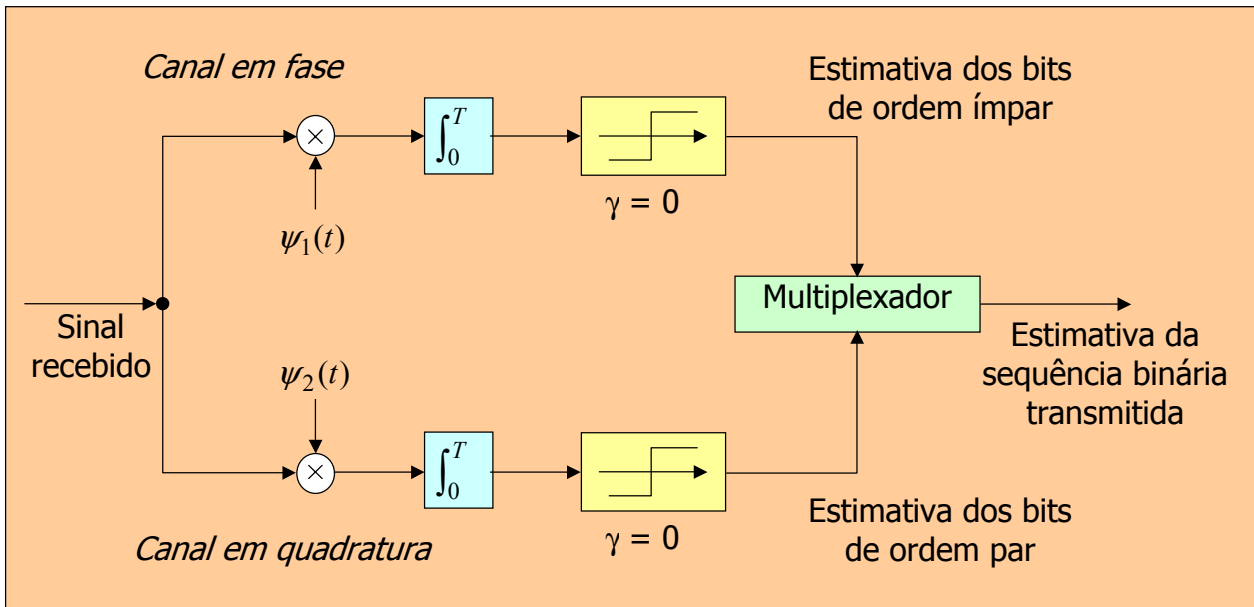


Diagramas de blocos de emissor e receptor coerente QPSK

Emissor



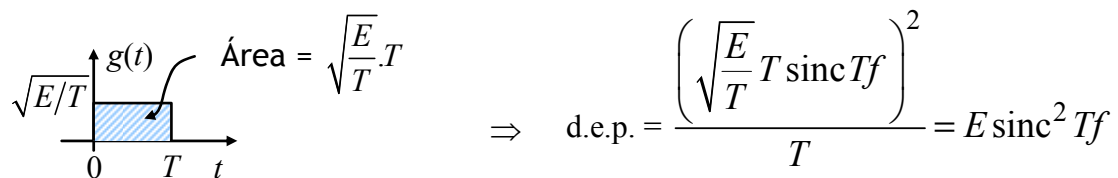
Receptor coerente



QPSK: espectro de potência

$$s_i(t) = \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[(2i-1)\pi/4]}_{\pm\sqrt{E/T} = \pm g(t)} \cos 2\pi f_c t - \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{T}} \sin[(2i-1)\pi/4]}_{\pm\sqrt{E/T}} \sin 2\pi f_c t$$

- A densidade espectral de potência (d.e.p.) da componente em fase é igual à densidade espectral de energia de $g(t)$ (= quadrado da transformada de Fourier de $g(t)$) a dividir pelo intervalo T :

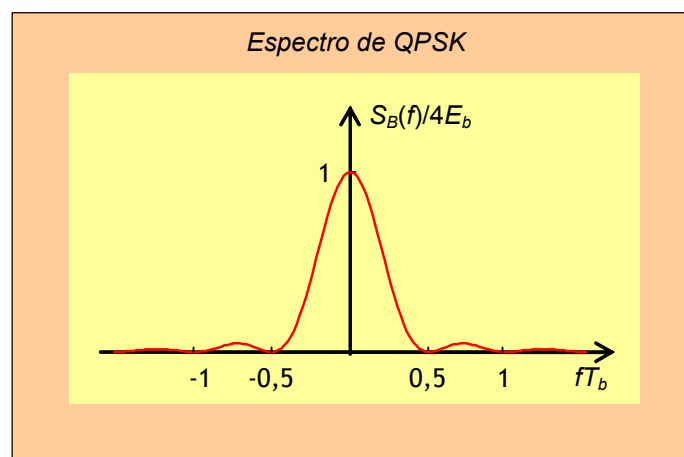


$$\Rightarrow \text{d.e.p.} = \frac{\left(\sqrt{\frac{E}{T}} T \operatorname{sinc} Tf\right)^2}{T} = E \operatorname{sinc}^2 Tf$$

- Do mesmo modo a d.e.p. da componente em quadratura é $E \operatorname{sinc}^2 Tf$.
- As componentes em fase e em quadratura são independentes, logo, a d.e.p. de QPSK é igual à soma das d.e.p. de cada canal:

$$S_B(f) = 2E \operatorname{sinc}^2(Tf) = 4E_b \operatorname{sinc}^2(2T_b f) \quad (\text{em banda-base})$$

$$S(f) = \frac{1}{4} [S_B(f - f_c) + S_B(f + f_c)] \quad (\text{na banda do canal})$$



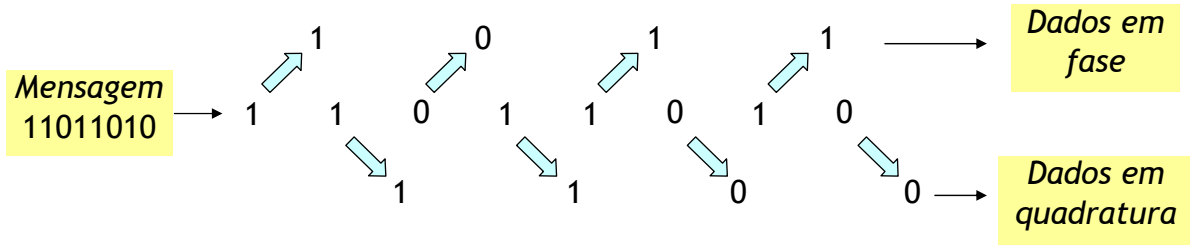
A maior parte da potência está contida no lobo principal, logo:

Largura de banda de sinais QPSK: $B = 1/T_b = R_b$ ("bit rate")

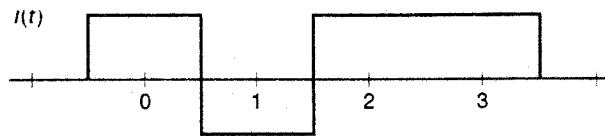
(em BPSK é o dobro para a mesma "bit rate": $B=2/T_b$)

Forma de onda de QPSK com sinalização rectangular

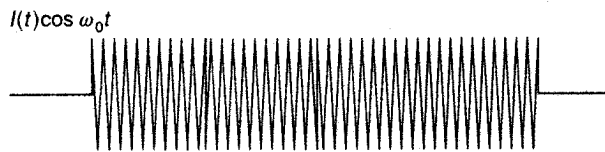
Vamos usar sinalização rectangular (polar) ± 1 :



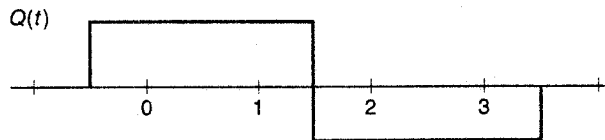
Dados em fase
[+1, -1, +1, +1]



Sinal em fase
(BPSK)



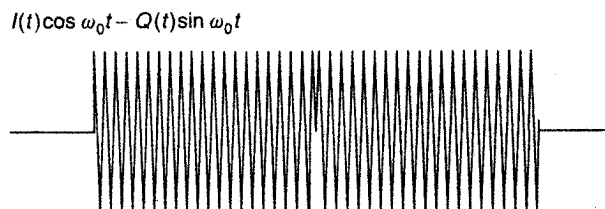
Dados em quadratura
[+1, +1, -1, -1]



Sinal em quadratura
(BPSK)



Sinal QPSK



Os sinais em fase e em quadratura (ambos BPSK) são combinados de modo a formar um sinal QPSK.

