



VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional

Universidade de Évora

14 a 16 de Abril de 2003

CUBISTA: UM ESQUEMA DE ALTA RESOLUÇÃO PARA FENÓMENOS ADVECTIVOS COM PROPRIEDADES ITERATIVAS MELHORADAS

M.A. Alves¹, P.J. Oliveira², F.T. Pinho³

RESUMO

Os esquemas de alta resolução usados na discretização de termos advectivos em equações de transporte, apesar de oferecerem melhor precisão do que esquemas de diferenças clássicos, sem introduzirem oscilações na solução, dão azo a problemas de falta de convergência dos processos iterativos. Neste trabalho foi desenvolvido um novo esquema de diferenças, que oferece alta resolução, mas sem esses problemas de convergência. O esquema é testado num caso simples de advecção pura, e em dois casos de escoamento dum fluido não newtoniano viscoelástico.

1. INTRODUÇÃO

É hoje amplamente aceite que a utilização de esquemas de diferenças de primeira ordem, para a representação dos termos advectivos em equações de transporte, tem por consequência a introdução de demasiada "difusão numérica", resultando numa solução calculada que se afasta muito da solução verdadeira (Leonard, 1995). Para diminuir a discrepância entre as duas torna-se necessário recorrer a forte refinamento da malha, o que não é viável em muitos casos práticos, sobretudo em aplicações tridimensionais e mesmo bidimensionais. Este problema dos esquemas de primeira ordem é usualmente associado ao bem conhecido e largamente utilizado esquema de diferenças de montante (*upwind*), mas está presente de igual forma em esquemas aparentemente (mas só aparentemente) mais precisos, como o esquema exponencial ou o esquema de lei-de-potência (Patankar, 1980).

Para remediar a questão da difusão numérica usam-se esquemas de ordem superior, como o de diferenças centrais, de 2ª ordem, ou o esquema *upwind* de 3ª ordem (vulgarmente conhecido como QUICK, Leonard, 1979). Os erros de truncatura associados a estes esquemas

¹ Departamento de Eng. Química, CEFT, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

² Departamento Eng. Electromecânica, Universidade da Beira Interior, Covilhã.

³ CEFT, Departamento Eng. Mecânica, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

são proporcionais a uma terceira ou quarta derivada da variável transportada, tendo por isso carácter dispersivo ou dissipativo, e não difusivo. Se por um lado o problema da difusão numérica é largamente atenuado, por outro lado surge um novo problema: estes esquemas não garantem a propriedade de monotonicidade (ou de "limitação", *boundedness*) existente nas equações diferenciais de partida. Na prática podem aparecer "overshoots" ou "undershoots" locais da variável transportada, em zonas de elevados gradientes. Os métodos de alta resolução (Harten, 1983; Sweby, 1984) foram desenvolvidos para evitar essa questão do aparecimento de máximos e mínimos locais, sem significado físico, mantendo no entanto uma precisão de 2ª ordem ou superior. Esses métodos são muito utilizados em aplicações aerodinâmicas onde o escoamento é compressível, podendo dar origem a ondas de choque e, por conseguinte, induzindo elevados gradientes locais das diversas propriedades.

O nosso interesse não está relacionado com a aerodinâmica, mas sim com a modelação do escoamento de fluidos não newtonianos viscoelásticos. Para este tipo de aplicações é preciso resolver equações constitutivas que descrevem a evolução das tensões em função da cinemática do escoamento. As equações diferenciais em causa são do tipo hiperbólico e conduzem a problemas semelhantes aos que ocorrem na aerodinâmica, dando origem a zonas com elevados gradientes de tensão, sendo necessário recorrer a métodos de diferenças de alta resolução. Numa primeira fase os termos advectivos das equações constitutivas foram representados por um conhecido esquema de alta resolução (denominado esquema SMART, Gaskell e Lau, 1988). No entanto, verificou-se que a convergência do processo iterativo utilizado na resolução sequencial dos vários sistemas de equações das variáveis em jogo (componentes da velocidade, pressão, e componentes do tensor das tensões) se tornava problemática. Muito frequentemente os resíduos das equações estagnavam num nível mínimo, superior à tolerância de paragem do processo iterativo, ficando o utilizador sem saber se a solução aproximada nessa altura era adequada ou não. Neste artigo é descrito um método de alta resolução, desenvolvido segundo o espírito do SMART, que apresenta robustez iterativa superior à conseguida com inúmeros outros esquemas de alta resolução, como será mostrado.

