Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Ordem N

AM3—LEEC

MMF MRP

2003-2004

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)}$$

a_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ e f contínuas em $I \subset \Re$

Defina-se X:

$$\begin{array}{rcl} X & : & I \longrightarrow \Re^n \\ & & t \rightsquigarrow (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{array}$$

tal que

$$\begin{cases} x_1(t) & = & y(t) \\ x_2(t) & = & y'(t) \\ \ldots & & \\ x_n(t) & = & y^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

Então

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_3(t) \\ \ldots & & \\ \dot{x}_n(t) & = & y^{(n)}(t) \end{cases}$$

Mas

$$y^{(n)}(t) =$$

$$= -a_{n-1}(t)y^{(n-1)} - \ldots - a_1(t)y' - a_0(t)y + f(t)$$

$$= -a_{n-1}x_n - \ldots - a_1x_2 - a_0x_1 + f$$

e vem

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_3(t) \\ \ldots & & \\ \dot{x}_n(t) & = & -a_{n-1}x_n - \ldots - a_1x_2 - a_0x_1 + f \end{cases}$$

Notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t)}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t)}$$

Sistema linear de Equações Diferenciais

Sistema linear de ED

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + f(t)$$

A, função matricial e f função vectorial, quaisquer

Solução de um sistema de ED

- $D \subset \Re$, $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$
- $t_0 \in \overset{\circ}{D}$
- $x_0 \in \Re^n$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

A, função matricial com $A(t) \in \mathcal{M}_{n \times n}$
f, função vectorial com $f(t) \in \Re^n$.
A, f funções contínuas em D

solução do sistema é uma função VVR

$$x : D \longrightarrow \Re^n$$

derivável, tal que x satisfaz o sistema.

Solução particular

solução do sistema de ED satisfazendo a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Operadores Diferenciais e Sistemas Lineares

Lembrar:

• $C^1(\Re;\Re^n)$ espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$, continuamente deriváveis, é um espaço linear sobre o corpo dos reais

• $x, z \in C^1(\Re;\Re^n)$ linearmente independentes se e só se

$$\alpha x(t) + \beta z(t) = 0 \ \forall t \in \Re \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Resultado:

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in C^1(\Re;\Re^n)$ e $W(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$.
Se

$$\det W(t) \neq 0 \quad \text{para algum } t \in \Re$$

Então
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearmente independentes

Operadores Diferenciais e Sistemas Lineares

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t)}$$

Defina-se:

$$D : C^1(\Re; \Re^n) \longrightarrow C^0(\Re; \Re^n), \quad Dx = \dot{x}$$

$$L : C^1(\Re, \Re^n) \longrightarrow C^0(\Re, \Re^n), \quad L = D - A \cdot I$$

Então:

- $Lx = \dot{x} - Ax, \quad \forall x \in C^1(\Re, \Re^n)$
- $x \in C^1(\Re, \Re^n)$ é solução do sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ se e só se $Lx(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Conclusão: o conjunto das soluções $\mathcal{S}$ do sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é igual ao núcleo do operador linear L:

$$\mathcal{N}(L) = \mathcal{S}$$

Questão: Como determinar o núcleo desse operador?

Exponencial de Matrizes

Lembrar:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

<u>Exponencial de uma matriz A</u>

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}$

$$exp(A) = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

- Uma série de matrizes é convergente se forem convergentes todas as $n \times n$ séries geradas pelas entradas das matrizes intervenientes na soma

- Sendo convergente, uma série de matrizes é ainda uma matriz

- $e^A \in \mathcal{M}_{n \times n}$

Exercício: Determine e^A quando $A = I_n$.
E se $A = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$?

Exponencial da função matricial At

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e $t \in \Re$

$$\begin{aligned} exp(At) &= e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \ldots + \frac{(At)^n}{n!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \end{aligned}$$

• Entradas da matriz são funções. A série de matrizes é convergente se forem convergentes todas as $n \times n$ séries funcionais geradas pelas entradas das matrizes intervenientes na soma

• Sendo convergente, uma série de funções matriciais é ainda uma função matricial

Exercício: Determine e^{At} quando $A = I_n$.
E se $A = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$?

