

Capítulo 7

Sistemas de Equações Não Lineares

7.1 Introdução

Neste capítulo iremos abordar o problema de resolução numérica de sistemas de equações não lineares. Um sistema de n equações nas n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

onde f_1, f_2, \dots, f_n são funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} .

Utilizando uma notação mais compacta, podemos definir o vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ e a função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de acordo com

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

podendo agora o sistema de equações ser escrito como

$$F(x) = 0.$$

Exemplo 7.1.1. *O sistema de equações*

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} \log_e(x_1 x_2) - 2 = 0 \\ x_1 x_2^2 + 5x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

pode ser reescrito na forma $F(x) = 0$ definindo a função

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2} \log_e(x_1 x_2) - 2 \\ x_1 x_2^2 + 5x_2 - 3 \end{bmatrix}$$

Na quase totalidade das situações não existem métodos directos para a resolução de sistemas de equações não lineares, sendo necessário recorrer a métodos iterativos. Nas secções seguintes iremos estudar dois métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações não lineares. Trata-se em ambos os casos de extensões de métodos já estudados para a resolução de uma equação não linear.

7.2 Método iterativo simples (iteração de ponto fixo)

Analogamente ao caso unidimensional, o método iterativo simples baseia-se na possibilidade de escrever o sistema de equações $F(x) = 0$ num outro equivalente da forma

$$x = G(x)$$

onde $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

onde g_1, g_2, \dots, g_n são as componentes de G .

O método iterativo simples consiste então em gerar uma sucessão de pontos em \mathbb{R}^n por intermédio da relação de recorrência

$$x_{(k)} = G(x_{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

a partir de um ponto inicial $x_{(0)}$. Pretende-se que esta sucessão de pontos em \mathbb{R}^n convirja para um ponto fixo s da função G , isto é, tal que $s = G(s)$ que será portanto solução do sistema original, ou seja, tal que $F(s) = 0$.

Este método é totalmente análogo ao método iterativo simples já estudado, sendo agora necessário calcular em cada iteração as novas estimativas de todas as variáveis.

Exemplo 7.2.1. *Reescrevendo o sistema*

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} \log_e(x_1 x_2) - 2 = 0 \\ x_1 x_2^2 + 5x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

na forma equivalente

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{2} \log_e(x_1 x_2) \\ x_2 = \frac{1}{5}(3 - x_1 x_2^2) \end{cases}$$

obtem-se a seguinte expressão de recorrência

$$\begin{cases} x_{1,(k)} = 2 - \frac{1}{2} \log_e(x_{1,(k-1)} x_{2,(k-1)}) \\ x_{2,(k)} = \frac{1}{5} \left(3 - x_{1,(k-1)} x_{2,(k-1)}^2 \right) \end{cases}$$

Partindo da estimativa inicial $x_{1,(0)} = 1$, $x_{2,(0)} = 1$, obtêm-se os seguintes resultados

k	$x_{1,(k)}$	$x_{2,(k)}$	$g_1(x_{1,(k)}, x_{2,(k)})$	$g_2(x_{1,(k)}, x_{2,(k)})$
0	1.00000	1.00000	2.00000	0.40000
1	2.00000	0.40000	2.11157	0.53600
2	2.11157	0.53600	1.93809	0.47867
3	1.93809	0.47867	2.03752	0.51119
4	2.03752	0.51119	1.97964	0.49351
5	1.97964	0.49351	2.01164	0.50357
6	2.01164	0.50357	1.99354	0.49798
7	1.99354	0.49798	2.00364	0.50113
8	2.00364	0.50113	1.99796	0.49937
9	1.99796	0.49937	2.00114	0.50036
10	2.00114	0.50036	1.99936	0.49980

Como se passa com todos os métodos iterativos, é importante analisar a convergência do método iterativo simples. O seguinte resultado fornece condições suficientes para a convergência do método iterativo simples. É de notar a semelhança entre estas condições e as apresentadas para o caso unidimensional.

Teorema 7.2.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e convexo. Seja $G : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e seja $\|\cdot\|$ uma norma em \mathbb{R}^n . Se*

$$i) \|J_G(x)\| \leq L < 1 \quad \forall x \in D$$

$$ii) G(D) \subset D$$

então

$$i) \text{ existe um e só um } z \in D \text{ tal que } z = G(z)$$

$$ii) \text{ o método iterativo simples converge para } z, \text{ qualquer que seja } x^{(0)} \in D$$

$$iii) \text{ verifica-se que}$$

$$\|z - x^{(k)}\| \leq \frac{L}{1-L} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

O exemplo seguinte ilustra a aplicação deste teorema na resolução de um sistema de equações não lineares.