2. EQUAÇÕES DE GOVERNO

As equações diferenciais que governam o escoamento de um líquido incompressível são

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

onde se utiliza notação tensorial com soma de índices repetidos (convenção de Einstein). Nestas equações ρ é a massa específica do líquido, u_i é a componente da velocidade segundo a coordenada cartesiana x_i , p é a pressão, e τ_{ij} são as componentes cartesianas do tensor das tensões. Para um fluido newtoniano a equação constitutiva que relaciona a tensão com a taxa de deformação é

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do líquido. Para um fluido não newtoniano viscoelástico existem muitos modelos constitutivos possíveis. Neste trabalho iremos considerar um dos modelos mais simples, representado pela equação:

$$\tau_{ij} + \lambda \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial u_k \tau_{ij}}{\partial x_k} \right) = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (4)$$

e que se designa por modelo convectivo superior de Maxwell (modelo UCM). Os parâmetros (constantes) desse modelo são η , a viscosidade de corte, e λ , o tempo de relaxação. Repare-se que a Eq. (4) é uma equação às derivadas parciais na incógnita τ_{ij} (existem 6 equações para as 6 componentes do tensor das tensões), sendo do tipo hiperbólico. Como as tensões dependem dos gradientes de velocidade (Eq. 4), e as velocidades dependem da divergência da tensão (Eq. 2), um problema de escoamento de fluidos viscoelásticos requer a solução simultânea do sistema de equações (1), (2) e (4). Por fim faz-se notar que a Eq. (4), embora sendo das mais simples do tipo diferencial para descrever o comportamento do fluido viscoelástico, é a mais difícil do ponto de vista de resolução numérica, pelo que a sua escolha é adequada a estudar aspectos de índole numérica.

3. MÉTODO NUMÉRICO

A solução numérica das equações de governo dadas na secção anterior é feita através do método dos volumes finitos, segundo um processo de avanço no tempo. Nesta secção faz-se uma muito breve descrição do método de discretização e de resolução dos sistemas de equações, e apresentam-se ainda as ideias base relativas aos esquemas de diferenças de alta resolução.

3.1 Generalidades sobre Método de Discretização

O domínio de solução é dividido num grande número de pequenos volumes de controlo (VC) adjacentes, nos quais são integradas as equações diferenciais da Secção 2. Todas as propriedades e variáveis dependentes existem nos centros desses volumes de controlo (malha do tipo não deslocado). Se designarmos genericamente por ϕ qualquer das variáveis dependentes ($\phi = u_i, p, \tau_{ij}$), o processo de discretização resulta em sistemas de equações linearizadas com a seguinte forma:

$$a_p \phi_p = \sum_F a_f \phi_f + S_\phi \quad (5)$$

onde a_f são coeficientes compostos por fluxos advectivos e difusivos (eventualmente) na face f adjacente aos VC centrados em P e cada um dos seus 6 vizinhos F ; a_p é o coeficiente central, e S_ϕ é o termo fonte que engloba todas as contribuições que não foram incluídas nos coeficientes. As derivadas temporais nas Eqs. (2) e (4) são representadas pelo esquema de Euler implícito e os ϕ 's na Eq. (5) correspondem ao nível temporal mais recente, de forma que essas equações constituem um sistema linear a ser resolvido em ordem a ϕ . A resolução dos vários sistemas foi efectuada por meio de métodos do tipo de gradiente conjugado com condicionamento LU incompleto.

Na discretização espacial, tanto para representar derivadas como em interpolações, foram empregues esquemas de 2ª ordem, excepto para os fluxos advectivos de ϕ , $F_f \phi_f$ ($F_f =$ caudal mássico na face f). Estes foram obtidos através da aplicação do método de alta resolução (3ª ordem) que vai ser explicado de seguida, e foram implementados segundo o procedimento da correcção diferida. De acordo com este procedimento os fluxos advectivos que são incluídos nos coeficientes a_f da Eq. (5) são baseados no esquema *upwind* (de 1ª

ordem, mas estritamente monótono $\Rightarrow \alpha_r \geq 0$), e a diferença entre fluxos baseados no esquema de alta resolução e no *upwind* são inseridos no termo fonte S_ϕ , sendo calculados com o ϕ conhecido do tempo anterior. Quando o processo de avanço no tempo "converge iterativamente" para a solução estacionária, os fluxos baseados no *upwind* inseridos nos coeficientes e no termo fonte cancelam-se mutuamente, de forma que a solução é de facto baseada num fluxo obtido com o esquema de alta resolução.