Forma de onda de QPSK com sinalização de cosseno elevado

Vamos usar sinalização com impulsos de cosseno elevado ($\alpha = 0,3$) e a mesma sequência de há pouco (11011010):

Dados em fase
[+1, -1, +1, +1]

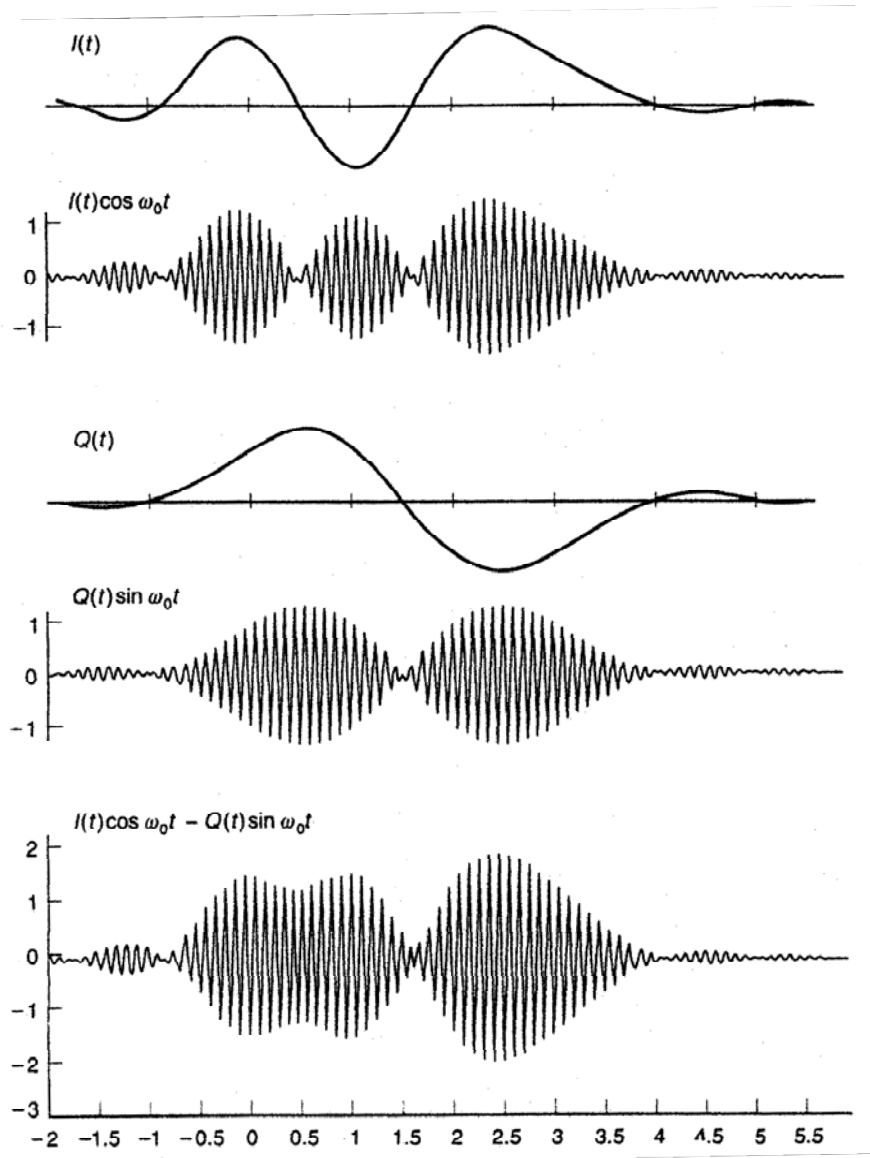
Sinal em fase
(BPSK)

Dados em quadratura
[+1, +1, -1, -1]

Sinal em quadratura
(BPSK)

Sinal QPSK

Esta envolvente não
é constante



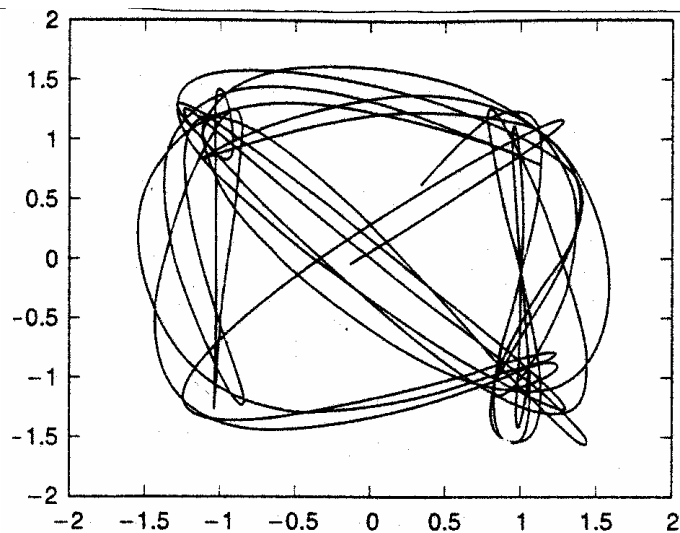
- A envolvente de QPSK não é constante.

Prejudica a utilização de amplificação não-linear.

- Os sinais prolongam-se para lá de quatro intervalos de tempo.

Forma de onda de QPSK com sinalização de cosseno elevado (cont.)

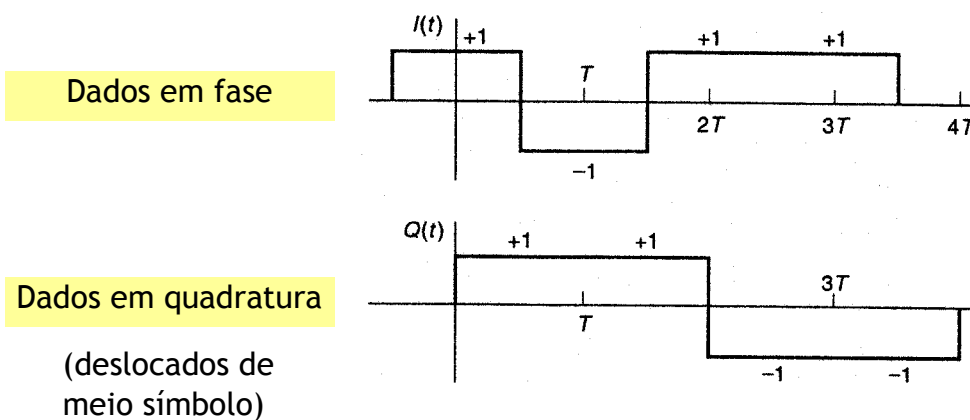
O traçado I-Q no espaço de sinal



- Notem-se as diversas passagens por zero

Estas passagens correspondem a mudanças de fase de... 180°.

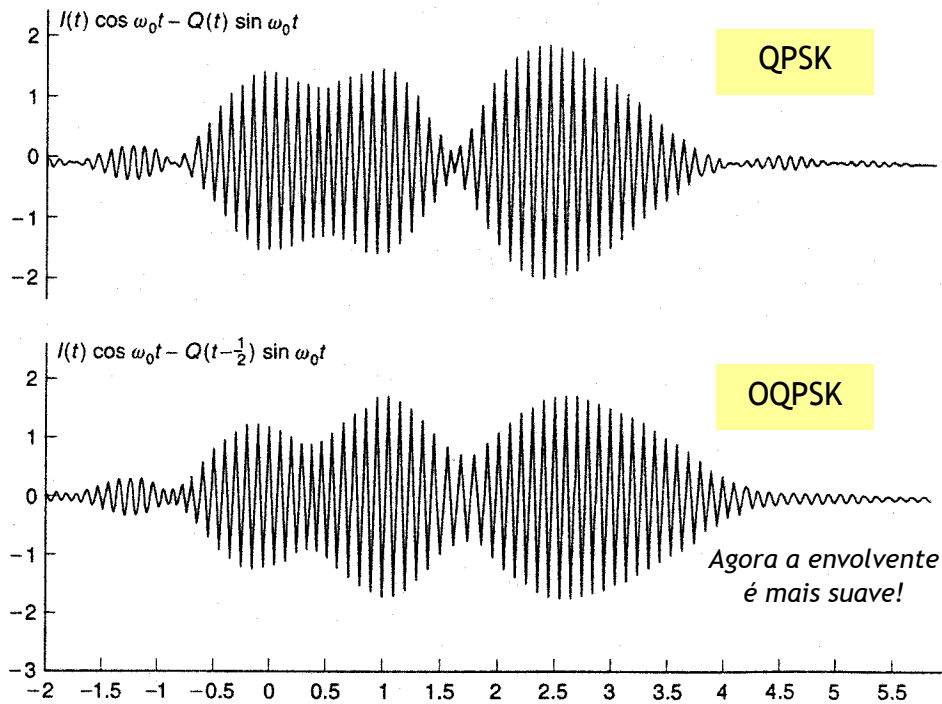
- Uma maneira de reduzir, ou até eliminar, as passagens por zero é deslocar temporalmente um dos sinais (em fase ou em quadratura) relativamente ao outro.



