ANÁLISE MATEMÁTICA 3
NÚMEROS COMPLEXOS
APÊNDICE

Maria do Rosário de Pinho
e
Maria Margarida Ferreira

Setembro 1998

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica
e de
Computadores

Índice

Capítulo 1

Números Complexos

1.1 Definição

A equação $x^2 = -1$ não tem solução no conjunto dos números reais. Por volta do século XVI surgiu a ideia de definir novos números que pudessem ser considerados raízes de equações deste tipo. Sendo $\Re$ o maior conjunto de números conhecido até ao momento, contém o conjunto dos naturais, inteiros e racionais, não contém elementos suficientes de forma a fornecer uma solução para a equação. Desta forma foi introduzido o símbolo $\sqrt{-1}$ definindo um número cujo quadrado seria -1. Este símbolo, mais tarde denotado pela letra i, foi encarado como fictício ou número *imaginário*. Podia ser manipulado algebricamente como um número real, excepto pela característica do seu quadrado ser -1. A expressão $x^2 + 1$ passou a poder ser factorizada na forma $(x-i)(x+i)$ e as soluções da equação $x^2+1=0$ seriam $x = i$ e $x = -i$. Expressões como $2 + 3i$ foram designadas por números complexos e foram usadas de uma maneira puramente formal durante aproximadamente 300 anos.

Já no século XIX K. F. Gauss e W. R. Hamilton, independentemente um do outro, tiveram a ideia de definir um número complexo como um par ordenado (a, b) de números reais com determinadas propriedades. Esta ideia perdura até hoje e deu origem à seguinte definição de números complexos:

Definição 1.1.1 *Consideremos os pares $z = (a, b)$, sendo a e b números reais, com a igualdade, soma e produto destes pares definidos por:*

(a) Igualdade: $(a, b) = (c, d) \iff a = b$ e $c = d$.

(b) Soma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

(c) Produto: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Ao conjunto destes números munidos de (a), (b) e (c) chamamos números complexos*. O conjunto dos números complexos será designado por $\mathbb{C}$.*

Note que $(a, b) \neq (b, a)$ e, portanto, os pares são encarados como pares ordenados.

Seja $z = (a, b)$ um número complexo qualquer. Os números reais a e b são designados por **componentes** de z. A primeira componente é designada por **parte real** de z, e escreve-se $Re(z)$, e a segunda por **parte imaginária** de z, escrevendo-se $Im(z)$. Números complexos da forma $(0, b)$ são designados por **imaginários puros**.

Consideremos agora o subconjunto $\mathbb{C}_0$ de $\mathbb{C}$ constituido por todos os pares da forma $(a, 0)$. Somando ou multiplicando elementos deste tipo ainda obtemos um elemento do mesmo tipo. De facto,

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) \ \text{ e } \ (a, 0)(c, 0) = (ac, 0).$$

Assim, para somar e multiplicar pares em $\mathbb{C}_0$ basta somar e multiplicar as partes reais. A componente imaginária permanece nula. Identificando cada par $(x, 0)$ com o número real x estas operações são perfeitamente análogas nos dois conjuntos, $\mathbb{C}_0$ e $\Re$. Esta identificação do conjunto $\Re$ com $\mathbb{C}_0$, subconjunto de $\mathbb{C}$, permite-nos considerar o conjunto dos números complexos como uma extensão do conjunto dos números reais.

Da definição resulta que qualquer número complexo z pode escrever-se na forma:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) \tag{1.1}$$

Identificando o símbolo i com o imaginário puro $(0, 1)$ e usando a identificação dos reais já mencionada, podemos escrever (1.1) na forma:

$$z = x + iy \tag{1.2}$$

Usando a convenção usual de $z^2 = zz$ podemos concluir que:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$$

ou seja,

$$i^2 = -1$$

De acordo com a notação (1.2), dados $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, a soma e produto destes números complexos, definidos em 1.1.1, podem ser descritos da seguinte forma:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

Observe que estas operações podem ser efectuadas operando formalmente todas as variáveis como números reais, incluindo o i, e considerando $i^2 = -1$.

