Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Numérica

1997/98

— Solução de Equações Não Lineares —

Objectivos:
Encontrar os zeros de equações não lineares, através dos métodos:

- Bissecções sucessivas.
- Falsa Posição e Falsa Posição Modificado.
- Iterativo Simples.
- Newton.

PROBLEMAS

$\boxed{1}$ — Encontre um valor aproximado a menos de 5×10^{-3} da raiz da equação:

$$x \ln x - 1 = 0$$

pelos seguintes métodos:

(a) Bissecções sucessivas;
(b) Falsa posição;
(c) Falsa posição modificado;
(d) Iterativo Simples;
(e) Newton.

RESOLUÇÕES

Procedimento geral para a resolução de equações não lineares por métodos iterativos:

1 – Separar as raízes, numericamente ou analiticamente.

2 – Garantir a convergência, através da fórmula e ponto inicial convenientes.

3 – Estabelecer um critério de paragem, limitando o número de iterações ($k = k_{max}$), o incremento entre iterações ($|x_k - x_{k+1}| \leq \varepsilon_1$) ou a proximidade ao zero ($|f(x)| \leq \varepsilon_2$).

4 – Aplicar o método escolhido.

Separação de raízes

Objectivo: encontrar tantos intervalos disjuntos quantas as raízes reais distintas da equação $f(x) = 0$, tais que a cada intervalo pertença uma e uma só raiz, sendo f contínua no interior de cada intervalo.

A separação das raízes pode ser realizada por um método analítico baseado nos números de Rolle ou por um método gráfico:

1. *Método baseado nos números de Rolle*

   Designam-se por números de Rolle da equação $f(x) = 0$, definida em $D \subseteq \Re$, o conjunto dos pontos fronteira de D e dos zeros da função derivada de f.

   Ordenando por ordem crescente os números de Rolle previamente determinados, sabemos que entre dois números de Rolle consecutivos existe no máximo uma raiz real da função.

2. *Método gráfico*

   Se a função for fácil de representar graficamente, podemos fazer um esboço e assim determinar aproximadamente intervalos contendo as raízes reais. No entanto, será de um modo geral mais vantajoso dar à equação $f(x) = 0$ a forma $g(x) = h(x)$, g e h escolhidas de modo a serem de fácil representação gráfica.

   Os pontos x^* tais que $g(x^*) = h(x^*)$ verificam $f(x^*) = 0$.

Separação das raízes de $x \ln x - 1 = 0$.

1. *Números de Rolle*

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = \mathrm{e}^{-1}$$

   Números de Rolle: $0, \mathrm{e}^{-1}, +\infty$

   Se a função $f(x)$ toma valores de sinais contrários em dois números de Rolle consecutivos, a equação $f(x) = 0$ terá uma raiz nesse intervalo:

$$\lim_{x\to 0}(x \ln x - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} - 1 = -1 < 0$$

$$(x \ln x - 1)/_{x=\mathrm{e}^{-1}} = -\mathrm{e}^{-1} - 1 \simeq -1.368 < 0$$

$$\lim_{x\to +\infty}(x \ln x - 1) = +\infty > 0$$

   Conclusão: No intervalo $]\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ existe um zero de $f(x) = x \ln x - 1$.

   Comentário: Como para os cálculos seguintes os extremos do intervalo têm que ser finitos e a função tem que estar definida nesses mesmos extremos, iremos (por tentativas) reduzir a largura do intervalo determinado anteriormente. Note-se que este processo só é válido por nós já sabermos que há apenas um zero neste intervalo.

