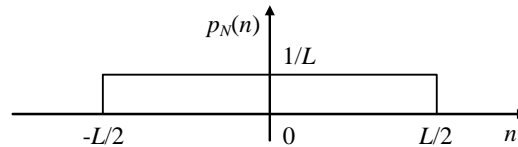
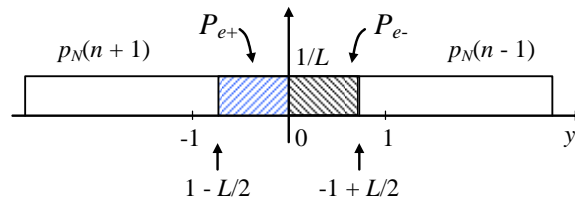


Resolução

1. A fdp do ruído é uniforme, de valor $1/L$:



Como $y = x + n = \pm 1 + n$ teremos então, se $L \geq 2$:



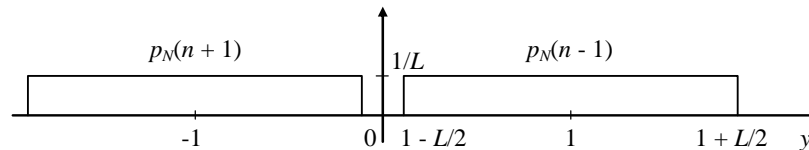
O critério de decisão óptimo é

$$p_N(n-1) \geq p_N(n+1) \Rightarrow \hat{x} = +1$$

$$p_N(n-1) < p_N(n+1) \Rightarrow \hat{x} = -1$$

Não há um limiar de decisão óptimo único. Podemos considerar $\gamma = 0$, para o qual $P_{e+} = P_{e-}$

Se for $L < 2$ a probabilidade de erro é nula ($P_e = 0$) pois as fdp's não se sobrepõem:



- a) $P_e \neq 0$ se $L \geq 2$. Em concreto e tendo em conta a equiprobabilidade dos bits ($P_{+1} = P_{-1} = 1/2$) e também $P_{e+} = P_{e-}$:

$$P_e = P_{+1}P_{e+} + P_{-1}P_{e-} = P_{e-} = \frac{1}{L} \left(-1 + \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{L}$$

Assim,

$$P_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{L} < 10^{-6} \Rightarrow L < \frac{2}{1 - 2 \cdot 10^{-6}}$$

b) Potência do sinal: $P = E[u^2] = 1$
 " " Ruído: $\sigma^2 = E[(n - \bar{n})^2] = E[n^2] =$
 $= \int_{-L/2}^{L/2} n^2 p_N(n) dn = 2 \int_0^{L/2} \frac{n^2}{L} dn = \frac{L^2}{12}$
 Logo, $S/N = \frac{P}{\sigma^2} = \frac{1}{L^2/12} = \frac{12}{L^2}$

c) Não há erros ($P_e = 0$) se $L < 2$. No limite ($L = 2$)
 temos $(\frac{S}{N})_{\min} = \frac{12}{L_{\max}^2} = 3$. Abaixo deste valor é $P_e > 0$.

d) Voltamos a usar $L = 2$ como valor limite.
 Potência do sinal 4-PAM: $P = \frac{1}{4}(-3)^2 + \frac{1}{4}(-1)^2 + \frac{1}{4}(1)^2 + \frac{1}{4}(3)^2 = 5$
 $\Rightarrow (\frac{S}{N})_{\min} = (\frac{P}{\sigma^2})_{\min} = \frac{5}{L^2/12} = 15$
 $\leftarrow L=2$

Em 4-PAM a relação S/N tem de ser maior que em 2-PAM.

