Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Numérica

1998/99

— Erros —

Objectivos:

- Arredondar um número para n dígitos significativos.
- Determinar os erros máximos absoluto e relativo de um número aproximado, a partir dos seus dígitos significativos.
- Determinar os dígitos significativos de um número aproximado, conhecidos os seus erros máximos absoluto ou relativo.
- Análise da propagação de erros no cálculo de expressões.
- Determinação do erro de truncatura da soma de uma série infinita.

PROBLEMAS

$\boxed{1}$ — Considere a seguinte tabela:

valor aproximado ($\bar{x}$)	9.004	9.000	0.049999	617500	618500	1.0000	4.352×10^{-4}
erro máximo absoluto (ε_x)					1.2×10^{2}	5×10^{-3}	7.8×10^{-7}
erro máximo relativo (ε'_x)	0.5×10^{-3}	0.5×10^{-3}	10^{-4}	0.5×10^{-2}			

(a) Arredonde os números da 1ª linha para 3 dígitos significativos.

(b) Supondo que os números ($\bar{x}$) são apresentados com todos os dígitos significativos, indique majorantes do tipo 5×10^{-k} para os respectivos erros absolutos e relativos.

(c) Arredonde os números ($\bar{x}$) para os dígitos significativos correspondentes aos erros indicados na tabela (ε_x e ε'_x).

$\boxed{2}$ — Calcule um valor aproximado de $y = \sin x$, e o correspondente erro máximo absoluto, quando $x \approx 0.57$ (i.e., $x = 0.57 \pm 0.005$).

$\boxed{3}$ — É sabido que cada vez que o erro relativo é multiplicado por 10 se perde um dígito decimal significativo (aproximadamente). Verifique então se há ou não perda de dígitos significativos no cálculo da função $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ (ex: $\sin 0.586 = 0.55\ldots?$).

$\boxed{4}$ — Considere uma máquina com 8 dígitos decimais de precisão (em vírgula flutuante), na qual a função sin é calculada por um *polinómio de Taylor.*

(a) Qual é o erro máximo relativo (ε'_{arr}) que pode ser cometido ao arredondar qualquer número para esses 8 dígitos significativos?

(b) Para se obter o valor de $\sin x$ em $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ com a máxima precisão possível (com um erro relativo devido à truncatura da série não superior a (ε'_{arr})), quantos e quais os termos do respectivo desenvolvimento em série de Taylor que devem ser considerados? (*Sugestão:* Uma vez que o intervalo sob consideração é $|x| \leq \frac{\pi}{4}$, desenvolva a função em torno de $x = 0$ – série de Maclaurin)

(c) A convergência matemática nem sempre é realizável no cálculo numérico, pois pode exigir uma precisão (quase) infinita! Veja o que se passa ao tentar calcular $\sin 10.5\pi$ por um polinómio de Maclaurin com um número "suficiente" de termos (digamos que é "suficiente" que o erro de truncatura não exceda 10^{-4}). Seria adequado considerar mais termos da série?

RESOLUÇÕES

Notação e definições

- Dígitos significativos — todos os dígitos representados, excepto os zeros à esquerda. Por definição o erro absoluto associado a um número com n dígitos significativos é inferior (ou igual) a meia unidade da casa do último dígito.
- $x \approx 2.56 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.56 \pm 5 \times 10^{-3}$ (erro absoluto aparente).
- $x = 2.3456 \pm 1.2 \times 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 2.3444 < x < 2.3468$

  Nota: Usar um número de dígitos significativos no número e no erro que sejam concordantes.
- $x = 2.345 \pm 2\% \quad \Leftrightarrow \quad 2.345 \pm 4.7 \times 10^{-2}$

$\boxed{1}$ — **(a)**

9.00 9.00 0.0500 618×10^3 [(a)] 618×10^3 [(a)] 1.00 4.35×10^{-4}

(b)

$\bar{x}$	9.004	9.000	0.049999	617500	618500	1.0000	4.352×10^{-4}
[(b)] (ε_x)	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-7}	5×10^{-1}	5×10^{-1}	5×10^{-5}	5×10^{-8}
[(c)] (ε'_x)	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-5}	5×10^{-6}	5×10^{-6}	5×10^{-5}	5×10^{-4}

[(a)] Como o primeiro dígito "desprezado" é igual a 5 o arredondamento foi feito para o dígito par mais próximo.