Exemplo 7.2.2. *Consideremos o sistema de equações*

$$\begin{cases} 4x_1 - \cos(x_1 + x_2) = 4 \\ 3x_2 - \sin(x_1 + x_2) = 6 \end{cases}$$

Reescrevendo este sistema na forma

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{4} \cos(x_1 + x_2) \\ x_2 = 2 + \frac{1}{3} \sin(x_1 + x_2) \end{cases} \quad (7.2.1)$$

e definindo

$$G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{4} \cos(x_1 + x_2) \\ 2 + \frac{1}{3} \sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

obtem-se

$$J_G(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \sin(x_1 + x_2) & -\frac{1}{4} \sin(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{3} \cos(x_1 + x_2) & \frac{1}{3} \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

Facilmente se verifica que $\|J_G(x)\|_1 \leq \frac{7}{12}$ para qualquer $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Conclui-se assim que o sistema tem uma solução única e que o método iterativo simples com a expressão de recorrência dada por (7.2.1) converge para essa solução, qualquer que seja o ponto inicial escolhido. Na tabela seguinte apresentam-se os valores obtidos partindo do ponto inicial $x_{1,(0)} = 1$, $x_{2,(0)} = 1$.

k	$x_{1,(k)}$	$x_{2,(k)}$	$g_1(x_{1,(k)}, x_{2,(k)})$	$g_2(x_{1,(k)}, x_{2,(k)})$
0	1.00000	1.00000	0.89596	2.30310
1	0.89596	2.30310	0.75041	1.98085
2	0.75041	1.98085	0.77075	2.13297
3	0.77075	2.13297	0.75704	2.07854
4	0.75704	2.07854	0.76161	2.10042
5	0.76161	2.10042	0.75971	2.09198
6	0.75971	2.09198	0.76043	2.09529
7	0.76043	2.09529	0.76015	2.09400
8	0.76015	2.09400	0.76026	2.09450
9	0.76026	2.09450	0.76021	2.09431
10	0.76021	2.09431	0.76023	2.09438
11	0.76023	2.09438	0.76022	2.09435
12	0.76022	2.09435	0.76023	2.09436
13	0.76023	2.09436	0.76023	2.09436

O ponto obtido $x_1 = 0.76023$, $x_2 = 2.09436$ será então a solução procurada.

As condições suficientes de convergência enunciadas no teorema 7.2.1 permitem guiar a escolha da função de iteração G , bem como do ponto inicial $x_{(0)}$. Devemos assim escolher uma função

G tal que $\|J_G(z)\| < 1$, para alguma norma induzida, onde z é a solução pretendida. Nestas condições é possível garantir a convergência do método qualquer que seja o ponto inicial $x^{(0)}$ suficientemente próximo de z , ou seja, tal que $\|x^{(0)} - z\| < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

7.3 Método de Newton

O método de Newton para a resolução de sistemas de equações é também uma generalização do método já estudado para o caso de apenas uma equação. Consideremos novamente o sistema de equações $F(x) = 0$. Supondo que a matriz jacobiana $J_F(x)$ é não singular, este sistema é ainda equivalente a $J_F(x)^{-1}F(x) = 0$, ou ainda a

$$x = x - [J_F(x)]^{-1}F(x).$$

O método de Newton consiste em utilizar esta expressão como relação de recorrência para gerar uma sucessão de pontos $\{x_{(k)}\}$ que se pretende convergente para a solução z do sistema de equações. Os termos da sucessão são calculados a partir

$$x_{(k)} = x_{(k-1)} - [J_F(x_{(k-1)})]^{-1}F(x_{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

sendo o ponto inicial $x_{(0)}$ convenientemente escolhido.

Para obter $x_{(k)}$ é necessário determinar

$$J_F(x_{(k-1)}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \Big|_{x_{(k-1)}}$$

sendo em seguida calculado $v_{(k-1)} = [J_F(x_{(k-1)})]^{-1}F(x_{(k-1)})$. Este cálculo efectua-se resolvendo o seguinte sistema de equações lineares

$$J_F(x_{(k-1)}) v_{(k-1)} = F(x_{(k-1)}).$$

Finalmente, obtém-se $x_{(k)}$ a partir da expressão

$$x_{(k)} = x_{(k-1)} - v_{(k-1)}.$$

O seguinte teorema apresenta condições suficientes para a convergência do método de Newton. Tal como no caso unidimensional, verifica-se que este método apresenta uma convergência quadrática desde que a matriz jacobiana avaliada na solução do sistema de equações seja não singular.

Teorema 7.3.1. *Sejam F de classe C^2 e z tal que $F(z) = 0$. Se $\det(J_F(z)) \neq 0$ então a sucessão gerada pelo método de Newton é convergente para z qualquer que seja o ponto inicial $x^{(0)}$ suficientemente próximo de z . Verifica-se ainda que existe uma constante positiva c tal que*

$$\|z - x^{(k)}\| \leq c \|z - x^{(k-1)}\|^2,$$

ou seja a convergência é quadrática.

