Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Numérica

2ª chamada

2002-01-23

— Resolução da Parte Prática —

1 — **(a)** O valor aproximado de t é obtido substituindo x pelo seu valor exacto e y e za pelos seus valores aproximados, ou seja

$$t = \frac{\cos(1.3)}{0.25} + e^{-0.25\times 1.7} \simeq 1.7238.$$

O número de algarismos a apresentar no valor aproximado de t dependerá do majorante do erro absoluto que se irá obter em seguida.

Neste caso, uma vez que o valor de x é exacto (ou seja, o seu erro é zero), o majorante do erro absoluto ε_t determina-se pela expressão

$$\varepsilon_t \leq \left|\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{\max} \cdot \varepsilon_y + \left|\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{\max} \cdot \varepsilon_z$$

onde cada uma das maximizações é realizada no conjunto dos possíveis valores de y e z, e para $x = 1.3$.

No caso de y, o majorante do erro absoluto obtém-se pela expressão $\varepsilon_y = y \cdot \varepsilon'_y$, ou seja,

$$\varepsilon_y = 0.25 \times \frac{4}{100} = 0.01.$$

O erro absoluto máximo em z é fornecido directamente do enunciado, tendo-se que

$$\varepsilon_z = 0.3.$$

Pode já concluir-se que os valores possíveis de y e z são $y \in [0.24, 0.26]$ e $z \in [1.4, 2.0]$.

Derivando t parcialmente em y tem-se que

$$\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\cos(x)}{y^2} - ze^{-yz}.$$

Como $\cos(1.3) > 0$, conclui-se facilmente que

$$\left|\frac{\partial t}{\partial y}\right| = \frac{\cos(x)}{y^2} + ze^{-yz},$$

para os valores de x, y e z em questão. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{\max} &= \left(\frac{\cos(x)}{y^2} + ze^{-yz}\right)_{\max} \\ &\leq \frac{\cos(x)}{y_{\min}^2} + z_{\max}e^{-y_{\min}z_{\min}} \\ &= 6.1.\end{aligned}$$

Derivando agora t parcialmente em z verifica-se que

$$\frac{\partial t}{\partial z} = -ye^{-yz}.$$

Então, tem-se que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{\max} &= \left(ye^{-yz}\right)\Big|_{\max} \\ &\leq y_{\max}e^{-y_{\min}z_{\min}} \\ &= 0.19.\end{aligned}$$

Então, é agora possível determinar o seguinte majorante do erro absoluto em t:

$$\varepsilon_t \leq 6.1 \times 0.01 + 0.19 \times 0.3 = 0.12.$$

Com base neste majorante, o valor aproximado de t representar-se-ia por 1.7 (ou por 1.72).

(b) Agora, t é apenas função de z, pelo que a análise da eventual perda de dígitos significativos baseia-se na determinação da propagação do erro relativo no cálculo de t como função de z, pois sabe-se que se perde um algarismo significativo sempre que o erro relativo é multiplicado por 10.

A relação entre os erros relativos em z e t é dada pela expressão

$$\varepsilon'_t \leq \left|\frac{\partial t}{\partial z}\frac{z}{t}\right|_{\max} \cdot \varepsilon'_z,$$

onde o máximo é determinado nos possíveis valores de z. Neste caso, como apenas é dito que z está próximo de 4, este máximo será aproximado pelo valor de $\left|\frac{\partial t}{\partial z}\frac{z}{t}\right|$ no ponto $z = 4$ (e, obviamente, $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = 3$).

