Capítulo 3

Interpolação

3.1 Introdução

O problema de interpolação consiste em, dado um conjunto de pares ordenados (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), determinar uma função g, designada **função interpoladora**, tal que

$$g(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

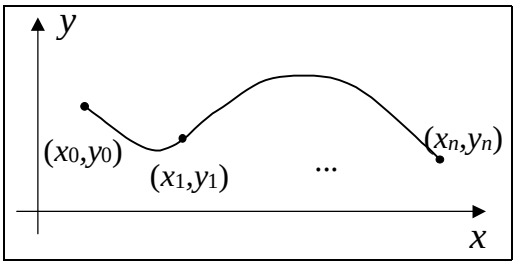


Figura 3.1: Interpolação.

Os valores $x_0, x_1, \ldots, x_n$ designam-se por **nós de interpolação** e devem satisfazer a condição $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, ou seja, serem todos diferentes. Os correspondentes valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$ designam-se por **valores nodais**.

Perante um dado problema de interpolação será necessário ter em consideração diversas questões, das quais se destacam a escolha da classe de funções interpoladoras a utilizar e a forma de determinar concretamente a função (ou uma função) interpoladora.

O problema de interpolação tem aplicações em diversas situações como sejam

- o cálculo de funções fornecidas por tabelas quando se pretende avaliar a função em pontos não tabelados (muito importante no passado!).

- quando apenas se conhecem os valores de uma função em certos pontos, por exemplo resultantes de medidas experimentais, e se pretende avaliar a função em novos pontos (sem repetir experiências ou medições ...).
- a aproximação de funções cujo cálculo seja complexo ou exija grande esforço.
- a base de muitos métodos numéricos.

O estudo de problemas de interpolação aqui apresentado centra-se na interpolação polinomial (funções interpoladoras polinomiais), abordando ainda a interpolação polinomial segmentada (splines polinomiais).

3.2 Interpolação polinomial

Comecemos por relembrar que uma função p diz-se **polinomial de grau** n se puder ser escrita na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $n \in \mathbb{N}_0$ e $a_n \neq 0$, excepto quando $n = 0$ em que a_n pode ser nulo. Neste último caso o polinómio diz-se **nulo**, e o seu grau é, por convenção, $-\infty$.

De entre as justificações para a utilização de funções interpoladoras polinomiais podemos destacar que se seguem.

- O cálculo dos valores de funções polinomiais é feito com um número finito de multiplicações e somas.
- As operações de derivação e primitivação de funções polinomiais são simples e podem ser facilmente realizadas de forma automática.
- As funções polinomiais são de classe C^∞.
- As funções polinomiais aproximam tanto quanto se queira qualquer função contínua num intervalo finito (ver resultado abaixo).

Por abuso de linguagem, uma função polinomial é aqui identificada com o polinómio que a caracteriza.

Teorema 3.2.1 (Weierstrass). *Seja $[a, b]$ um intervalo real e f uma função contínua em $[a, b]$. Então, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe uma função polinomial p tal que*

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Este teorema afirma a existência de polinómios que aproximam tanto quanto se queira qualquer função contínua (num intervalo limitado). No entanto, não fornece nenhuma indicação sobre como determinar tais polinómios, em função dependendo de uma aproximação ε pretendida. É de referir, no entanto, que em determinadas circunstâncias, a interpolação polinomial produz polinómios aproximantes.

Um dado polinómio p (leia-se função polinomial) pode ser apresentado de diversas formas. Na **forma de potências simples** será escrito como

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Na **forma de potências centradas** será agora escrito como

$$p(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1(x-c) + \bar{a}_2(x-c)^2 + \cdots + \bar{a}_n(x-c)^n,$$

onde c é uma constante, designada por centro. Na **forma de Newton** será escrito como

$$p(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1(x-c_1) + \tilde{a}_2(x-c_1)(x-c_2) + \cdots + \tilde{a}_n(x-c_1)\cdots(x-c_n),$$

onde os c_i $(i = 1, \ldots, n)$ são constantes, designadas por centros.

O cálculo do valor de um polinómio p num ponto x pode ser efectuado de uma forma eficiente (reduzindo o número de operações aritméticas a realizar) empregando o designado **algoritmo de Horner**.

Para a forma de potências simples, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, tem-se

$y = a_n$
Para $i = n-1$ **até** 0 **fazer**
  $y = a_i + y \cdot x$

Para a forma de Newton, $p(x) = a_0 + a_1(x-c_1) + \cdots + a_n(x-c_1)\cdots(x-c_n)$, tem-se

$y = a_n$
Para $i = n-1$ **até** 0 **fazer**
  $y = a_i + y \cdot (x - c_{i+1})$

Em ambos os casos $p(x)$ é dado pelo valor final de y.

3.3 Polinómio interpolador: unicidade e existência

Nesta secção iremos mostrar que para um conjunto de nós distintos $(x_i)_{i=0}^n$ e respectivos valores nodais $(y_i)_{i=0}^n$ quaisquer, existe um e um só polinómio p de grau menor ou igual a n tal que $p(x_i) = y_i$, para $i = 0, \ldots, n$.

Comecemos por relembrar o seguinte resultado sobre factorização de polinómios, que será utilizado posteriormente.

Teorema 3.3.1. *Se $z_1, z_2, \ldots, z_k$ forem zeros distintos do polinómio p, então*

$$p(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdots (x - z_k) \cdot r(x)$$

onde r é também um polinómio.

O resultado seguinte afirma que se existir um polinómio interpolador de grau menor ou igual a n então ele é único.

Teorema 3.3.2 (Unicidade do polinómio interpolador). *Sejam p e q polinómios, de grau inferior ou igual a n, que tomam os mesmos valores num conjunto de nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos. Então estes polinómios são iguais.*

Demonstração. Seja d o polinómio diferença entre p e q, isto é

$$d(x) = p(x) - q(x)$$

Este polinómio terá grau inferior ou igual a n.

Como p e q tomam valores iguais em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, é imediato concluir que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são raízes distintas de d. Então pode escrever-se

$$d(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n) \cdot r(x)$$

para algum polinómio r. Seja m o grau de r e suponha-se que $m \geq 0$.

Então o grau de d seria $n + 1 + m$, contrariando o facto do grau de d ser inferior ou igual a n.

Conclui-se assim que não se pode ter $m \geq 0$.

A alternativa é r ser o polinómio nulo e, consequentemente, d ser também o polinómio nulo, ou seja, ou polinómios p e q serem iguais. □

Passemos agora à questão da existência do polinómio interpolador. Se o polinómio, de grau menor ou igual a n, $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, interpolar os valores y_i nos nós x_i $(i = 0, \ldots, n)$ distintos, então os seus coeficientes terão de verificar

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

que não é mais do que um sistema de $n+1$ equações lineares nas $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

A existência do polinómio p, é então equivalente à existência de solução deste sistema de equações. Esta questão pode ser avaliada analisando o determinante da matriz dos coeficientes do sistema. Este, designa-se por **determinante de Vandermonde** nos $n + 1$ pontos

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ e é dado por

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

O valor deste determinante pode calculado como se segue. Comecemos por subtrair à última coluna deste determinante a penúltima coluna multiplicada por x_0. Obtém-se assim o determinante equivalente

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}.$$

Subtraindo agora à penúltima coluna a ante-penúltima coluna multiplicada por x_0, resulta

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-2} & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-2}(x_1 - x_0) & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-2}(x_n - x_0) & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}.$$

Repetindo este processo até subtrair à segunda coluna a primeira coluna multiplicada por x_0, obtém-se

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \ldots & x_1^{n-2}(x_1 - x_0) & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_0) & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo este determinante pela primeira linha, chega-se a

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \ldots & x_1^{n-2}(x_1 - x_0) & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_0) & x_2^{n-1}(x_2 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_0) & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}.$$

Colocando agora em evidência na primeira linha $x_1 - x_0$, na segunda linha $x_2 - x_0$, e assim sucessivamente, até $x_n - x_0$ na última linha, tem-se ainda que

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

pelo que se pode escrever

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \left[\prod_{j=1}^{n}(x_j - x_0)\right] \cdot v(x_1, \ldots, x_n),$$

onde $v(x_1, \ldots, x_n)$ é o determinante de Vandermonde nos n pontos $x_1, \ldots, x_n$.