Resultado:

A série que representa a função matricial e^{At} é convergente qualquer que seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

Propriedades da matriz e^{At}

A1: A matriz e^{At} é **sempre não singular**

A2: $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$

A3: $e^{At}e^{-At} = I$

A4: $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$

A5: $Ae^{At} = e^{At}A$

Existência de solução de um Sistema Linear ED

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t)}$$

A, matriz de dimensão $n \times n$, com entradas reais.

- **Existência e unicidade de solução**

Dada a condição inicial

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in \Re \; x_0 \in \Re^n$$

Existe **uma e uma só** solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

e essa solução é uma função vectorial da forma

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

- **Solução geral:**

$$x(t) = e^{At}c, \; c \in \Re^n$$

Demonstração

Para simplificar a notação, consideramos $t_0 = 0$.

Passo 1: $x(t) = e^{At}x_0$ é solução.

- $x(0) = e^{A \cdot 0}x_0 = x_0$ satisfaz condição inicial.
- $\dot{x}(t) = Ae^{At}x_0 = Ax(t)$

Passo 2: Esta solução é única.

Suponhamos que existe uma outra solução $\tilde{x} \neq x$ tal que $\tilde{x}(0) = x_0$. Seja

$$\delta(t) = e^{-At}\left[x(t) - \tilde{x}(t)\right]$$

Então $\delta(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= -A\delta(t) + e^{-At}\left[Ax(t) - A\tilde{x}(t)\right] \\ &= -A\delta(t) + Ae^{-At}\left[x(t) - \tilde{x}(t)\right] \\ &= -A\delta(t) + A\delta(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

δ tem derivada nula e é zero em $t = 0$. Logo

$$\delta(t) \equiv 0$$

o que é o mesmo que dizer que

$$x(t) = \tilde{x}(t) \quad \forall t \in \Re$$

Conclusão: a solução é única.

Dimensão do espaço de soluções

Sistema linear de ED: $\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t) \Leftrightarrow Lx = 0}$

Solução geral: $\boxed{x(t) = e^{At}c, \;\; c \in \Re^n}$

$$\mathcal{S} = \mathcal{N}(L) = \left\{x \in C^1(\Re; \Re^n) \colon \; x(t) = e^{At}c \; \forall \; c \in \Re^n\right\}$$

Designando por u_i coluna i de e^{At}:

$$e^{At} = [u_1(t)|u_2(t)|\ldots|u_n(t)]\,, \qquad u_i : \Re \longrightarrow \Re^n$$

$$x(t) = e^{At}c = \sum_{i=1}^{n} u_i(t)c_i$$

- e^{At} não singular $\Rightarrow u_i(t)$ lin. indep. $\forall t \in \Re$

- $u_i(t) = e^{At}e_i$, (onde $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)$) é solução do sistema

Conclusão:

Dimensão do espaço de soluções de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é n

Resultado:

L, operador diferencial de $C^1(\Re;\Re^n)$ em $C^0(\Re;\Re^n)$ definido por $L = D - AI$. Então $$\dim \mathcal{N}(L) = n$$

Exercício

Considere a equação diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0(t)y = 0$$

e seja K o operador diferencial que lhe está associado. Mostre que

$$\dim \mathcal{N}(K) = n$$

(Teorema 3.2.3 do capítulo anterior)

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t)}$$

Sejam $x^i(\cdot), i = 1, \ldots n$, soluções do sistema que satisfazem n condições iniciais

$$x^i(0) = x_0^i$$

com $x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n$ vectores linearmente independentes.

Então

$$x^i(t) = e^{At} x_0^i$$

e

$$W(t) = \left[x^1(t)|x^2(t)|\ldots|x^n(t)\right] = e^{At}\left[x_0^1|x_0^2|\ldots|x_0^n\right]$$

W, produto de 2 matrizes não singulares é não singular.

$$\det W(t) \neq 0$$

Conclusão: as funções $x^i(\cdot)$ são lin. indep.

> n condições iniciais, dadas por vectores linearmente independentes, geram n soluções do sistema linearmente independentes.

$W(t) \hookrightarrow$ matriz *Wronskiana*
$\det W(t) \hookrightarrow$ *Wronskiano*

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t)}$$

Sabemos:

• Soluções constituem um espaço linear de dimensão n. Assim, determinado um conjunto de n soluções linearmente independentes do sistema, podemos afirmar que qualquer solução do sistema pode escrever-se como combinação linear dessas n soluções.

