Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Análise Numérica

1998/99

— Sistemas de Equações Lineares —

PROBLEMAS

$\boxed{1}$ — Considere o seguinte sistema de equações da forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Ache a solução $\bar{\mathbf{x}}$ por eliminação de Gauss com pivotação parcial.

(b) Considere a solução aproximada $\tilde{\mathbf{x}}$ que se obtém truncando $\bar{\mathbf{x}}$ (solução quase-exacta) para 3 dígitos significativos. Calcule então o resíduo $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$ e o erro $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}$ (estimativa do erro verdadeiro).

Comparando $\frac{\|\mathbf{r}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$ (resíduo relativo) com $\frac{\|\mathbf{e}\|_\infty}{\|\bar{\mathbf{x}}\|_\infty}$ (erro relativo), que pode concluir acerca do condicionamento do sistema, mais precisamente àcerca de $cond(\mathbf{A})$ (número de condição)?

(c) Calcule $det(\mathbf{A})$ (determinante) e ache a matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$.

(d)
i. Estime $cond(\mathbf{A})$ pela propriedade $\frac{1}{cond(\mathbf{A})} = \min_{\mathbf{B}\text{não invertível}} \left(\frac{\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A}\|}\right)$ (distância relativa à matriz $\mathbf{B}$ não invertível mais próxima), com normas infinitas.

ii. Calcule pela definição $cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \times \|\mathbf{A}^{-1}\|$, e compare com as conclusões das alíneas anteriores.

$\boxed{2}$ — Ache uma solução aproximada do seguinte sistema de equações, a menos de 5×10^{-6} (erro máximo absoluto em cada um dos x_i), pelo método de Jacobi, partindo da solução inicial nula.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 13 & -3 & 0 \\ 17 & -7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

RESOLUÇÕES

$\boxed{1}$ — **(a)** i. Eliminação inferior, com pivotação parcial

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{A} \qquad \mathbf{b} & d_i = \max\limits_{1\le j\le 4} |a_{ij}| & \frac{a_{i1}}{d_i} & \begin{array}{c}\text{factor}\\ \text{multiplicativo}\end{array} & \\
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 4 & 4\\ -1 & 2 & -2 & 4 & 1\\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c}3\\4\\4\\4\end{array} & \begin{array}{c}1/3\\ \mathbf{3/4}\\ 1/4\\ 2/4\end{array} & \begin{array}{c} \\ -1/3\\ 1/3\\ -2/3\end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & 1 & 2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5\\ -1 & 2 & -2 & 4 & 1\\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & d_i & \frac{a_{i2}}{d_i} & & \\
\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 4\\ 0 & 8/3 & -5/3 & 2/3 & 11/3\\ 0 & 7/3 & -4/3 & 16/3 & 7/3\\ 0 & 10/3 & 8/3 & -5/3 & -8/3 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ 8/3\\ 16/3\\ 10/3\end{array} & \begin{array}{c} \\ \mathbf{1}\\ 7/16\\ 1\end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ -7/8\\ -5/4\end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 4\\ 0 & \mathbf{8/3} & -5/3 & 2/3 & 11/3\\ 0 & 7/3 & -4/3 & 16/3 & 7/3\\ 0 & 10/3 & 8/3 & -5/3 & -8/3 \end{array}\right]
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & d_i & \frac{a_{i3}}{d_i} & & \\
\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 4\\ 0 & 8/3 & -5/3 & 2/3 & 11/3\\ 0 & 0 & 1/8 & 19/4 & -7/8\\ 0 & 0 & 19/4 & -5/2 & -29/4 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ 19/4\\ 19/4\end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ 1/38\\ \mathbf{1}\end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ -1/38\end{array} & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 4\\ 0 & 8/3 & -5/3 & 2/3 & 11/3\\ 0 & 0 & \mathbf{19/4} & 5/2 & -29/4\\ 0 & 0 & 1/8 & 19/4 & -7/8 \end{array}\right]
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 4\\ 0 & 8/3 & -5/3 & 2/3 & 11/3\\ 0 & 0 & 19/4 & -5/2 & -29/4\\ 0 & 0 & 0 & 183/38 & -13/19 \end{array}\right]$$
$$\mathbf{A}' \qquad\qquad \mathbf{b}'$$

Substituição:

$$\left\{\begin{array}{lcrcr} x_4 & = & -\frac{26}{183} & = & -0.1420765\\ x_3 & = & -\frac{293}{183} & = & -1.6010929\\ x_2 & = & \frac{25}{61} & = & 0.40983607\\ x_1 & = & \frac{449}{183} & = & 2.4535519 \end{array}\right.$$

ii. Pivotação total

Escolhe-se para pivot o maior $|a_{ij}|$ da sub-matriz a reduzir. Esta estratégia pode implicar, para além da troca de linhas, a troca de colunas. No restante o método funciona da mesma forma.

