Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Numérica

1997/98

— Integração Numérica —

Objectivos:
Cálculo de integrais através dos seguintes métodos:

- Regra dos trapézios.
- Regra de Simpson.
- Polinómio Interpolador.

PROBLEMAS

1 — Dados os seguintes pontos de uma função $y = f(x)$

x	0	1	2	3	4
y	0.78	2.04	3.71	4.11	3.89

determine um valor aproximado do integral $\int_0^4 f(x)\,dx$.

(a) Pela regra dos trapézios.

(b) Pela regra de Simpson.

(c) Pelo polinómio que interpola aqueles pontos.

2 — Calcule pela regra de Simpson um valor aproximado do integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx$, com 3 dígitos significativos correctos. Verifique se o valor obtido está devidamente próximo do valor verdadeiro do integral.

3 — Pretende-se calcular $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ a menos de 5×10^{-4} .

(a) Calcule o integral pela regra de Simpson.

(b) Quantos intervalos seriam precisos pela regra dos trapézios.

(c) Duplicando o número de intervalos, de que maneira seria afectado o erro em cada uma das regras.

(d) Se os valores de $\frac{e^{-x}}{x}$ tiverem de ser arredondados para 6 casas fraccionárias, calcule:

i. o erro máximo (total) por arredondamento para 6 casas fraccionárias.

ii. o número máximo de intervalos que interessaria considerar em cada uma das regras, de modo a que o erro de truncatura da regra seja da podem do erro por arredondamento.

RESOLUÇÕES

$\boxed{1}$ — **(a)** Regra dos trapézios:

$$I \simeq \frac{h}{2}\,(\,y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\,).$$

$$h = x_{i+1} - x_i = 1.$$

Neste caso, como $n = 4$ (5 pontos), temos

$$\int_0^4 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\,(\,y_0 + 2y_1 + 2y_3 + y_4\,) = 12.2(0).$$

(b) Regra de Simpson:

$$I \simeq \frac{h}{3}\,(\,y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\,).$$

Aplicando a regra de Simpson a este problema, temos

$$\int_0^4 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{3}\,(\,y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\,) = 12.2(3).$$

(c) Polinómio interpolador de Newton:

Cálculo da tabela de diferenças,

x_i	$(\Delta^0 y_i)$ y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0.78				
		1.26			
1	2.04		0.41		
		1.67		−1.68	
2	3.71		−1.27		2.33
		0.40		0.65	
3	4.11		−0.62		
		−0.22			
4	3.89				

O polinómio interpolador de Newton $P_4(x)$ obtêm-se directamente a partir da tabela de diferenças,

$$\begin{aligned} P_4(x) &= \tfrac{0.78}{0!} + \tfrac{1.26}{1!}\,(x-0) + \tfrac{0.41}{2!}\,(x-0)\,(x-1) - \tfrac{1.68}{3!}\,(x-0)\,(x-1)\,(x-2) + \\ &\quad + \tfrac{2.33}{4!}\,(x-0)\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3) \\ &= 0.78 - 0.0875\,x + 2.1129\,x^2 - 0.8625\,x^3 + 0.0971\,x^4. \end{aligned}$$

Por fim, calcula-se então o integral de $P_4(x)$

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^4 f(x)\,dx &\simeq \textstyle\int_0^4 P_4(x)\,dx \\ &= \left[\tfrac{0.78}{1}\,x - \tfrac{0.0875}{2}\,x^2 + \tfrac{2.1129}{3}\,x^3 - \tfrac{0.8625}{4}\,x^4 + \tfrac{0.0971}{5}\,x^5\right]_0^4 \\ &\simeq 12.1(8)\,. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ — O cálculo do integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx$ com 3 dígitos significativos correctos, equivale a considerar um erro máximo absoluto de 5×10^{-3} .

De seguida, vamos calcular o número de intervalos (par) que é necessário considerar na aplicação da regra de Simpson:

$$|\varepsilon_t| \le \frac{h^4}{180}\,|b-a| \max_{a\le\xi\le b}\left|f^{(4)}(\xi)\right| \le 5 \times 10^{-3}$$

em que

$$\max_{a\le\xi\le b}\left|f^{(4)}(\xi)\right| = \max_{a\le\xi\le b}|\sin(\xi)| = 1\ , \qquad (\,b-a\,) = \frac{\pi}{2}\ , \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

temos então que

$$\frac{(\frac{\pi}{2n})^4}{180} \times \frac{\pi}{2} \times 1 \le 5 \times 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad n \ge \sqrt[4]{\frac{\pi^5}{2^4 \times 2 \times 180 \times 5 \times 10^{-3}}} \quad \longrightarrow \quad n = 2 \quad \wedge \quad h = \frac{\pi}{4}$$

Aplicando a regra de Simpson:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx \simeq \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\left[\sin(0) + 4\sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2})\right] \simeq 1,00(2).$$

$\boxed{3}$ — Cálculo da 1ª, 2ª, 3ª e 4ª derivadas de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}\ ; \qquad f'(x) = -e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\ ; \qquad f''(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)\ ;$$

$$f^{(3)}(x) = -e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right)\ ; \qquad f^{(4)}(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{24}{x^4} + \frac{24}{x^5}\right).$$