• Solução geral pode escrever-se como

$$x(t) = e^{At}c, \quad c \in \mathbb{R}^n$$

Para obter solução geral do sistema linear de ED basta-nos conhecer n soluções linearmente independentes ou conhecer e^{At}.

Questão: Como determinar:

n **soluções linearmente independentes?**

ou então

matriz e^{At}**?**

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t)^n}{n!} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^n}{n!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t)}$$

Solução geral: $x(t) = e^{At}c$, $c \in \Re^n$

<u>Caso 1</u>

Se $A = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, então

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

e

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + c_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

Análise Matricial. Alguns Resultados

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ dizem-se **matrizes semelhantes** se existir $S \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que

$$S^{-1}AS = B$$

Nesse caso,

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{SB^nS^{-1}t^n}{n!} = Se^{Bt}S^{-1}$$

A diz-se **diagonizável** se A semelhante a uma matriz diagonal, ou seja $S^{-1}AS = \Lambda$, para alguma matriz S e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Nesse caso,

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S\Lambda^nS^{-1}t^n}{n!} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$$

Questão: Quando é que A é diagonalizável?

Resultado

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valores próprios reais de A
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ vectores próprios de A linearmente independentes

Seja S a matriz

$$S = [x_1|x_2|\ldots|x_n]$$

ou seja, uma matriz em que os vectores coluna são os vectores próprios de A.

Então

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ com n valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reais e distintos. Então os vectores próprios $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que lhes estão associados são vectores linearmente independentes.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ uma matriz simétrica. Então existe um conjunto de vectores próprios $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linearmente independentes.

Uma matriz A é diagonalizável se e só se A tiver n vectores próprios linearmente independentes.

Nota:

Seja $S^{-1}AS = \Lambda$ e $x_1, \ldots, x_n$ os vectores coluna de S. Então:

$$\begin{aligned} AS &= A[x_1, \ldots, x_n] = [Ax_1, \ldots, Ax_n] \\ &= S\Lambda = [\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n,] \end{aligned}$$

ou seja, para cada i, $\mathbf{Ax_i} = \lambda_\mathbf{i}\mathbf{x_i}$

Conclusão: vectores coluna de S são vect. p. de A.
S não singular $\Rightarrow$ vect. p. linearmente independentes

Caso 2

Se $A = S\Lambda S^{-1}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\lambda_i \in \Re$

Então, solução de

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

é

$$x(t) = Se^{\Lambda t}S^{-1}c$$

ou seja,

Se A é diagonalizável, existem n vectores próprios $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, linearmente independentes.

Sejam

$$u_i(t) = e^{\lambda_i t}\bar{x}_i$$

Então, solução de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i(t), \quad b_i \in \Re,\ i = 1, 2, \dots, n$$

Exemplo: $\quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x(t)$

- Calcular valores próprios:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \end{aligned}$$

Dois val. p. reais e distintos. Logo A **é diagonalizável**

- Calcular vectores próprios:

$$\lambda = 2 \hookrightarrow [A - 2I]\, v = 0 \hookrightarrow v = (2, 1)$$

$$\lambda = -1 \hookrightarrow [A + I]\, u = 0 \hookrightarrow u = (1, 2)$$

Assim

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad A = S \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= S \exp\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} t \right) S^{-1} c \\ &= S \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} S^{-1} c \\ &= b_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Valores próprios complexos:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$\det(A - \lambda I) = \left[(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2\right] q(\lambda)$$

onde $q(\alpha \pm \beta i) \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{c} \alpha + \beta i \\ \alpha - \beta i \end{array}\right\} \hookrightarrow \text{vectores próprios} \left\{\begin{array}{c} u = a + bi \\ v = a - bi \end{array}\right.$$

- Considerar:

$$\bar{u} = \frac{u+v}{2} = a \qquad \text{e} \qquad \bar{v} = \frac{u-v}{2i} = b$$

$$S = [\bar{u} \ |\bar{v} \ | \ldots]$$

$$S^{-1}AS = \left[\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & | \ * \\ -\beta & \alpha & | \\ -- & -- & -- \\ * & & | \ * \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha \pm \beta i \\ \text{e} \\ \bar{u}, \bar{v} \end{array}\right\} \hookrightarrow \left\{\begin{array}{l} w_1(t) = e^{\alpha t}\left(\bar{u} \cos \beta t - \bar{v} \sin \beta t\right) \\ w_2(t) = e^{\alpha t}\left(\bar{u} \sin \beta t + \bar{v} \cos \beta t\right) \end{array}\right.$$