[(b)] Por definição de dígito significativo o erro absoluto é inferior (ou igual) a meia unidade da casa do último dígito significativo.

[(c)] Se um número tem n dígitos significativos então o erro relativo é inferior a 5×10^{-n}.

(c) *Caso 1* – quando o erro máximo absoluto é conhecido.

$\bar{x}$	618500	1.0000	4.352×10^{-4}
ε_x	1.2×10^2	5×10^{-3}	7.8×10^{-7}
dígitos significativos[d]	2	3	1
$x \approx$	[e]62×10^4	1.00	[f]4×10^{-4}

Caso 2 – quando o erro máximo relativo é conhecido.

$\bar{x}$	9.004	9.000	0.049999	617500
ε'_x	0.5×10^{-3}	0.5×10^{-3}	10^{-4}	0.5×10^{-2}
dígitos significativos[g]	3	3	3	2
$x \approx$	9.00	9.00	0.0500	62×10^4

2 —

$$\bar{y} = \sin \bar{x} = \sin 0.57 \simeq 0.5396$$

Com quantas casas decimais se deve representar $\bar{y}$?

Como é sabido (ver apontamentos das aulas teóricas):

$$|\Delta y| \leq \max_x \left| \frac{dy}{dx} \right| \times |\Delta x|$$

Aplicando à presente função, vem:

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = |\cos x|$$

que será máximo quando x for mínimo, uma vez que $\cos x$, no intervalo sob consideração – $|x| \leq \frac{\pi}{4}$, é decrescente. Então:

$$|\Delta y| \leq |\cos(0.57 - 0.005)| \times 0.005 \simeq 4.2 \times 10^{-3}$$

Logo:

$$y = 0.5396 \pm 4.2 \times 10^{-3} \approx 0.54 \pm 5 \times 10^{-3}$$

---

[d] O número de dígitos significativos é determinado a partir da própria definição de dígito significativo, ou seja, a partir da comparação de um majorante do erro máximo absoluto do tipo 5×10^k $k \in Z$ com meia unidade da casa do que será o último dígito significativo.

[e] Neste caso $\varepsilon_x = 1.2 \times 10^2$ pelo que o número exacto está contido no intervalo definido pelos limites $\bar{x} - \varepsilon_x = 618500 - 120 = 618380$ e $\bar{x} + \varepsilon_x = 618500 + 120 = 618620$, isto é, $]618380, 618620[$. Se arredondarmos ambos os limites do intervalo para a casa das dezenas obtemos $]61838 \times 10^1, 61862 \times 10^1[$, o que mostra que o algarismo das dezenas ainda não é significativo (como não é igual nos dois limites do intervalo então não pertence garantidamente ao arredondamento do valor exacto para as dezenas). Arredondando agora para o algarismo das centenas obtém-se $]6184 \times 10^2, 6186 \times 10^2[$, pelo que também este não é um alagarismo significativo. Repetindo o processo para o algarismo dos milhares ter-se-ia ainda $]618 \times 10^3, 619 \times 10^3[$, pelo que só arredondando para o algarismo das dezenas de milhar se teria $]62 \times 10^4, 62 \times 10^4[$, isto é, a garantia de 2 dígitos significativos.

[f] Também aqui $x \in]4.3442, 4.3598[$, pelo que apenas arredondando para o dígito das unidades (na mantissa) se obtêm limites idênticos.

[g] Se o erro relativo de um número aproximado for menor ou igual a 0.5×10^{-n} então o número tem n dígitos significativos. Esta é uma regra pessimista, uma vez que o número de dígitos significativos se encontra, de facto, entre n e $n + 1$.

$\boxed{3}$ — Como se sabe, os erros absolutos das variáveis independentes e dependentes de uma função estão relacionados pela seguinte expressão:

$$|\Delta y| \simeq \left|\frac{dy}{dx}\right| \times |\Delta x|$$

É possível desenvolver uma expressão semelhante a esta para os erros relativos:

$$|\Delta y| \simeq \left|\frac{dy}{dx}\right| \times |\Delta x| \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \simeq \left|\frac{dy}{dx}\ \frac{x}{y}\right| \times \left|\frac{\Delta x}{x}\right| \qquad \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon'_y \simeq \left|\frac{dy}{dx}\ \frac{x}{y}\right| \times \varepsilon'_x$$

Se $\left|\frac{dy}{dx}\ \frac{x}{y}\right| \simeq 1$ não há perda de dígitos significativos, uma vez que o erro relativo não aumenta.