Repetindo o processo acima para o determinante $v(x_1, \ldots, x_n)$, depois para $v(x_2, \ldots, x_n)$ e assim sucessivamente, obtém-se a expressão

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \left[\prod_{j=1}^{n}(x_j - x_0)\right] \cdot \left[\prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\right] \cdot \ \ldots \ \cdot \left[\prod_{j=n}^{n}(x_j - x_{n-1})\right]$$

concluindo-se então que $v(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ será não nulo desde que os nós x_i sejam todos diferentes.

Verifica-se deste modo que o sistema de equações que permite obter os coeficientes do polinómio interpolador é possível (e determinado), podendo então afirmar-se que existe um polinómio de grau não superior a n que interpola os valores $(y_i)_{i=0}^n$ nos nós distintos $(x_i)_{i=0}^n$.

Uma vez mostrada a existência e unicidade do polinómio interpolador, interessa agora encontrar formas de o determinar. Uma possibilidade é resolver o sistema de equações de interpolação

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Esta abordagem, embora simples, não é aconselhável, pois exige um número elevado de cálculos. Por outro lado, a resolução deste sistema pode acarretar elevados erros numéricos devidos à utilização de aritmética finita, que pioram à medida que n cresce.

Nas secções seguintes serão estudados processos mais eficientes de determinar o polinómio interpolador. Interessa aqui realçar que os processos apresentados constituem diferentes formas de obter o mesmo polinómio interpolador (dado um mesmo conjunto de nós e respectivos valores nodais).

3.4 Forma de Lagrange

Consideremos novamente um conjunto de nós distintos $(x_i)_{i=0}^n$. Os polinómios (de grau n) definidos pela expressão

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

designam-se por **polinómios de Lagrange**, relativos aos nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Facilmente se conclui que estes polinómios verificam as relações $L_k(x_j) = \delta_{kj}$, onde δ_{kj} é o designado **delta de Kronecker**, ou seja

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j, \\ 0 & \text{se } k \neq j. \end{cases}$$

O polinómio interpolador na **forma de Lagrange** é obtido como uma combinação linear dos polinómios de Lagrange relativos aos nós em questão. Os coeficientes desta combinação linear serão os valores nodais a interpolar, como se refere no seguinte teorema.

Teorema 3.4.1. *O polinómio p, de grau menor ou igual a n, que interpola os valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$ nos nós distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é dado por*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x).$$

Demonstração. Como p é a soma de polinómios de grau n ou nulos, conclui-se que o grau de p é menor ou igual a n. Por outro lado, para cada nó x_i tem-se que

$$p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \delta_{ki} = y_i$$

pelo que p interpola os valores nodais. □

O exemplo seguinte ilustra a obtenção do polinómio interpolador na forma de Lagrange.

Exemplo 3.4.1. *Determinar o polinómio de grau menor ou igual a 3 que interpola os valores*

x	-1	0	2	3
y	6	-12	18	24

Resolução

Inicialmente calculam-se os polinómios de Lagrange relativos aos nós de interpolação.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\
&= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} = -\frac{1}{12}x(x-2)(x-3) \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&= \frac{(x-(-1))(x-2)(x-3)}{(0-(-1))(0-2)(0-3)} = \frac{1}{6}(x+1)(x-2)(x-3) \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\
&= \frac{(x-(-1))(x-0)(x-3)}{(2-(-1))(2-0)(2-3)} = -\frac{1}{6}(x+1)x(x-3) \\
L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)}{(3-(-1))(3-0)(3-2)} = \frac{1}{12}(x+1)x(x-2)
\end{aligned}$$

O polinómio interpolador na forma de Lagrange será

$$\begin{aligned} p(x) &= 6 \cdot L_0(x) + (-12) \cdot L_1(x) + 18 \cdot L_2(x) + 24 \cdot L_3(x) \\ &= -\frac{1}{2}x(x-2)(x-3) - 2(x+1)(x-2)(x-3) \\ &\quad -3(x+1)x(x-3) + 2(x+1)x(x-2) \end{aligned}$$

Este polinómio escrito na forma de potências simples fica

$$p(x) = -\frac{7}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^2 - 12.$$

A forma de Lagrange do polinómio interpolador é bastante fácil de determinar. Além disso, se os nós de interpolação se mantiverem fixos, mas algum ou alguns dos valores nodais for alterado, não é necessário recalcular os polinómios L_k, mas somente a sua combinação linear. Por outro lado, quando se altera ou adiciona um nó é necessário recalcular todos os polinómios L_k, desaproveitando todos os cálculos entretanto efectuados.

3.5 Forma de Aitken-Neville

A **forma de Aitken-Neville** permite calcular o valor do polinómio interpolador num ponto x de uma forma recursiva, considerando sucessivamente mais nós de interpolação e respectivos valores nodais.

Sejam m um inteiro entre 0 e n, k um inteiro entre 0 e $n-m$, e defina-se $p_{m,k}$ como o polinómio de grau menor ou igual a k que interpola os valores $(y_i)_{i=m}^{m+k}$ nos nós $(x_i)_{i=m}^{m+k}$. A expressão para o cálculo do polinómio interpolador na forma de Aitken-Neville encontra-se justificada no teorema seguinte.

Teorema 3.5.1. *Dados m e k, e os polinómios $p_{m,k}$ e $p_{m+1,k}$, o polinómio $p_{m,k+1}$ satisfaz a relação*

$$p_{m,k+1}(x) = \frac{(x - x_{m+k+1}) \cdot p_{m,k}(x) + (x_m - x) \cdot p_{m+1,k}(x)}{x_m - x_{m+k+1}}.$$

Demonstração. Como $p_{m,k}$ e $p_{m+1,k}$ são polinómios de grau não superior a k, o polinómio q definido por

$$q(x) = \frac{(x - x_{m+k+1}) \cdot p_{m,k}(x) + (x_m - x) \cdot p_{m+1,k}(x)}{x_m - x_{m+k+1}}$$

terá grau menor ou igual a $k+1$. Para mostrar que $q \equiv p_{m,k+1}$ resta então verificar que $q(x_i) = y_i$, para $i = m, m+1, \ldots, m+k, m+k+1$.

Seja i um inteiro tal que $m+1 \leq i \leq m+k$. Então $p_{m,k}(x_i) = y_i$ e $p_{m+1,k}(x_i) = y_i$. Calculando $q(x_i)$ obtém-se

$$q(x_i) = \frac{(x_i - x_{m+k+1}) \cdot y_i + (x_m - x_i) \cdot y_i}{x_m - x_{m+k+1}} = \frac{(x_m - x_{m+k+1}) \cdot y_i}{x_m - x_{m+k+1}} = y_i.$$

Por outro lado, como $p_{m,k}(x_m) = y_m$ e $p_{m+1,k}(x_{m+k+1})$, tem-se respectivamente que

$$q(x_m) = \frac{(x_m - x_{m+1+1}) \cdot y_m}{x_m - x_{m+k+1}} = y_m \quad \text{e}$$
$$q(x_{m+k+1}) = \frac{(x_m - x_{m+1+1}) \cdot y_{m+k+1}}{x_m - x_{m+k+1}} = y_{m+k+1},$$

concluindo-se portanto que $q(x_i) = y_i$ para $i = m, m+1, \ldots, m+k, m+k+1$, como se pretendia mostrar. □

A aplicação repetida da expressão (3.5.1) para um dado ponto x, permite avaliar o valor do polinómio interpolador nesse ponto *sem determinar os coeficientes do polinómio.*

A forma de Aitken-Neville é muitas vezes também designada por **interpolação linear iterada**. De facto, a expressão (3.5.1) corresponde a uma generalização da expressão

$$\frac{(x - x_1) \cdot y_0 + (x_0 - x) \cdot y_1}{x_0 - x_1}$$

que permite calcular o valor em x da função linear que interpola y_0 em x_0 e y_1 em x_1.