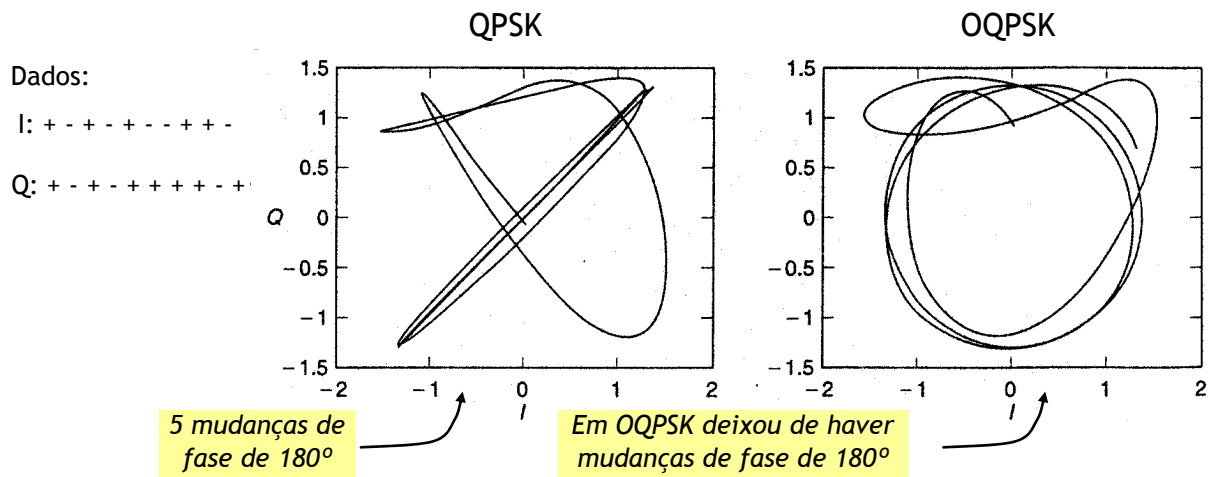
- À modulação obtida dá-se o nome de "Offset QPSK".

"Offset QPSK" (OQPSK)

Suponhamos que a sequência de dados é a anterior (11011010) e que os impulsos são de cosseno elevado com $\alpha = 0,3$.

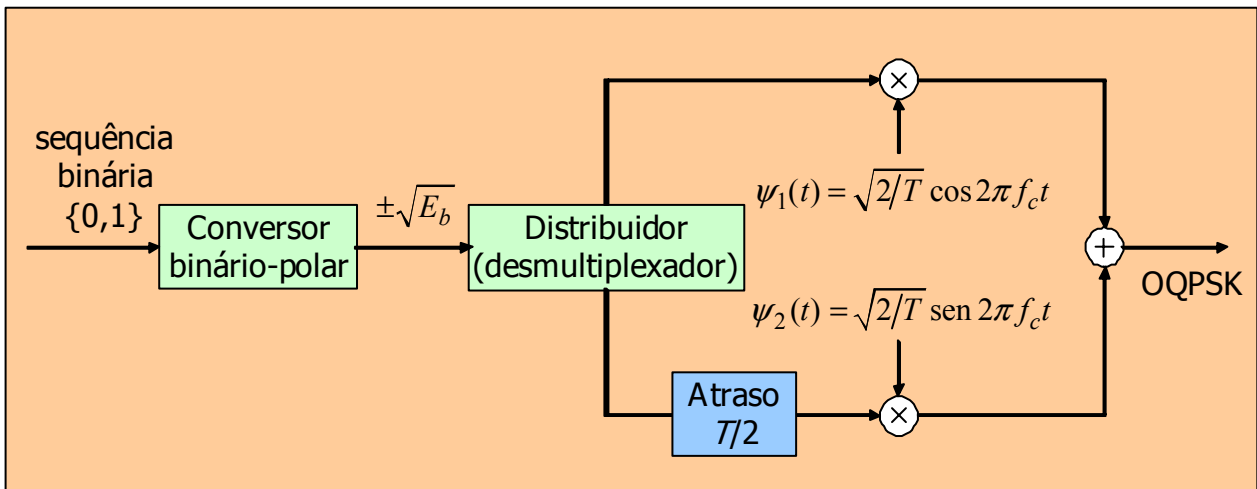


Com outra sequência de dados obteríamos o seguinte traçado I-Q:

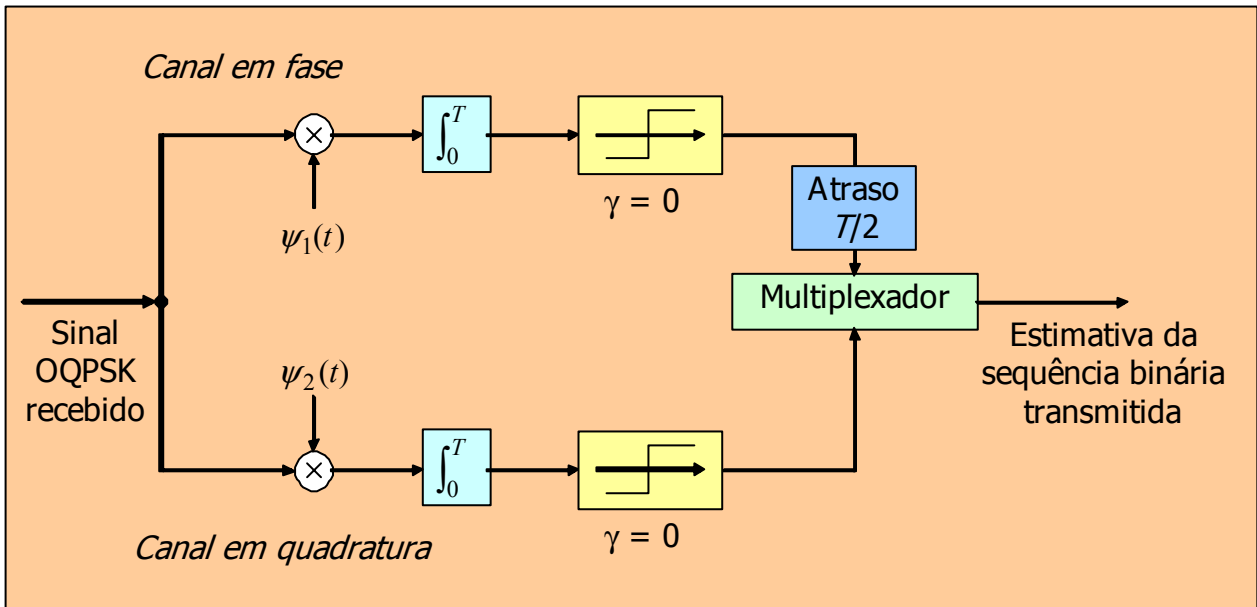


Diagramas de blocos de emissor e receptor coerente OQPSK

Emissor



Receptor coerente

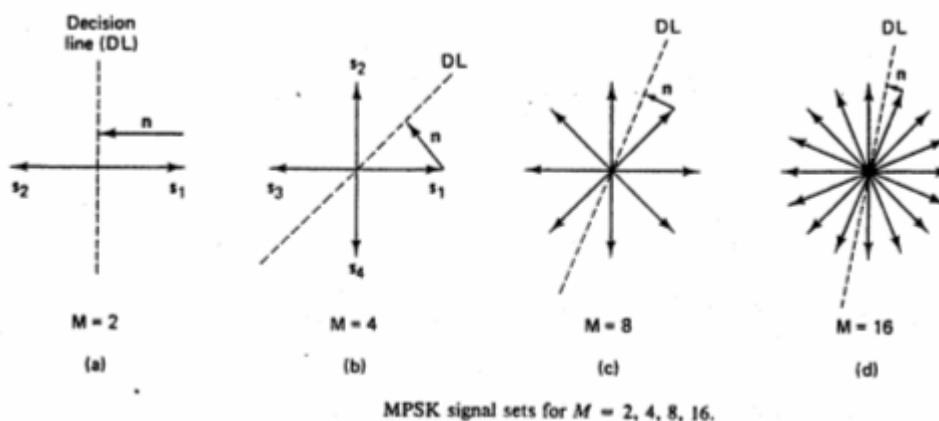


Atenção à posição dos blocos de atraso no emissor e no receptor!