1.2 Propriedades Algébricas.

A soma e produto de números reais gozam de um conjunto de propriedades que dão a $\Re$ estrutura de *corpo*. Tais propriedades continuam a ser satisfeitas pela soma e produto definidos no conjunto dos números complexos. Assim, o conjunto dos números complexos continua a ter uma estrutura de *corpo*. Relembremos essas propriedades, adaptadas agora ao conjunto $\mathbb{C}$:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
3. $z + 0 = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
4. $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad \exists -z = -x - iy \in \mathbb{C}: \quad z + (-z) = 0.$
5. $z_1 z_2 = z_2 z_1, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
6. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
7. $z.1 = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
8. $\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \exists z^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \in \mathbb{C}: \quad zz^{-1} = 1.$
9. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Estas propriedades resultam imediatamente da definição das operações soma e produto no conjunto dos números complexos. Vamos exemplificar verificando a propriedade 8.

Para demonstrar (8) vejamos que dado $z = x + iy \neq 0$, existe um elemento e só um $z^{-1} = c + id$, tal que $zz^{-1} = 1$ e z^{-1} tem como componentes real e imaginária, respectivamente, $c = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $d = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

$$zz^{-1} = 1 \Leftrightarrow (x+iy)(c+id) = 1 \Leftrightarrow (xc-yd)+i(xd+yc) = 1 \Leftrightarrow xc-yd = 1 \text{ e } xd+yc = 0 \Leftrightarrow$$

(se $x \neq 0$)

$$\begin{cases} x^2c - xyd = x \\ xd + yc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2c + y^2c = x \\ xd = -yc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{x}{x^2+y^2} \\ xd + y\frac{x}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{x}{x^2+y^2} \\ d = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Se $x = 0$, e porque $z \neq 0$, vem $y \neq 0$. Neste caso z^{-1} será tal que $-yd = 1$ e $yc = 0$. Daqui resulta $d = -\frac{1}{y}$, $c = 0$, o que está ainda de acordo com a expressão para z^{-1} definida em (8).

■

Exercício 1.2.1 *A partir da definição das operações soma e produto do conjunto dos números complexos, verifique que este conjunto satisfaz as propriedades acima descritas, de 1-7 e 9.*

A existência de um **inverso multiplicativo**, z^{-1}, associado a cada complexo não nulo permite-nos deduzir no conjunto dos números complexos a **lei do anulamento do produto**. Suponhamos que o produto de dois números complexos, z_1 e z_2 é nulo e que um deles, por exemplo z_1, é diferente de zero. Vejamos então que o outro, z_2, terá de ser nulo.

$$z_2 = 1.z_2 = (z_1^{-1}z_1)z_2 = z_1^{-1}(z_1 z_2) = z_1^{-1}.0 = 0$$

Conclusão:

$$z_1 z_2 = 0 \;\Rightarrow\; z_1 = 0 \;\text{ ou }\; z_2 = 0$$

Podemos também definir a **divisão** de números complexos. Seja $z_2 \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)^{-1} \\
&= (x_1 + iy_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \\
&= \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Se $z_2 = 0$, temos $x_2 = y_2 = 0$ e a expressão acima não tem sentido.

Exercício 1.2.2 *Verifique que se um número complexo, não nulo, tem componente imaginária nula, tanto o seu simétrico como o seu inverso têm componente imaginária nula. (As operações subtracção e divisão de complexos em $\mathbb{C}_0$ são análogas às correspondentes reais.)*

Considerando $z_1 = 1$ e $z_2 = z \neq 0$, qualquer, substituindo em (2.1) obtém-se

$$\boxed{\tfrac{1}{z} \;=\; z^{-1}}$$

Baseados nesta relação podemos deduzir algumas identidades úteis, involvendo quocientes:

$$\boxed{\tfrac{z_1}{z_2} \;=\; z_1\tfrac{1}{z_2}}$$

Observe que $(z_1z_2)(z_1^{-1}z_2^{-1}) = (z_1z_1^{-1})(z_2z_2^{-1}) = 1$, desde que $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$. Assim $(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}z_2^{-1}$. Daqui resulta

$$\boxed{\tfrac{1}{z_1z_2} \;=\; \left(\tfrac{1}{z_1}\right)\left(\tfrac{1}{z_2}\right) \qquad z_1, z_2 \neq 0}$$

$$\boxed{\tfrac{z_1+z_2}{z_3} \;=\; \tfrac{z_1}{z_3} + \tfrac{z_2}{z_3} \qquad z_3 \neq 0}$$

$$\boxed{\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) \qquad z_3, z_4 \neq 0}$$