A expressão de recorrência da forma de Aitken-Neville pode ainda ser escrita como

$$p_{m,k+1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} p_{m,k}(x) & x - x_m \\ p_{m+1,k}(x) & x - x_{m+k+1} \end{vmatrix}}{x_m - x_{m+k+1}}.$$

Para avaliar o polinómio que interpola $(y_i)_{i=0}^n$ nos nós $(x_i)_{i=0}^n$, em x, é necessário calcular

$$\begin{aligned} & p_{i,0}(x), \quad i = 0, \ldots, n, \\ & p_{i,1}(x), \quad i = 0, \ldots, n-1, \\ & \ldots \quad \text{e, finalmente,} \\ & p_{0,n}(x) = p(x). \end{aligned}$$

Uma vez que $p_{i,0}(x) \equiv y_i$, é habitual utilizar a notação

$$\begin{aligned} p_{i,0}(x) &= y_i(x) \\ p_{i,1}(x) &= y_{i,i+1}(x) \\ p_{i,2}(x) &= y_{i,i+1,i+2}(x) \\ &\ldots \end{aligned}$$

tendo-se então

$$y_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x - x_0 \\ y_1 & x - x_1 \end{vmatrix}}{x_0 - x_1}, \; y_{12}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x - x_1 \\ y_2 & x - x_2 \end{vmatrix}}{x_1 - x_2}, \ldots, \; y_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_{01}(x) & x - x_0 \\ y_{12}(x) & x - x_2 \end{vmatrix}}{x_0 - x_2}, \ldots$$

Exemplo 3.5.1. *Determinar, em $x = 1$, o valor do polinómio de grau menor ou igual a 3 que interpola os valores da seguinte tabela.*

x	-1	0	2	3
y	6	-12	18	24

Resolução

Interpolando linearmente entre cada dois pontos consecutivos, obtêm-se os valores $y_{i,i+1}$.

$$y_{01}(1) = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1+1 \\ -12 & 1-0 \end{vmatrix}}{-1-0} = -30,\ y_{12}(1) = \frac{\begin{vmatrix} -12 & 1-0 \\ 18 & 1-2 \end{vmatrix}}{0-2} = 3,\ y_{23}(1) = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 1-2 \\ 24 & 1-3 \end{vmatrix}}{2-3} = 12$$

Segue-se a interpolação dos valores obtidos acima para obter os valores $y_{i,i+1,i+2}$.

$$y_{012}(1) = \frac{\begin{vmatrix} -30 & 1+1 \\ 3 & 1-2 \end{vmatrix}}{-1-2} = -8, \qquad y_{123}(1) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-0 \\ 12 & 1-3 \end{vmatrix}}{0-3} = 6$$

Finalmente, obtém-se o valor y_{0123} pretendido.

$$y_{0123}(1) = \frac{\begin{vmatrix} -8 & 1+1 \\ 6 & 1-3 \end{vmatrix}}{-1-3} = -1.$$

3.6 Forma de Newton

Consideremos novamente os nós de interpolação distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, e definam-se os polinómios W_i, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, designados polinómios nodais, da seguinte forma

$$\begin{aligned} &W_0(x) = x - x_0 \\ &W_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) \\ &\ldots \\ &W_{n-1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

O polinómio interpolador p pode ser escrito na **forma de Newton** tomando como centros os nós distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, isto é,

$$p(x) = a_0 + a_1 W_0(x) + \cdots + a_n W_{n-1}(x),$$

ficando a sua determinação reduzida ao cálculo dos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Partindo do polinómio interpolador p, escrito na forma Newton acima indicada, definam-se os polinómios $p_0, p_1, \ldots, p_n$ por intermédio de

$$\begin{aligned} &p_0(x) = a_0, \\ &p_1(x) = a_0 + a_1 W_0(x), \\ &p_2(x) = a_0 + a_1 W_0(x) + a_2 W_1(x), \\ &\ldots \end{aligned}$$

Estes polinómios podem obter-se de uma forma recursiva fazendo

$$p_0(x) = a_0 \qquad \text{e}$$
$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + a_k W_{k-1}(x), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Note-se que o polinómio p_k apenas depende dos valores $a_0, \ldots, a_k$ e também que o polinómio interpolador p será dado por p_n.

O teorema seguinte mostra como se devem calcular os valores dos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ do polinómio interpolador na forma de Newton.

Teorema 3.6.1. *Fazendo $a_0 = y_0$ e*

$$a_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{W_{k-1}(x_k)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

então o polinómio p_k interpola os valores $(y_j)_{j=0}^{k}$ nos nós $(x_j)_{j=0}^{k}$, isto para $k = 0, 1, \ldots, n$.

Demonstração. Esta demonstração será feita por indução.

Como $p_0(x) = y_0$, é óbvio que este polinómio interpola y_0 em x_0.

Suponha-se agora que p_{k-1} interpola os valores $(y_j)_{j=0}^{k-1}$ nos nós $(x_j)_{j=0}^{k-1}$. Como se viu atrás, $p_k(x) = p_{k-1}(x) + a_k W_{k-1}(x)$. Da definição dos polinómios $W_0, W_1, \ldots, W_{n-1}$, tem-se que $W_{k-1}(x_j) = 0$, $\forall j = 0, 1, \ldots, k-1$, concluindo-se então que $p_k(x_j) = p_{k-1}(x_j) = y_j$, $\forall j = 0, 1, \ldots, k-1$. Por outro lado, tem-se que

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{W_{k-1}(x_k)} W_{k-1}(x_k) = y_k,$$

concluindo-se finalmente que p_k interpola os valores $(y_j)_{j=0}^{k}$ nos nós $(x_j)_{j=0}^{k}$. □

Do processo de determinação dos coeficientes do polinómio na forma de Newton, conclui-se que a consideração de novos nós apenas exige o cálculo dos coeficientes adicionais, aproveitando os cálculos entretanto já efectuados. Embora seja habitual ordenar os nós de interpolação, tal não é necessário, podendo estes ser considerados por qualquer ordem.

Exemplo 3.6.1. *Determinar, na forma de Newton, o polinómio de grau menor ou igual a 2 que interpola os valores da seguinte tabela.*

x	-1	2	3
y	1	3	5

Resolução *Começando com o nó 0 tem-se que $p_0(x) = y_0 = 1$, polinómio que interpola o primeiro ponto da tabela.*

Passando a agora ao nó 1, e fazendo $W_0(x) = x - x_0 = x + 1$, obtém-se

$$p_1(x) = p_0(x) + \frac{y_1 - p_0(x_1)}{W_0(x_1)} W_0(x) = 1 + \frac{3-1}{2+1}(x+1) = 1 + \frac{2}{3}(x+1).$$

Usando finalmente o nó 3, *e como* $W_0(x) = (x - x_0)(x - x_1) = (x + 1)(x - 1)$, *tem-se*

$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{y_2 - p_1(x_2)}{W_1(x_2)} W_1(x) = 1 + \frac{2}{3}(x + 1) + \frac{5 - (1 + \frac{2}{3}(3 + 1))}{(3 + 1)(3 - 2)} (x + 1)(x - 2)$$

Sendo então o polinómio interpolador $p(x) = p_2(x)$ *dado por*

$$p(x) = 1 + \frac{2}{3}(x + 1) + \frac{1}{3}(x + 1)(x - 2).$$

3.7 Diferenças divididas e diferenças finitas

Sendo m e k inteiros não negativos, defina-se $p_{m,k}$ como o polinómio de grau menor ou igual a k que interpola os valores $(y_i)_{i=m}^{m+k}$ nos nós $(x_i)_{i=m}^{m+k}$. Na forma de Newton, este polinómio será

$$p_{m,k}(x) = a_{m,0} + a_{m,1}(x - x_m) + \cdots + a_{m,k}(x - x_m) \cdots (x - x_{m+k-1})$$

A construção do polinómio interpolador na forma de Newton permite concluir que o coeficiente $a_{m,j}$, para $j = 0, 1, \ldots, k$, apenas depende dos valores $(y_i)_{i=m}^{m+j}$ e dos nós $(x_i)_{i=m}^{m+j}$. Este coeficiente representa-se por

$$a_{m,j} = y[x_m, \ldots, x_{m+j}]$$

e designa-se por **diferença dividida** (de ordem j nos nós $x_m, \ldots, x_{m+j}$).

O teorema seguinte estabelece uma relação entre diferenças divididas que permite efectuar o seu cálculo de um modo recursivo.

Teorema 3.7.1. *As diferenças dividas satisfazem* $y[x_j] = y_j$, *com* $0 \leq j \leq n$, *e*

$$y[x_m, \ldots, x_{k+1}] = \frac{y[x_{m+1}, \ldots, x_{k+1}] - y[x_m, \ldots, x_k]}{x_{k+1} - x_m}$$

com $0 \leq m \leq k \leq n - 1$.

Demonstração. $y[x_j] = y_j$, uma vez que o polinómio constante $p_{j,0}(x) = y_j$ interpola y_j em x_j.