PSK multifase (MPSK)

Devemos ter em conta os seguintes compromissos:

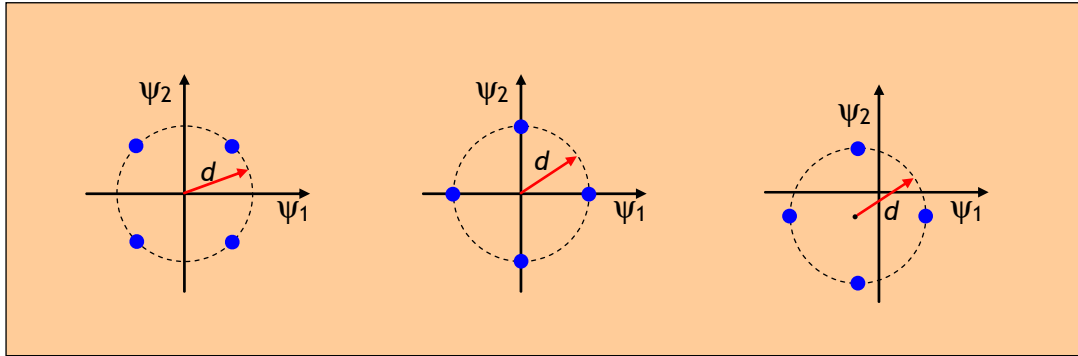
Largura de banda/Probabilidade de erro/Relação E_b/N_0



- \mathbf{n} representa o menor vector de ruído que provoca um erro na detecção
⇒ faz “cair” o vector recebido numa outra região de decisão.
- Considerando vectores de sinal com a mesma energia, o aumento de M torna o sistema mais vulnerável ao ruído.
- O vector de ruído mínimo diminui com o aumento de M .
- Para que o vector \mathbf{n} fosse o mesmo (em amplitude) com o aumento de M , teríamos de aumentar a energia do sinal.
- Num sistema de fase múltipla, à medida que M aumenta, uma melhor “performance” em largura de banda pode ser atingida à custa da degradação de P_b .
 - Se não quisermos degradar P_b teremos de aumentar E_b/N_0 .

Algo mais sobre probabilidades de erro

Invariância da probabilidade de erro à rotação e à translação



A probabilidade de símbolo errado é igual nas três constelações mas a terceira é a **menos eficiente** em energia (a energia **não é** mínima).

- A probabilidade de erro só depende da **forma** e **tamanho** das regiões de decisão e não da sua localização no espaço de sinal.
- Qualquer transformação que modifique a constelação do sinal sem alterar a **forma** e o **tamanho** das suas regiões de decisão **não muda** a probabilidade de erro.

⇒ Rotações, translações ou reflexões da constelação do sinal não mudam P_e (pelo menos nos desmoduladores óptimos).

- É desejável que a energia média do sinal seja mínima.

Energia média de uma constelação: $\langle E \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{s}_i\|^2$

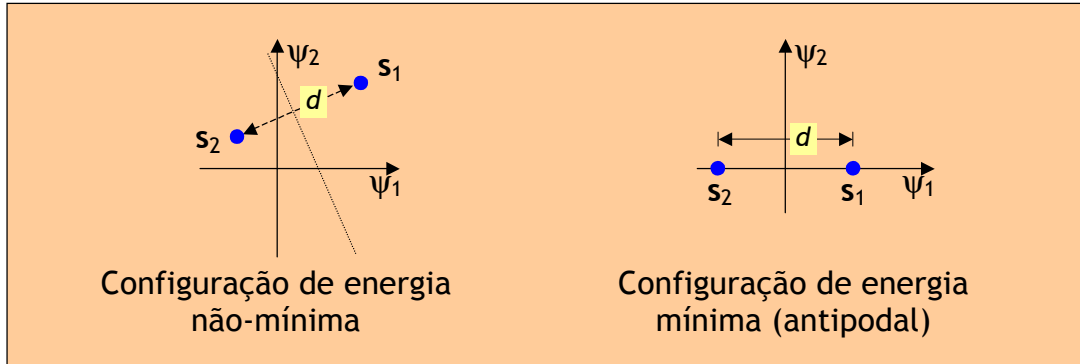
- A energia média é mínima se o “centro de gravidade” dos pontos de sinal estiver na origem, ou seja, se

$$\sum_{i=1}^M \mathbf{s}_i = 0$$

Probabilidades de erro: exemplos

Sinalização binária

1.



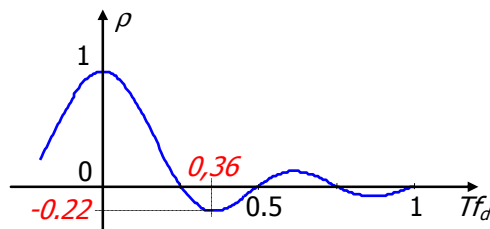
A probabilidade de erro é a mesma, a energia é que não!

2. Sinais que fazem subir ou descer de f_d a frequência f_c de uma portadora sinusoidal (sendo $(f_c \pm f_d)T \gg 1$)

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \cos 2\pi(f_c - f_d)t \\ s_2(t) &= A \cos 2\pi(f_c + f_d)t \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T$$

$$E_1 = E_2 = \int_0^T s_1^2(t) dt = \int_0^T s_2^2(t) dt = \frac{A^2}{2} T$$

$$\text{Coeficiente de correlação: } \rho = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt = \text{sinc}(4Tf_d)$$



$$\text{Valor mínimo de } \rho \approx -0,22 \Rightarrow P_b(\text{min}) \approx Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}(1-\rho)}\right) = Q\left(\sqrt{1,22 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Notas: se $f_d = 1/2T \Rightarrow \rho = 0 \rightarrow$ FSK de Sunde
 se $f_d = 1/4T \Rightarrow \rho = 0 \rightarrow$ MSK

Majorantes da probabilidade de símbolo errado

Considere-se uma constelação de M símbolos s_i (de probabilidades P_i) e ruído gaussiano branco aditivo (AWGN). A probabilidade média de erro vem dada no caso geral por

$$P_e = \sum_{i=1}^M P_i \underbrace{P(\text{decisão errada} \mid s_i \text{ enviado})}_{P_{e_i}} = \sum_{i=1}^M P_i P_{e_i}$$

Nem sempre é fácil de obter uma expressão exacta para P_e (depende, é claro, da constelação). Mesmo assim, é possível estabelecermos majorantes para essa probabilidade baseando-nos no seguinte facto, conhecido da teoria das probabilidades:

*A probabilidade de uma **união** finita de acontecimentos é inferior ou igual à soma das probabilidades dos acontecimentos individuais.*

Assim, e tomando como referência o símbolo s_i , teremos

$$P_{e_i} \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

($d_{ik} = \|s_i - s_k\|$ — distância euclidiana entre os pontos s_i e s_k)

O resultado é o chamado **majorante da união** ("union bound"):

$$P_e \leq \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M P_i Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (\text{expressão geral})$$

Se os símbolos forem equiprováveis ($P_i = 1/M$):

$$P_e \leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Majorantes da probabilidade de símbolo errado (cont.)

$$P_e \leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Seja $d_i = \min_{k \neq i} d_{ik}$ a distância entre \mathbf{s}_i e o seu vizinho mais próximo. Então

$$d_{ik} \geq d_i \text{ e } Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right) \leq Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right) \text{ e, portanto,}$$

$$P_e \leq \frac{M-1}{M} \sum_{i=1}^M Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (*)$$

Se $d_{\min} = \min_i d_i$ for a distância mínima entre quaisquer dois pontos da constelação então $d_i \geq d_{\min}$ para qualquer i . Logo,

$$P_e \leq \frac{M-1}{M} \sum_{i=1}^M Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right) \leq \frac{M-1}{M} M Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = (M-1) Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

que é um majorante mais simples mas mais frouxo que (*):

$$P_e \leq (M-1) Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (**)$$

Fórmula aproximada: dado que $Q(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$ também podemos escrever (embora mais grosseiramente) que

$$P_e \leq \frac{M-1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{d_{\min}^2}{4N_0}\right)$$

Majorantes da probabilidade de símbolo errado (cont.)