A introdução dos números complexos vai permitir definir raízes para *qualquer* equação do segundo grau de coeficientes reais. Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são reais e $a \neq 0$. Completando o quadrado, podemos escrever esta equação na forma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$$

Se $4ac - b^2 \leq 0$, a equação tem as raízes reais $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Se $4ac - b^2 > 0$, o membro esquerdo da equação é sempre positivo para qualquer número real x e a equação não tem raízes reais. Neste caso, contudo, existem duas raízes complexas, a saber:

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad \text{e} \qquad z_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{2.2}$$

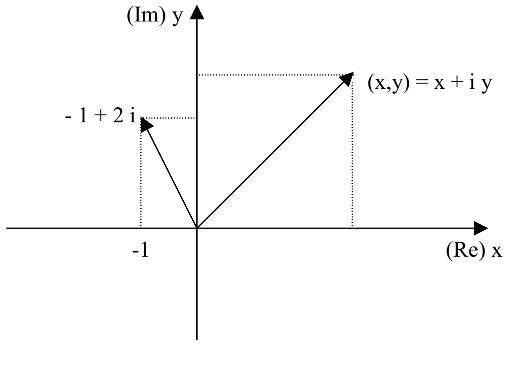
Em 1799, Gauss provou que qualquer equação polinomial da forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

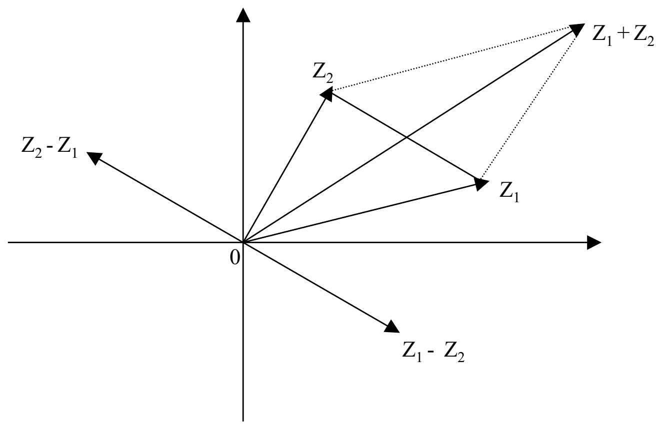
onde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são números reais arbitrários, $n \in I\!N$ e $a_n \neq 0$, tem sempre solução da equação no conjunto dos números complexos. Quando os coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são números complexos, continua a existir solução no conjunto dos números complexos. Este resultado é conhecido como *Teorema fundamental da Álgebra* e mostra que não há necessidade de construir um conjunto "mais vasto" do que o dos números complexos para resolver equações polinomiais com coeficientes complexos.

1.3 Interpretação Geométrica. Forma Polar. Módulo e Argumento.

Uma vez que um número complexo $z = x + iy$ é um par ordenado, pode ser representado geometricamente por um ponto no plano ou, ainda, por um vector com origem na origem dos eixos e extremidade no ponto (x, y) (ver fig. abaixo). Neste contexto, o plano xy é muitas vezes referido como **plano complexo**. O eixo dos xx é designado por **eixo real** e o eixo dos yy por **eixo imaginário**.



As operações soma e subtração de números complexos tem uma interpretação geométrica simples. Se dois números complexos z_1 e z_2 estão representados por vectores desde a origem até z_1 e z_2 respectivamente, a soma $z_1 + z_2$ é determinada pela "regra do paralelograma", ou seja, $z_1 + z_2$ pode ser representado por um vector com origem em 0 e que coincide com a diagonal do paralelograma definido por 0, z_1 e z_2. A outra diagonal deste paralelograma está associada à diferença $z_2 - z_1$ (ver fig. abaixo). O vector com origem em z_1 e extremidade z_2 é paralelo e tem igual comprimento ao vector com origem em 0 e extremidade em $z_2 - z_1$.



Tal como em $\Re^2$, dado um número complexo $z = x + iy$, não nulo, podemos exprimir x e y em coordenadas polares,

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

obtendo-se

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{3.1}$$

A representação de z na forma (3.1) é designada por **forma polar do número complexo** z.