Sejam $p_{m,k-m}$ e $p_{m+1,k-m}$ os polinómios, de graus menores ou iguais a $k - m$, que interpolam $(y_j)_{j=m}^{k}$ em $(x_j)_{j=m}^{k}$ e $(y_j)_{j=m+1}^{k+1}$ em $(x_j)_{j=m+1}^{k+1}$, respectivamente. Então, o polinómio q definido pela expressão

$$q(x) = \frac{x - x_m}{x_{k+1} - x_m} p_{m+1,k-m}(x) + \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_m} p_{m,k-m}(x)$$

interpola $y_m, \ldots, y_{k+1}$ em $x_m, \ldots, x_{k+1}$ e tem grau menor ou igual a $k - m + 1$ (notar a semelhança entre esta expressão e a relação de recorrência da forma de Aitken-Neville do polinómio interpolador). Da unicidade do polinómio interpolador tem-se que $q \equiv p_{m,k-m+1}$. Igualando os coeficientes do termo x^{k-m+1} obtém-se

$$a_{m,k-m+1} = \frac{a_{m+1,k-m} - a_{m,k-m}}{x_{k+1} - x_m},$$

ou ainda, usando diferenças divididas,

$$y[x_m, \ldots, x_{k+1}] = \frac{y[x_{m+1}, \ldots, x_{k+1}] - y[x_m, \ldots, x_k]}{x_{k+1} - x_m}. \qquad \square$$

A utilização de diferenças divididas permite escrever o polinómio interpolador na forma de Newton como

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + y[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

onde

$$\begin{aligned}
&y[x_0] = y_0 \\
&y[x_0, x_1] = \frac{y[x_1] - y[x_0]}{x_1 - x_0} \\
&y[x_0, x_1, x_2] = \frac{y[x_1, x_2] - y[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Os cálculos das diferenças divididas podem ser organizados de um modo expedito dispondo-os numa tabela como se mostra abaixo (exemplo com 4 nós).

x	$y[\cdot]$	$y[\cdot,\cdot]$	$y[\cdot,\cdot,\cdot]$	$y[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	y_0			
		$y[x_0, x_1]$		
x_1	y_1		$y[x_0, x_1, x_2]$	
		$y[x_1, x_2]$		$y[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	y_2		$y[x_1, x_2, x_3]$	
		$y[x_2, x_3]$		
x_3	y_3			

O exemplo seguinte ilustra a utilização de diferenças divididas para a obtenção do polinómio interpolador na forma de Newton.

Exemplo 3.7.1. *Determinar, na forma de Newton, o polinómio de grau menor ou igual a* 3 *que interpola os valores da seguinte tabela.*

x	-1	0	2	3
y	6	-12	18	24

Resolução

A tabela das diferenças divididas correspondente aos valores dados é

x	$y[\cdot]$	$y[\cdot,\cdot]$	$y[\cdot,\cdot,\cdot]$	$y[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
-1	$\boxed{6}$			
		$\boxed{-18}$		
0	-12		$\boxed{11}$	
		15		$\boxed{-\frac{7}{2}}$
2	18		-3	
		6		
3	24			

E então o polinómio interpolador será

$$p(x) = 6 - 18(x+1) + 11(x+1)x - \tfrac{7}{2}(x+1)x(x-2).$$

Para além das diferenças divididas, podem também definir-se as designadas diferenças finitas. A **diferença finita** de ordem $k \in \mathbb{N}_0$ e passo $h > 0$ da função f representa-se por $\Delta_h^k f$ e o seu valor no ponto x é

$$\begin{aligned}
&\Delta_h^0 f(x) = f(x),\\
&\Delta_h^{k+1} f(x) = \Delta_h^k f(x+h) - \Delta_h^k f(x), \qquad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

Em particular, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - x(x),\\
&\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h^1 f(x+h) - \Delta_h^1 f(x) = [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)],\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Sempre que não haja ambiguidade quanto ao valor do passo h, as diferenças finitas representam-se simplesmente por $\Delta^0 f, \Delta^1 f, \Delta^2 f, \ldots$

Quando os nós de interpolação se encontram igualmente espaçados, isto é, quando existe um valor h tal que $x_{i+1} - x_i = h$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, as diferenças finitas dos valores nodais $(y_i)_{i=0}^n$ são dadas por

$$\begin{aligned}
&\Delta^0 y_i = y_i && i = 0, \ldots, n\\
&\Delta^1 y_i = \Delta y_i = y_{i+1} - y_i && i = 0, \ldots, n-1\\
&\Delta^2 y_i = \Delta^1 y_{i+1} - \Delta^1 y_i && i = 0, \ldots, n-2\\
&\ldots
\end{aligned}$$

O resultado apresentado em seguida estabelece uma relação entre as diferenças finitas e as diferenças divididas dos valores nodais correspondentes a nós igualmente espaçados.

Teorema 3.7.2. *A diferença dividida de ordem k dos valores nodais y nos nós h-equidistantes $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ satisfaz*

$$y[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k y_i$$

Demonstração. Sendo $k = 0$ verifica-se que $y[x_i] = y_i = \Delta^0 y_i$, por definição.

A relação de recorrência entre as diferenças divididas permite escrever

$$y[x_i, \ldots, x_{i+k+1}] = \frac{y[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}] - y[x_i, \ldots, x_{i+k}]}{x_{i+k+1} - x_i}$$

Supondo a validade da relação a mostrar para k, tem-se

$$y[x_i, \ldots, x_{i+k+1}] = \frac{\frac{1}{k!h^k}\Delta^k y_{i+1} - \frac{1}{k!h^k}\Delta^k y_i}{(k+1)h}$$

Da definição das diferenças finitas tem-se $\Delta^{k+1} y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i$, obtendo-se

$$y[x_i, \ldots, x_{i+k+1}] = \frac{1}{k!h^k}\frac{1}{(k+1)h}\Delta^{k+1} y_i = \frac{1}{(k+1)!h^{k+1}}\Delta^{k+1} y_i$$

ou seja, a validade da expressão dada para $k + 1$.

Desta forma, o resultado fica demonstrado por indução. □

Tal como no caso das diferenças divididas, é também vantajoso dispor os cálculos das diferenças finitas numa tabela.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\ldots$	$\Delta^{n-1} y$	$\Delta^n y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\ldots$		
$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\Delta^{n-1} y_0$	
		$\ldots$		$\ldots$		$\Delta^n y_0$
$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\Delta^{n-1} y_1$	
		Δy_{n-2}		$\ldots$		
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}$			
		Δy_{n-1}				
x_n	y_n					

Caso os nós de interpolação sejam equidistantes é então possível obter o polinómio p, de grau menor ou igual a n, que interpola os valores $(y_i)_{i=0}^n$ nos nós h-equidistantes $(x_i)_{i=0}^n$ na forma de Newton utilizando diferenças finitas. Este polinómio será dado por

$$\begin{aligned} p(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ou, numa forma compacta,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right].$$

Exemplo 3.7.2. *Determinar o polinómio p, de grau menor ou igual a 3, que interpola os valores da seguinte tabela.*

x	-1	1	3	5
y	2	5	3	1

Resolução

A tabela das diferenças finitas dos valores nodais é

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	$\boxed{2}$			
		$\boxed{3}$		
1	5		$\boxed{-5}$	
		-2		$\boxed{5}$
3	3		0	
		-2		
5	1			

Pelo que o polinómio interpolador será

$$p(x) = 2 + \tfrac{3}{2}(x+1) - \tfrac{5}{2\times 4}(x+1)(x-1) + \tfrac{5}{6\times 8}(x+1)(x-1)(x-3).$$

3.8 Interpolação directa e inversa

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(x_i)_{i=0}^n$ nós distintos pertencentes a $[a, b]$ e $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

A **interpolação directa** de f nos nós $(x_i)_{i=0}^n$ consiste em determinar o polinómio p (de grau menor ou igual a n) que verifica $p(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Se f admitir inversa em $[a, b]$ então a **interpolação inversa** de f consiste em determinar um polinómio q (de grau menor ou igual a n) tal que

$$q(y_i) = x_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Agora $(y_i)_{i=0}^n$ são os nós de interpolação e $(x_i)_{i=0}^n$ são os valores nodais, da função f^{-1} a interpolar.

Uma das aplicações da interpolação inversa é a determinação de zeros de funções, como se ilustra no exemplo seguinte.

Exemplo 3.8.1. *Determinar um valor aproximado do zero de* $f(x) = \frac{3}{2}\sin(x) - e^{-x}$ *em* $[0, 1]$.

Resolução

Um zero s *é, por definição, um valor tal que* $f(s) = 0$.