O majorante dos vizinhos mais próximos

$$P_e \leq N_{med} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

$$N_{med} = \sum_{i=1}^M P_i N_i \quad N_i - \text{n}^\circ \text{ de vizinhos que fazem fronteira com } \mathbf{s}_i$$

- Este majorante é bastante apertado (mais próximo do valor verdadeiro que o majorante (*) e o majorante da união (**)).
- Noutras constelações mais complicadas obtém-se uma aproximação de P_e (deixa de ser um majorante) considerando apenas os vizinhos que estão à distância mínima d_{\min} e não os que fazem fronteira:
 $P_e \approx \tilde{N}_{med} Q(d_{\min}/\sqrt{2N_0})$, onde \tilde{N}_{med} é o número médio de vizinhos a d_{\min} .
- Pode encontrar mais pormenores no Apêndice.

Caso especial: constelação com geometria simétrica

Se a constelação tiver uma geometria simétrica, como acontece em MPSK, todos os P_{e_i} são iguais. Assim, $P_e = P_{e_i} \sum_{i=1}^M P_i = P_{e_i}$ e a probabilidade média de símbolo errado é majorada por

$$P_e \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M Q(d_{ik}/\sqrt{2N_0}) \quad (\text{para qualquer } i)$$

Se $E_s/N_0 \gg 1$ só precisaremos de reter as parcelas mais significativas:

$$P_e \approx \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M_{\min}} Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad \left(\frac{E_s}{N_0} \gg 1\right)$$

em que M_{\min} é o número de sinais à distância d_{\min} do ponto \mathbf{s}_i .

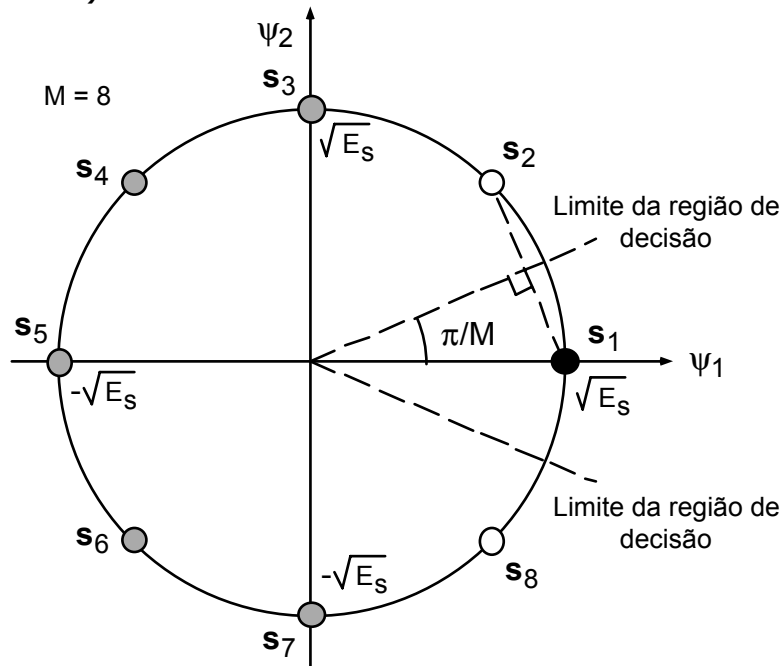
$$\text{Fórmula aproximada: } P_e \approx \frac{M_{\min}}{2\sqrt{\pi}} \exp(-d_{\min}^2/4N_0) \quad (E_s/N_0 \gg 1)$$

Probabilidade média de símbolo errado

Um exemplo de utilização do majorante da união

P.: Qual é o valor máximo da probabilidade média de símbolo errado em M-PSK, admitindo que $E_s/N_0 \gg 1$?

R.: (tomando $M = 8$)



- A constelação exibe geometria simétrica. Então podemos seleccionar um ponto qualquer. Seja \mathbf{s}_1 .
- Para o ponto \mathbf{s}_1 existem dois pontos que lhe estão mais próximos, \mathbf{s}_2 e \mathbf{s}_8 :
 $\Rightarrow M_{\min} = 2$.
- Distância euclidiana entre \mathbf{s}_1 e os pontos mais próximos:

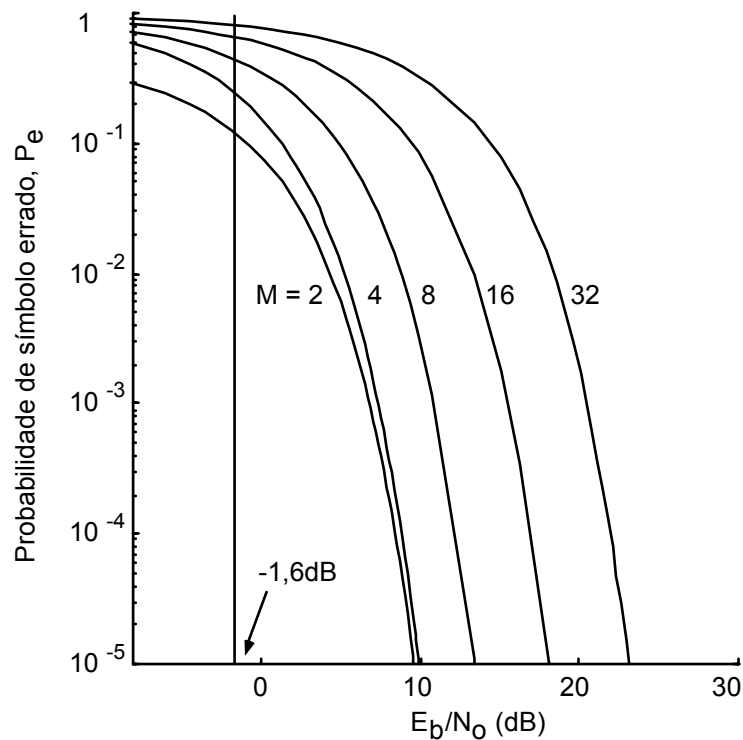
$$d_{12} = d_{18} = 2\sqrt{E_s} \sin \frac{\pi}{M}$$

- O majorante da união conduz à aproximação

$$P_e \approx Q\left(\frac{d_{12}}{\sqrt{2N_0}}\right) + Q\left(\frac{d_{18}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

Modulação digital MPSK

Probabilidade de símbolo errado em MPSK com detecção coerente



- O aumento do número de fases degrada a probabilidade de símbolo errado, se se mantiver E_b/N_0 constante.
- O aumento do número de fases não altera a largura de banda ocupada.
- Em contrapartida, como os símbolos contêm mais bits o aumento de M permite usar débitos binários mais elevados, isto é, a eficiência espectral aumenta.

Modulações digitais com M estados

Probabilidade de símbolo errado com detecção coerente

- **MPSK**

- Sinalização PSK com M fases

- Detecção coerente

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

- Sinais equiprováveis

- **MFSK**

- Sinalização ortogonal

- Detecção coerente

$$P_e \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

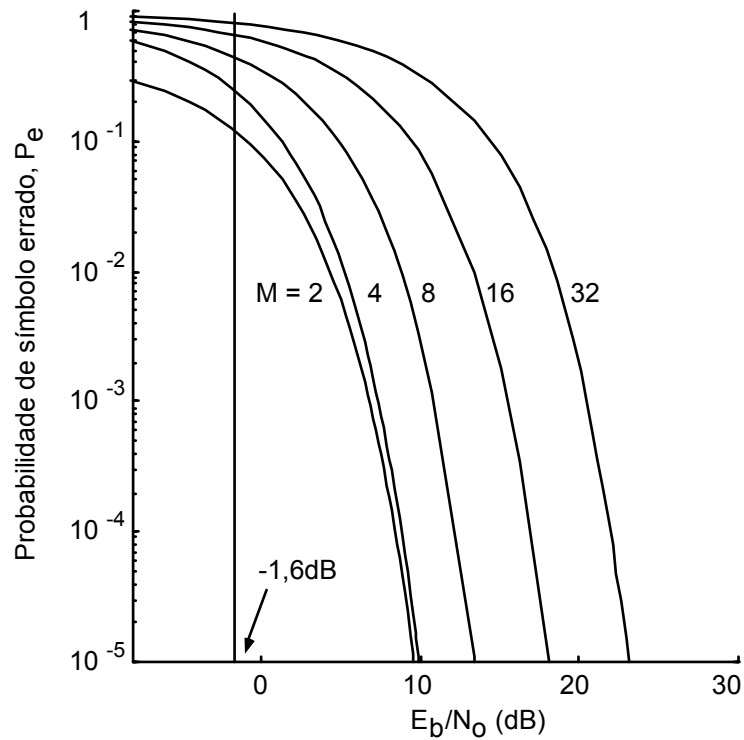
- Sinais equiprováveis

- A energia de cada símbolo, E_s , está relacionada com a energia de cada bit, E_b , através de