Então:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \Rightarrow \left|\cos x\ \frac{x}{\sin x}\right| = \left|\frac{x}{\tan x}\right| \leq 1 \text{ quando } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Portanto, não há perda de dígitos significativos.

Assim sendo, no exemplo dado, $\sin 0.586 \approx 0.553$.

$\boxed{4}$ — **(a)** 8 dígitos significativos $\Rightarrow \quad \varepsilon'_{arr} = 5 \times 10^{-8}$

(b) Desenvolvimento em Série de Maclaurin de $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \ldots + f^{n-1}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

Com

$$R_n = f^n(\theta x)\frac{x^n}{n!}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Então, com $f(x) = \sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sin(\theta x)\frac{x^n}{n!} \quad (n \text{ par, } 0 \leq \theta \leq 1)$$

O erro relativo, ao tomarmos apenas termos na série até à potência $n-1$ será dado por:

$$\varepsilon'_{trunc} = \left|\frac{R_n}{\sin x}\right| = \left|\frac{\sin(\theta x)}{\sin x}\frac{x^n}{n!}\right|$$

Como na vizinhança de 0 a função $\sin x$ é estritamente crescente, pode-se dizer que o máximo de $\sin(\theta x)$ ocorrerá quando o argumento da função for máximo, i.e, quando $\theta = 1$. Então a expressão acima pode ser majorada fazendo $\theta = 1$:

$$\varepsilon'_{trunc} \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{(\frac{\pi}{4})^n}{n!}$$

uma vez que, por enunciado, $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

Para que este erro não exceda os 5×10^{-8} determinados, dever-se-ão tomar 10 termos da série (i.e., desenvolver a série até à nona potência de x), uma vez que:

$$n = 10 \Rightarrow \left|\frac{R_{10}}{\sin x}\right| \leq \frac{(\frac{\pi}{4})^{10}}{10!} = 2.5 \times 10^{-8}$$

Então:

$$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}, \text{ para } |x| \leq \frac{\pi}{4} \text{ com } \varepsilon'_{\sin x} = 2.5 \times 10^{-8}$$

(c) Do ponto de vista da Análise Matemática a série converge para valores de x positivos, pois é alternada e decrescente a partir de uma certa ordem ($n \simeq x$).

Se $x = 10.5\pi$, e portanto o seu seno vale 1 (10.5π reduzido ao primeiro quadrante dará $\frac{\pi}{2}$), teremos:

$$\left| \frac{R_n}{1} \right| \leq \frac{(10.5\pi)^n}{n!}$$

Vamos então ver quantos termos teremos que somar (que n vamos usar) para que o erro de truncatura não exceda os 10^{-4}. Ora, para $n = 33$ ainda temos $|R_n| \leq 1.5 \times 10^{13}$ (e a este n corresponde o maior termo da série – para confirmar calcule todos os termos até 33). A partir daqui o majorante do erro de truncatura vai diminuindo:

$$\begin{array}{ll} n = 33 & |R_n| \leq 1.5 \times 10^{13} \\ n = 50 & |R_n| \leq 2.7 \times 10^{11} \\ n = 60 & |R_n| \leq 1.5 \times 10^{9} \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Estes termos vão sendo sucessivamente somados e subtraídos, mas se considerarmos que a parte relevante destes números é a sua parte fraccionária ($0 \leq |\sin x| \leq 1$), só uma máquina com "muitos" dígitos de precisão (mais do que 13 seguramente) não perderá completamente a informação importante contida nestes números, levando a que o cálculo desta série não convirja, numericamente falando.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Numérica

1998/99

— Erros —

PROBLEMAS PROPOSTOS

$\boxed{1}$ — Quais das seguintes expressões são aceitáveis?

