Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Numérica

1997/98

— Equações Diferenciais Ordinárias —

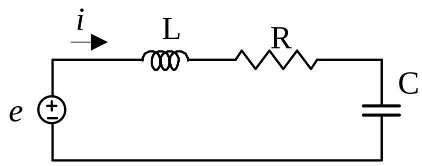
PROBLEMAS

$\boxed{\mathbf{1}}$ — Considere a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = y(x^2 - 1)$ com $y(0) = 1$ e $x \in [0, 1]$.

(a) Calcule as soluções aproximadas usando os métodos de Euler progressivo e regressivo com passo $h = 0.1$. Determine um majorante para o erro de truncatura.

b) Calcule a solução aproximada usando o método de Taylor de segunda ordem com passo $h = 0.2$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ — Considere o seguinte circuito eléctrico:



onde L é a inductância de uma bobina, R é a resistência, e C é a capacidade do condensador.

A equação diferencial para este circuito eléctrico é a seguinte:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\ dt = e(t).$$

Dado que a carga eléctrica está definida como $q = \int i\ dt$ a equação acima pode escrever-se:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t).$$

Determine o valor da carga q nos instantes de tempo 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 e 1, no caso em que as constantes eatão definidas de tal modo que conduzem à seguinte equação:

$$q'' + 2q' + 2q = 1.$$

Considere que $q(0) = 0$ e $q'(0) = 0$.

RESOLUÇÕES

$\boxed{1}$ — **(a)** i. No método de Euler progressivo a expressão que fornece o valor y_{i+1} é:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i).$$

Para este caso temos então:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y_i \cdot (x_i^2 - 1).$$

Aplicando sucessivamente esta fórmula obtém-se a seguinte tabela de valores:

x_i	y_i	y_{i+1}
0.0	1.0000	0.9000
0.1	0.9000	0.8109
0.2	0.8109	0.7331
0.3	0.7331	0.6663
0.4	0.6663	0.6104
0.5	0.6104	0.5646
0.6	0.5646	0.5285
0.7	0.5285	0.5015
0.8	0.5015	0.4835
0.9	0.4835	0.4743
1.0	0.4743	—

ii. No método de Euler regressivo o cálculo de y_{i+1} é feito com base na seguinte expressão:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Substituindo para o presente caso temos:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y_{i+1} \cdot [(x_i + h)^2 - 1]$$

Como nesta equação podemos isolar y_{i+1} (!) temos ainda:

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1 + h \cdot [1 - (x_i + h)^2]}.$$

Aplicando sucessivamente esta fórmula obtém-se a seguinte tabela de valores:

x_i	y_i	y_{i+1}
0.0	1.0000	0.9099
0.1	0.9099	0.8302
0.2	0.8302	0.7610
0.3	0.7610	0.7050
0.4	0.7050	0.6530
0.5	0.6530	0.6137
0.6	0.6137	0.5840
0.7	0.5840	0.5637
0.8	0.5637	0.5532
0.9	0.5532	0.5532
1.0	0.5532	—

iii. Determinação de um majorante para o erro de truncatura nos métodos de Euler (progressivo e regressivo):

$$\begin{aligned} ||T_h|| &\leq \frac{h}{2} \times \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{d}{dx}[y(x)\cdot(x^2-1)]\right| \\ &= 0.05 \times \sup_{x\in[0,1]} \left|y(x)\cdot[2x+(x^2-1)^2]\right| \\ &\leq 0.05 \times y(0) \times 2 \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

porque no intervalo $[0,1]$ $y(\cdot)$ é positiva e decrescente (porquê?) e $2x+(x^2-1)^2$ é positiva e crescente.

(b) No método de Taylor de segunda ordem o valor de y_{i+1} é determinado pela expressão:

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot f(x_i,y_i) + \frac{h^2}{2}\cdot f'(x_i,y_i).$$

Fazendo a substituição para este exemplo temos:

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot y_i\cdot(x_i^2-1) + \frac{h^2}{2}\cdot y_i\cdot[2x_i+(x_i^2-1)^2].$$

Aplicando sucessivamente esta fórmula obtém-se a seguinte tabela de valores:

x_i	y_i	y_{i+1}
0.0	1.0000	0.8200
0.2	0.8200	0.6842
0.4	0.6842	0.5899
0.6	0.5899	0.5334
0.8	0.5334	0.5134
1.0	0.5134	—

2 — Estando perante uma equação diferencial de 2ª ordem o primeiro passo é a sua transformação num sistema de 2 equações de 1ª ordem. Para tal fazemos $u_1 = q$ e:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = 1 - 2u_1 - 2u_2 \\ u_1(0) = 0 \\ u_2(0) = 0 \end{cases}$$

O passo seguinte é a resolução deste sistema de EDOs. Como nada nos é dito sobre o método a usar para resolver cada uma das EDOs vamos optar pelo método de Euler progressivo. Note-se que, por enunciado, $h = 0.1$.

O resultado da aplicação deste método será o seguinte sistema de fórmulas recursivas:

$$\begin{cases} u_{1,i+1} = u_{1,i} + 0.1 \times u_{2,i} \\ u_{2,i+1} = u_{2,i} + 0.1 \times (1 - 2u_{1,i} - 2u_{2,i}) \\ u_{1,0} = 0 \\ u_{2,0} = 0 \end{cases}$$

Aplicando as fórmulas obtém-se a seguinte tabela de valores:

t_i	$u_{1,i}$	$u_{1,i+1}$	$u_{2,i}$	$u_{2,i+1}$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.1000
0.1	0.0000	0.0100	0.1000	0.1800
0.2	0.0100	0.0280	0.1800	0.2420
0.3	0.0280	0.0522	0.2420	0.2880
0.4	0.0522	0.0810	0.2880	0.3200
0.5	0.0810	0.1130	0.3200	0.3398
0.6	0.1130	0.1470	0.3398	0.3492
0.7	0.1470	0.1819	0.3492	0.3500
0.8	0.1819	0.2169	0.3500	0.3436
0.9	0.2169	0.2513	0.3436	0.3315
1	0.2513	0.2844	0.3315	0.3150

Na segunda coluna ($u_{1,i}$) estão representados os valores pedidos, isto é, os valores de q para os instantes de tempo indicados no enunciado.

ACM, AMG, JBS, JFO