2. ISI e algoritmo de Viterbi.

b)

Canal

AWGN

TRELIÇA

Entrada do canal	Estado corrente	Estado seguinte	Saída do canal
-1	-1	-1	$-(1+\alpha)$
+1	-1	+1	$1-\alpha$
-1	+1	-1	$-(1-\alpha)$
+1	+1	+1	$1+\alpha$

EST. actual -1 - (1+α) Estado seguinte -1

1-α -(1-α)

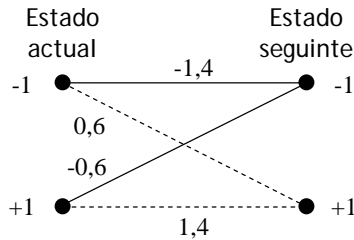
+1 1+α +1

— bit -1 à entrada
 --- bit +1 " "

a) Sem o algoritmo de Viterbi a estimativa por decisões rígidas seria feita “olhando” apenas ao sinal (+ ou -) da sequência recebida $r_k = 0,6 \quad 0,1 \quad -1,6 \quad 0,8 \quad -0,5$:

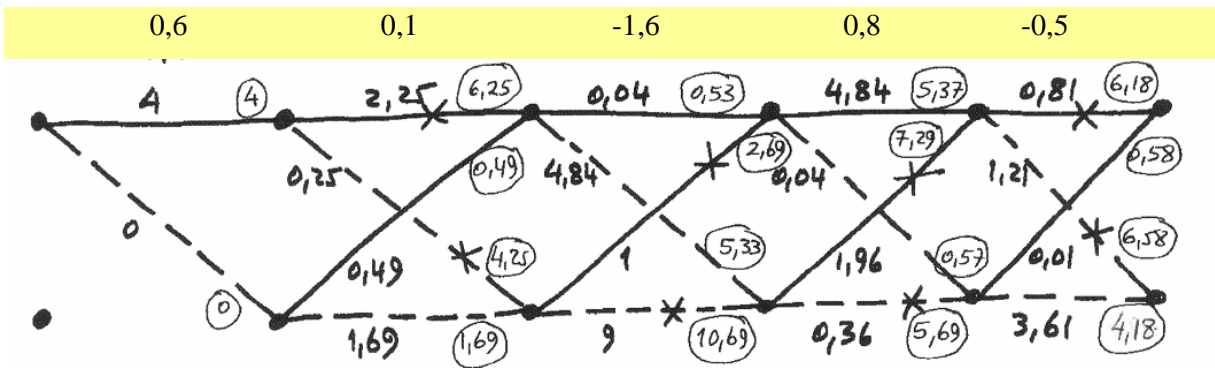
+1 **+1** -1 +1 -1 (decisão errada no segundo bit)

c) Seja então $\alpha = 0,4$. De acordo com a tabela anterior as saídas possíveis do canal são $\pm 1,4$ e $\pm 0,6$ pelo que a treliça correspondente é a seguinte:



Na treliça do receptor marcamos as distâncias euclidianas quadráticas:

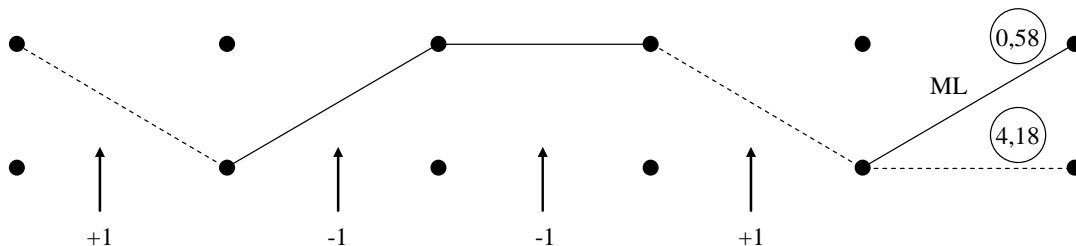
Sequência recebida:



(xx) — métrica acumulada

Sobrevivem os ramos com menor métrica acumulada.

Situação na treliça ao fim dos cinco símbolos recebidos:



O percurso de máxima verossimilhança tem métrica acumulada 0,58 (a menor das duas métricas).

A sequência estimada é

+1 -1 -1 +1 -1 (sem erros!)

