Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Numérica

1998/99

— Método dos Mínimos Quadrados —

Objectivos:

- Estimação de valores pelo método dos mínimos quadrados.

PROBLEMAS

1 — Determine a aproximação dos mínimos quadrados aos pontos

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

por:

(a) Uma recta.

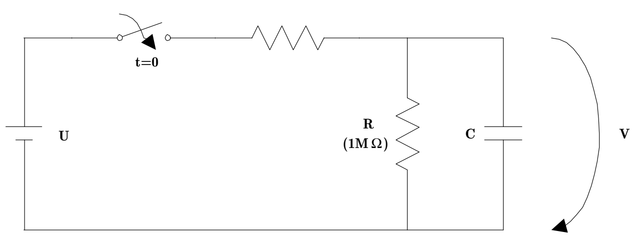
(b) Uma parábola.

(c) Uma cúbica.

(d) Uma recta $x = g(y)$ que minimize o erro em x .

2 — Para medir a capacidade (C) de um condensador, usou-se um circuito RC com um interruptor. No instante $t = 0$ abriu-se o interruptor, tendo-se registado os seguinte valores da tensão (V) no condensador:

$t(s)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$V(volt)$	10	7.8	6.2	4.9	3.5	2.7	2.1	1.6	1.3	1.0	0.7



Como se sabe, é aplicável a relação $v(t) = v_0 \, e^{-\frac{t}{RC}}, \; t \geq 0$.

Usando o critério dos mínimos quadrados, estime um valor para C . Considere $v(0)$ também sujeito a erro, de maneira que v_0 é desconhecido "a priori".

RESOLUÇÕES

Método dos Mínimos Quadrados:

Dado um conjunto de pontos $(x_i, y_i)\, i = 1, 2, \ldots, n$ e uma função $F(x, c_1, c_2, \ldots, c_k)$ do tipo

$$F(x, c_1, c_2, \ldots, c_k) = c_1\,\Phi_1(x) + c_2\,\Phi_2(x) + \ldots + c_k\,\Phi_1(x)$$

determinar $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tal que se minimize

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - F(x, c_1, c_2, \ldots, c_k))^2.$$

Calculando as k derivadas desta função em ordem a $c_1, c_2, \ldots, c_k$ e igualando-as a zero obtemos um sistema de k equações a k incógnitas do tipo:

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^{N} \Phi_1^2(x) + c_2 \sum_{i=1}^{N} \Phi_1(x)\,\Phi_2(x) + \ldots + c_k \sum_{i=1}^{N} \Phi_1(x)\,\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_1(x)\,y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^{N} \Phi_1(x)\,\Phi_2(x) + c_2 \sum_{i=1}^{N} \Phi_2^2(x) + \ldots + c_k \sum_{i=1}^{N} \Phi_2(x)\,\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_2(x)\,y_i \\ \vdots \\ c_1 \sum_{i=1}^{N} \Phi_1(x)\,\Phi_k(x) + c_2 \sum_{i=1}^{N} \Phi_2(x)\,\Phi_k(x) + \ldots + c_k \sum_{i=1}^{N} \Phi_k^2(x) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_k(x)\,y_i \end{cases}$$

A resolução do sistema permite-nos obter os valores de $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

$\boxed{1}$ — **(a)** Aproximação por uma recta:

$$F(x) = c_1 + c_2\,x\,, \text{ com } \begin{cases} \Phi_1(x) = 1 \\ \Phi_2(x) = x \\ \Phi_i(x) = 0, \quad i = 3, 4, \ldots, k \end{cases}$$

O que nos permite escrever o seguinte sistema ($N = 8$):

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^{8} 1 + c_2 \sum_{i=1}^{8} x_i = \sum_{i=1}^{8} y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^{8} x_i + c_2 \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = \sum_{i=1}^{8} x_i\,y_i \end{cases}$$

Os vários somatórios podem ser facilmente calculados pela seguinte tabela,

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\,y_i$
	1	1	1	1
	3	2	9	6
	4	4	16	16
	6	4	36	24
	8	5	64	40
	9	7	81	63
	11	8	121	88
	14	9	196	126
$\sum$	56	40	524	364