(b)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{c} 2.45\\ 0.409\\ -1.60\\ -0.142 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \left[\begin{array}{c} 7\times 10^{-3}\\ 9\times 10^{-3}\\ 0\\ 6\times 10^{-3} \end{array}\right] \quad \wedge \quad \mathbf{e} \simeq \left[\begin{array}{c} 3.6\times 10^{-3}\\ 8.4\times 10^{-4}\\ -1.1\times 10^{-3}\\ -7.7\times 10^{-5} \end{array}\right]$$

$$\frac{\|\mathbf{e}\|_\infty}{\|\bar{\mathbf{x}}\|_\infty} = \frac{\max_i |e_i|}{\max_i |\bar{x}_i|} \simeq \frac{3.6\times 10^{-3}}{2.5} = 1.4\times 10^{-3}$$

(por definição de norma infinita de um vector)

$$\frac{\|\mathbf{r}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = \frac{\max_i |r_i|}{\max_i |b_i|} \simeq \frac{9 \times 10^{-3}}{5} = 1.8 \times 10^{-3}$$

Usando agora a seguinte propriedade:

$$\frac{1}{cond(\mathbf{A})} \times \frac{\|\mathbf{r}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|_\infty}{\|\bar{\mathbf{x}}\|_\infty} \leq cond(\mathbf{A}) \times \frac{\|\mathbf{r}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{cond(\mathbf{A})} \leq 0.80 \leq cond(\mathbf{A}) \quad \Leftrightarrow \quad cond(\mathbf{A}) \geq 1.25$$

Obtivemos por este meio, não o valor do número de condição da matriz $\mathbf{A}$, mas um minorante para este valor.

(c) i. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. Assim, o determinante de $\mathbf{A}'$ (matriz que se obteve no final da alínea a-i)) é simples de calcular e vale:

$$det(\mathbf{A}') = \prod_{i=1}^{4} a'_{ii} = 3 \times \frac{8}{3} \times \frac{19}{4} \times \frac{183}{38} = 183$$

As operações efectuadas na transformação de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{A}'$, e respectivas consequências no valor do determinante, foram:

- trocar 2 linhas entre si — $\times(-1)$.
- linha$_i$ $\leftarrow$ linha$_i$ - $m\times$ linha$_k$ — não altera o determinante.

Então:

$$det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}') \times (-1)^{\text{num trocas}} = 183 \times (-1)^2 = 183$$

Comentário:

O número de operações efectuadas por este processo de eliminação é da ordem de n^3, enquanto que o cálculo do determinante por decomposição envolve uma ordem de $n!$ operações.

ii.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A^{-1}} = [\mathbf{C_1}|\mathbf{C_2}|\mathbf{C_3}|\mathbf{C_4}] \qquad \mathbf{I} = [\mathbf{i_1}|\mathbf{i_2}|\mathbf{i_3}|\mathbf{i_4}]$$

$\mathbf{C_j}$ representa a coluna j da matriz $\mathbf{A^{-1}}$, $\mathbf{i_j}$ representa a coluna j da matriz identidade 4×4.

Então:

$$\mathbf{A\ C} = \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}[\mathbf{C_1}|\mathbf{C_2}|\mathbf{C_3}|\mathbf{C_4}] = [\mathbf{i_1}|\mathbf{i_2}|\mathbf{i_3}|\mathbf{i_4}]$$

Pelo que a solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{i_j}$ dá a coluna j de $\mathbf{A^{-1}}$.

Fazendo então as contas:

Coluna 1:

1º) Reconstituir as operações do processo de eliminação sobre o novo vector de termos independentes (a coluna $\mathbf{i_1}$):

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{linhas 1 e 2}]{\text{Trocar as}} \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{por -1/3, 1/3 e -2/3}\\\text{e somar às linhas 2, 3 e 4}}]{\text{Multiplicar a linha 1}} \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{por -7/8 e -5/4}\\\text{e somar às linhas 3 e 4}}]{\text{Multiplicar a linha 2}}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\-7/8\\-5/4\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{linhas 3 e 4}]{\text{Trocar as}} \begin{bmatrix}0\\1\\-5/4\\-7/8\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{por -1/38}\\\text{e somar à linha 4}}]{\text{Multiplicar a linha 3}} \begin{bmatrix}0\\1\\-5/4\\-16/19\end{bmatrix}$$

2º) Substituir:

$$\begin{cases} x_4 &= -\frac{32}{183} &= -0.17486 \\ x_3 &= \dots &= 0.19672 \\ x_2 &= \dots &= -0.35519 \\ x_1 &= \dots &= -0.17486 \end{cases}$$

Coluna 2:
1º)

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{linhas 1 e 2}]{\text{Trocar as}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{por -1/3, 1/3 e -2/3}\\\text{e somar às linhas 2, 3 e 4}}]{\text{Multiplicar a linha 1}} \begin{bmatrix}1\\-1/3\\1/3\\-2/3\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{por -7/8 e -5/4}\\\text{e somar às linhas 3 e 4}}]{\text{Multiplicar a linha 2}}$$

$$\begin{bmatrix}1\\-1/3\\5/8\\-1/4\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{linhas 3 e 4}]{\text{Trocar as}} \begin{bmatrix}1\\-1/3\\-1/4\\5/8\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{por -1/38}\\\text{e somar à linha 4}}]{\text{Multiplicar a linha 3}} \begin{bmatrix}1\\-1/3\\-1/4\\12/19\end{bmatrix}$$

2º) Substituir: (...)
etc.