3. a) As duas funções-base de que necessitamos são:

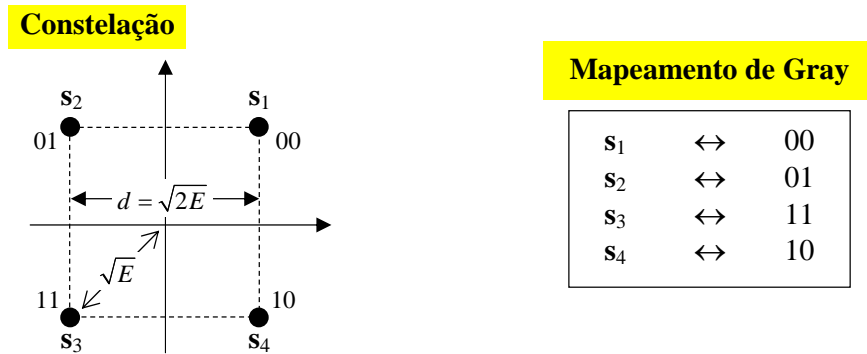
$$\psi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T} & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & T/2 < t \leq T \end{cases} \Rightarrow \|\psi_1\| = 1$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq T/2 \\ \sqrt{2/T} & T/2 < t \leq T \end{cases} \Rightarrow \|\psi_2\| = 1$$

Assim, os vectores representativos dos símbolos $s_i(t)$ são

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{E/2} \\ \sqrt{E/2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{E/2} \\ \sqrt{E/2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{E/2} \\ -\sqrt{E/2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{E/2} \\ -\sqrt{E/2} \end{bmatrix}$$

(exemplo: $s_{11} = \int_0^T s_1(t)\psi_1(t)dt = \int_0^{T/2} A\sqrt{2/T}dt = \sqrt{A^2T/2} = \sqrt{E/2}$, em que E é a energia de cada sinal $s_i(t)$)



d) Trata-se de uma constelação QPSK. Fazendo como nos Apontamentos obtemos:

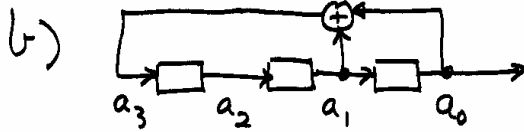
$$P_c = P_{c_1} P_{c_2} = (1-p)^2 \quad (\text{com } p = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right))$$

$$P_e = 1 - P_c = 2p - p^2 = 2Q\left(\sqrt{E/N_0}\right) - Q^2\left(\sqrt{E/N_0}\right)$$

Ora $E/N_0 = A^2T/N_0 = 4$, logo $P_e = 2Q(2) - Q^2(2)$.

4. $p(x) = x^3 + x + 1$, período = 7. ⑤

a) Período de seqüências de comprimento máximo: $N = 2^n - 1$.
 Neste caso $n = 3 \Rightarrow N = 2^3 - 1 = 7 \Rightarrow$ e' seq. de comprimento máximo.



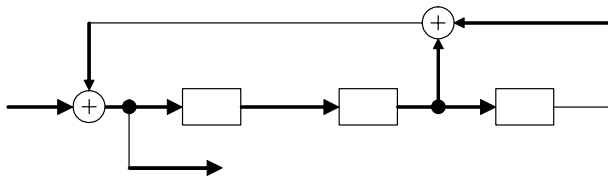
Conteúdo inicial:
 $a_2 a_1 a_0 = 001$

Conteúdo				Saída
a_3	a_2	a_1	a_0	a_0
1	0	0	1	1
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1
		\vdots		\vdots

} Período

c) Número de polinômios primitivos: $\frac{\phi(N)}{n} = \frac{\phi(7)}{3} = 2$

d) Baralhador:



5. $R = 500$ kbits/s

a) $B = R/2 = 250$ kHz.

b) Sequência recebida: $r_k = -1,3 \quad -0,4 \quad -0,5 \dots$

O critério de decisão é

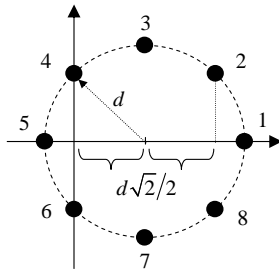
$$\begin{cases} |r_k| \leq 1 & \Rightarrow \hat{b}_k = 1 \\ |r_k| > 1 & \hat{b}_k = 0 \end{cases}$$

pois no codificador temos $y_k = \pm 2$ se $b_k = 0$ e $y_k = 0$ se $b_k = 1$. Portanto, a sequência estimada é

0111101001

c) Com inversão de fase a sequência binária estimada é a mesma pois, estando a usar um codificador diferencial (ou pré-codificador), a fase é irrelevante. Podíamos chegar à mesma conclusão reparando que no critério de decisão só o módulo do sinal recebido interessa.