Substituindo no sistema os somatórios pelos respectivos valores,

$$\begin{cases} 8\,c_1 + 56\,c_2 = 40 \\ 56\,c_1 + 524\,c_2 = 364 \end{cases}$$

Donde se retira que,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 56 \\ 364 & 524 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 56 \\ 56 & 524 \end{vmatrix}} = \frac{576}{1056} \simeq 0.5455$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 40 \\ 56 & 364 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 56 \\ 56 & 524 \end{vmatrix}} = \frac{672}{1056} \simeq 0.6364$$

O que nos permite escrever a equação da recta que aproxima os pontos dados pelo método dos mínimos quadrados:

$$y = c_1 + c_2\,x = 0.5455 + 0.6364\,x$$

(b) Aproximação por uma parábola:

$$F(x) = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2\,,\ \text{com} \begin{cases} \Phi_1(x) = 1 \\ \Phi_2(x) = x \\ \Phi_3(x) = x^2 \\ \Phi_i(x) = 0, \quad i = 4, 5, \ldots, k \end{cases}$$

O que nos permite escrever o seguinte sistema ($N = 8$):

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^{8} 1 + c_2 \sum_{i=1}^{8} x_i + c_3 \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = \sum_{i=1}^{8} y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^{8} x_i + c_2 \sum_{i=1}^{8} x_i^2 + c_3 \sum_{i=1}^{8} x_i^3 = \sum_{i=1}^{8} x_i\,y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^{8} x_i^2 + c_2 \sum_{i=1}^{8} x_i^3 + c_3 \sum_{i=1}^{8} x_i^4 = \sum_{i=1}^{8} x_i^2\,y_i \end{cases}$$

Os vários somatórios podem ser facilmente calculados pela seguinte tabela,

	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i\,y_i$	$x_i^2\,y_i$
	1	1	1	1	1	1	1
	3	2	9	27	81	6	18
	4	4	16	64	256	16	64
	6	4	36	216	1296	24	144
	8	5	64	512	4096	40	320
	9	7	81	729	6561	63	567
	11	8	121	1331	14641	88	968
	14	9	196	1744	38416	126	1764
$\sum$	56	40	524	5624	65348	364	3846

Substituindo no sistema os somatórios pelos respectivos valores,

$$\begin{cases} 8\,c_1 + 56\,c_2 + 524\,c_3 = 40 \\ 56\,c_1 + 524\,c_2 + 5624\,c_3 = 364 \\ 524\,c_1 + 5624\,c_2 + 65348\,c_3 = 3846 \end{cases}$$

Donde se retira que,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 56 & 524 \\ 364 & 524 & 5624 \\ 3846 & 5624 & 65348 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 56 & 524 \\ 56 & 524 & 5624 \\ 524 & 5624 & 65348 \end{vmatrix}} = \frac{420000}{2155968} \simeq 0.1948$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 40 & 524 \\ 56 & 364 & 5624 \\ 524 & 3846 & 65348 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 56 & 524 \\ 56 & 524 & 5624 \\ 524 & 5624 & 65348 \end{vmatrix}} = \frac{1665024}{2455968} \simeq 0.7723$$

$$c_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 56 & 40 \\ 56 & 524 & 364 \\ 524 & 5624 & 3846 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 56 & 524 \\ 56 & 524 & 5624 \\ 524 & 5624 & 65348 \end{vmatrix}} = \frac{-19776}{2455968} \simeq -0.0092$$

O que nos permite escrever a equação da parábola que aproxima os pontos dados pelo método dos mínimos quadrados:

$$y = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 = 0.1948 + 0.7723\,x - 0.0092\,x^2$$

(c) Aproximação por uma cúbica:

$$F(x) = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 + c_4\,x^3\,, \text{ com } \begin{cases} \Phi_1(x) = 1 \\ \Phi_2(x) = x \\ \Phi_3(x) = x^2 \\ \Phi_4(x) = x^3 \\ \Phi_i(x) = 0, \quad i = 5, 6, \ldots, k \end{cases}$$

O que nos permite escrever o seguinte sistema ($N = 8$):