Como f *é estritamente crescente em* $[0, 1]$ *(porquê?) então* f *admite inversa nesse intervalo. Logo conclui-se que*

$$f(s) = 0 \Leftrightarrow s = f^{-1}(0)$$

Utilizando interpolação inversa de f *e calculando o valor de um polinómio interpolador de* f^{-1} *em* 0 *obter-se-á um valor aproximado do zero de* f.

Escolhendo alguns nós em $[0, 1]$ *e calculando os valores nodais obtém-se*

x	0	0.4	0.6	1
$y = f(x)$	-1.00000	-0.08619	0.29815	0.89433

Utilizando a forma de Newton calculada a partir das diferenças divididas

y	x	$x[,]$	$x[,,]$	$x[,,,]$
-1.00000	0			
		0.43773		
-0.08619	0.4		0.06366	
		0.52037		0.04745
0.28815	0.6		0.15356	
		0.67094		
0.89433	1			

O polinómio interpolador fica

$$\begin{aligned} p(y) &= 0 + 0.43773(y+1) + 0.06366(y+1)(y+0.08619) + \\ &\quad + 0.04745(y+1)(y+0.08619)(y-0.28815) \end{aligned}$$

E então, $s = f^{-1}(0) \approx p(0) = 0.44200$ *(verificando-se que* $f(0.44200) = -0.00113$*).*

3.9 Dupla interpolação

Consideremos o problema descrito em seguida. Conhecidos os valores $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $(x_i)_{i=0}^n$ são distintos, e $(y_j)_{i=0}^m$ são também distintos, pretende-se obter um valor aproximado de $f(\bar{x}, \bar{y})$.

Este é um problema de interpolação em $\mathbb{R}^2$, mas que pode ser "resolvido" utilizando interpolação em $\mathbb{R}$. Para tal poder-se-á aplicar o método designado por **dupla interpolação**, que consiste em efectuar interpolações polinomiais independentes nas duas variáveis, uma de cada vez. Estas interpolações podem ser efectuadas de duas formas:

- Interpolando inicialmente em x, obtém-se para cada j o polinómio p_j que interpola os valores $(z_{ij})_{i=0}^{n}$ nos nós $(x_i)_{i=0}^{n}$. Posteriormente, determina-se o polinómio q que interpola os valores $p_j(\bar{x})$ nos nós $(y_j)_{j=0}^{m}$. O valor procurado será dado por $q(\bar{y})$.

- Interpolando inicialmente em y, obtém-se para cada i o polinómio q_i que interpola os valores $(z_{ij})_{j=0}^{m}$ nos nós $(y_j)_{j=0}^{m}$. Posteriormente, determina-se o polinómio p que interpola os valores $q_i(\bar{y})$ nos nós $(x_i)_{i=0}^{n}$. O valor procurado será dado por $p(\bar{x})$.

Os valores conhecidos bem como os valores a determinar para o cálculo aproximado de $f(\bar{x}, \bar{y})$ podem ser dispostos de um modo natural em tabelas como se mostra em seguida. Interpolando primeiro em x ter-se-á

$f(x,y)$	y_0	$\cdots$	y_l	$\bar{y}$	y_{l+1}	$\cdots$	y_m
x_0	z_{00}	$\cdots$	z_{0l}		$z_{0,l+1}$	$\cdots$	z_{0m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_k	z_{k0}	$\cdots$	z_{kl}		$z_{k,l+1}$	$\cdots$	z_{km}
$\bar{x}$	$p_0(\bar{x})$	$\cdots$	$p_l(\bar{x})$	$\boxed{q(\bar{y})}$	$p_{l+1}(\bar{x})$	$\cdots$	$p_m(\bar{x})$
x_{k+1}	$z_{k+1,0}$	$\cdots$	$z_{k+1,l}$		$z_{k+1,l+1}$	$\cdots$	$z_{k+1,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	z_{n0}	$\cdots$	z_{nl}		$z_{n,l+1}$	$\cdots$	z_{nm}

Interpolando primeiro em y tem-se agora

$f(x,y)$	y_0	$\cdots$	y_l	$\bar{y}$	y_{l+1}	$\cdots$	y_m
x_0	z_{00}	$\cdots$	z_{0l}	$q_0(\bar{y})$	$z_{0,l+1}$	$\cdots$	z_{0m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_k	z_{k0}	$\cdots$	z_{kl}	$q_k(\bar{y})$	$z_{k,l+1}$	$\cdots$	z_{km}
$\bar{x}$				$\boxed{p(\bar{y})}$			
x_{k+1}	$z_{k+1,0}$	$\cdots$	$z_{k+1,l}$	$q_{k+1}(\bar{y})$	$z_{k+1,l+1}$	$\cdots$	$z_{k+1,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	z_{n0}	$\cdots$	z_{nl}	$q_n(\bar{y})$	$z_{n,l+1}$	$\cdots$	z_{nm}

Exemplo 3.9.1.

Considere a seguinte tabela de alguns valores de $z(x,y)$ conhecidos.

		y			
z		1	2	4	6
x	1	10	15	18	22
	2	7	12	15	20
	5	5	8	10	14

1. *Interpolando linearmente em x e em y, estime o valor de $z(4,5)$*

   (a) *interpolando primeiro em x.*

   (b) *interpolando primeiro em y.*

2. *Estime agora $z(4,5)$ utilizando interpolação linear em x e quadrática em y e interpolando primeiro em x.*

Resolução

1. *Interpolação linear em x e y, escolhendo para cada variável os dois pontos mais próximos.*

   (a) *Interpolando primeiro em x*

$$z_{01}(4,4) = \frac{\begin{vmatrix} z(2,4) & 4-2 \\ z(5,4) & 4-5 \end{vmatrix}}{2-5} = 11.6667$$

$$z_{01}(4,6) = \frac{\begin{vmatrix} z(2,6) & 4-2 \\ z(5,6) & 4-5 \end{vmatrix}}{2-5} = 16$$

		y				
z		1	2	4	5	6
x	1	10	15	18		22
	2	7	12	15		20
	4				$\square$	
	5	5	8	10		14

Interpolando agora em y os valores calculados, obtém-se

$$z_{01}(4,5) = \frac{\begin{vmatrix} z_{01}(4,4) & 5-4 \\ z_{01}(4,6) & 5-6 \end{vmatrix}}{4-6} = \boxed{13.833.}$$

   (b) *Interpolando primeiro em y*

$$z_{01}(2,5) = \frac{\begin{vmatrix} z(2,4) & 5-4 \\ z(2,6) & 5-6 \end{vmatrix}}{4-6} = 17.5$$

$$z_{01}(5,5) = \frac{\begin{vmatrix} z(5,4) & 5-4 \\ z(5,6) & 5-6 \end{vmatrix}}{4-6} = 12$$

		y				
z		1	2	4	5	6
x	1	10	15	18		22
	2	7	12	15		20
	4				$\square$	
	5	5	8	10		14

Interpolando agora em x os valores calculados, obtém-se

$$z_{01}(4,5) = \frac{\begin{vmatrix} z_{01}(2,5) & 4-2 \\ z_{01}(5,6) & 4-5 \end{vmatrix}}{2-5} = \boxed{13.833.}$$

A obtenção do mesmo valor fazendo as interpolações nas duas variáveis por ordem diferente terá sido coincidência?

2. *Interpolação linear em x e quadrática em y, escolhendo para cada variável os pontos mais próximos.*

   Interpolando primeiro em x

$$z_{01}(4,2) = \frac{\begin{vmatrix} z(2,2) & 4-2 \\ z(5,2) & 4-5 \end{vmatrix}}{2-5} = 9.3333$$

$$z_{01}(4,4) = \frac{\begin{vmatrix} z(2,4) & 4-2 \\ z(5,4) & 4-5 \end{vmatrix}}{2-5} = 11.6667$$

$$z_{01}(4,6) = \frac{\begin{vmatrix} z(2,6) & 4-2 \\ z(5,6) & 4-5 \end{vmatrix}}{2-5} = 16$$

		y				
z		1	2	4	5	6
x	1	10	15	18		22
	2	7	12	15		20
	4					
	5	5	8	10		14

   Interpolando agora em y os valores calculados, obtém-se

$$z_{01}(4,5) = \frac{\begin{vmatrix} z_{01}(4,2) & 5-2 \\ z_{01}(4,4) & 5-4 \end{vmatrix}}{2-4} = 12.8333 \qquad z_{12}(4,5) = \frac{\begin{vmatrix} z_{01}(4,4) & 5-4 \\ z_{01}(4,6) & 5-6 \end{vmatrix}}{4-6} = 13.8333$$

$$z_{012}(4,5) = \frac{\begin{vmatrix} z_{01}(4,5) & 5-2 \\ z_{12}(4,5) & 5-6 \end{vmatrix}}{2-6} = \boxed{12.583.}$$

Nota: *Em todos os cálculos foi utilizada a forma de Aitken-Neville uma vez que em cada caso apenas é necessário calcular o valor do polinómio interpolador num ponto.*

3.10 Erro de interpolação

Se os valores nodais a interpolar corresponderem a valores de uma dada função f, pode ser interessante analisar em que medida o polinómio interpolar se aproxima da função, obviamente que em pontos distintos dos nós de interpolação.