6. a)



$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \left[d + \frac{d\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right]^T & \mathbf{s}_5 &= \left[\frac{d\sqrt{2}}{2} - d \quad 0 \right]^T \\ \mathbf{s}_2 &= \left[d\sqrt{2} \quad \frac{d\sqrt{2}}{2} \right]^T & \mathbf{s}_6 &= \left[0 \quad -\frac{d\sqrt{2}}{2} \right]^T \\ \mathbf{s}_3 &= \left[\frac{d\sqrt{2}}{2} \quad d \right]^T & \mathbf{s}_7 &= \left[\frac{d\sqrt{2}}{2} \quad -d \right]^T \\ \mathbf{s}_4 &= \left[0 \quad \frac{d\sqrt{2}}{2} \right]^T & \mathbf{s}_8 &= \left[d\sqrt{2} \quad -\frac{d\sqrt{2}}{2} \right]^T \end{aligned}$$

Portanto,

$$E_1 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} d^2$$

$$E_4 = E_6 = \frac{d^2}{2}$$

$$E_2 = E_8 = 2d^2 + \frac{d^2}{2} = \frac{5d^2}{2}$$

$$E_5 = \left(\frac{\sqrt{2}-2}{2} \right)^2 d^2$$

$$E_3 = E_7 = \frac{d^2}{2} + d^2 = \frac{3d^2}{2}$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 E_i = \frac{1}{8} \left[\frac{3+2\sqrt{2}}{2} d^2 + 5d^2 + 3d^2 + d^2 + \frac{3-2\sqrt{2}}{2} d^2 \right] = \frac{3}{2} d^2$$

A constelação 8PSK não está centrada na origem, logo, não é um sinal de energia mínima (para o qual seria $\langle E \rangle = d^2$).

Constelação 8-QAM:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8} [4d^2 + 4 \times 2d^2] = \frac{3}{2} d^2 \quad (\text{igual à energia média anterior})$$

Ao contrário do anterior este sinal tem energia mínima.

- b) Se a constelação de 8PSK sofrer uma translação de modo a ficar centrada nos eixos a probabilidade de símbolo errado não se altera. A constelação 8-QAM apresentada é obtida dessa constelação transladada afastando dos vizinhos os quatro pontos dos cantos. Portanto, em 8-QAM a probabilidade P_e é menor (embora apenas ligeiramente).

(Note-se que ambas as constelações apresentadas têm a mesma energia média)

- c) $\langle E \rangle / N_0 \gg 1 \Rightarrow P_e \approx N_{med} Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$, sendo N_{med} o nº médio de vizinhos mais próximos.

Em ambos os casos é $N_{med} = 2$.

Constelação 8-QAM:

$$d_{min} = d \Rightarrow P_e \approx 2Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{\langle E \rangle}{3N_0}}\right)$$

Constelação 8PSK:

$d_{min} = 2d \sin \pi/8 < d$. Como a função $Q(\)$ é uma função decrescente teremos

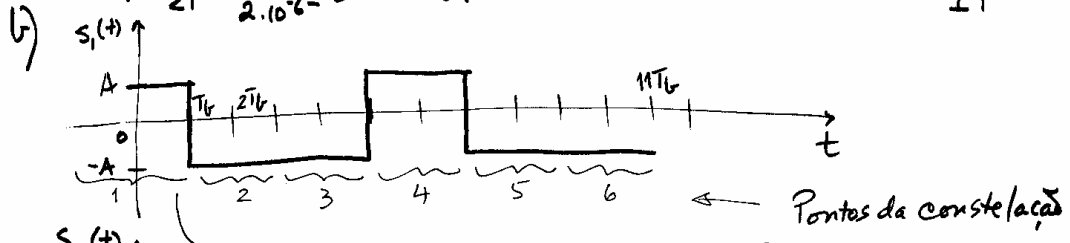
$$P_e(8PSK) \approx 2Q\left(\frac{2d \sin \pi/8}{\sqrt{2N_0}}\right) > 2Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = P_e(8QAM)$$

Este resultado confirma o resultado da alínea anterior.