Assim, tem-se para $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = 3$,

$$\left|\frac{\partial t}{\partial z}\frac{z}{t}\right| = \left|-3e^{-3z}\frac{z}{e^{-3z}}\right| = |3z|,$$

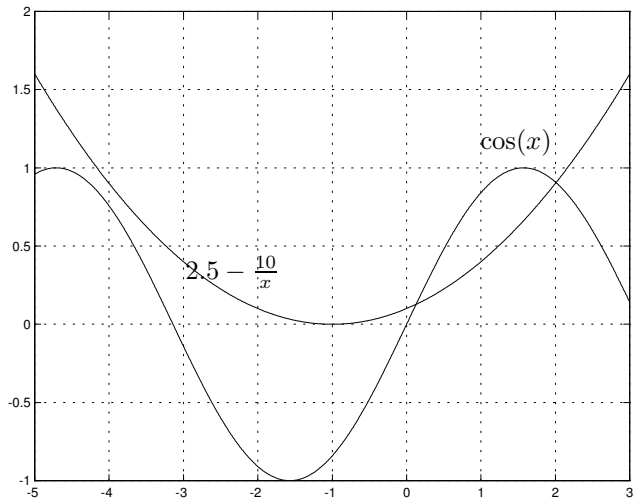
expressão que para $z = 4$, tem o valor 12.

Então, conclui-se que se perde pelo menos 1 algarismo significativo, podendo eventualmente ser perdidos 2.

2 — **(a)** Uma forma de determinar a localização dos zeros de f é definir as funções $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = 2.5 - \frac{10}{x}$, pois os zeros de f são as soluções da equação $g(x) = h(x)$, ou seja, as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções g e h.

Antes de esboçar o gráficos de g e h, uma análise simples permite concluir que para valores de x superiores $\frac{10}{1.5} \simeq 6.67$, a função h terá valores superiores a 1, pelo que eventuais zeros de f terão de estar no intervalo $[4, 6.67]$, isto porque a função $\cos(x)$ apenas toma valores entre -1 e 1.

A partir dos gráficos das funções g e h, que se mostram na figura,



facilmente se conclui que, no intervalo em estudo, a função f tem apenas 2 zeros, o primeiro, designado por s_1, situa-se entre 5 e 5.5 e o segundo, designado por s_2 situa-se próximo de 6.5.

A obtenção de intervalos de amplitude inferior a 0.2, cada um contendo um zero de f, pode agora ser efectuada calculando valores de f próximo dos pontos onde se situam cada um dos zeros, de forma a detectar trocas de sinal. Assim, tem-se que

$$f(5.3) = \cos(5.3) + \frac{10}{5.3} - 2.5 = -0.059$$
$$f(5.4) = \cos(5.4) + \frac{10}{5.4} - 2.5 = -0.013$$
$$f(5.5) = \cos(5.5) + \frac{10}{5.5} - 2.5 = 0.027$$

concluindo-se então que $s_1 \in [5.3, 5.5]$, Por outro lado,

$$f(6.5) = \cos(6.5) + \frac{10}{6.5} - 2.5 = 0.015$$
$$f(6.7) = \cos(6.7) + \frac{10}{6.7} - 2.5 = -0.093$$

e então $s_2 \in [6.5, 6.7]$.

(b) Avaliando f nos extremos do intervalo considerado obtêm-se os valores

$$f(2.7) = \cos(2.7) + \frac{10}{2.7} - 2.5 = 0.300$$
$$f(3) = \cos(3) + \frac{10}{3} - 2.5 = -0.157$$

que tendo sinais diferentes permitem concluir a existência de pelo menos um zero de f em $[2.7, 3]$. Derivando f obtém-se

$$f'(x) = -\sin(x) - \frac{10}{x^2}$$

função que no intervalo $[2.7, 3]$ apenas toma valores negativos. Assim, f será monótona decrescente neste intervalo e por tal motivo apenas terá aí um zero.

A determinação de um zero de f pelo método iterativo simples requer que a equação $f(x) = 0$ seja reescrita numa forma equivalente do tipo $x = F(x)$. Uma possibilidade consiste em em passar da equação

$$\cos(x) + \frac{10}{x} - 2.5 = 0$$

para a equação

$$\frac{10}{x} = 2.5 - \cos(x)$$

e finalmente para

$$x = \frac{10}{2.5 - \cos(x)}$$

sendo então a função $F(x) = \frac{10}{2.5-\cos(x)}$ candidata a função de iteração.