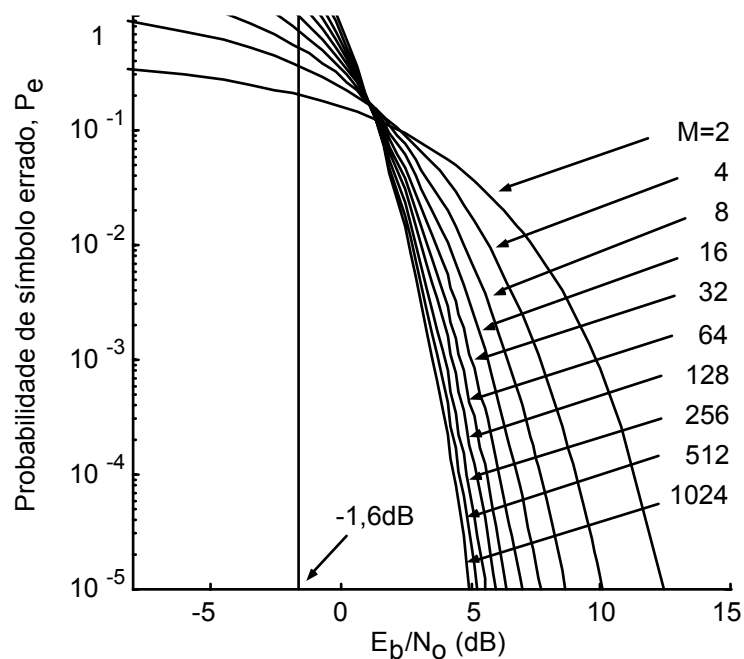
$$E_s = E_b \log_2 M = kE_b$$

Probabilidade de símbolo errado em modulações não-binárias

Probabilidade de símbolo errado em MPSK com detecção coerente



Probabilidade de símbolo errado em MFSK com detecção coerente



Comparação entre a probabilidade de bit errado e a probabilidade de símbolo errado

Sinalização multifase (MPSK)

- Cada um dos M símbolos de $k = \log_2 M$ bits não está à mesma distância euclidiana dos outros, ao contrário do que acontece em MFSK.
- Se um símbolo recebido estiver errado o mais provável é que o símbolo verdadeiro lhe seja adjacente no espaço de sinal.
- Num símbolo errado nem todos os bits poderão estar errados. Para minimizar o número de bits errados usa-se a *codificação de Gray*, na qual as palavras binárias correspondentes a símbolos adjacentes diferem entre si em apenas um bit.
- Numa palavra binária de k bits é mais provável haver apenas um bit errado do que dois, ou do que três, etc.:

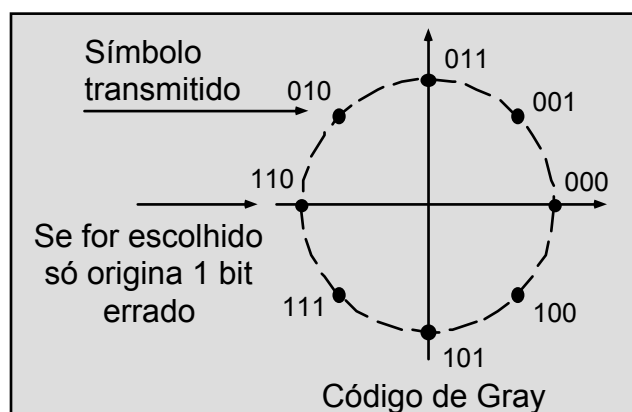
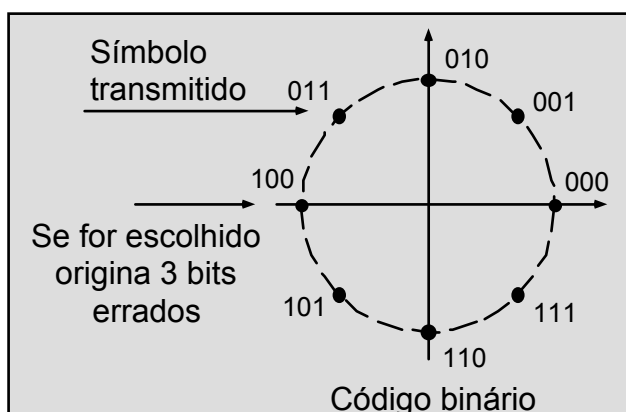
$$P(1, k) > P(2, k) > P(3, k) > \dots$$

($P(i, k)$ — probabilidade de haver i erros em k bits)

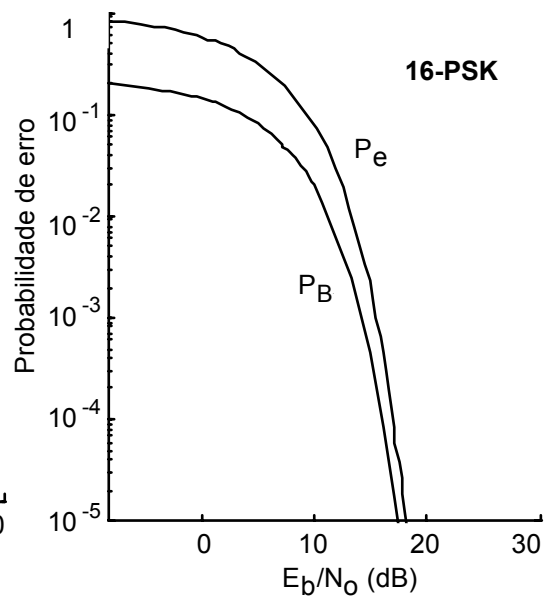
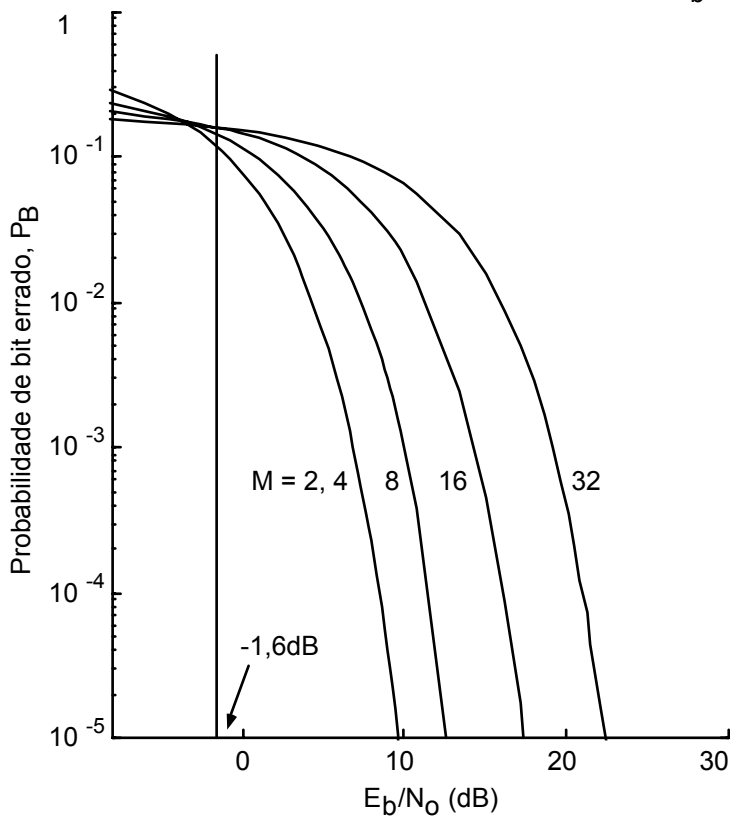
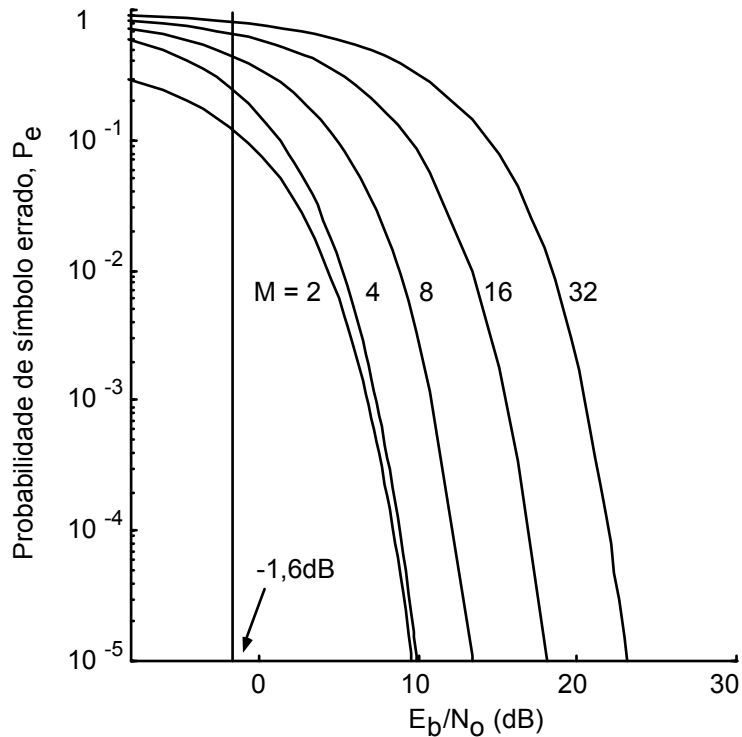
- A proporção de bits errados em símbolos errados é, portanto, de cerca de $1/k$. Logo,