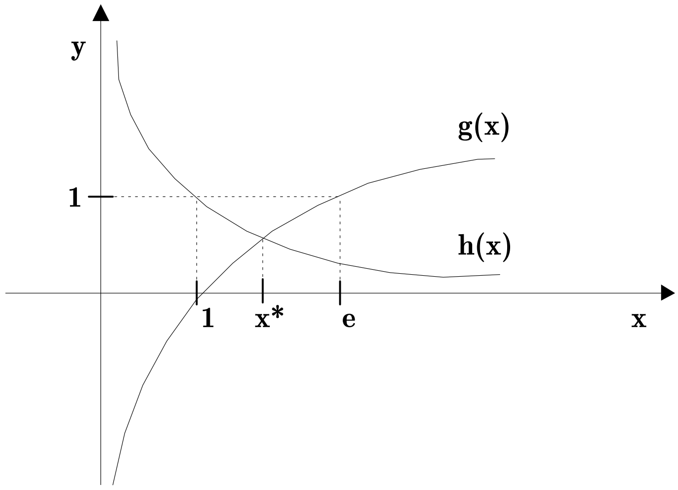
$$]\mathrm{e}^{-1}, +\infty[\xrightarrow{p.ex.}]1, \mathrm{e}[$$

   Note-se que o valor de f no limite esquerdo do intervalo continua a ser negativo e que o valor de f no limite direito continua a ser positivo.

2. *Método gráfico*

$$f(x) = x \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \ln x \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$



$\boxed{1}$ — **(a) Método das bissecções sucessivas**

Teorema 1 *Seja $f \in C[a,b]$ e tal que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais diferentes. Então a sucessão $\{x_k\}$ determinada pelo método das bissecções sucessivas ($x_{k+1} = \frac{b_k + a_k}{2}$) converge para um zero de f neste intervalo, e o erro após k iterações satisfaz a seguinte relação:*

$$\varepsilon_k < \frac{|b-a|}{2^k}$$

Neste problema pretende-se uma precisão $\delta = 5 \times 10^{-3}$ e $b - a = \mathrm{e} - 1$. Então:

$$\varepsilon < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{|b-a|}{2^k} < \delta \quad \Leftrightarrow \quad k > \log_2 \frac{|b-a|}{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad k > 8.4$$

Conclusão: Quando utilizamos o intervalo $[1, \mathrm{e}]$ a convergência está garantida e para satisfazer a precisão exigida é suficiente realizar 9 iterações. Para 9 iterações o erro máximo obtido será de $\frac{|\mathrm{e}-1|}{2^9} \approx 4 \times 10^{-3}$.

k	a_k	$f(a_k)$	b_k	$f(b_k)$	x_{k+1}
0	1	-1	e	1.718	1.859
1	1	-1	1.859	0.153	1.430
2	1.430	-0.489	1.859	0.153	1.644
3	1.644	-0.182	1.859	0.153	1.752
4	1.752	-0.018	1.859	0.153	1.805
5	1.752	-0.018	1.805	0.066	1.778
6	1.752	-0.018	1.778	0.024	1.765
7	1.752	-0.018	1.765	0.003	1.758
8	1.758	-0.007	1.765	0.003	1.762

Solução: $x^* = 1.762 \pm 4 \times 10^{-3}$

(b) Método da falsa posição

Teorema 2 *Seja f uma função convexa ou côncava (f'' com sinal constante) no intervalo $[a,b]$, com $f(a)$ e $f(b)$ de sinais diferentes. Então o método da falsa posição converge linearmente para o zero de f nesse intervalo.*

Então:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln x - 1 \\ f'(x) &= \ln x + 1 \\ f''(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

portanto $f'' > 0$ em $[1, \mathrm{e}]$ e está garantida a convergência do método.
A partir do Teorema do Valor Médio é possível demonstrar o seguinte:

Teorema 3 *Sejam $f(x)$ e $f'(x)$ contínuas no intervalo $[a,b]$ que contém as aproximações x_{k+1}. Se $f'(x)$ mantém o sinal em $[a,b]$ e se m_1 e M_1 são tais que:*

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < \infty, \quad \forall_{x\in[a,b]}$$

Então

$$|x^* - x_k| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_k - x_{k-1}|$$

Este teorema dá-nos um majorante para o erro em cada iteração, mas não nos permite determinar à partida o número de iterações que são necessárias para satisfazer um certo erro. Aplicando-o então à nossa função em concreto:

$$M_1 = \max_{x\in[1,\mathrm{e}]} |f'(x)| = \max_{x\in[1,\mathrm{e}]} |\ln x + 1| = 2$$

$$m_1 = \min_{x\in[1,\mathrm{e}]} |f'(x)| = \min_{x\in[1,\mathrm{e}]} |\ln x + 1| = 1$$