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 0.40437 & 0.19672 & -0.35519 & -0.17486 \\ 0.19672 & -0.147554 & 0.01639 & 0.13115 \\ -0.35519 & 0.01639 & 0.10929 & 0.20765 \\ -0.17486 & 0.13115 & 0.20765 & -0.00546 \end{bmatrix}$$

Alternativamente:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \quad \longrightarrow \quad [\mathbf{I}|\mathbf{A^{-1}}]$$

(d) i. Se conhecêssemos a matriz $\mathbf{B}$ não invertível mais próxima de $\mathbf{A}$ teríamos o valor exacto do número de condição de $\mathbf{A}$. Como não é possível determinar a matriz *mais* próxima, vamos procurar uma matriz que seja simplesmente próxima e trocar a igualdade da expressão do enunciado por uma desigualdade apropriada.

Uma forma de determinar uma matriz $\mathbf{B}$ não invertível (determinante nulo) próxima de $\mathbf{A}$ é substituir em $\mathbf{B}$ duas quaisquer linhas ou colunas pela respectiva semi-soma. Tomem-se, por exemplo, as colunas 1 e 3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2.5 & 1 & 2.5 & 4 \\ -1.5 & 2 & -1.5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{cases} \|\mathbf{A}\|_\infty & = \max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\} \\ & = \max\{1+3+1+2, 3+1+2+4, 1+2+2+4, 2+4+4+1\} = 11 \\ \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_\infty & = \max\{1+1, 0.5+0.5, 0.5+0.5, 1+1\} = 2 \end{cases}$$

Pelo que:

$$cond(\mathbf{A}) \ge \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|} = \frac{11}{2} = 5.5$$

ii. A definição de número de condição de uma matriz só é possível aplicar quando a matriz é invertível. Daí o interesse que as expressões que anteriormente usamos, e que apenas nos dão minorantes, podem ter. Neste caso, como existe inversa de $\mathbf{A}$:

$$\begin{cases} \|(A^{-1})\|_\infty = 1.13 \\ \|(A)\|_\infty = 11 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad cond((A)) = \|(A)\| \times \|(A^{-1})\| = 12.4$$

Este resultado está de acordo com os minorantes obtidos anteriormente.

$\boxed{2}$ — **(a)** *Condições de convergência*

A condição de convergência do método de Jacobi que a matriz seja estritamente diagonalmente dominante:

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Neste caso será necessário reordenar as linhas pela seguinte ordem: 3, 2, 1, 4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 17 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

Subtraindo a diagonal principal e dividindo todos os outros elementos pelo simétrico do elemento da diagonal principal da sua linha, obtém-se o seguinte sistema de equações equivalente:

$$\mathbf{x^{(n)}} = \begin{bmatrix} 0 & 7/17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/11 \\ -3/7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x^{(n-1)}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{B}\|_\infty = \frac{3}{7} < 1$$

Logo, de facto o método irá convergir.

(b) *Critério de paragem*

$$n : \|\mathbf{s} - \mathbf{x^n}\|_\infty \leq \frac{\|\mathbf{B}\|_\infty}{1 - \|\mathbf{B}\|_\infty} \|\mathbf{x^n} - \mathbf{x^{n-1}}\|_\infty \leq 5 \times 10^{-6} \quad \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{x^n} - \mathbf{x^{n-1}}\|_\infty \leq \frac{1 - \frac{3}{7}}{\frac{3}{7}} \times 5 \times 10^{-6}$$

(c) *Aplicação*

iter	$x_1^{(i)} = \frac{7}{17} x_2^{(i-1)}$	$x_2^{(i)} = \frac{3}{13} x_3^{(i-1)}$	$x_3^{(i)} = \frac{1}{11} x_4^{(i-1)}$	$x_4^{(i)} = -\frac{3}{7} x_1^{(i-1)} + \frac{1}{7}$	$\|\mathbf{x^i} - \mathbf{x^{i-1}}\|_\infty$
0	0	0	0	0	–
1	0	0	0	0.142857	1.4×10^{-1}
2	0	0	0.012987	0.142857	1.3×10^{-2}
3	0	0.002997	0.012987	0.142857	3.0×10^{-3}
4	0.001234	0.002997	0.012987	0.142857	1.2×10^{-3}
5	0.001234	0.002997	0.012987	0.14232(8)	4.7×10^{-4}
6	0.001234	0.002997	0.01293(9)	0.14232(8)	4.8×10^{-5}
7	0.001234	0.00298(6)	0.01293(9)	0.14232(8)	1.1×10^{-5}
8	0.00123(0)	0.00298(6)	0.01293(9)	0.14232(8)	4.5×10^{-6}

AMG, IMF, JFO, JPF