$$P_B \approx \frac{P_e}{\log_2 M} = \frac{P_e}{k} \quad (\text{se } P_e \ll 1) \quad (\text{com código de Gray})$$

Exemplo: $M = 8, k = 3$



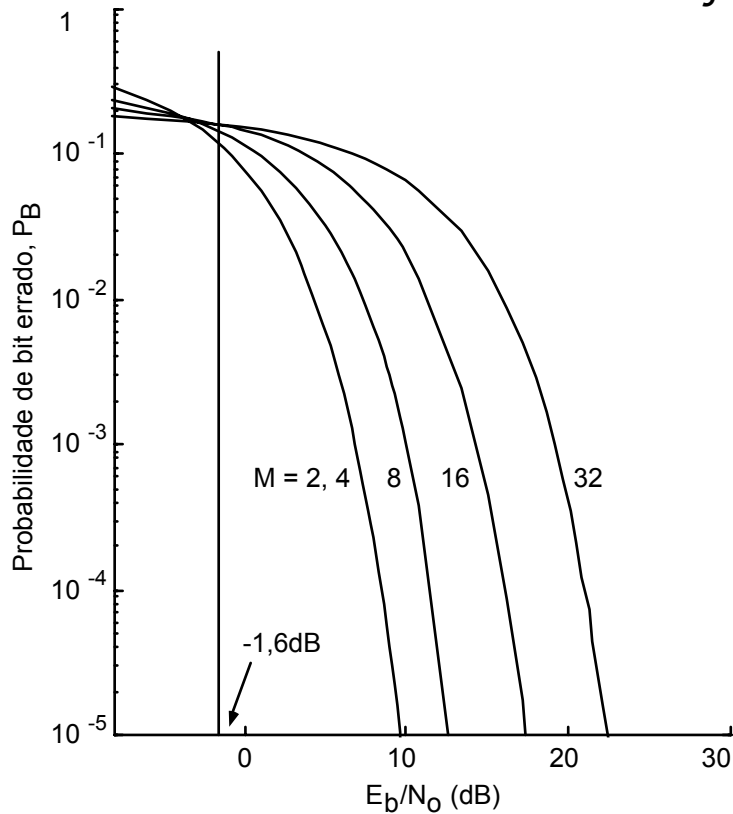
Comparação entre P_b e P_e em MPSK



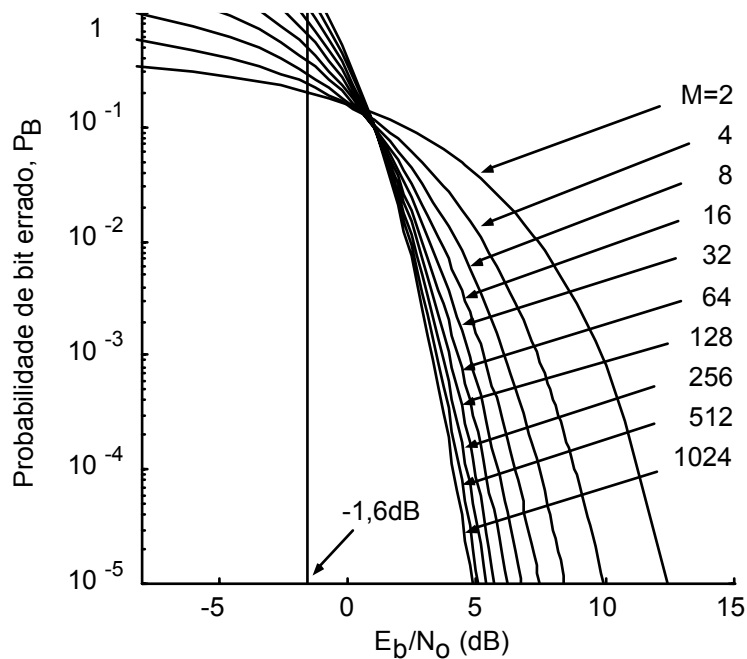
Um facto a salientar é o das probabilidades de bit errado em BPSK e QPSK serem iguais.

Probabilidade de bit errado em modulações não-binárias

Probabilidade de bit errado em MPSK com detecção coerente



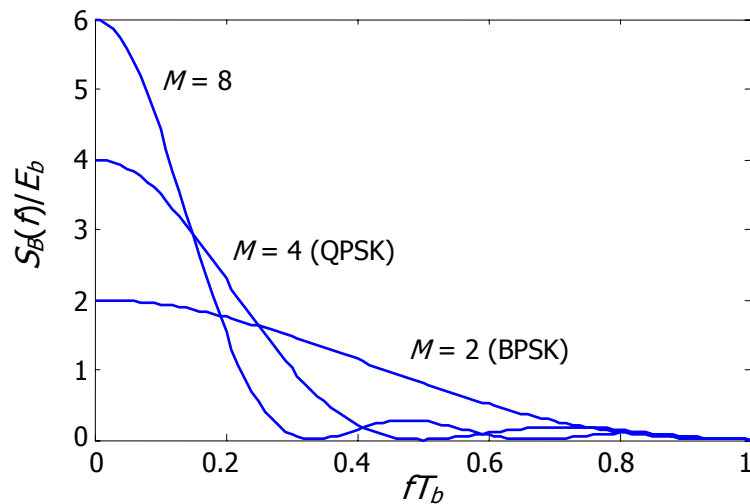
Probabilidade de bit errado em MFSK com detecção coerente



Espectros de potência de sinais MPSK

Espectros de potência de sinais MPSK ($M = 2, 4$ e 8)

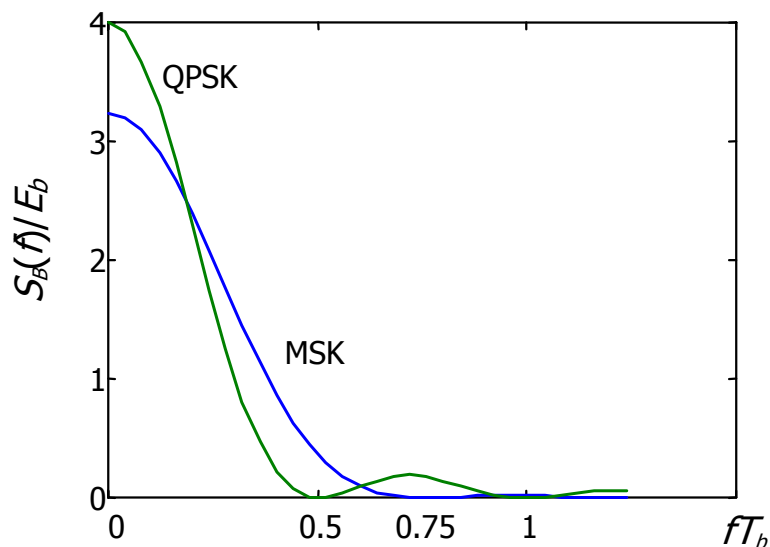
$$S_B(f) = 2E_b \log_2 M \operatorname{sinc}^2(T_b f \log_2 M) \quad (\text{MPSK})$$