Exemplo: $\quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

Valores próprios: 1, $\pm 2i$

Vectores próprios:

$$1 \hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 2i \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} i \qquad -2i \hookrightarrow \ldots$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(t) \quad = \quad & c_1 \left[\cos(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ & + c_2 \left[\sin(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ & + c_3 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

Lembrar:

- **espaço próprio** de A correspondente ao valor próprio λ: Conjunto dos vectores x tais que $Ax = \lambda x$.

O espaço próprio correspondente a um valor próprio de A é um subespaço invariante por A

-

$$det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

onde $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$.

λ_i é valor próprio de A de **multiplicidade algébrica** m_i.

$\lambda_i \hookrightarrow \mu_i \geq 1$ vectores próprios linearmente independentes (número de vectores próprios = dim. núcleo de $A - \lambda_i I$). O número de vectores próprios, μ_i, designa-se por **multiplicidade geométrica** do valor próprio λ_i.

Lembrar:

A multiplicidade algébrica de um valor próprio é sempre maior ou igual à multiplicidade geométrica desse valor próprio.

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Então

1. existe pelo menos um vector próprio associado a cada valor próprio distinto;
2. o espaço vectorial $\mathcal{V}$ gerado por todos os vectores próprios associados a um dado valor próprio é um subespaço invariante por A;
3. se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são valores próprios de A todos distintos e se v_i é um vector próprio associado a λ_i, então os vectores $v_1, \ldots, v_r$ são linearmente independentes;

Bloco de Jordan

Um **Bloco de Jordan** é uma matriz

$$J_p = \{\beta_{i,j}\} \in \mathcal{M}_{p\times p}$$

tal que

$$J_p(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}$$

ou seja,

- $\beta_{ii} = \lambda$, $i = 1, \ldots, p$, ou seja, todos os elementos da diagonal principal são iguais;

- $\beta_{ii+1} = 1$, com $i = 1, \ldots, p-1$

- todos os restantes elementos são 0

Matriz de Jordan

Uma **Matriz de Jordan** é uma matriz $J \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & J_k(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

onde cada J_i $(i = 1, \dots, k)$ é um bloco de Jordan $n_i \times n_i$ e tal que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Propriedades

• k = número de blocos de Jordan = número de vectores próprios de J linearmente independentes;

• A matriz J é diagonalizável se $k = n$;

• Número de blocos de Jordan correspondentes a um dado valor próprio = multiplicidade geométrica desse valor próprio = dimensão do espaço próprio que lhe está associado.

• Soma das ordens de todos os blocos de Jordan associados a um mesmo valor próprio = multiplicidade algébrica desse valor próprio.

Se $J(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p\times p}$

Então

$$e^{J(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{p-3}}{(p-3)!} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Se $J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & J_k(\lambda_k) \end{bmatrix}$

Então

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_\mu t} \end{bmatrix}$$

Propriedades-Continuação

• Uma matriz de Jordan não fica imediatamente definida se conhecermos os seus valores próprios e as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica. Precisamos de conhecer também as ordens dos blocos de Jordan.

• Considere-se J_n uma matriz de Jordan $n \times n$ com um só valor próprio λ. Seja k o mais pequeno número tal que $(J - \lambda I)^k = 0$. Então:

- A ordem do maior bloco de Jordan é k.
- A característica da matriz $(J - \lambda I)^{k-1}$ é igual ao número de blocos de ordem k.
- A característica da matriz $(J - \lambda I)^{k-2}$ é igual a 2 vezes o número de blocos de ordem k mais o número de blocos de ordem $k - 1$.
- A característica da matriz $(J - \lambda I)^{k-3}$ é igual a 3 vezes o número de blocos de ordem k, mais 2 vezes o número de blocos de ordem $k-1$, mais o número de blocos de ordem $k - 2$ e por aí fora.

• Sendo J uma matriz de Jordan qualquer $\hookrightarrow$ A análise do ponto anterior deverá ser feita para todos os valores próprios de Jordan.