(a) 4.3216 ± 0.0322

(b) 4.3216 ± 0.03

(c) $4.3 \pm 5 \times 10^{-2}$

(d) $4.3216 \pm 0.98\%$

(e) $3.10 \pm 5 \times 10^{-2}$

(f) $3.984 \pm 5 \times 10^{-3} \approx 3.98$

$\boxed{2}$ — Calcule um valor aproximado de y e o seu erro máximo absoluto correspondente, nas seguintes expressões:

(a) $y = 4\sin(x) + x^x \quad \wedge \quad x \approx 0.57$

(b) $y = y_0\, e^{-\frac{x}{\tau}}, \quad \begin{cases} x = 3.5 & \text{(exacto)} \\ \tau \approx 2.8 \\ y_0 \approx 12 \end{cases}$

$\boxed{3}$ — Já se sabe que, cada vez que o erro relativo é multiplicado por 10, perde-se um dígito significativo (aproximadamente). Verifique então se há ou não perda de dígitos significativos no cálculo das seguintes funções $y = \mathcal{F}(x)$:

(a) $y = \cos(x), \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \quad$ (ex: $\cos(1.513)$)

Compare a perda no cálculo de $\cos(x)$ com a perda no cálculo de $\frac{\pi}{2} - x$ quando x é próximo de $\frac{\pi}{2}$.

(b) $y = e^x \quad$ (ex: $e^{135.4}$)

(c) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \quad x > 0 \quad$ (ex: $x = 7354$)

$\boxed{4}$ — Considere uma máquina hipotética que trabalhe em vírgula flutuante com 4 dígitos decimais de precisão (i.e., guarda apenas os 4 primeiros dígitos significativos de um número).

Suponha que, ao efectuar *operações aritméticas* (as operações a partir das quais se constróem todas as outras!), todos os resultados intermédios têm de ser arredondados para esses 4 dígitos (bem como, obviamente, o resultado final).

(a) Qual é o erro relativo cometido ao representar $\sqrt{2}$ nessa máquina?

(b) Qual é o erro máximo relativo (ε'_{arr}) que pode ser cometido ao arredondar qualquer número para os 4 dígitos significativos?

(c) Qual é o erro máximo relativo que pode ser cometido (devido apenas ao arredondamento nos resultados intermédios e final) no cálculo de $((a+b)+c)+d$ (adição em série)? Considere $a, b, c, d > 0$.
[*Nota:* $\varepsilon'_{x+y} \simeq \left|\frac{x}{x+y}\right| \varepsilon'_x + \left|\frac{y}{x+y}\right| \varepsilon'_y + \varepsilon'_{arr}$]
Porque ordem de grandeza dos operadores deverá ser feita a adição?

(d) Idem, no cálculo de $(a+b)+(c+d)$ (adição em paralelo)?
Quando será preferível a adição em paralelo à adição em série?

(e) Se adicionasse em série um milhão de parcelas de valor unitário, que resultado obtinha? E adicionando em paralelo (de alguma maneira apropriada)?

$\boxed{5}$ — Para achar os zeros do *binómio* x^2+bx+c é costume empregar a fórmula $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$.
No entanto, embora essa fórmula funcione bem para achar o zero de maior grandeza (digamos x^+), já o mesmo não se passa para achar o outro zero (digamos x^-), o qual é melhor obtido por $x^- = \frac{c}{x^+}$.
Compare a precisão que obtém ao calcular as raízes de $x^2 - 412x + 1 = 0$ pelo processo tradicional e pelo novo processo.

$\boxed{6}$ — Rearrange as seguintes expressões de modo a evitar o *cancelamento* e poder assim calculá-las com melhor precisão.

(a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, com $x \gg 1$ (ex: $x = 1.543217 \times 10^6$).

(b) $\cos(x+\varepsilon) - \cos(x)$, com $x \gg \varepsilon$ (ex: $x = 1.543$ e $\varepsilon = 10^{-6}$).

(c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, com $x \gg 1$ (ex: 1.543217×10^4).

(d) $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$, com $0 < x \ll 1$ (ex: 1.543217×10^{-8}).
[*Sugestão:* use alguns termos da série de Taylor]

SOLUÇÕES E TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

$\boxed{1}$ — **(a)** Incorrecto. Demasiados dígitos significativos para indicar o erro: $0.03\cancel{2}\cancel{2}$.

(b) Incorrecto. Demasiados dígitos significativos no valor aproximado: $4.3\cancel{2}\cancel{1}\cancel{6} \pm 0.03$.

(c) Correcto.

(d) Incorrecto. $\epsilon = 0.98\% * 4.3216 = 0.04253 \rightarrow 4.3 \pm 0.05$.