3.2 Generalidades sobre Esquemas de Alta Resolução

Para a definição dos esquemas de alta resolução é conveniente utilizar variáveis normalizadas do seguinte modo (Leonard, 1991):

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (6)$$

onde ϕ representa a variável transportada num ponto qualquer da malha, ϕ_D é o valor no ponto imediatamente a jusante ("*Downstream*", D), e ϕ_P e ϕ_U os valores nos dois pontos a montante (ponto central P, e ponto "*Upstream*" U) como se ilustra na Fig. 1. A vantagem desta normalização é de se conseguir uma relação funcional simples entre a valor de $\hat{\phi}_f$ na face dum VC, e o respectivo valor no centro do VC imediatamente a montante ($\hat{\phi}_P$):

$$\hat{\phi}_f = f(\hat{\phi}_P, \hat{\xi}_P, \hat{\xi}_f) \quad (7)$$

válida para qualquer esquema com precisão até 3ª ordem. Os parâmetros geométricos $\hat{\xi}_P$ e $\hat{\xi}_f$ (definidos de forma idêntica a $\hat{\phi}$) têm a ver com a não uniformidade da malha; para uma malha uniforme seria $\hat{\xi}_P = 0.5$ e $\hat{\xi}_f = 0.75$.

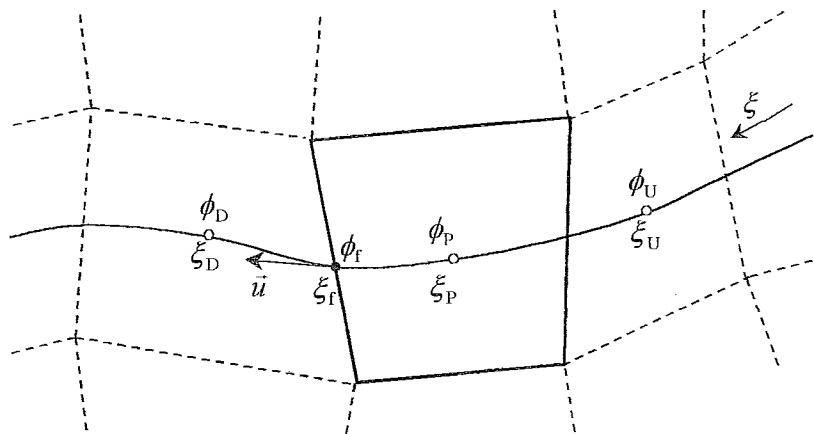


Fig. 1 - Esquema dum volume de controle com definição das variáveis e coordenadas locais.

Um esquema de alta resolução consiste na definição do funcional da Eq. (7), que permite obter o valor de $\hat{\phi}_f$ na face (proporcional ao fluxos advectivo de ϕ) sendo conhecido $\hat{\phi}_P$ no centro do VC. Esse tipo de relação funcional é usualmente representada num diagrama de variáveis normalizadas, $\hat{\phi}_f$ versus $\hat{\phi}_P$ (designado por NVD de "*Normalized Variable Diagram*"), tal como representado na Fig. 2. Nesta figura estão representados alguns esquemas de diferenças básicos: UDS (*upwind*, 1ª ordem); LUDS (*upwind*-linear, 2ª ordem); CDS (diferenças centrais, 2ª ordem); QUICK (*upwind*-quadrático, 3ª ordem). Gaskell e Lau (1988) mostraram que um esquema só respeitará a propriedade "limitativa" (*boundedness*) se

a sua representação no NVD se encontrar no triângulo sombreado da Fig. 2, para $0 \leq \hat{\phi}_p \leq 1$ (zona de variação monotónica), e coincidir com a linha do UDS fora dessa zona. Este critério é conhecido como Critério de Limitação Advectiva (CBC do inglês "Convection Boundedness Criterion"). Desta forma é visível da Fig. 2 que nenhum dos esquemas básicos respeita o CBC, excepto o esquema *upwind*: em determinadas situações de variação de ϕ , o valor de ϕ na face será superior aos valores de ϕ nos pontos que rodeiam a face, violando a propriedade limitativa subjacente ao transporte advectivo puro (e que a equação diferencial de partida possui).