Comparação dos espectros de potência de sinais QPSK e MSK (Minimum Shift Keying)

$$S_B(f) = 4E_b \operatorname{sinc}^2(2T_b f) \quad (\text{QPSK})$$

$$S_B(f) = \frac{32E_b}{\pi^2} \left[\frac{\cos(2\pi T_b f)}{16T_b^2 f^2 - 1} \right]^2 \quad (\text{MSK})$$



Apêndice: majorantes da probabilidade de símbolo errado

Considere-se uma constelação de M símbolos \mathbf{s}_i (de probabilidades P_i) e ruído gaussiano branco aditivo (AWGN). A probabilidade média de símbolo errado é igual a

$$P_e = \sum_{i=1}^M P_i \underbrace{P(\text{decisão errada} \mid s_i \text{ enviado})}_{P_{e_i}} = \sum_{i=1}^M P_i P_{e_i} \quad (1)$$

Consoante a constelação, pode ser difícil obter uma expressão exacta para P_e . É possível, contudo, estabelecer limites superiores, ou majorantes, para essa probabilidade baseando-nos no seguinte facto, conhecido da teoria das probabilidades:

*A probabilidade de uma **união** finita de acontecimentos é inferior ou igual à soma das probabilidades dos acontecimentos individuais.*

Exemplo: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Se acontecimentos A e B forem independentes: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Sejam ou não independentes: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

Assim, e tomando como referência o símbolo \mathbf{s}_i , teremos

$$P_{e_i} = P\left[\bigcup_{k \neq i} (\mathbf{s}_k \text{ estimado} \mid \mathbf{s}_i \text{ enviado})\right] \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (2)$$

$d_{ik} = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\|$ — distância euclidiana entre os pontos \mathbf{s}_i e \mathbf{s}_k

$P(s_k \text{ estimado} \mid s_i \text{ enviado}) = Q(d_{ik}/\sqrt{2N_0})$

O resultado é o **majorante da união** ("union bound"):

$$P_e \leq \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M P_i Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (3)$$

Em seguida vamos encontrar vários limites superiores derivados desta expressão geral.

Apêndice: majorantes da probabilidade de símbolo errado (cont.)

$$P_e \leq \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M P_i Q\left(d_{ik}/\sqrt{2N_0}\right)$$

1. Seja $d_i = \min_{k \neq i} d_{ik}$ a distância entre \mathbf{s}_i e o seu vizinho mais próximo. Então $d_{ik} \geq d_i$, $Q\left(d_{ik}/\sqrt{2N_0}\right) \leq Q\left(d_i/\sqrt{2N_0}\right)$ e

$$P_e \leq (M-1) \sum_{i=1}^M P_i Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (4)$$

2. Se $d_{\min} = \min_i d_i$ for a distância mínima entre quaisquer dois pontos então $d_i \geq d_{\min}$ e $Q\left(d_i/\sqrt{2N_0}\right) \leq Q\left(d_{\min}/\sqrt{2N_0}\right)$. Logo,

$$P_e \leq (M-1) \sum_{i=1}^M P_i Q\left(d_i/\sqrt{2N_0}\right) \leq (M-1) Q\left(d_{\min}/\sqrt{2N_0}\right)$$

ou

$$P_e \leq (M-1) Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (5)$$

Este majorante (muitas vezes designado por "majorante da união", também) é mais frouxo que o anterior.

3. Encontramos um limite superior mais apertado que o da Eq. (2) se considerarmos as regiões R_k que fazem fronteira (são adjacentes) com cada símbolo \mathbf{s}_i :

$$P_{e_i} \leq \sum_{k \in A_i} Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right), \quad A_i = \{k : R_k \text{ faz fronteira com } R_i\} \quad (6)$$

A_i é o conjunto dos valores de k para os quais a região de decisão de \mathbf{s}_k é adjacente à região de decisão de \mathbf{s}_i . Substituindo em (1):

$$P_e = \sum_{i=1}^M P_i P_{e_i} \leq \sum_{i=1}^M P_i \sum_{k \in A_i} Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (7)$$

Apêndice: majorantes da probabilidade de símbolo errado (cont.)

4. Se N_i for o número de elementos de A_i (isto é, o número de fronteiras de \mathbf{s}_i) o somatório de funções Q tem N_i parcelas. Como $Q(d_{ik}/\sqrt{2N_0}) \leq Q(d_i/\sqrt{2N_0})$ (visto $d_{ik} \geq d_i$), então

$$\sum_{i=1}^M P_i \sum_{k \in A_i} Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right) \leq \sum_{i=1}^M P_i N_i Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

e obtemos um novo majorante:

$$P_e \leq \sum_{i=1}^M P_i N_i Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (8)$$

5. Mas $d_i \geq d_{\min}$ e, portanto, $Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right) \leq Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$, pelo que

$$P_e \leq \sum_{i=1}^M P_i N_i Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right) \leq Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \sum_{i=1}^M P_i N_i$$

Definindo $N_{med} = \sum_{i=1}^M P_i N_i$ como o número médio de vizinhos adjacentes (fronteirços)

obtemos finalmente o **majorante dos vizinhos mais próximos**:

$$P_e \leq N_{med} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (9)$$

Em regra, quanto mais apertado for o majorante mais complicada é a sua expressão.

Apêndice: majorantes da probabilidade de símbolo errado (cont.)

Noutras constelações mais complexas, em que não é fácil estabelecer as regiões de decisão, obtém-se uma aproximação de P_e (atenção: deixa de ser um majorante!) considerando apenas os vizinhos que estão à distância mínima d_{\min} e não os que fazem fronteira. É a

Aproximação dos vizinhos mais próximos:

$$P_e \approx \tilde{N}_{med} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (10)$$

\tilde{N}_{med} – número médio de vizinhos à distância d_{\min} .

Caso especial: constelação com geometria simétrica

Se a constelação tiver uma geometria simétrica, como acontece em MPSK, todos os P_{e_i} são iguais. Assim, $P_e = P_{e_i} \sum_{i=1}^M P_i = P_{e_i}$ e

$$P_e \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad \forall_i$$

Se $\frac{E_s}{N_0} \gg 1$ só retemos as parcelas mais significativas:

$$P_e \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M_{\min}} Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad \left(\frac{E_s}{N_0} \gg 1\right)$$

em que M_{\min} é o número de sinais à distância d_{\min} do ponto \mathbf{s}_i .

Apêndice: resumo de majorantes da probabilidade de símbolo errado

$$\begin{aligned}
 P_e &\leq \underbrace{\sum_{i=1}^M P_i \sum_{k \in A_i} Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right)}_{(7)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^M P_i N_i Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right)}_{(8)} \leq \underbrace{N_{med} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)}_{(9)} \leq \\
 &\leq \underbrace{(M-1) \sum_{i=1}^M P_i Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right)}_{(4)} \leq \underbrace{(M-1) Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)}_{(5)}
 \end{aligned}$$

Com símbolos equiprováveis ($P_i = 1/M$):

$$\begin{aligned}
 P_e &\leq \frac{1}{M} \underbrace{\sum_{i=1}^M \sum_{k \in A_i} Q\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right)}_{(7)} \leq \frac{1}{M} \underbrace{\sum_{i=1}^M N_i Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right)}_{(8)} \leq \underbrace{N_{med} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)}_{(9)} \leq \\
 &\leq \underbrace{\frac{M-1}{M} \sum_{i=1}^M Q\left(\frac{d_i}{\sqrt{2N_0}}\right)}_{(4)} \leq \underbrace{(M-1) Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)}_{(5)}
 \end{aligned}$$

Expressões mais usadas:

$$P_e \leq (M-1) Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad \text{majorante da união}$$

$$P_e \leq N_{med} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad \text{majorante dos vizinhos mais próximos}$$

$$P_e \approx \tilde{N}_{med} Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad \text{aproximação dos vizinhos mais próximos}$$