(e) Incorrecto. Demasiados dígitos significativos no valor aproximado: $3.1\cancel{0} \pm 0.05$.

(f) Correcto ($3.98 \longrightarrow 3.98 \pm 5 \times 10^{-3}$).

$\boxed{2}$ — **(a)** $y = 4\sin(x) + x^x \quad \wedge \quad x \approx 0.57$

$$\hat{y} = 4\sin(0.57) + 0.57^{0.57} \approx 2.884$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos(x) + x^x(1 + \ln(x))$$

$$\begin{aligned} |\Delta y| &\leq \max_x \left|\frac{dy}{dx}\right| \times |\Delta x| \\ &< |4\cos(x_{min}) + x_{max}^{x_{min}}(1 + \ln(x_{min}))| \\ &\approx 1.8 \times 10^{-2} \text{ (com } x_{max} = 0.57 + 0.005 \wedge x_{min} = 0.57 - 0.005) \end{aligned}$$

$$y = 2.88 \pm 2 \times 10^{-2}$$

(b) $y = y_0\, e^{-\frac{x}{\tau}}, \quad \begin{cases} x = 3.5 \quad \text{(exacto)} \\ \tau \approx 2.8 \\ y_0 \approx 12 \end{cases}$

$$\hat{y} = 12\, e^{-\frac{3.5}{2.8}} \approx 3.438$$

$$\frac{dy}{dy_0} = e^{-\frac{x}{\tau}}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{x\ y}{\tau^2}\ e^{-\frac{x}{\tau}}$$

$$\begin{aligned} |\Delta y| &\leq \max_{y_0}\left|\frac{dy}{dy_0}\right| \times |\Delta y_0| + \max_\tau \left|\frac{dy}{d\tau}\right| \times |\Delta\tau| \\ &< \left|e^{-\frac{x}{\tau_{min}}}\right| \times |\Delta y_0| + \left|\frac{x\ y_{max}}{\tau_{min}^2}\ e^{-\frac{x}{\tau_{min}}}\right| \times |\Delta\tau| \\ &\approx 0.22 \end{aligned}$$

$$y = 3.44 \pm 0.22 \text{ (resultado pessimista mas seguro)}$$

$\boxed{3}$ — **(a)** $y = \cos(x), \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \quad$ (ex: $\cos(1.513)$)

$$\left|\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}\right| = |x\ \tan(x)| \le 1, \qquad \text{se } 0 \le x \le 0.86$$

Não há perda de dígitos significativos no cálculo do co-seno até $x \approx 0.86$.

$$y = \cos(1.513) \approx 0.057 \quad (x > 0.86 \Rightarrow \text{ menos 2 dígitos significativos})$$

Tomando agora $y = \frac{\pi}{2} - x$:

$$\left|\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}\right| = \left|-\frac{x}{\frac{\pi}{2} - x}\right|$$

Quando x é próximo de $\frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{\pi}{2} - x$ próximo de 0), por exemplo quando $x \ge 1.556$ ($\frac{\pi}{2} - x < 1.5 \times 10^{-2}$):

$$\begin{aligned} |x\ \tan(x)| &> 100 \\ \left|-\frac{x}{\frac{\pi}{2} - x}\right| &> 100 \end{aligned}$$

Ou seja, próximo de $\frac{\pi}{2}$ a perda é aproximadamente a mesma no cálculo das duas funções.

[*Nota:* Este exercício baseia-se no facto de que próximo de $\frac{\pi}{2}$ a função $\cos(x)$ pode ser aproximada pela função $\frac{\pi}{2} - x$.]

(b) $y = e^x \quad$ (ex: $e^{135.4}$)

$$\left|\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}\right| = |x|$$

Perdem-se cerca de $\log_{10}(x)$ dígitos significativos no cálculo de e^x.

$$y = e^{135.4} \approx 6.4 \times 10^{58} \qquad (\text{menos 2 dígitos significativos})$$

(c) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \quad x > 0 \quad$ (ex: $x = 7354$)

$$\left|\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x+1}} \qquad (< 1)$$

Não se perde nenhum dígito significativo.