O número r que representa a distância de (x, y) à origem ou, o que é o mesmo, o comprimento do vector que representa z, é designado por módulo ou valor absoluto de z e é denotado por $|z|$.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Note que enquanto a desigualdade $z_1 < z_2$ **não tem significado no conjunto dos números complexos**, a menos que z_1 e z_2 sejam reais, dizer que $|z_1| < |z_2|$ significa que o ponto z_1 está mais próximo da origem que o ponto z_2.

O ângulo polar θ é designado por **argumento** de $z = x + iy$ e representa-se muitas vezes por $arg\, z$. Dizemos "um argumento" e não "o argumento" uma vez que, devido às propriedades das funções sin e cos, o ângulo θ é determinado a menos de múltiplos de 2π. Dado (x, y) ao qual corresponde um ângulo θ, o ângulo $\theta + 2\pi$, $\theta + 4\pi$, etc, pode ainda lhe ser associado. Muitas vezes é necessário estabelecer um único argumento para um número complexo. Isso pode ser feito definindo um intervalo ao qual o ângulo deve pertencer. Os intervalos $[0, 2\pi)$ e $(-\pi, \pi]$ são usualmente considerados para esse efeito.

No que se segue, vamos considerar o intervalo $(-\pi, \pi]$ e designaremos o ângulo θ nesse intervalo por **argumento principal** de $z = x + iy$; denotaremos esse ângulo por $Arg(z)$. Assim, se $z \neq 0$, e $r = |z|$, define-se $Arg(z)$ como sendo o único número real θ que satisfaz as condições:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

Para o número complexo $z = 0$, o seu módulo é zero e o argumento não está definido. Neste caso a equação (3.1) é satisfeita qualquer que seja o argumento atribuido a $z = 0$.

Exemplo 1.3.1 *O número complexo $z = 1 - i$, situado no quarto quadrante, tem como representação na forma polar:*

$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{3.2}$$

Qualquer um dos valores $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ poderia ser usado como argumento do número. Em (3.2) tomamos o argumento principal de z.

O valor absoluto de um número complexo satisfaz as propriedades usuais de valor absoluto de um número real. Por exemplo:

$$|z| > 0 \ \text{ se } z \neq 0 \qquad \text{e} \qquad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

Geometricamente, $|z_1 - z_2|$ representa a distância entre os pontos z_1 e z_2 no plano complexo. A desigualdade triangular continua a ser válida:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Exemplos 1.3.2

1. *Uma vez que $|-3 + 2i| = \sqrt{13}$ e $|1 + 4i| = \sqrt{17}$, o ponto $-3 + 2i$ está mais próximo da origem que o ponto $1 + 4i$.*
2. *A equação $|z - 1 + 3i| = 2$ representa a circunferência de centro em $z_0 = 1 - 3i$ e raio $R = 2$.*

As propriedades seguintes, para o módulo do produto e do quociente de números complexos são também satisfeitas:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{3.3}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \text{se } z_2 \neq 0$$

Tomando $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, podemos facilmente obter (3.3) da igualdade:

$$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Daqui resulta de imediato a fórmula para o módulo do quociente se escrevermos z_1 como um produto, $z_1 = z_2 \frac{z_1}{z_2}$.

Apresentamos de seguida uma igualdade importante acerca dos argumentos de números complexos.

$$\boxed{arg(z_1 z_2) = arg z_1 + arg z_2 \qquad (*)}$$

Uma vez que $arg z$ não está univocamente definido, esta equação deverá ser interpretada do seguinte modo: *qualquer argumento de z_1 mais um qualquer argumento de z_2 é um possível argumento para o produto $z_1 z_2$*. Inversamente, *qualquer argumento do produto $z_1 z_2$ pode ser expresso como soma de um argumento de z_1 mais um argumento de z_2*. Para verificarmos esta afirmação basta representarmos os números na forma polar:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad\qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

multiplicarmos,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)],$$

e verificar que esta expressão se reduz a:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)], \tag{3.4}$$

dando origem assim à forma polar do produto. Desta equação resulta que o produto de dois números complexos, z_1 e z_2, é um número complexo cujo módulo é o produto dos módulos de z_1 e z_2 e cujo argumento é a soma dos seus argumentos.