Uma condição suficiente para a convergência do método iterativo simples é

$$\max |F'(x)| < 1,$$

onde o máximo é calculado num intervalo que contenha o zero s a determinar e o ponto inicial x_0. Derivando F obtém-se

$$F'(x) = \frac{-10\sin(x)}{(2.5 - \cos(x))^2},$$

e então, no intervalo $[2.7, 3]$, tem-se

$$|F'(x)| = \frac{10\sin(x)}{(2.5 - \cos(x))^2}.$$

Notando que neste intervalo (que está contido no 2º quadrante) a função $x \mapsto \sin(x)$ é decrescente e também que $x \mapsto 2.5 - \cos(x)$ é positiva e crescente (no 2º quadrante esta função cresce de 2.5 a 3.5), conclui-se que $|F'(x)|$ é máxima para $x = 2.7$ tomando aí o valor

$$q = \max_{x\in[2.7,3]} |F'(x)| = |F'(2.7)| = 0.369.$$

Uma vez que este valor é inferior a 1, está garantida a convergência do método para a função de iteração F, isto para qualquer ponto inicial do intervalo $[2.7, 3]$.

Partindo do ponto x_0 dado, a sucessão de pontos a determinar satisfaz a relação de recorrência

$$x_{k+1} = F(x_k) = \frac{10}{2.5 - \cos(x_k)}.$$

Relativamente à precisão pretendida na determinação do zero de f, é possível determinar um majorante do erro em x_{k+1} pela expressão

$$|s - x_{k+1}| \leq \varepsilon_{k+1} = \frac{q}{1-q}\, |x_{k+1} - x_k|,$$

onde q é o máximo de $|F'|$, já calculado acima. Substituindo este valor, conclui-se que se deve parar a aplicação do método assim que

$$\varepsilon_{k+1} = 0.548\, |x_{k+1} - x_k| \leq 5 \times 10^{-4},$$

de forma a satisfazer a precisão pretendida.

Começando então no ponto $x_0 = 3$, como pedido, obtêm-se os valores constantes da tabela seguinte.

k	x_k	$x_{k+1} = F(x_k)$	ε_{k+1}
0	3	2.865335	7.9×10^{-2}
1	2.865336	2.888434	1.3×10^{-2}
2	2.888434	2.883401	2.9×10^{-3}
3	2.883401	2.884460	6.2×10^{-4}
4	2.884460	2.884235	1.3×10^{-4}

Conclui-se assim que o zero procurado é $s = 2.8842$, sendo todos os algarismos apresentados correctos com excepção do último.

3 — Utilizando o método dos mínimos quadrados, os coeficientes c_1, c_2 e c_3 da parábola $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ que melhor aproxima um conjunto de pontos, são dados pela resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^n 1 + c_2 \sum_{i=1}^n x_i + c_3 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^n x_i + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + c_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + c_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2\, y_i \end{cases}$$

Considerando os 4 pontos dados com tensões maiores ou iguais a zero, os somatórios tomam os seguintes valores:

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,250	13,563	0,063	0,016	0,004	3,391	0,848
0,500	41,000	0,250	0,125	0,063	20,500	10,250
1,000	193,000	1,000	1,000	1,000	193,000	193,000
1,750	247,563	1,313	1,141	1,066	216,891	204,098

Pelo que se obtém o sistema:

$$\begin{cases} 4.000\, c_1 + 1.750\, c_2 + 1.313\, c_3 = 247.653 \\ 1.750\, c_1 + 1.313\, c_2 + 1.141\, c_3 = 216.891 \\ 1.313\, c_1 + 1.141\, c_2 + 1.066\, c_3 = 204.098 \end{cases}$$