Resultado:

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

$$det(A-\lambda I) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$$

$\lambda_1, \ldots \lambda_r$ são reais

Então A é semelhante a uma matriz J na forma de Jordan:

$$Q^{-1}AQ = J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & J_\mu \end{bmatrix}$$

- Cada J_i é um bloco de Jordan $n_i \times n_i$
- $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_r = \mu$, soma das multiplicidades geométricas de cada um dos valores próprios distintos de A.
- Cada valor próprio de A, λ_i, de multiplicidade algébrica m_i aparece m_i vezes na diagonal principal da matriz J.
- Existem μ_i blocos de Jordan associados ao valor próprio λ_i.

Suponhamos $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é semelhante a uma matriz J de Jordan.

Como determinar o número de blocos de Jordan de J?

- Determinar todos os valores próprios de A.

- Para cada valor próprio de A, λ_i, distinto, calcular as matrizes

  $$(A - \lambda_i I)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

  e analisar a sucessão das características de cada uma das matrizes de forma a determinar a ordem e número de blocos de Jordan de A correspondentes ao valor próprio λ_i, como descrito atrás.

Exemplo:

Seja A uma matriz quadrada de ordem 4 que sabemos semelhante a uma matriz de Jordan da forma

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos concluir:

• A tem três valores próprios: 1, 3 e 4.

• Os valores próprios 1 e 3 são de multiplicidade algébrica 1 e o valor próprio 4 de multiplicidade algébrica 2.

• Como só existe um bloco de Jordan associado a 4 concluimos que este valor próprio tem multiplicidade geométrica 1. Quer isto dizer que só existe um vector próprio associado a 4.

Exemplo (Continuação):

A semelhante a J. Então, $\exists Q$:

$$Q^{-1}AQ = J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Q^{-1}AQ = J \;\Leftrightarrow\; AQ = QJ$$

Como determinar a matriz mudança de base Q?

- 3 vectores próprios linearmente independentes.
- Mais um vector $\hookrightarrow$ base de $\Re^4$.

$$Q: \;\; Q = [v_{11}|v_{12}|v_{21}|v_{31}]$$

v_{11}, v_{21}, v_{31} vectores próprios associados a 4, 3 e 1.

Então,

$Av_{11} = 4v_{11} \quad Av_{12} = 4v_{12} + v_{11} \quad Av_{21} = 3v_{21} \quad Av_{31} = v_{31}$

$v_{12} \hookrightarrow$ **vector próprio generalizado**.

Q invertível $\Rightarrow$ $\{v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{31}\}$ linearmente independente.

Subespaço linear gerado por v_{11}, v_{12} invariante por A.

J_1 e J_2 duas matrizes na forma de Jordan:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad J_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Valores p.: $\lambda = 4$. Multiplicidade algébrica: 5

<u>Análise de J_1</u>:

- 2 blocos de Jordan $\hookrightarrow$ multiplicidade geométrica: 2

Vectores próprios: $v_{11} = (1,0,0,0,0)$, $v_{21} = (0,0,0,1,0)$

- Vectores próprios generalizados associados a v_{11}: $v_{12} = (0,1,0,0,0)$, $v_{13} = (0,0,1,0,0)$

$$\begin{aligned} J_1 v_{12} &= 4v_{12} + v_{11} \\ J_1 v_{13} &= 4v_{13} + v_{12} \end{aligned}$$

- Vector próprio generalizado associado a v_{21}: $v_{22} = (0,0,0,0,1)$

$$J_1 v_{22} = 4v_{22} + v_{21}$$

Subespaço gerado por v_{11}, v_{12} e v_{13} $\hookrightarrow$ invariante por J_1

Subespaço gerado por v_{21} e v_{22} $\hookrightarrow$ invariante por J_1

Análise de J_2, $J_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

• 3 blocos de Jordan $\hookrightarrow$ multiplicidade geométrica: 3

Vectores próprios:

$v_{11} = (1, 0, 0, 0, 0)$, $v_{21} = (0, 0, 1, 0, 0)$, $v_{31} = (0, 0, 0, 0, 1)$