Os módulos das sucessivas derivadas de $f(x)$ têm todos a mesma forma: $e^{-x}\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \dots\right)$. Analisando esta expressão facilmente se conclui que o valor máximo, no intervalo entre $[\,1,2\,]$, ocorre para $x = 1$.

$$\max_{1\le x\le 2}|f''(x)| = f''(1) \simeq 1.84$$

$$\max_{1\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right| = f^{(4)}(1) \simeq 23.9$$

(a) Regra de Simpson:

Cálculo do número de intervalos (par) de modo a garantir um erro inferior a 5×10^{-4} .

$$|\varepsilon_t| \le \frac{h^4}{180}\,|b-a| \max_{a\le\xi\le b}\left|f^{(4)}(\xi)\right| \le 5 \times 10^{-4}$$

$$\frac{(\frac{1}{n})^4}{180} \times 1 \times 23.9 \;\leq\; 5 \times 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad n \;\geq\; \sqrt[4]{\frac{23.9}{180 \times 5 \times 10^{-4}}} \;\simeq\; 4.04$$

Neste caso, para sermos totalmente rigorosos deveríamos considerar 6 intervalos ($n = 6$), no entanto optamos por utilizar apenas 4 intervalos porque a expressão que nos dá o erro da regra de Simpson é muito *pessimista* e o valor obtido para n (4.04) é *ligeiramente* superior a 4.

Aplicando a regra de Simpson, considerando $n = 4$, obtemos então:

$$\int_1^2 f(x)\,dx \;\simeq\; \frac{h}{3}\;\left[\; f(1) + 4\,f(\frac{5}{4}) + 2\,f(\frac{3}{2}) + 4\,f(\frac{7}{4}) + \;f(2)\;\right] \;=\; 0.170(6)\;.$$

(b) Regra dos trapézios:

Cálculo do número de intervalos de modo a garantir um erro inferior a 5×10^{-4}.

$$|\varepsilon_t| \;\leq\; \frac{h^2}{12}\;|b-a|\;\max_{a\leq\xi\leq b}|f''(\xi)| \;\leq\; 5 \times 10^{-4}$$

$$\frac{(\frac{1}{n})^2}{12} \times 1 \times 1.84 \;\leq\; 5 \times 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad n \;\geq\; \sqrt{\frac{23.9}{180 \times 5 \times 10^{-4}}} \quad \Longrightarrow \quad n = 18$$

(c) Duplicação do número de intervalos:

Regra dos trapézios $\left(\varepsilon_t \sim \frac{1}{n^2}\right)$: o erro é dividido por 4

Regra de Simpson $\left(\varepsilon_t \sim \frac{1}{n^4}\right)$: o erro é dividido por 16

(d) i. O erro de arredondamento, em qualquer dos casos, vem:

$$|\varepsilon_{arr}| \;\leq\; |\;b-a\;|\;\varepsilon \;=\; (2-1) \times 5 \times 10^{-7} \;=\; 5 \times 10^{-7}$$

ii. Regra dos trapézios:

$$\frac{(\frac{1}{n})^2}{12} \times 1 \times 1.84 \;\leq\; 5 \times 10^{-7} \;\simeq\; 5 \times 10^{-7} \quad \longrightarrow \quad n = 554$$

Regra de Simpson:

$$\frac{(\frac{1}{n})^4}{180} \times 1 \times 23.9 \;\leq\; 5 \times 10^{-7} \;\simeq\; 5 \times 10^{-7} \quad \longrightarrow \quad n = 22.7 = 24$$

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Numérica

1996/97

— Integração Numérica —

PROBLEMAS PROPOSTOS

$\boxed{1}$ — Calcule $\int_2^4 \frac{1}{\ln(x)}\,dx$ a menos de 5×10^{-4} pela regra dos trapézios.

$\boxed{2}$ — Considere as funções de Bessel modificadas de 1ª espécie:

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\,\cos(t)}\cos(nt)\,dt$$

Calcule $I_1(1)$ pela regra de Simpson, dividindo o intervalo $[0,\,\pi]$ em 4, 8 e 16 sub-intervalos. Quantos dígitos correctos terão o 1º e o 2º resultados?

$\boxed{3}$ — O perímetro P de uma elipse de eixo maior a, eixo menor b e excentricidade $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, é dado por

$$P = 4\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\,\sin^2(\theta)}\,d\theta$$

Calcule o perímetro de uma elipse com $a = 4$ e $b = 2$, através da regra de Simpson com 4 intervalos.

SOLUÇÕES E TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

$\boxed{1}$ — $\int_2^4 \frac{1}{\ln(x)}\,dx = 1.922(5)$ [53 intervalos]

$\boxed{2}$ — $I_1(1) = \begin{cases} \underline{0.55}77, & n = 4 \\ \underline{0.56158}6, & n = 8 \\ 0.561591, & n = 16 \end{cases}$

$\boxed{3}$ — $P = 19.4$

AMG, IMF, JFO, JPF