Para resolver este sistema pelo método da eliminação gaussiana com estratégia de pivotação parcial é preciso que, em cada passo k a linha pivot seja a que apresenta maior quociente $\frac{a_{ki}}{d_i}$ em valor absoluto, com $i \geq k$ e onde d_i é a dimensão da linha i, isto é, o maior elemento em módulo. Neste caso, e para o primeiro passo ($k = 1$) temos que comparar os quocientes $\left|\frac{a_{11}}{d_1}\right| = \left|\frac{4}{4}\right|$, $\left|\frac{a_{12}}{d_2}\right| = \left|\frac{1.750}{1.750}\right|$ e $\left|\frac{a_{13}}{d_3}\right| = \left|\frac{1.313}{1.313}\right|$. Como são todos iguais entre si não é necessário trocar quaisquer linhas para seguir uma estratégia parcial de pivot.

Aplicando então agora a eliminação gaussiana ($m_{12} = -\frac{1.750}{4.000}$ e $m_{13} = -\frac{1.313}{4.000}$):

$$\begin{cases} 4.000\, c_1 + 1.750\, c_2 + 1.313\, c_3 = 247.653 \\ 0.000\, c_1 + 0.547\, c_2 + 0.566\, c_3 = 108.582 \\ 0.000\, c_1 + 0.566\, c_2 + 0.636\, c_3 = 122.866 \end{cases}$$

Tornando a calcular os quocientes $\frac{a_{ki}}{d_i}$, mas agora com $k = 2$:

$$\left|\frac{a_{22}}{d_2}\right| = \left|\frac{0.547}{0.566}\right| = 0.9655$$
$$\left|\frac{a_{23}}{d_3}\right| = \left|\frac{0.566}{0.636}\right| = 0.8909$$

Conclui-se que a linha pivot deve ser a que já está na segunda posição, por apresentar o maior quociente, pelo que não se faz qualquer troca. Para a eliminação gaussiana o multiplicador será: $m_{23} = -\frac{0.566}{0.547}$.

$$\begin{cases} 4.000\,c_1 + 1.750\,c_2 + 1.313\,c_3 = 247.653 \\ 0.000\,c_1 + 0.547\,c_2 + 0.566\,c_3 = 108.582 \\ 0.000\,c_1 + 0.000\,c_2 + 0.049\,c_3 = 10.406 \end{cases}$$

Resolvendo a última equação em ordem a c_3 e substituindo sucessivamente para trás obtém-se:

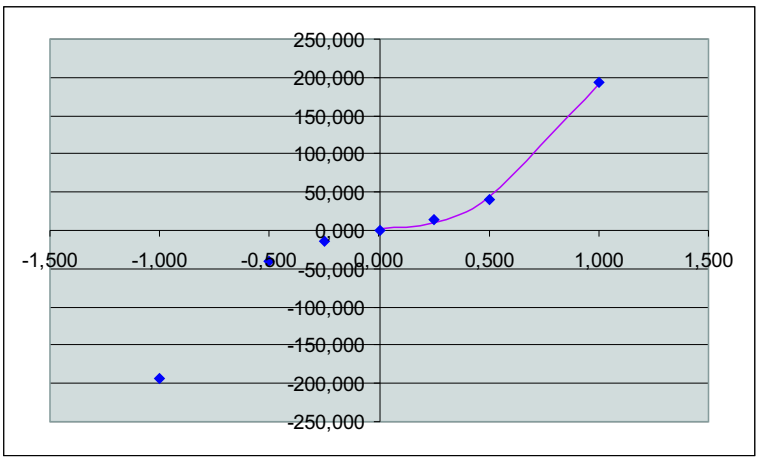
$$\begin{cases} c_1 = 1.514 \\ c_2 = -20.927 \\ c_3 = 211.909 \end{cases}$$

A equação da parábola será então:

$$y = 211.906x^2 - 20.927x + 1.514$$

O que permite estimar, para uma corrente $I = 0.75$ uma tensão $V = 211.9060.75^2 - 20.927 \times 0.75 + 1.514 = 105.02$.