O exemplo seguinte ilustra a aplicação do método de Newton na resolução de um sistema de equações não lineares.

Exemplo 7.3.1. *Voltemos ao sistema de equações*

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} \log_e(x_1 x_2) - 2 = 0 \\ x_1 x_2^2 + 5x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Definindo a função

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2} \log_e(x_1 x_2) - 2 \\ x_1 x_2^2 + 5x_2 - 3 \end{bmatrix},$$

obtem-se a matriz jacobiana

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2x_1} & \frac{1}{2x_2} \\ x_2^2 & 2x_1 x_2 + 5 \end{bmatrix}.$$

A expressão de recorrência do método de Newton tomará para este caso a forma

$$\begin{bmatrix} x_{1,(k)} \\ x_{2,(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,(k-1)} \\ x_{2,(k-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{1,(k-1)} \\ v_{2,(k-1)} \end{bmatrix}.$$

onde

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2x_{1,(k-1)}} & \frac{1}{2x_{2,(k-1)}} \\ x_{2,(k-1)}^2 & 2x_{1,(k-1)}x_{2,(k-1)} + 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,(k-1)} \\ v_{2,(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,(k-1)} + \frac{1}{2} \log_e(x_{1,(k-1)}x_{2,(k-1)}) - 2 \\ x_{1,(k-1)}x_{2,(k-1)}^2 + 5x_{2,(k-1)} - 3 \end{bmatrix}.$$

Iniciando as iterações no ponto $x_{1,(0)} = 1$ e $x_{2,(0)} = 1$ obtém-se

$$F(x_{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e também

$$J_F(x_{(0)}) = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Tem-se então que

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,(0)} \\ v_{2,(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema obtém-se

$$\begin{bmatrix} v_{1,(0)} \\ v_{2,(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.85 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$

resultando então

$$\begin{bmatrix} x_{1,(1)} \\ x_{2,(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.85 \\ 0.45 \end{bmatrix}.$$

Continuando a aplicar o método obtêm-se os resultados constantes na tabela seguinte

k	$x_{1,(k)}$	$x_{2,(k)}$	$f_1(x_{(k)})$	$f_2(x_{(k)})$	$v_{1,(k)}$	$v_{2,(k)}$	$x_{2,(k+1)}$	$x_{2,(k+1)}$
0	1.00000	1.00000	-1.00000	3.00000	-0.85000	0.55000	1.85000	0.45000
1	1.85000	0.45000	-0.24166	-0.37538	-0.14483	-0.05192	1.99483	0.50192
2	1.99483	0.50192	-0.00455	0.01215	-0.00517	0.00192	2.00000	0.50000
3	2.00000	0.50000	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	2.00000	0.50000

A convergência quadrática do método de Newton é patente neste exemplo em que se obtém a solução do sistema em 3 iterações com um erro inferior a 10^{-5} . Esta característica de elevada rapidez é uma das grandes vantagens do método de Newton. Entre as suas maiores desvantagens inclui-se o elevado número de operações necessárias à execução de cada iteração do método (nomeadamente a resolução de um sistema de equações lineares) e também a necessidade de recorrer ao cálculo de derivadas das funções que definem o sistema de equações. Deve ainda referir-se que uma das maiores dificuldades na aplicação deste método é a garantia da sua convergência. De facto, em muitas situações não existem à partida estimativas iniciais suficientemente próximas da solução que garantam a convergência do método de Newton. Tendo em vista ultrapassar as principais desvantagens e dificuldades deste método podem ser utilizadas algumas modificações do seu funcionamento.

Por exemplo, para diminuir o peso computacional do método, é habitual não recalcular a matriz jacobiana (e obviamente a sua inversa) todas as iterações. Este procedimento reduz, na maioria dos casos, a rapidez de convergência do método (avaliada em número de iterações) mas as iterações serão mais rápidas, resultando muitas vezes num menor esforço total para a obtenção da solução com uma dada precisão. Muitas vezes ainda, as derivadas parciais que compõem a matriz jacobiana são aproximadas por quocientes de diferenças finitas.

Para garantir a convergência do método para um maior conjunto de pontos iniciais é frequente alterar a expressão de recorrência do método para

$$x_{(k)} = x_{(k-1)} - \alpha_{k-1} \cdot [J_F(x_{(k-1)})]^{-1} F(x_{(k-1)}),$$

onde o valor positivo α_{k-1} , designado por **passo**, é escolhido, em cada iteração, de forma a que

$$\|F(x_{(k)})\| < \|F(x_{(k-1)})\|,$$

sendo aqui utilizada $\|F\|$ como “medida da distância à solução do sistema”.