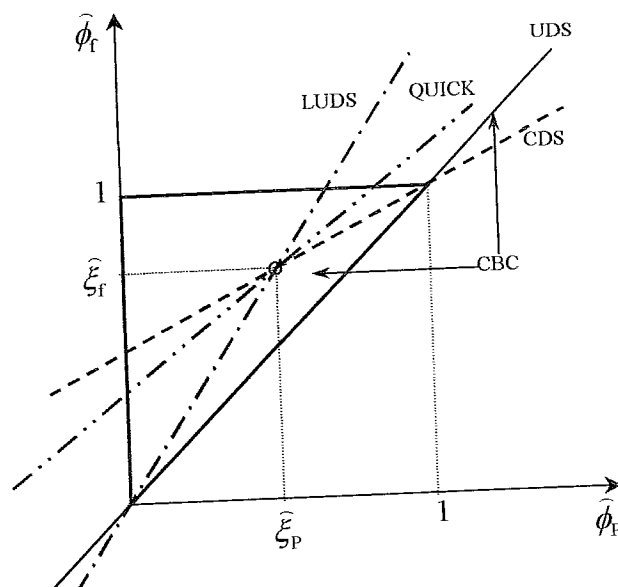


Fig. 2 - Diagrama de variáveis normalizadas (NVD), sendo mostrado o critério de limitação convectiva (CBC) e alguns esquemas básicos: UDS- *upwind*; LUDS- *upwind*-linear; CDS- diferenças centrais; QUICK- *upwind*-quadrático.

Para remediar essa situação foram criados vários esquemas de "alta resolução" (que não violam o CBC), estando alguns deles representados na Fig. 3. Como se pode observar, os esquemas são quase todos representados pela junção de segmentos de recta dentro da zona monotónica, de forma a garantir o CBC; fora da zona monotónica é usualmente seguida a diagonal principal ($\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_p$) correspondente ao esquema *upwind*. Alguns esquema (caso do CLAM, Van Leer 1974, e GAMMA, Jasak et al 1999) são compostos por linhas curvas, em vez de rectas.

Um problema comum à maior parte dos esquemas representados na Fig. 3 é de dificultarem grandemente a convergência dos processos iterativos utilizados na solução dos sistemas de equações em jogo. Foi este problema que nos levou à formulação de um novo esquema, que designamos por CUBISTA, e que será apresentado de seguida.

4. O NOVO ESQUEMA: CUBISTA

As dificuldades de convergência associadas à utilização dos esquemas de alta resolução resultam de vários factores, entre os quais se apontam: (i) as variações bruscas das derivadas subjacentes à representação dos esquemas por perfis lineares segmentados, sobretudo na zona suave $\hat{\phi}_p \approx 0.5$; (ii) a falta de respeito pela propriedade da Redução da Variação Total (TVD do inglês "Total Variation Diminishing"); (iii) a proximidade da linha

de "downwind" ($\hat{\phi}_f = 1$). Por falta de espaço não é possível neste artigo discutir em detalhe as razões que nos levaram à formulação do esquema CUBISTA, pelo que nos limitaremos a apresentar a ideia básica do esquema e a sua definição no NVD. Num trabalho recentemente publicado (Alves et al, 2003) pode ser encontrada uma explicação mais pormenorizada.