Logo:

$$\varepsilon_k \leq \frac{2-1}{1}|x_k - x_{k-1}| = |x_k - x_{k-1}|$$

Finalmente, a fórmula de cálculo de x_{k+1}:

$$x_{k+1} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$

Fazendo agora as iterações:

k	a_k	$f(a_k)$	b_k	$f(b_k)$	x_{k+1}	ε_k
0	1	-1	e	1.718	1.632	—
1	1.632	-0.200	e	1.718	1.746	1.1×10^{-1}
2	1.746	-0.028	e	1.718	1.761	1.5×10^{-2}
3	1.761	-0.004	e	1.718	1.763	2×10^{-3}

Obtém-se a solução $x^* = 1.763 \pm 2 \times 10^{-3}$.

(c) Método da Falsa Posição Modificado

A modificação em relação ao método da falsa posição consiste no seguinte: em cada iteração em que se verifique $f(x_{k-1}).f(x_k) > 0$, troca-se a recta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ por uma recta de inclinação menor. Assim consegue evitar-se que um dos extremos do intervalo inicial fique fixo até ao final do processo iterativo.

A fórmula de cálculo de x_{k+1} é basicamente a mesma que anteriormente, substituindo-se quando necessário $f(a_k)$ for $\frac{f(a_k)}{2}$ ou $f(b_k)$ por $\frac{f(b_k)}{2}$.

k	a_k	$f(a_k)$ ou $\frac{f(a_k)}{2}$	b_k	$f(b_k)$ ou $\frac{f(b_k)}{2}$	x_{k+1}	ε_k
0	1	-1	e	1.718	1.632	—
1	1.632	-0.200	e	0.859	1.838	2×10^{-1}
2	1.632	-0.200	1.838	0.118	1.761	7.7×10^{-2}
3	1.761	-0.003	1.838	0.118	1.763	2×10^{-3}

$$
\begin{array}{ll}
k = 0 & x_0 = a_0 \\
k = 1 & x_1 = 1.632 \rightarrow f(x_1) = -0.200 \quad \therefore \quad a_1 = x_1 \\
 & f(x_0)f(x_1) > 0 \quad \therefore \quad f(b_1) \rightarrow \dfrac{f(b_1)}{2} \\
k = 2 & x_2 = 1.383 \rightarrow f(x_2) = 0.118 \quad \therefore \quad b_2 = x_2 \\
 & f(x_1)f(x_2) < 0 \quad \therefore \quad f(a_2) \\
k = 3 & x_3 = 1.761 \rightarrow f(x_3) = -0.003 \quad \therefore \quad a_3 = x_3 \\
 & f(x_2)f(x_3) < 0 \quad \therefore \quad f(b_3)
\end{array}
$$

(d) Método Iterativo Simples

$$f(x) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x = \mathcal{F}(x)$$

Teorema 4 *Seja $\mathcal{F}(x)$ definida e derivável num intervalo $\mathrm{I} = [\,a,\ b\,]$ que contém todos os pontos x_k . Se existir uma constante q tal que:*

$$\left|\mathcal{F}'(x)\right| \leq q < 1,\ \forall\, x \in \mathrm{I},$$

então o processo iterativo $x_k = \mathcal{F}(x_{k-1})$ converge independentemente do valor inicial $x_0 \in [\,a,\ b\,]$ e esse limite é a única raiz da equação $x = \mathcal{F}(x)$ em $[\,a,\ b\,]$.

Análise do Erro: Após k iterações o erro satisfaz a seguinte relação:

$$\varepsilon_k = |x^* - x_k| < \frac{q}{1-q}\ |x_k - x_{k-1}|$$

$$q = \max_{x \in \mathrm{I}} \left|\mathcal{F}'(x)\right|$$

Exemplo:

$$x\ \ln(x) - 1 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x = \frac{1}{\ln(x)}, \qquad \mathcal{F}(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

$$x\ \ln(x) - 1 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x = e^{\frac{1}{x}}, \qquad \mathcal{F}(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

Nota: De um modo geral existem várias funções $\mathcal{F}(x)$ tal que $x = \mathcal{F}(x)$ que se podem obter a partir da função $f(x) = 0$ inicial.