- Vector próprio generalizado associado a v_{11}: $v_{12} = (0, 1, 0, 0, 0)$

- Vector próprio generalizado associado a v_{21}: $v_{22} = (0, 0, 0, 1, 0)$

- Vector próprio generalizado associado a v_{31}: $\emptyset$

$$\begin{aligned} J_2 v_{11} &= 4v_{11} \\ J_2 v_{12} &= 4v_{12} + v_{11} \\ J_2 v_{21} &= 4v_{21} \\ J_2 v_{22} &= 4v_{22} + v_{21} \\ J_2 v_{31} &= 4v_{31} \end{aligned}$$

Subespaço gerado por $v_{11}, v_{12} \hookrightarrow$ invariante por J_2

Subespaço gerado por v_{21} e $v_{22} \hookrightarrow$ invariante por J_2

Subespaço gerado por $v_{13} \hookrightarrow$ invariante por J_2

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

valores próprios: $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$

λ_i	multiplicidade algébrica:	m_i
	multiplicidade geométrica:	μ_i

$\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_s$ vectores p. lin. indep.

Então

$\exists n_1, \ldots, n_\mu \in \mathbf{N}$, com $n_1 + n_2 + \ldots + n_\mu = n$

$\exists n$ vec. lin. indep. v_{rj}, $r = 1, \ldots, \mu$ e $j = 1, \ldots, n_r$ tq

- vectores próprios de A:

  $$\{v_{11}, v_{21}, \ldots, v_{\mu 1}\}$$

  é um conjunto linearmente independente;

- Para cada r, com $r = 1, \ldots, \mu$,

  $$\{v_{r1}, v_{r2}, \ldots, v_{rn_r}\}$$

  gera um subespaço invariante por A.

  Esse subespaço não pode ser decomposto em dois subespaços não triviais com vectores não zero em comum;

- Se $\lambda \hookrightarrow v_{r1}$ então,

  $$v_{rj} : Av_{rj} = \lambda v_{rj} + v_{r,j-1}, \quad j \in \{2, \ldots, n_r\}$$

  vectores próprios generalizados associados a λ

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \qquad A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$$

valor próprio: λ
mult. algébrica: 2   mult. geométrica: 1

vec. próprio asssociado a λ: ξ

vec. próprio generalizado associado a λ: η

$$\begin{aligned} A\xi &= \lambda\xi \\ A\eta &= \lambda\eta + \xi \end{aligned}$$

$u(t) = e^{\lambda t}\xi$ é <u>solução</u> do sistema.

Outra solução definida em termos de η?

Se $v(t) = e^{\lambda t}\eta$, então $\frac{dv(t)}{dt} = \lambda e^{\lambda t}\eta$

v **não é solução** sistema.
Se

$$w(t) = e^{\lambda t}t\xi + e^{\lambda t}\eta$$

Então

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= e^{\lambda t}\xi + \lambda e^{\lambda t}t\xi + \lambda e^{\lambda t}\eta \\ Aw(t) &= e^{\lambda t}tA\xi + e^{\lambda t}A\eta \\ &= \lambda e^{\lambda t}t\xi + e^{\lambda t}\lambda\eta + e^{\lambda t}\xi \end{aligned}$$

w é <u>solução</u> do sistema.

u e w <u>lin. independentes</u>. Solução geral do sistema:

$$x(t) = e^{At}c = c_1u(t) + c_2w(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \qquad A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$$

valor próprio: λ

mult. algébrica: 3   mult. geométrica: 1

vec. próprio asssociado a λ: ξ

vec. próprios generalizados associados a λ: η e ζ

$$\begin{aligned} A\xi &= \lambda\xi \\ A\eta &= \lambda\eta + \xi \\ A\zeta &= \lambda\zeta + \eta \end{aligned}$$

As funções:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\lambda t}\xi \\ v(t) &= e^{\lambda t}t\xi + e^{\lambda t}\eta \\ w(t) &= e^{\lambda t}\tfrac{t^2}{2}\xi + e^{\lambda t}t\eta + e^{\lambda t}\zeta \end{aligned}$$

são <u>soluções</u> do sistema.

u, v e w <u>linearmente independentes</u>.