O resultado apresentado em seguida generaliza o conhecido teorema do valor médio que permite concluir a existência de um ponto onde a tangente ao gráfico da de uma função é paralela a uma dada recta secante. De facto, fazendo $k = 1$ no enunciado do resultado abaixo obtém-se directamente aquele teorema pois $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. (Relembremos que as diferenças divididas dos valores da função f são representadas por $f[\ldots]$.)

Teorema 3.10.1. *Sejam $f \in C^k([a,b];\mathbb{R})$ e $(x_i)_{i=0}^k$ um conjunto de nós distintos em $[a,b]$. Então existe $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi).$$

Demonstração. Seja p o polinómio de grau menor ou igual a k que interpola f nos nós distintos $(x_i)_{i=0}^k$. Então, a função $e = f - p$ tem pelo menos $k+1$ zeros distintos em $[a,b]$. Logo

$$\begin{array}{ll} e' = f' - p' & \text{tem pelo menos } k \text{ zeros distintos em } [a,b], \\ e^{(2)} = f^{(2)} - p^{(2)} & \text{tem pelo menos } k-1 \text{ zeros distintos em } [a,b], \\ \ldots & \\ e^{(k)} = f^{(k)} - p^{(k)} & \text{tem pelo menos 1 zero em } [a,b], \end{array}$$

ou seja, existe $\xi \in [a,b]$ tal que $f^{(k)}(\xi) = p^{(k)}(\xi)$.

Designando por a_k o coeficiente de x^k em p verifica-se que $p^{(k)}(x) \equiv k! a_k$.

Da forma de Newton do polinómio interpolador verifica-se que $a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, concluindo-se então que $k! f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = f^{(k)}(\xi)$, como pretendido. □

O teorema seguinte permite estimar o erro cometido ao aproximar uma função f por um polinómio interpolador dessa função, habitualmente designado por **erro de interpolação**.

Teorema 3.10.2. *Sejam $f \in C^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ e p o polinómio de grau menor ou igual a n que interpola f nos nós distintos $(x_i)_{i=0}^n$, pertencentes a $[a,b]$. Então, para qualquer $x \in [a,b]$ existe $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$e(x) \equiv f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) W_n(x),$$

onde $W_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Demonstração. Seja $\bar{x}$ um qualquer elemento de $[a,b]$.

Se $\bar{x} = x_i$ para algum i, o erro é nulo e o teorema é verdadeiro, pois $W_n(x_i) = 0$, $\forall i$.

Suponha-se agora que $\bar{x}$ é distinto de $(x_i)_{i=0}^n$. O polinómio q de grau menor ou igual a $n+1$, que interpola f nos nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e $\bar{x}$, pode ser escrito como (relembrar a forma de Newton)

$$q(x) = p(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}] W_n(x).$$

Desta expressão resulta que $f(\bar{x}) = q(\bar{x}) = p(\bar{x}) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}] W_n(\bar{x})$.

Como já visto, existe $\xi \in [a,b]$ tal que $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$, obtendo-se finalmente que

$$e(\bar{x}) = f(\bar{x}) - p(\bar{x}) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) W_n(\bar{x})$$

como se pretendia mostrar. □

Na expressão do erro de interpolação

$$e(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) W_n(x),$$

o ponto ξ (dependente de x e dos nós de interpolação) é desconhecido, sendo usual considerar uma das seguintes majorações do erro absoluto

$$|e(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \max_{z\in[a,b]} |f^{(n+1)}(z)| \cdot |W_n(x)|,$$

ou

$$|e(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \max_{z\in[a,b]} |f^{(n+1)}(z)| \cdot \max_{z\in[a,b]} |W_n(z)|.$$

Supondo os nós ordenados de forma crescente (o que não acarreta qualquer perda de generalidade) e sendo h o espaçamento máximo entre dois nós consecutivos, a majoração de $|W_n|$ no intervalo $[x_0, x_n]$ conduz ainda ao seguinte majorante do erro absoluto

$$|e(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \cdot \max_{z\in[a,b]} |f^{(n+1)}(z)|$$

que é válida para todo o $x \in [x_0, x_n]$.

Exemplo 3.10.1. *Pretende-se construir uma tabela da função $f(x) = \tan(x)$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ com nós equidistantes, por forma a que o erro absoluto cometido quando se interpola linearmente nesta tabela não exceda 5×10^{-5}. Qual o espaçamento mínimo entre os nós?*

Resolução

O erro máximo absoluto na interpolação linear entre nós consecutivos será

$$\varepsilon \leq \tfrac{h^2}{4\times 2} \cdot \max |f''|$$

Tem-se ainda que $f''(x) = [\tan(x)]'' = [1+\tan^2(x)]' = 2\tan(x)(1+\tan^2(x))$, cujo valor máximo em $[0, \frac{\pi}{4}]$ é 4 (para $x = \frac{\pi}{4}$). Para obter o erro máximo desejado bastará impor a condição

$$\tfrac{h^2}{4\times 2} \times 4 \leq 5 \times 10^{-5}$$

obtendo-se $h \leq 10^{-2}$, o que corresponde a um número de intervalos superior a $\frac{\pi}{4\times 10^{-2}} \approx 78.5$, ou seja, será usada uma tabela com 80 pontos (incluindo os extremos) espaçados de $\frac{\pi}{4\times 79}$.

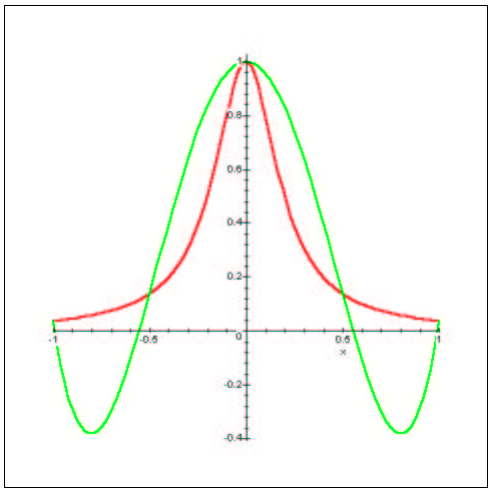
Uma questão que surge com alguma naturalidade é a de saber se à medida que se aumenta o número de nós de interpolação, o polinómio interpolador "converge" para a função a interpolar, ou seja se o erro de interpolação diminui à medida que o grau do polinómio interpolador aumenta.

Exemplo 3.10.2. *Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}.$$

Tomando como nós de interpolação os pontos $-1 + \frac{i}{2}$, $(i = 0, \ldots, 4)$, obtém-se o polinómio interpolador

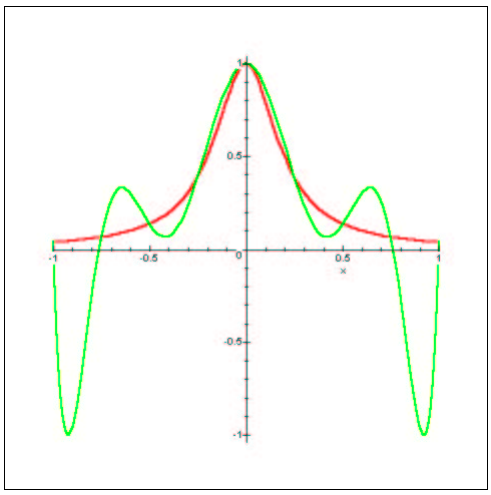
$$\frac{1250}{377}x^4 - \frac{3225}{754}x^2 + 1.$$



Função a interpolar e polinómio interpolador de grau 4.

Interpolando agora nos nós $-1+\frac{i}{4}$, $(i=0,\ldots,8)$, *obtém-se o polinómio interpolador*

$$\frac{200000000}{3725137}x^8-\frac{383000000}{3725137}x^6+\frac{228601250}{3725137}x^4-\frac{98366225}{7450274}x^2+1.$$



Função a interpolar e polinómio interpolador de grau 8.