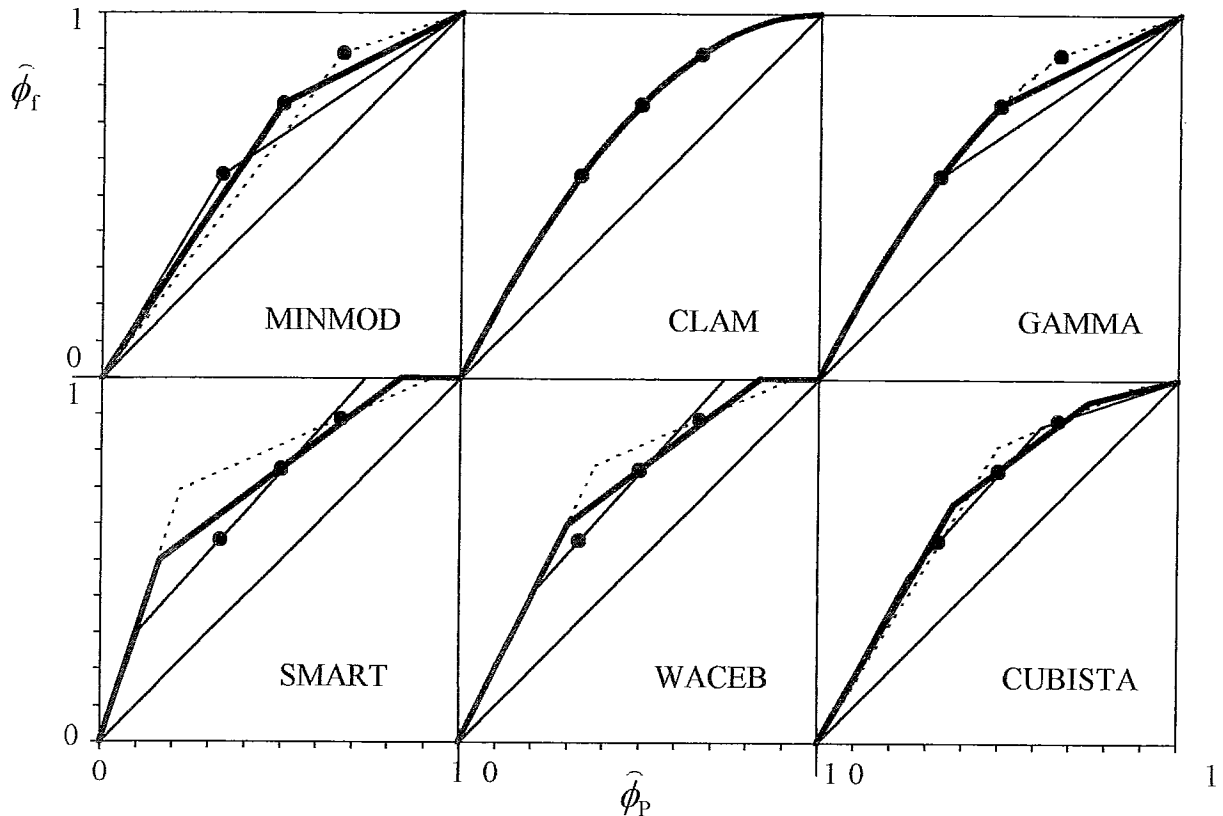


Fig. 3 - Diagrama NVD de alguns dos esquemas de alta resolução, incluindo o CUBISTA.

O critério do CBC (área triangular da Fig. 2), apesar de garantir a propriedade de limitação, é demasiado lato. Verificou-se por experiências numéricas que a convergência dos métodos iterativos usados na solução numérica das equações de transporte requer condições mais restritivas para o funcional da Eq. (7). Por outro lado, Leonard (1991) mostrou que o cálculo de problemas transientes com métodos explícitos tem de obedecer a um critério de Limitador Universal (ULTIMATE) definido por:

$$\hat{\phi}_p \leq \hat{\phi}_f \leq \phi_p / C \quad (\text{para } 0 \leq \hat{\phi}_p \leq C) \quad (8)$$

e representado na Fig. 4 (a). Nesta equação, C é o número de Courant ($C = U\delta t / \delta x$). Como se vê, o critério ULTIMATE tende para o CBC quando C tende para 0, mas é mais restritivo para $C \geq 0$ (mas $C \leq 1$).

Por outro lado, as condições de TVD requerem:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_p \leq \hat{\phi}_f \leq (2-C)\hat{\phi}_p & \quad (\text{para } \hat{\phi}_p \leq 1/2) \\ \hat{\phi}_p \leq \hat{\phi}_f \leq 1-C(1-\hat{\phi}_p) & \quad (\text{para } \hat{\phi}_p \geq 1/2) \end{aligned} \quad (9)$$

como mostrado em Harten (1986). Estas condições estão representadas na Fig. 4 (b) e são ainda mais restritivas do que as do critério ULTIMATE.

Em cálculos iterativos baseados em métodos implícitos não há qualquer restrição associada ao número de Courant (do tipo $C \leq 1$). De facto, se não se utilizar um método de avanço no tempo, não existe sequer um número de Courant. No entanto, como existe uma

semelhança entre o factor de subrelaxação utilizado em métodos de avanço iterativo, e o passo no tempo (δt) utilizado nos métodos de avanço no tempo, é sempre possível definir um número de Courant. Este C não deve ser visto como um verdadeiro número de Courant, mas sim como um parâmetro do esquema a ser definido de forma criteriosa.