Tomando então a função $\mathcal{F}(x) = e^{\frac{1}{x}}$, temos:

$$\mathcal{F}'(x) = -\frac{1}{x^2}\ e^{\frac{1}{x}}$$

Portanto, $\mathcal{F}(x)$ é definida e derivável em $[\,1,\ e\,]$ (intervalo definido na aula anterior).

$$\mathcal{F}''(x) = \frac{2}{x^3}\ e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}\ e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3}\ e^{\frac{1}{x}}\ (2 + \frac{1}{x})$$

$$\mathcal{F}''(x) > 0,\ \forall\, x\ \in\ [\,1,\ e\,] \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}'(x) \text{ monótona e crescente em } [\,1,\ e\,]$$

$$\text{como:}\quad \mathcal{F}'(x) < 0,\ \forall\, x\ \in\ [\,1,\ e\,] \quad \Longrightarrow \quad \max_{x\,\in\,[\,1,\,e\,]} \left|\mathcal{F}'(x)\right| = \left|\mathcal{F}'(1)\right|$$

Porém, como no intervalo $[\,1,\ e\,]$ não se verifica $|\mathcal{F}'(x)|\ <\ 1,\ \forall\, x\ \in\ [\,1,\ e\,]$

$$\Downarrow$$

vamos reduzir a largura do intervalo.

$$[\,1.5,\ e\,] \ \longrightarrow\ \left|\mathcal{F}'(1.5)\right| \simeq 0.866 = q$$

Nota: $f(1.5) \simeq -0.3918$ (ainda é < 0)

$$\therefore \quad \frac{q}{1-q}\ \simeq\ 6.5$$

Fórmula de Recorrência: $x_n\ =\ \mathcal{F}_{n-1}$

k	x_k	$\mathcal{F}(x_k)$	ε_k
0	1.5	1.948	—
1	1.948	1.671	1.8×10^{0}
2	1.671	1.819	9.6×10^{-1}
3	1.819	1.733	5.5×10^{-1}
4	1.733	1.781	3.1×10^{-1}
5	1.781	1.753	1.8×10^{-1}
6	1.753	1.769	1.0×10^{-1}
7	1.769	1.760	5.8×10^{-2}
8	1.760	1.765	3.2×10^{-2}
9	1.765	1.762	1.9×10^{-2}
10	1.762	1.764	1.3×10^{-2}
11	1.764	1.763	6.5×10^{-3}
12	1.763	1.763	$\mathbf{3.0 \times 10^{-3}}$
13	**1.763**		

(e) Método de Newton

Teorema 5 *Seja* $f \in C^2[a,\, b]$ *- contínua e duplamente diferenciável em* $[a,\, b]$ *. Se se verificar:*

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1, \quad \forall\, x \in [a,\, b]$$

$$|f''(x)| \leq M_2, \quad \forall\, x \in [a,\, b]$$

Então o método de Newton converge desde que se tome para valor inicial x_0 *um valor pertencente a* $[a,\, b]$ *tal que* $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$ *.*

Análise do Erro: Após k iterações o erro satisfaz a seguinte relação:

$$\varepsilon_k = |x^* - x_k| \leq \frac{M_2}{2\, m_1}\,(x_k - x_{k-1})^2$$

$$\text{com} \quad \begin{cases} M_2 = \max\limits_{x \in [a,\, b]} |f''(x)| \\ m_1 = \min\limits_{x \in [a,\, b]} |f'(x)| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x\,\ln(x) - 1 \\ f'(x) &= \ln(x) + 1 \\ f''(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Seja $[1,\, e]$ o nosso intervalo

$$f'(x) = \ln(x) + 1, \quad \longrightarrow \quad 1 \leq |f'(x)| \leq 2,\ \forall\, x \in [1,\, e]$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}, \quad \longrightarrow \quad f''(x) \leq 1,\ \forall\, x \in [1,\, e]$$

$$\therefore \quad \begin{cases} m_1 = 1 \\ M_2 = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_k = |x^* - x_k| \leq 0.5\,(x_k - x_{k-1})^2$$