Continuando a aumentar o número de nós e mantendo-os equidistantes, verifica-se que os polinómios interpoladores apresentam cada vez maiores oscilações, não se aproximando da função a interpolar.

Neste exemplo, à medida que o número de nós aumenta, o erro de interpolação não converge para 0, verificando-se que os polinómios interpoladores apresentam "oscilações" de amplitudes crescentes. Este comportamento deve-se à habitualmente designada **rigidez dos polinómios**,

que se traduz no eventual aparecimento de oscilações quando se obriga um polinómio a passar por determinados pontos.

Este tipo de comportamento é bastante indesejável quando se pretendem utilizar polinómios interpoladores para aproximar funções. Analisando a expressão do erro de interpolação pode concluir-se que este comportamento pode ser causado quer pelo aumento dos valores das derivadas de ordem superior da função f a interpolar, quer pelo aumento dos valores dos polinómios nodais W_i. Se, para um dado problema de aproximação por interpolação polinomial, os valores que tomam as derivadas de f são algo que não se pode contornar, já os polinómios nodais podem alterados bastando para isso alterar a localização dos nós de interpolação. Na verdade, é possível escolher os nós de interpolação de forma a que os polinómios nodais W_i tomem valores tão pequenos quanto possível.

Outra forma de evitar este comportamento será utilizar funções interpoladoras não polinomiais. Uma das possibilidades será a utilização de funções polinomiais por segmentos, que serão estudadas em seguida.

3.11 Interpolação polinomial segmentada (splines)

Consideremos novamente a questão de interpolar uma função f num intervalo $[a, b]$. Em diversas situações de utilização de polinómios interpoladores não se verifica a convergência para 0 do erro de interpolação à medida que se consideram mais nós, isto é, polinómios de mais grau mais elevado. Por outro lado, nem sempre é vantajoso do trabalhar com polinómios de grau elevados, pois a sua avaliação num ponto utilizando aritmética finita está sujeita a erros de arredondamento.

Uma alternativa será utilizar funções interpoladoras que não sejam de classe C^∞. Particularmente interessante é a utilização de funções polinomiais por segmentos, isto é, funções que em cada subintervalo sejam definidas por um polinómio, mas que em diferentes subintervalos possam ser definidas por diferentes polinómios.

Definição 3.11.1. *Uma função S diz-se um* ***spline polinomial*** *de grau m (onde $m \in \mathbb{N}$), relativo aos nós $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, quando*

1. *S coincide com um polinómio S_i de grau menor ou igual a m em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.*
2. *$S \in C^{m-1}([a, b]; \mathbb{R})$.*

Dados os nós $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, a definição do spline é feita à custa dos polinómios S_i, que caracterizam S nos diferentes intervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Sendo as funções polinomiais de classe C^∞, a condição 2 é sempre válida no interior de cada subintervalo, pelo que apenas é necessário verificá-la nos nós $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Dado um conjunto de nós $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ e os valores nodais $y_0, y_1, \ldots, y_n$ respectivos, a **interpolação por splines de grau** m consiste em encontrar um spline S de grau m relativo aos nós $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ tal que

$$S(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tal como no caso da interpolação polinomial também agora se colocam algumas questões importantes às quais interessa responder, das quais se destacam as seguintes

- Será que existe spline interpolador?
- Será que o spline interpolador é único?
- Como se determinam os polinómios S_i que definem o spline?
- Como se estima o erro na interpolação por splines de uma função?

Estas questões serão de alguma forma endereçadas no estudo que se segue sobre interpolação por splines.

Spline de grau 1 ou linear

O spline S coincide em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ com o segmento de recta que passa pelos pontos (x_{i-1}, y_{i-1}) e (x_i, y_i). Ou seja, os polinómios S_i, definidores do spline, serão dados por

$$S_i(x) = y_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + y_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. (**Nota:** nesta expressão e no que se segue, define-se $h_i = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.)

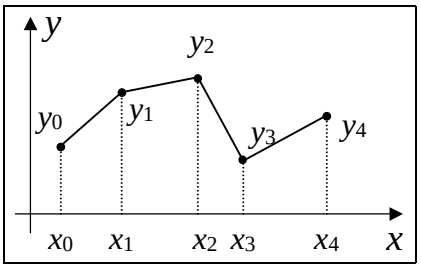


Figura 3.2: Spline linear.

A existência e unicidade do spline interpolador de grau 1 é uma consequência imediata da existência e unicidade do polinómio interpolador de grau menor ou igual a um para cada par de nós consecutivos.

Caso os valores nodais y_i sejam dados por uma função, isto é, $y_i = f(x_i)$, onde f é uma função de classe C^2, pode concluir-se que o erro de interpolação por um spline de grau 1 é majorado por

$$|e| \leq \frac{1}{8} \cdot |f''|\Big|_{\max} \cdot h^2$$

com $h = \max\{h_i : \ 1 \leq i \leq n\}$.

Esta expressão obtém-se directamente a partir da majoração do erro de interpolação polinomial para polinómios de grau menor ou igual a um.

Spline de grau 2 ou quadrático

O spline coincide em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ com um arco de parábola. Estes arcos ligam-se de forma contínua, deverão passar pelos valores a interpolar e assegurar a continuidade da primeira derivada nos nós $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

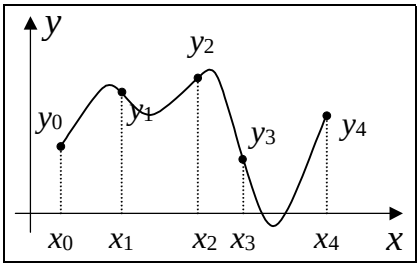


Figura 3.3: Spline quadrático.

As condições a impor aos polinómios S_i, definidores do spline S, serão

$$S_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.11.1}$$

$$S_i(x_i) = y_i \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.11.2}$$

$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i) \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{3.11.3}$$

que resultam em $3n - 1$ equações a satisfazer pelos coeficientes dos S_i.

Sendo os polinómios S_i, $i = 1, \ldots, n$, definidos por

$$S_i(x) = y_{i-1} + m_{i-1} \cdot (x - x_{i-1}) + \frac{M_i}{2} \cdot (x - x_{i-1})^2$$

garante-se, por construção,a satisfação de (3.11.1). Deste modo será necessário determinar os valores m_i e M_i, para $i = 1, \ldots, n$, para definir completamente o spline.

Partindo de (3.11.2) e (3.11.3), é possível determinar os valores m_i e M_i de uma forma recorrente

por intermédio das expressões

$$m_i = 2 \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - m_{i-1} \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$M_i = \frac{m_i - m_{i-1}}{h_i} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Para completar a definição do spline é necessário ainda definir o valor adicional m_0. Conclui-se então a não unicidade dos splines quadráticos interpoladores. Para se ter unicidade é necessário impor uma condição suplementar, sendo habitual estipular o valor m_0, ou seja, a derivada do spline em x_0.

É de salientar o facto dos splines quadráticos serem pouco utilizados, por habitualmente apresentarem um comportamento com grandes oscilações.

Spline de grau 3 ou cúbico

Em $[x_{i-1}, x_i]$ o spline S coincide com um polinómio de grau menor ou igual a 3. Estas funções polinomiais ligam-se de forma contínua, deverão passar pelos valores a interpolar e assegurar a continuidade da primeira e segunda derivadas nos nós $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

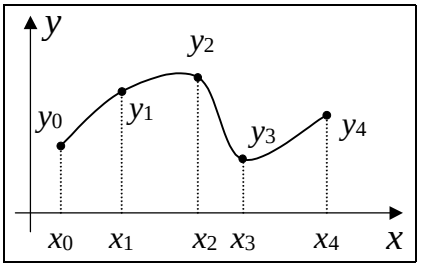


Figura 3.4: Spline cúbico.