7. $s(t) = \underbrace{\sqrt{E_b} \cos \theta(0)}_{s_1(t)} \psi_1(t) - \underbrace{\sqrt{E_b} \sin \theta(T_b)}_{s_2(t)} \psi_2(t)$

$\Rightarrow s_1(t) = \sqrt{E_b} \cos \theta(0)$
 $s_2(t) = -\sqrt{E_b} \sin \theta(T_b)$
 $\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E_b} \cos \theta(0) \\ -\sqrt{E_b} \sin \theta(T_b) \end{bmatrix}$

a) $\Delta f = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} = 500 \text{ kHz}$

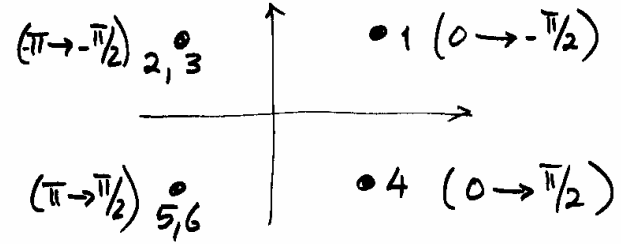


Ponto 1: $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} A \cos \theta(0) &= A \Rightarrow \cos \theta(0) = 1 \\ -A \sin \theta(T_b) &= A \Rightarrow \sin \theta(T_b) = -1 \end{aligned}$
 $\theta(0) = 0$
 $\theta(T_b) = -\pi/2$

Assim, o ponto 1 da constelação, de coordenadas $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$, vai corresponder a uma transição de fase de $\theta(0) = 0$ no instante $t = 0$ para $\theta(T_b) = -\pi/2$ no instante $t = T_b$.

- De igual modo para os outros intervalos de tempo:
- Ponto 2: $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A \\ A \end{bmatrix} \Rightarrow$ vai de $-\pi$ a $-\pi/2$ (2º quadrante)
 - Ponto 3: idem
 - Ponto 4: $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \Rightarrow$ vai de 0 a $\pi/2$ (4º quadrante)
 - Ponto 5: $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A \\ -A \end{bmatrix} \Rightarrow$ vai de π a $\pi/2$ (3º quadrante)
 - Ponto 6: idem

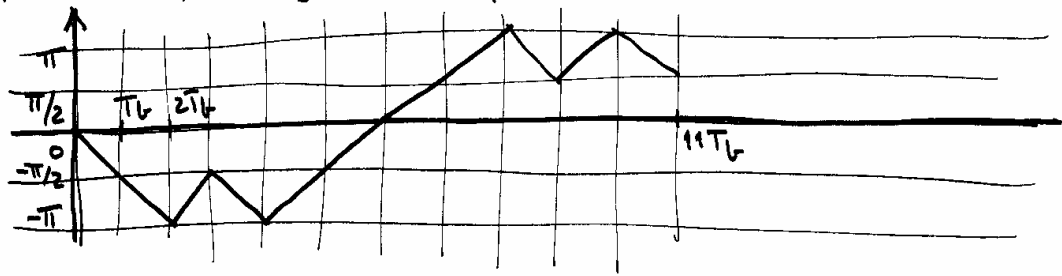
Na constelação MSK teremos então:



Fazendo $t_k = kT$ e $\hat{\theta}(kT) = \hat{\theta}_k$ podemos construir a tabela seguinte

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\hat{\theta}_k$	0	$-\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$\pi/2$	π	$\pi/2$
	Ponto 1		2		3		4		5		6	

A treliça de fases é, portanto, a seguinte:



- c) Diminuição da fase \rightarrow bit 0
- Aumento da fase \rightarrow bit 1

\Rightarrow Seq. estimada: 00101111010