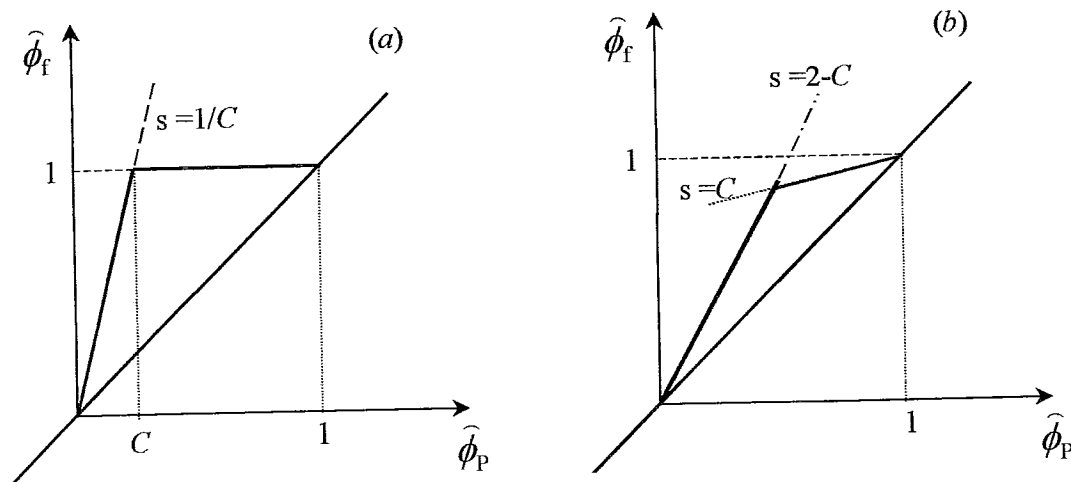


Fig. 4 - Representação no NVD de: (a) Limitador Universal; (b) restrições TVD.

No seguimento destas considerações, o esquema CUBISTA foi construído no NVD pela junção dos seguintes segmentos lineares:

- (i) Na zona "suave" (isto é, $\hat{\phi}_p \approx 0.5$) usou-se o esquema QUICK que oferece precisão de 3ª ordem, isto é $\hat{\phi}_f = 3/4\hat{\phi}_p + 3/8$;
- (ii) Na zona de ligação com a origem, $\hat{\phi}_p = 0$ e $\hat{\phi}_f = 0$, seguiu-se a restrição TVD, isto é $\hat{\phi}_f = (2 - C_1)\hat{\phi}_p$;
- (iii) Na zona de ligação com o ponto $\hat{\phi}_p = 1$ e $\hat{\phi}_f = 1$, seguiu-se também a restrição TVD, isto é $\hat{\phi}_f = 1 - C_2(1 - \hat{\phi}_p)$;
- (iv) Fora da zona monotónica, $\hat{\phi}_p > 1$ ou $\hat{\phi}_p < 0$, segue-se o UDS, isto é $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_p$.

Por razões de simetria do esquema, os parâmetros C_1 e C_2 devem ser iguais, sendo designados por C . Por fim, o valor de C é escolhido de forma a evitar "overshoot" do QUICK perto da linha de jusante ("downwind"); em Alves et al (2003) é mostrado que o valor adequado é $C=1/4$. Concluindo, o CUBISTA é definido no NVD através das seguintes equações:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{\phi}_p & 0 < \hat{\phi}_p < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{\phi}_p + \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_p \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{\phi}_p + \frac{3}{4} & \frac{3}{4} < \hat{\phi}_p < 1 \\ \hat{\phi}_p & \hat{\phi}_p \leq 0 \vee \hat{\phi}_p \geq 1 \end{cases} \quad (10)$$

Estas expressões generalizam-se facilmente para malhas não uniformes; o resultado é apresentado em Alves et al (2003).

5. RESULTADOS

Foram efectuados vários teste ao novo esquema de alta resolução para os fluxos advectivos, com vista a aferir não só a sua precisão, mas sobretudo as suas características de convergência iterativa. Um registo completo desses testes é dado em Alves et al (2003), de forma que aqui iremos apresentar somente alguns resultados para o problema da advecção de um escalar, e para dois problemas de escoamento de um fluido viscoelástico.

5.1 Advecção Pura de um Escalar

Neste primeiro caso teste consideramos o problema da advecção de um perfil de uma variável escalar com a forma de um seno ao quadrado, através de um domínio quadrado de lado unitário, coberto por uma malha uniforme. A equação a resolver é simplesmente $\partial(u\phi)/\partial x + \partial(v\phi)/\partial y = 0$ e o campo de velocidades é fixado de forma ao transporte de ϕ se efectuar a 45 graus com a direcção x , i.e. $u = v = \sqrt{2}/2$. A definição das condições fronteira para ϕ foi: $\phi = \sin^2(10\pi y/3)$ em $x=0 \wedge 0 \leq y \leq 3/20$, $\phi = 1$ em $x=0 \wedge 3/20 < y \leq 1$ e $\phi = 0$ em $y=0$.