> **Nota:** A igualdade $(*)$ não é sempre válida quando substituimos em todas as parcelas, arg pelo argumento principal, Arg. De facto, se considerarmos $z_1 = -1$ e $z_2 = i$, vem
>
> $$Arg(z_1 z_2) = Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$
>
> mas
>
> $$Arg(z_1) + Arg(z_2) = \pi + \frac{\pi}{2}$$
>
> Contudo, se tomarmos os mesmos valores, π e $\frac{\pi}{2}$, para argumentos de z_1 e z_2, e seleccionar para argumento de $z_1 z_2$ o valor $\frac{3\pi}{2}$ passsamos a ter a equação $(*)$ satisfeita.

Exemplo 1.3.3 *Quando um número complexo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ é multiplicado por i, o vector correspondente a $w = iz$ é obtido rodando 90 graus, no sentido positivo, o ângulo associado a z. De facto, $arg(w) = arg(iz) = arg(i) + arg(z) = \frac{\pi}{2} + arg(z)$ e $|iz| = |i||z| = |z|$.*

A equação (3.4) também permite concluir que a forma polar para o único inverso multiplicativo de um número complexo não nulo, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, é

$$z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

Para o verificar basta considerar que zz^{-1} deverá ser 1 e portanto, se $\beta = arg(z^{-1})$, deverá acontecer $\theta + \beta = arg(1) = 0$ e $|zz^{-1}| = |1| = 1$.

De forma análoga podemos concluir,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

e portanto,

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2).$$

Esta igualdade entre os argumentos mais uma vez deverá ser interpretada de forma análoga à da correspondente equação para o produto de complexos.

Se $z = x + iy$, o **complexo conjugado** de z é o número complexo $\bar{z} = x - iy$. Geometricamente, $\bar{z}$ representa o simétrico de z em relação ao eixo real. Da definição de conjugado podemos deduzir as seguintes propriedades:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \qquad z\bar{z} = |z|^2$$

Exercício 1.3.4 *Verifique as igualdades do último parágrafo.*

Se uma equação do segundo grau, com coeficientes reais, não tem raízes reais, as expressões para as raízes complexas (2.2) permitem-nos afirmar que estas raízes são conjugadas.

Inversamente, dados dois números complexos conjugados é possível determinar uma equação do segundo grau de coeficientes reais que admite esses números como raízes. (Verifique!)

A soma de um número complexo $z = x + yi$ com o seu conjugado $\bar{z} = x - yi$, $z + \bar{z}$, é o número real $2x$ e a diferença $z - \bar{z}$ é o imaginário puro $2yi$. As seguintes identidades podem assim ser estabelecidas para a parte real e parte imaginária do número complexo z:

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

1.4 Forma Exponencial

A expressão $\cos\theta + i\sin\theta$, que aparece na forma polar de um número complexo é muitas vezes representada por $e^{i\theta}$. O número z pode então ser expresso, de uma forma mais compacta, por

$$z = re^{i\theta} \tag{4.1}$$

Esta representação de um número complexo designa-se por **forma exponencial**.

A equação,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4.2}$$

que define o símbolo $e^{i\theta}$ para qualquer valor real de θ, é designada por **fórmula de Euler**. A escolha deste símbolo será mais clara quando tratarmos a função exponencial complexa. Para já vejamos algumas propriedades satisfeitas por $e^{i\theta}$, as quais sugerem ser esta uma notação natural para a expressão $\cos\theta + i\sin\theta$.

Propriedade aditiva:

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{4.3}$$

Escrevendo $e^{-i\theta}$ para representar $e^{i(-\theta)}$, podemos concluir da equação (4.3) que

$$e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$$

e portanto, $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Inverso multiplicativo de um número complexo

$$z^{-1} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Produto e quociente de números complexos

Para $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, teremos

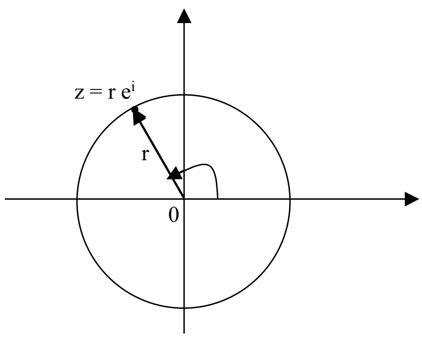
$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}; \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Uma vantagem destas expressões é a de serem facilmente memorizadas, uma vez que satisfazem formalmente as propriedades da função exponencial real.