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^8 1 + c_2 \sum_{i=1}^8 x_i + c_3 \sum_{i=1}^8 x_i^2 + c_4 \sum_{i=1}^8 x_i^3 = \sum_{i=1}^8 y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^8 x_i + c_2 \sum_{i=1}^8 x_i^2 + c_3 \sum_{i=1}^8 x_i^3 + c_4 \sum_{i=1}^8 x_i^4 = \sum_{i=1}^8 x_i\, y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^8 x_i^2 + c_2 \sum_{i=1}^8 x_i^3 + c_3 \sum_{i=1}^8 x_i^4 + c_4 \sum_{i=1}^8 x_i^5 = \sum_{i=1}^8 x_i^2\, y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^8 x_i^3 + c_2 \sum_{i=1}^8 x_i^4 + c_3 \sum_{i=1}^8 x_i^5 + c_4 \sum_{i=1}^8 x_i^6 = \sum_{i=1}^8 x_i^3\, y_i \end{cases}$$

Os novos somatórios podem ser facilmente calculados pela seguinte tabela,

	x_i^5	x_i^6	$x_i^3\, y_i$
	1	1	1
	243	729	54
	1024	4096	256
	7796	46776	864
	32768	262144	2560
	59049	531441	5103
	161051	1771561	10648
	537824	7529536	24696
$\sum$	799756	10146284	44182

Substituindo no sistema os somatórios pelos respectivos valores,

$$\begin{cases} 8\, c_1 + 56\, c_2 + 524\, c_3 + 5624\, c_4 = 40 \\ 56\, c_1 + 524\, c_2 + 5624\, c_3 + 65348\, c_4 = 364 \\ 524\, c_1 + 5624\, c_2 + 65348\, c_3 + 799756\, c_4 = 3846 \\ 5624\, c_1 + 65348\, c_2 + 799756\, c_3 + 10146284\, c_4 = 44182 \end{cases}$$

Donde se retira que,

$$\begin{cases} c_1 & = 0.55329 \\ c_2 & = 0.5138 \\ c_3 & = 3.2787 \times 10{-}2 \\ c_4 & = -1.8459 \times 10{-}3 \end{cases}$$

O que nos permite escrever a equação da cúbica que aproxima os pontos dados pelo método dos mínimos quadrados:

$$\begin{aligned} y &= c_1 + c_2\, x + c_3\, x^2 + c_4\, x^3 \\ &= 0.553239 + 0.5138\, x + 3.2787 \times 10^{-2}\, x^2 - 1.8459 \times 10^{-3}\, x^3 \end{aligned}$$

(d) Aproximação por uma recta $x = g(y)$:

$$F^*(y) = c_1 + c_2\, y\,, \text{ com } \begin{cases} \Phi_1(y) = 1 \\ \Phi_2(y) = y \\ \Phi_i(y) = 0, \quad i = 3, 4, \ldots, k \end{cases}$$

O que nos permite escrever o seguinte sistema ($N = 8$):

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^{8} 1 + c_2 \sum_{i=1}^{8} y_i = \sum_{i=1}^{8} x_i \\ c_1 \sum_{i=1}^{8} y_i + c_2 \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = \sum_{i=1}^{8} y_i \, x_i \end{cases}$$

Os vários somatórios podem ser facilmente calculados pela seguinte tabela,

	y_i	x_i	y_i^2	$y_i \, x_i$
	1	1	1	1
	2	3	4	6
	4	4	16	16
	4	6	16	24
	5	8	25	40
	7	9	49	63
	8	11	64	88
	9	14	81	126
$\sum$	40	56	256	364

Substituindo no sistema os somatórios pelos respectivos valores,

$$\begin{cases} 8\, c_1 + 40\, c_2 = 56 \\ 40\, c_1 + 256\, c_2 = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \ = \ 7 - 5\, c_2 \\ c_2 \ = \ \frac{84}{56} \ = \ 1.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \ = \ -0.5 \\ c_2 \ = \ 1.5 \end{cases}$$