Fórmula de Recorrência: $x_{k+1} = x - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

k	x_k	$-\frac{f(x_k)}{f'x_k}$	ε_k
0	2.718	-0.859	—
1	1.859	-0.094	3.7×10^{-1}
2	**1.765**	-0.002	$\mathbf{4.4 \times 10^{-3}}$

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Numérica

1996/97

— Soluções de Equações Não Lineares —

PROBLEMAS PROPOSTOS

$\boxed{1}$ — Ache soluções aproximadas das seguintes equações, a menos de $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$, pelo método *iterativo simples*:

(a) $e^x - 3x = 0$

(b) $e^x \ln(x) = 1 \quad (x > 0)$

$\boxed{2}$ — Compare o desempenho dos métodos: **(i)** da falsa posição, e **(ii)** da falsa posição modificado, na resolução da seguinte equação:

$$x - e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ , partindo do intervalo inicial } [1,\ 2]$$

Para garantir um erro absoluto não superior a $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$, estude a aplicabilidade dos seguintes critérios de paragem:

1) parar quando $|\mathcal{F}(x_i)| \leq \min |\mathcal{F}'(\xi_i)|\ \varepsilon$ (ξ_i entre x_i e s), em que s é a solução de $\mathcal{F}(x) = 0$;

2) parar quando $|x_{dir} - x_{esq}| \leq \varepsilon$, em que x_{dir} e x_{esq} são os valores mais recentes à direita e à esquerda da solução.

$\boxed{3}$ — Ache as primeiras 5 soluções positivas da equação $\tan(x) = \tanh(x)$, pelo método de Newton, com a máxima precisão possível.

Sugestão: As soluções procuradas são as soluções de

$$\begin{cases} \tan(z) - \tanh(z + k\pi) = 0 \quad (|z| > \frac{\pi}{2}) \\ x = z + k\pi \end{cases}$$

para $k = 5, 4, 3, 2, 1$ (ordem mais conveniente!).

$\boxed{4}$ — Compare a velocidade de convergência do método de Newton na resolução das seguintes equações, a menos de $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$:

(a) $x - e^{\frac{1}{x}} = 0$, cuja solução está em torno de $[1,\ 2]$;

(b) $5 \times 10^{-8}\,(e^{40v} - 1) + v - 2 = 0$, cuja solução está em torno de $[0.4,\ 1]$.

(c) $(x-1)^5 = 0$, partindo de $x_0 = 0$;

(d) $x^2 = 0$, partindo de $x_0 = 1$;

(e) $f(x) = 0 , \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x},\ x \geq 0 \\ -\sqrt{x},\ x < 0 \end{cases}$, partindo de $x_0 = 1$;

Analise a aplicabilidade dos seguintes critérios de paragem:

1) parar quando $|\mathcal{F}(x_i)| \le \min|\mathcal{F}'(\xi_i)|\ \varepsilon$ (ξ_i entre x_i e s), em que s é a solução de $\mathcal{F}(x) = 0$;

2) parar quando $|x_{i+1} - x_i| \le \varepsilon$, desde que $|x_{i+1} - x_i| = \left|\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right| < \frac{1}{4k_i}$, com $k_i = \frac{\max|f''(\xi_i)|}{2\,|f'(x_i)|}$

SOLUÇÕES E TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

1 — **(a)** $s_1 \simeq 0.5184$ e $s_2 \simeq 1.5145$

(b) $s \simeq 1.309$

2 — $s \simeq 1.7632$

Nº de Iterações	Método Normal	Método Modificado
Critério 1)	6	9
Critério 2)	—	10

3 — 3.92660; 7.06858; 10.21018; 13.35177; 16.49336

4 — **(a)** $s \simeq 1.76322$ (4 iterações)

(b) $s \simeq 0.4315335$ (29 iterações), a convergência começa por ser muito lenta e depois acelera;

(c) Convergência de 1ª ordem: $|1 - x_i| = \frac{4}{5}\ |1 - x_{i-1}|$;

(d) Convergência de 1ª ordem: $|0 - x_i| = \frac{1}{2}\ |0 - x_{i-1}|$;

(e) Não converge: $x_i = -x_{i-1}$ (oscila).

AMG, IMF, JFO, JPF