Teoricamente o perfil em \sin^2 deve ser transladado sem distorção, segundo a direcção da velocidade (oblíqua a 45 graus com a malha). A solução numérica baseada em vários esquemas de alta resolução é apresentada na Fig.5; nos cálculos utilizou-se uma malha uniforme com 59x59 nós, e o perfil apresentado corresponde à variação de ϕ ao longo da linha central, $x = 1/2$. É notório desta figura que o esquema *upwind* introduz demasiada difusão na variação de ϕ , suavizando os gradientes do perfil em \sin^2 (que apesar de tudo, não são muito abruptos) e resulta numa solução errónea. O novo esquema CUBISTA resulta numa solução muito próxima da solução correspondente ao esquema SMART, que seria o melhor que se poderia esperar. Observando em mais detalhe a variação assintótica do erro verdadeiro em função do espaçamento da malha $\delta x (= \delta y)$, apresentada na Fig. 6, podemos concluir que o esquema CUBISTA apresenta uma ordem de convergência de 2.7, comparativamente com a 3ª ordem teórica conseguida pelo esquema SMART. Esta redução de precisão tem a ver com a maior restrição do CUBISTA, visível no diagrama NVD da Fig. 4, mas não vai ser tão problemática em aplicações mais realistas, como se irá demonstrar.

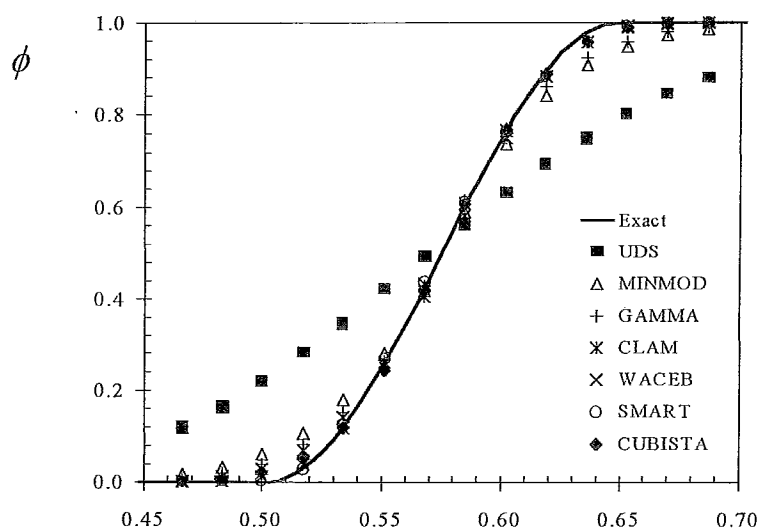


Fig. 5 - Resultados numéricos obtidos com vários esquemas de diferenças para o problema da advecção pura dum perfil \sin^2 . A linha a cheio é a curva teórica.

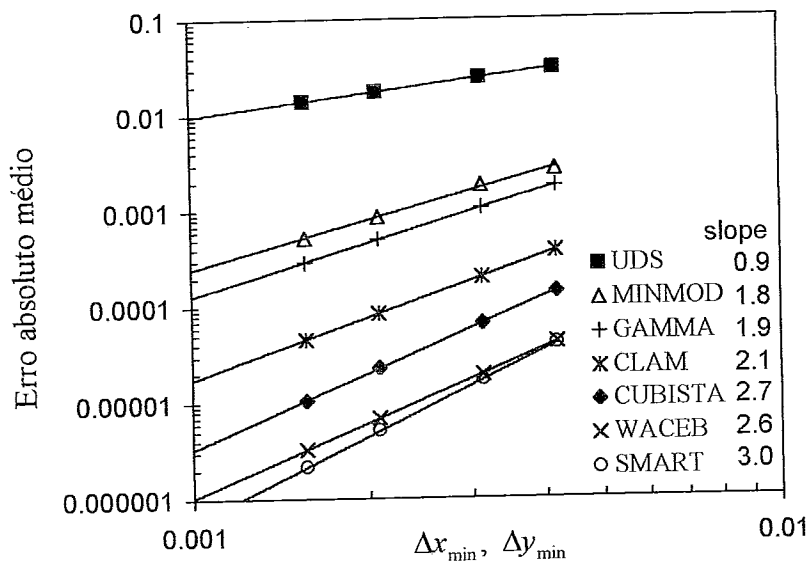


Fig. 6 - Variação do erro absoluto com o espaçamento da malha, para os vários esquemas no problema de advecção do \sin^2 .