As condições a impor aos polinómios S_i, definidores do spline S, serão

$$S_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$S_i(x_i) = y_i \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i) \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i) \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Definindo $M_i = S''(x_i)$, para $i = 0, 1, \ldots, n$, a continuidade da segunda derivada fica assegurada fazendo-se

$$S_i''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}.$$

Os parâmetros M_i são habitualmente designados por **momentos**. Integrando esta expressão duas vezes obtém-se

$$S_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \alpha_i x + \beta_i$$

onde α_i e β_i são constantes de integração. Definindo $c_i = \alpha_i x_{i-1} + \beta_i$ e $d_i = \alpha_i x_i + \beta_i$, tem-se ainda

$$S_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + c_i\frac{x_i - x}{h_i} + d_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

Impondo agora as condições $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ e $S_i(x_i) = y_i$, conclui-se que

$$c_i = y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6} \qquad \text{e} \qquad d_i = y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}.$$

Substituindo estes valores, conclui-se que os polinómios S_i podem ser representados por

$$\begin{aligned} S_i(x) = {} & M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \\ & \left(y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i} + \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \end{aligned}$$

Impondo a continuidade da primeira derivada nos nós interiores conclui-se que

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, obtendo-se deste modo um sistema de $n-1$ equações lineares com $n+1$ incógnitas, que são os momentos $M_0, M_1, \ldots, M_n$.

Conclui-se assim a não unicidade do spline interpolador de grau 3. Para determinar um spline interpolador de grau 3 é necessário impor duas condições adicionais. Uma possibilidade será considerar $M_0 = 0$ e $M_n = 0$ (anulamento da segunda derivada no primeiro e no último nó). Neste caso, diz-se que o spline é **natural**.

Os splines cúbicos são bastante utilizados como funções interpoladoras. Tendo por base polinómios de grau 3 são funções de fácil avaliação num ponto e também garantem a continuidade da segunda derivada. Às suas propriedades há ainda a juntar a descrita no resultado seguinte.

Teorema 3.11.1. *Sejam os nós $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ e os valores nodais $y_0, \ldots, y_n$. Então, de todas as funções $g \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ que interpolam estes pontos, o spline cúbico natural é a única que torna mínimo o valor de*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx.$$

Caso os valores nodais obedeçam a $y_i = f(x_i)$, onde f é uma função de classe C^4, o erro de interpolação por um spline cúbico é majorado por

$$|e| \leq \frac{5}{384} \cdot |f^{(4)}|\Big|_{\max} \cdot h^4.$$

Exemplo 3.11.1. *Interpolar a função*

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \qquad x \in [-1,1]$$

por splines polinomiais, utilizando 7 pontos do intervalo $[-1,1]$ *equidistantes.*

Resolução

Os valores a interpolar serão

x	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
y	$\frac{1}{26}$	$\frac{9}{109}$	$\frac{9}{34}$	1	$\frac{9}{34}$	$\frac{9}{109}$	$\frac{1}{26}$

Interpolando por um spline linear obtém-se

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= 0.17078 + 0.13232x, && x \in [-1, -\tfrac{2}{3}] \\
S_2(x) &= 0.44684 + 0.54641x, && x \in [-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}] \\
S_3(x) &= 1 + 2.20588x, && x \in [-\tfrac{1}{3}, 0] \\
S_4(x) &= 1 - 2.20588x, && x \in [0, \tfrac{1}{3}] \\
S_5(x) &= 0.44684 - 0.54641x, && x \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \\
S_6(x) &= 0.17078 - 0.13232x, && x \in [\tfrac{2}{3}, 1]
\end{aligned}$$

Interpolando por um spline quadrático (e considerando $m_0 = 0$*) obtém-se*

i	0	1	3	2	4	5	6
m_i	0	0.26464	0.82818	3.58359	-7.99535	6.90253	-7.16717
M_i	–	0.79393	1.69061	8.26622	-34.73681	44.69364	-42.20910

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= 0.43543 + 0.79393x + 0.39697x^2, && x \in [-1, -\tfrac{2}{3}] \\
S_2(x) &= 0.63469 + 1.39171x + 0.84530x^2, && x \in [-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}] \\
S_3(x) &= 1 + 3.58359x + 4.13311x^2, && x \in [-\tfrac{1}{3}, 0] \\
S_4(x) &= 1 + 3.58359x - 17.36841x^2, && x \in [0, \tfrac{1}{3}] \\
S_5(x) &= 5.41280 - 22.89323x + 22.34682x^2, && x \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \\
S_6(x) &= -13.89892 + 35.04193x - 21.10455x^2, && x \in [\tfrac{2}{3}, 1]
\end{aligned}$$

A interpolação por um spline cúbico natural ($M_0 = 0$ *e* $M_6 = 0$*) passa pela resolução do seguinte sistema de equações*

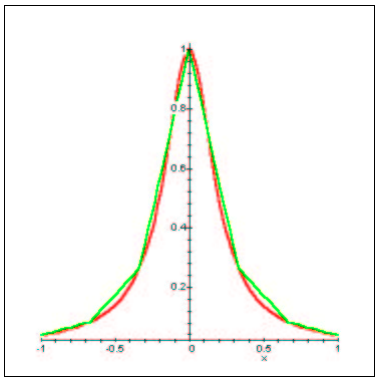
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9975}{24089} \\ \frac{3075}{1853} \\ -\frac{75}{17} \\ \frac{3075}{1853} \\ \frac{9975}{24089} \end{bmatrix}$$

cuja solução é

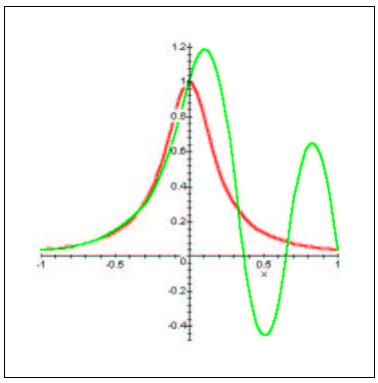
$$[M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4 \quad M_5]^T = \\ = [-1.81814 \quad 14.72616 \quad -27.21602 \quad 14.72616 \quad -1.81814]^{\mathrm{T}}.$$

Os polinómios definidores do spline cúbico serão

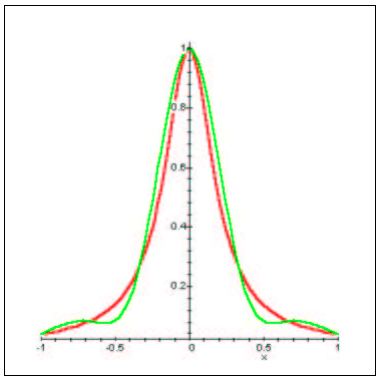
$$\begin{aligned}
S_1(x) &= -0.63728 - 2.49388x - 2.72721x^2 - 0.90907x^3, && x \in [-1, -\tfrac{2}{3}] \\
S_2(x) &= 2.08308 + 9.74775x + 15.63523x^2 + 8.27215x^3, && x \in [-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}] \\
S_3(x) &= 1 - 13.60801x^2 - 20.97109x^3, && x \in [-\tfrac{1}{3}, 0] \\
S_4(x) &= 1 - 13.60801x^2 + 20.97109x^3, && x \in [0, \tfrac{1}{3}] \\
S_5(x) &= 2.08308 - 9.74775x + 15.63523x^2 - 8.27215x^3, && x \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \\
S_6(x) &= -0.63728 + 2.49388x - 2.72721x^2 + 0.90907x^3, && x \in [\tfrac{2}{3}, 1]
\end{aligned}$$



Spline linear



Spline quadrático



Spline cúbico

Como se pode verificar, os splines linear e cúbico constituem boas aproximações da função f, este último com propriedades de continuidade das duas primeiras derivadas. É de relembrar que a aproximação desta função por polinómios interpoladores em nós equidistantes se torna muito problemática.

3.12 Exercícios

1. Mostre que os resultados da dupla interpolação linear do exemplo 3.9.1 não são coincidência, ou seja, que a dupla interpolação linear produz o mesmo resultado independentemente da ordem por que são efectuadas as interpolações nas duas variáveis.

2. Pretende-se aproximar a função e^x no intervalo $[-1, 1]$ por um polinómio interpolador em nós igualmente espaçados, de forma a que o erro absoluto cometido seja inferior a 5×10^{-8}. Determine a ordem mínima para o polinómio interpolador.

3. Pretende-se aproximar a função $\log_e(x)$ no intervalo $[1, 2]$ por um polinómio interpolador em nós equidistantes, de forma a que o erro absoluto cometido seja inferior a 5×10^{-8}. Determine a ordem mínima para o polinómio interpolador.

4. Pretende-se construir uma tabela com valores da função $\log_e(x)$ no intervalo $[1, 2]$ com nós equidistantes, de modo a que o erro absoluto cometido quando se utiliza interpolação quadrática nesta tabela seja inferior a 5×10^{-8}. Determine o espaçamento mínimo entre os nós a utilizar. Que nós deverão ser utilizados?