A representação de z na forma exponencial, tal como acontece na forma polar, não é única. Uma vez que z pode escrever-se como $z = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)]$, com $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$, a expressão (4.1) é apenas uma das muitas expressões que a forma exponencial pode tomar:

$$z = re^{i(\theta+2n\pi)} \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{4.4}$$

Geometricamente esta variedade de representações é fácil de verificar. O ângulo θ é interpretado como o ângulo de inclinação do raio vector de comprimento r que representa $z = re^{i\theta}$. Quando θ é aumentado ou diminuido de 2π voltamos novamente ao ponto z. (Ver fig.)



Torna-se assim evidente que

> Dois números complexos, não nulos, $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ são iguais, se e só se
> $r_1 = r_2$ e $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

A circunferência no plano complexo, de centro z_0 e raio R pode ser representada pelo conjunto de pontos que satisfazem:

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

1.5 Potências e Raízes

Potências inteiras de um número complexo $z = re^{i\theta}$ podem ser dadas pela fórmula

$$z^n = r^n e^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{5.1}$$

Para $n = 0$, a fórmula (5.1) resulta imediatamente da convenção $z^0 = 1$. Quando $n = 1, 2, \cdots$, e porque $z^{n+1} = z^n z$ a fórmula é facilmente verificada se utilizarmos o método de indução matemática aplicando a regra da multiplicação de complexos na forma exponencial, apresentada na secção anterior (verifique!). Uma vez verificada para valores de n positivos deduz-se facilmente que continua a ser válida para $n = -1, -2, \cdots$. Neste caso, define-se $z^n = \left(z^{-1}\right)^{-n}$ ou $z^n = \left(z^{-1}\right)^m$ onde $m = -n = 1, 2, 3, \cdots$. Daqui resulta,

$$z^n = \left(z^{-1}\right)^m = \left[\frac{1}{r} e^{i(-\theta)}\right]^m = \left(\frac{1}{r}\right)^m e^{im(-\theta)} = r^n e^{in\theta} \qquad (n = -1, -2, \cdots).$$

Observe-se que se $r = 1$, vem:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{5.2}$$

Esta igualdade, escrita na forma:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{5.3}$$

é conhecida por **fórmula de Moivre**.

A resolução da equação $x^n = x_0$, no conjunto dos números reais, conduz a uma solução $x = \sqrt[n]{x_0}$ se n ímpar ou duas soluções $x = \pm\sqrt[n]{x_0}$, se n par e x_0 positivo. Vejamos como resolver a equação $z^n = z_0$ no conjunto dos números complexos. Dito de outra forma, vejamos como determinar as raízes de ordem n de um número complexo.

Exemplo 1.5.1 *Consideremos a equação $z^n = 1$ onde $n = 2, 3, \cdots$. Pretendemos determinar as raízes de ordem n da unidade. Qualquer solução da equação é diferente de zero. Considerando uma representação de z na forma exponencial, $z = re^{i\theta}$, o problema reduz-se a determinar os valores de r e θ tais que*

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = 1$$

ou seja,

$$r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}$$

Daqui podemos deduzir (ver secção anterior):

$$r^n = 1 \qquad e \qquad n\theta = 0 + 2k\pi$$

onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. *Assim,* $r = 1$ *e* $\theta = \frac{2k\pi}{n}$. *Podemos então concluir que os números complexos*