Na figura seguinte podem-se observar os pontos dados e a parábola aproximante:



O valor da estimativa está dentro do esperado uma vez que, sendo a função aproximante uma parábola, apresenta um valor de V entre os valores de V correspondentes aos Is que ladeiam o ponto dado (0.75).

$\boxed{4}$ — Usando a regra de Simpson um integral é calculado de forma aproximada pela fórmula:

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4 \times y_1 + 2 \times y_2 + 4 \times y_3 + \cdots + 2 \times y_{n-2} + 4 \times y_{n-1} + y_n)$$

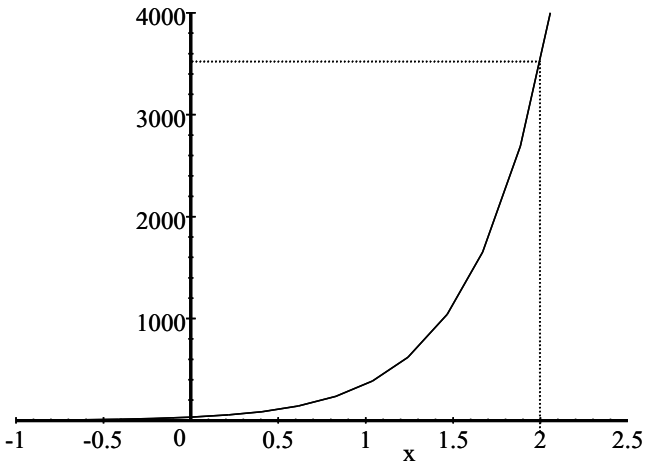
O primeiro passo é então determinar o valor de n. Para isso temos de saber o valor de h que por sua vez pode ser determinado a partir da expressão do erro de truncatura, para o qual nos é imposto um majorante:

$$|\varepsilon_t| \leq \frac{h^4}{180} |b-a| \max_{a \leq \xi \leq b} \left| f^{(4)}(\xi) \right| \leq 5 \times 10^{-2}$$

Começando por calcular as sucessivas derivadas de $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ e o máximo do módulo da quarta derivada:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\mathrm{e}^{2x} \\
f'(x) &= \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} \\
f''(x) &= 4\mathrm{e}^{2x} + 4x\mathrm{e}^{2x} \\
f'''(x) &= 12\mathrm{e}^{2x} + 8x\mathrm{e}^{2x} \\
f^{(iv)}(x) &= 32\mathrm{e}^{2x} + 16x\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

A quarta derivada encontra-se representada na figura seguinte:



Facilmente se conclui que o seu máximo (em módulo) acontecerá para $x = 2$: $\max_{0 \leq \xi \leq 2} \left| f^{(iv)}(\xi) \right| = f^{(iv)}(2) = 3494.2816$.

Então:

$$\frac{h^4}{180} \times 2 \times 3494.2816 \leq 5 \times 10^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad h \leq 0.1894$$

Usando a relação $h = \frac{b-a}{n}$ chega-se a $n \geq 10.5576$. Como, na regra de Simpson, n tem que ser um número par, para garantir o erro imposto temos que tomar para n o número par imediatamente

acima de 10.5576, isto é, $n = 12$. Obviamente que o h tem que ser recalculado: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{12} = \frac{1}{6} \simeq 0.16667$

Então finalmente estamos em condições de calcular o integral:

x	y	Pesos	Parcelas
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.1667	0.2326	4.0000	0.9304
0.3333	0.6492	2.0000	1.2985
0.5000	1.3591	4.0000	5.4366
0.6667	2.5291	2.0000	5.0582
0.8333	4.4121	4.0000	17.6483
1.0000	7.3891	2.0000	14.7781
1.1667	12.0310	4.0000	48.1239
1.3333	19.1892	2.0000	38.3784
1.5000	30.1283	4.0000	120.5132
1.6667	46.7194	2.0000	93.4387
1.8333	71.7224	4.0000	286.8894
2.0000	109.1963	1.0000	109.1963
		Soma =	741.6901
		$I = \frac{0.16667}{3} \times$ Soma =	41.2050