$$y = \sqrt{7354+1} - \sqrt{7354} \approx 5.830 \times 10^{-3}$$

$\boxed{4}$ — **(a)** 1.5×10^{-4}

(b) 5×10^{-4}

(c) Admite-se que $\varepsilon'_a = \varepsilon'_b = \varepsilon'_c = 0$. Então:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{a+b} &\simeq 0 + 0 + \varepsilon'_{arr} = \varepsilon'_{arr} \\ \varepsilon'_{(a+b)+c} &\simeq \left|\frac{a+b}{a+b+c}\right|\varepsilon'_{a+b} + 0 + \varepsilon'_{arr} =_{a,b,c>0} \frac{2a+2b+c}{a+b+c}\varepsilon'_{arr} \\ \varepsilon'_{((a+b)+c)+d} &\simeq \ldots =_{a,b,c,d>0} \frac{3a+3b+2c+d}{a+b+c+d}\varepsilon'_{arr} \le 3\varepsilon'_{arr} = 1.5 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Para minimizar o erro por arredondamento convém que $a, b < c < d$, isto é, convém somar as parcelas por ordem de grandezas crescentes (com parcelas do mesmo sinal).

(d) $\varepsilon'_{(a+b)+(c+d)} \simeq \ldots =_{a,b,c,d>0} 2\varepsilon'_{arr} = 10^{-3}$
A adição em paralelo será preferível quando as parcelas forem pouco desiguais.

(e) Considerando a máquina hipotética com 4 dígitos decimais de precisão:

i.

$$
\begin{array}{r}
1.000 \times 10^0 \\
+1.000 \times 10^0 \\ \hline
2.000 \times 10^0 \\
+1.000 \times 10^0 \\ \hline
\vdots \\ \hline
1.000 \times 10^1
\end{array}
\quad \ldots \quad
\begin{array}{r}
1.000 \times 10^3 \\
+0.001 \times 10^3 \\ \hline
1.001 \times 10^3 \\
\vdots \\
\vdots \\ \hline
1.000 \times 10^4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1.000 \times 10^4 \\
+0.000 \times 10^4 \\ \hline
1.000 \times 10^4
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\longleftarrow \text{perde-se o dígito “1”!} \\
\longleftarrow \text{resultado final desastroso.}
\end{array}
$$

ii. Como os termos são todos iguais, conforme vimos na alínea anterior, é preferível somar em paralelo. Suponhamos, por exemplo, este esquema somador:

$$
\begin{array}{c}
(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) + (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \\
(\qquad\quad) + (\qquad\quad) \qquad (\qquad\quad) + (\qquad\quad) \\
(\quad) + (\quad) \qquad \ldots \\
\ldots
\end{array}
$$

Na adição em série de n parcelas (do mesmo sinal) o erro relativo por arredondamento não excede $n \times \varepsilon'_{arr}$, enquanto na adição em paralelo (com o número mínimo de estágios dados pelo esquema acima) não excede $\log_2 n \times \varepsilon'_{arr}$ (5×10^2 contra 10^{-2} no caso presente!).

$\boxed{5}$ — Na calculadora *Casio fx-5500L*, que trabalha internamente com 12 dígitos significativos apesar de mostrar apenas 10 dígitos, temos:

$$x^+ = 4.11997572801 \times 10^2$$

$$x^- = 2.42719900000 \times 10^{-3}, \quad (1^{\underline{o}} \text{ processo})$$

$$x^- = 2.42719876528 \times 10^{-3}, \quad (2^{\underline{o}} \text{ processo}).$$

$\boxed{6}$ — O *cancelamento* ocorre quando se subtraem dois números muito próximos. Este fenómeno origina a perda de dígitos significativos, ex:

$$7.6545421 - 7.6544200 = 0.1221 \times 10^{-3}$$

(a) $-\frac{1}{x\,(x+1)}$ $\quad(-4.1989 \times 10^{-13} \longrightarrow -4.198998514 \times 10^{-13})$

(b) $-2\,\sin(x + \frac{\varepsilon}{2}) \times \sin(\frac{\varepsilon}{2})$ $\quad(-9.996138 \times 10^{-7} \longrightarrow -9.996137209 \times 10^{-7})$

(c) $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ $\quad(4.024848 \times 10^{-8} \longrightarrow 4.024847869 \times 10^{-8})$

(d) $\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \ldots$ $\quad(0 \longrightarrow 0.5)$

AMG, IMF, JFO, JPF