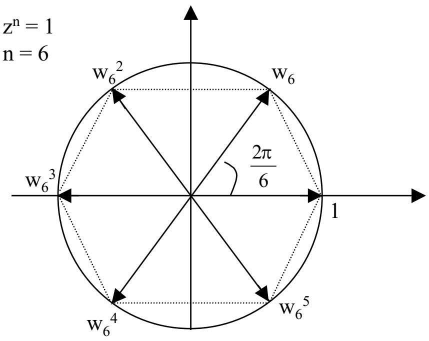
$$z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

são raízes de ordem n *da unidade. Estas raízes estão todas localizadas na circunferência de raio unitário e centro na origem. A diferença entre os ângulos de raízes consecutivas é constante e igual a* $\frac{2\pi}{n}$ *radianos. Podemos então concluir que estas raízes estão igualmente espaçadas à volta dessa circunferência. As raízes* **distintas** *de ordem* n *da unidade podem ser obtidas considerando apenas:*

$$z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

Para os restantes valores de k *obtemos raízes que já estão aqui consideradas.*

Conclusão: o número de raízes distintas, de ordem n*, da unidade é* n*. Quando* $n = 2$ *as raízes serão* 1 *e* -1.
Quando $n \geq 3$*, tais raízes corresponderão a pontos que estarão localizados sobre os vértices de um polígono regular de* n *lados. Este polígono está inscrito na circunferência centrada na origem e de raio* 1 *e terá sempre um vértice sobre* $z = 1$ *(obtida para* $k = 0$*, na fórmula anterior).*



Se escrevermos

$$w_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

então as raízes de ordem n *da unidade são simplesmente:*

$$1, w_n, w_n^2, \cdots, w_n^{n-1}.$$

O método descrito no exemplo anterior pode ser utilizado para determinar as raízes de ordem n de qualquer número complexo não nulo, $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Estas raízes, obtidas a partir da equação

$$z^n = z_0 \tag{5.4}$$

serão

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\; e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

onde $\sqrt[n]{r_0}$ representa a raíz positiva de ordem n do número real positivo r_0 e corresponde ao comprimento de cada um dos vectores que representam as raízes.

Raízes consecutivas diferem de um ângulo de $\frac{2\pi}{n}$. Assim, para $n = 2$, as raízes de z_0 estarão em lados opostos no diâmetro de uma circunferência centrada em 0 e raio $\sqrt{r_0}$, sendo uma raíz simétrica da outra relativamente à origem. Quando $n \geq 3$, as n raízes estarão sobre os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito na circunferência de raio $\sqrt[n]{r_0}$.

Se c é uma raíz particular de z_0, as n raízes poderão ainda ser expressas por:

$$c, cw_n, cw_n^2, \cdots, cw_n^{n-1}$$

onde $w_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Isto resulta imediatamente do facto da multiplicação de um número complexo não nulo por w_n corresponder a aumentar o argumento desse número $\frac{2\pi}{n}$.

A notação $z_0^{\frac{1}{n}}$ poderá ser usada para representar o conjunto das n raízes de um número complexo não nulo z_0.

Note que quando $z_0 = 0$, a equação (5.4) tem uma solução única, $z = 0$. Assim a única raiz de ordem n de 0 é $z = 0$.

Exemplo 1.5.2 *Resolver a equação $z^3 = -8i$, ou seja, determinar as raízes cúbicas do complexo $z_0 = -8i$.*

$$-8i = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z^3 = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow r^3e^{3\theta} = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$r^3 = 8 \; e \; 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \Leftrightarrow$$

$$r = 2 \quad e \quad \theta = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

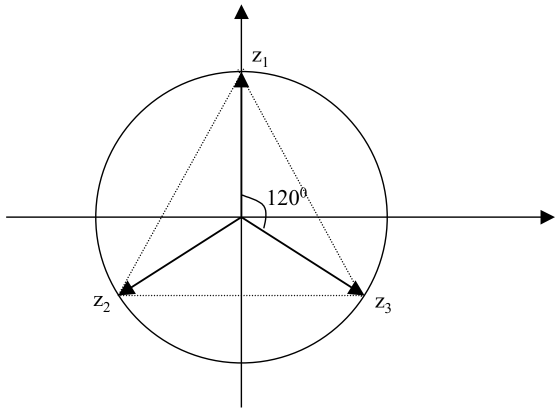
As 3 raízes distintas serão:

$$z_k = 2\, e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Ou seja,

$$z_0 = \sqrt{3} - i; \quad z_1 = 2i; \quad z_2 = -\sqrt{3} - i$$

Estas raízes estão localizadas sobre os vértices de um triângulo equilátero, inscrito num círculo de raio 2 e centrado na origem.



BIBLIOGRAFIA:

Complex Variables and Applications,
R. V. Churchill, J. W. Brown.

Calculus,
T. M. Apostol