O que nos permite escrever a equação da recta que, aproximando os pontos dados pelo método dos mínimos quadrados, minimiza o erro em x:

$$x \ = c_1 + c_2\, y \ = \ -0.5 + 1.5\, y$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ — Neste problema, a função que queremos aproximar é do tipo exponencial

$$v(t) \ = \ v_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \ , \ t \ \geq \ 0 \, .$$

No entanto se aplicarmos logaritmos aos dois membros da equação que queremos aproximar, ficámos com um função linear:

$$v^* \ = \ v_0\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln v^* \ = \ \ln v_0 + \left(-\frac{1}{RC} \right) \, t \, .$$

Então o que vamos fazer é aproximar os pontos $(x_i, \, y_i) \ = \ (t_i, \, \ln v_i)$ por uma recta;

$$y^* \ = \ c_1 + c_2\, x \ , \ \text{com} \ \begin{cases} y^+ \ = \ \ln v^* \\ c_1 \ = \ \ln v_0 \\ c_2 = -\frac{1}{RC} \\ x \ = \ t \end{cases}$$

Função aproximante: recta

$$F^*(t) \;=\; c_1 + c_2\,t\,, \text{ com } \begin{cases} \Phi_1(t) \;= 1 \\ \Phi_2(t) \;= t \\ \Phi_i(t) \;= 0, \quad i \;=\; 3, 4, \ldots, k \end{cases}$$

O que nos permite escrever o seguinte sistema ($N = 11$):

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^{11} 1 + c_2 \sum_{i=1}^{11} t_i = \sum_{i=1}^{11} (\ln v_i) \\ c_1 \sum_{i=1}^{11} t_i + c_2 \sum_{i=1}^{11} t_i^2 = \sum_{i=1}^{11} (\ln v_i)\, t_i \end{cases}$$

Os vários somatórios podem ser facilmente calculados pela seguinte tabela,

	t_i	$\ln v_i$	t_i^2	$(\ln v_i)\, t_i$
	0	$\ln 10$	0	$\ln 10^0$
	0.1	$\ln 7.8$	0.01	$\ln 7.8^{0.1}$
	0.2	$\ln 6.2$	0.04	$\ln 6.2^{0.2}$
	0.3	$\ln 4.9$	0.09	$\ln 4.9^{0.3}$
	0.4	$\ln 3.5$	0.16	$\ln 3.5^{0.4}$
	0.5	$\ln 2.7$	0.25	$\ln 2.7^{0.5}$
	0.6	$\ln 2.1$	0.36	$\ln 2.1^{0.6}$
	0.7	$\ln 1.6$	0.49	$\ln 1.6^{0.7}$
	0.8	$\ln 1.3$	0.64	$\ln 1.3^{0.8}$
	0.9	$\ln 1.0$	0.81	$\ln 1.0^{0.9}$
	1.0	$\ln 0.7$	1	$\ln 0.7^{1.0}$
$\sum$	5.5	$\ln 68469.13644$	3.85	$\ln 14.47184854$

Nota: $\ln(a\,b) \;=\; \ln a + \ln b \qquad \wedge \qquad \ln a^b \;=\; b\,\ln a$

Substituindo no sistema os somatórios pelos respectivos valores,

$$\begin{cases} 11\,c_1 + 5.5\,c_2 = \ln 68469.13\ldots \\ 5.5\,c_1 + 3.85\,c_2 = \ln 14.471\ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 \;=\; \frac{5.789\ldots}{-2.2} \;=\; -2.63169\ldots \;\simeq\; -2.63 \\ c_1 \;=\; 2.32804\ldots \;\simeq\; 2.33 \end{cases}$$

A partir de c_1 e c_2 podemos então calcular v_0 e C :

$$\ln v_0 \;=\; c_1 \quad \Rightarrow \quad v_0 \;=\; e^{c_1} \;=\; 10.2578\ldots \;\simeq\; 10.3 \text{ v}$$

$$-\frac{1}{R\,C} \;=\; c_2 \quad \Rightarrow \quad C \;=\; -\frac{1}{R\,c_2} \;=\; 0.37998\ldots \;\simeq\; 0.38\,\mu\text{F}$$

AMG, IMF, JFO, JPF