Solução geral do sistema:

$$x(t) = e^{At}c = c_1u(t)+c_2v(t)+c_3w(t), \;\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Exemplo

(corrigir entrada de matriz A. Exemplo 4.5.7, pg. 108)

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

valores próprios: $2 \pm i$, 3 e 4

valor p. 3:
multiplicidade algébrica: 2
multiplicidade geométrica: 1

vector próprio associado a $2 + i$:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (= a + bi)$$

vector próprio associado a $2 - i$:

$$\xi_2 = \bar{\xi}_1$$

vector próprio associado a 3:

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vector próprio generalizado associado a 3:

$$\xi_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vector próprio associado a 4:

$$\xi_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As funções:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{2t}\,(a \cdot cos(t) - b \cdot sen(t)) \\ u_2(t) &= e^{2t}\,(a \cdot sen(t) + b \cdot cos(t)) \\ u_3(t) &= e^{3t}\xi_3 \\ u_4(t) &= e^{3t}t\xi_3 + e^{\lambda t}\xi_4 \\ u_5(t) &= e^{4t}\xi_5 \end{aligned}$$

são linearmente independentes.

(verificar, escrevendo a respectiva matriz Wronskiana)

Solução geral do sistema:

$$x(t) = e^{At}c = \sum_{i=1}^{5} u_i(t)c_i, \;\; c_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Exemplo: Determinar uma matriz de Jordan semelhante a A, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^3$

$\lambda_1 = 1$, mult. algébrica: 3

$(A - I)x = 0$: 2 vec. p. lin. ind.

$$x_1 = [1\ 0\ 1]^T \qquad x_2 = [0\ 1\ 2]^T$$

multiplicidade geométrica: 2

Necessário um vector próprio generalizado!

Associado ao vector próprio x_1?
Associado ao vector próprio x_2?
Associado ao vector próprio $\alpha x_1 + \beta x_2$?

Defina-se:

$$v_{11} = x_1, \qquad v_{21} = \alpha x_1 + \beta x_2$$

Determine-se:

$$v_{22}: \quad (A - I)v_{22} = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + 2\beta \end{bmatrix}$$

Para ter solução: $\beta = -\alpha$. Nesse caso

$$x = \alpha + \gamma - 2\delta, \quad y = \delta, \quad z = \gamma, \qquad \delta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$v_{11} = [1\ 0\ 1]^T,\ v_{21} = [1\ \ -1\ \ -1]^T,\ v_{22} = [1\ 0\ 0]^T$$

$$Av_{11} = \lambda_1 v_{11}, \quad Av_{21} = \lambda_1 v_{21} \ \text{ e } \ Av_{22} = \lambda_1 v_{22} + v_{21}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Lembrar:

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J$$

Solução geral:

$$x(t) = c_1 e^t v_{11} + c_2 e^t v_{21} + c_3 e^t \left(t v_{21} + v_{22} \right),$$

$c_1, c_2, c_3 \in \Re$

Sistemas Lineares Forçados

$$\text{(PVI)} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Solução: $x(t) = e^{At}e^{-At}x_0$

$$\boxed{\text{(PVI)} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + F(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}}$$

Solução: $x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-As}F(s)ds$

Verificação:

(1)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ae^{At}x_0 + Ae^{At}\textstyle\int_0^t e^{-As}F(s)ds + e^{At}e^{-At}F(t) \\ &= A\left[e^{At}x_0 + e^{At}\textstyle\int_0^t e^{-As}F(s)ds\right] + F(t) \\ &= Ax(t) + F(t) \end{aligned}$$

(2)

$$x(0) = e^0x_0 + e^0\int_0^0 e^{-As}F(s)ds = 0$$

Sistemas variantes no tempo

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A(t)}x(t) + F(t)$$

variante no tempo $\hookrightarrow A = A(t)$, variante no tempo.

(1) Determinar solução do sistema quando $F = 0$

(2) Determinar solução do sistema dado

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

n soluções: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lin. independentes.

$$\Psi(t) = [x_1(t)|x_2(t)|\ldots|x_n(t)]$$

Solução geral do sistema:

$$x(t) = \Psi(t)c, \quad c \in \mathbb{R}^n$$

Solução que satisfaz condição inicial $x(0) = x_0$:

$$x(t) = \Psi(t)\Psi(0)^{-1}x_0$$

$$x(t) = \Phi(t)x_0, \quad \text{onde } \Phi(t) = \Psi(t)\Psi(0)^{-1}$$

$\Phi(t)$: **matriz fundamental** do sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

- Se $A(t) = A,\ \forall t$ então $\Phi(t) = e^{At}$
- F contínua $\forall t \in \Re$, solução de $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + F(t)$:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi(-s)F(s)ds$$