5.2 Escoamento Viscoelástico numa Contração Plana

Consideramos agora o problema do escoamento dum fluido viscoelástico, que obedece à equação constitutiva UCM (Eq. 4), através de uma contração súbita bidimensional com razão de secções de 4 para 1. Este problema é particularmente difícil porque no canto interior da contração vai existir uma elevada concentração de tensões, cujos valores teoricamente tendem para infinito, o que provoca grandes dificuldades de convergência para o processo iterativo do método numérico. De facto, as dificuldades encontradas na resolução deste tipo de problemas foram o principal *leitmotiv* para o presente trabalho.

Os parâmetros adimensionais utilizados neste caso teste foram um número de Reynolds $Re = \rho U_2 H_2 / \eta = 0.01$ e um número de Deborah $De = \lambda U_2 / H_2 = 3$ (H_2 é metade da largura do canal mais estreito e U_2 a velocidade média nesse canal). O domínio de solução foi discretizado com 2 malhas de volumes finitos: uma mais grosseira, M1 com 3598 células, e outra mais refinada, M2 com 14258 células. Na malha M1 foi possível obter convergência iterativa com os esquemas UDS, CUBISTA e CLAM. O esquema GAMMA também convergia mas só com um valor do parâmetro $\beta_m = 0.5$, o que corresponde ao limite superior admissível definido pelos autores (Jasak et al 1999). Na malha M2 só o *upwind* e o novo esquema CUBISTA permitem convergência do processo iterativo, como mostrado na Fig. 7, onde são apresentadas as evoluções dos resíduos resultantes dos vários esquemas em função do tempo de simulação (proporcional ao número de passos no tempo efectuados ou, de forma equivalente, ao número de iterações). Fica assim demonstrado que o novo esquema possui propriedades iterativas superiores às dos restantes esquemas de alta resolução aqui testados.

Em termos de precisão, e comparativamente ao UDS, as virtudes do novo esquema estão bem ilustradas na Fig. 8, que apresenta as linhas de corrente baseadas em cálculos na malha M1. Na parte inferior da figura é apresentada uma solução numérica de referência, obtida numa malha muito mais fina ainda que M2 (com 57032 células, Alves et al 2000). Como se vê, os resultados com o CUBISTA na malha M1 estão próximos dos resultados de referência, enquanto os resultados com o esquema *upwind* apresentam um vórtice de canto artificialmente intensificado.

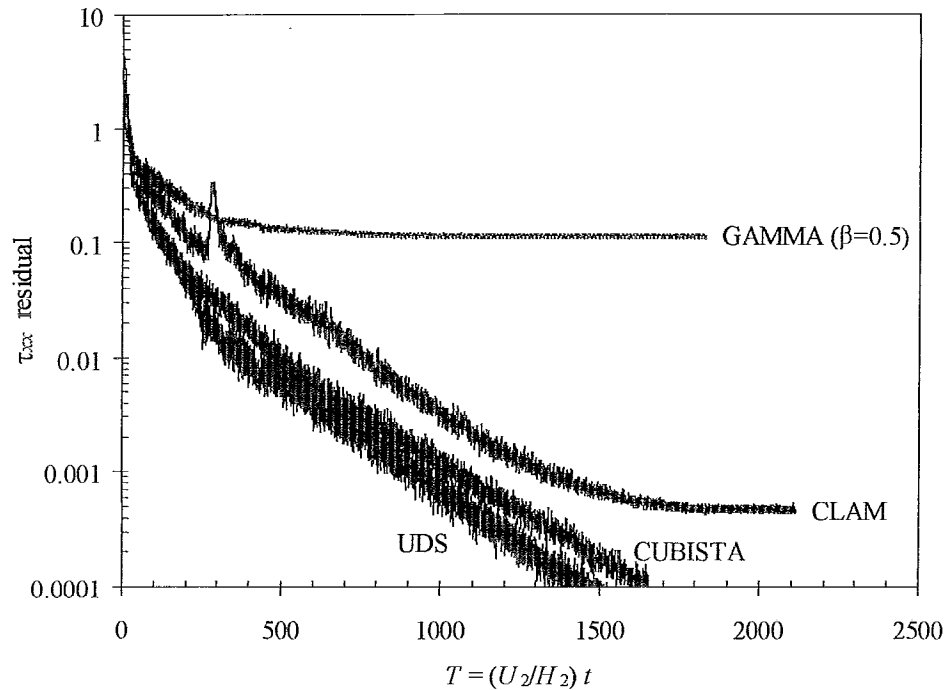


Fig. 7 - Variação dos resíduos da equação para τ_{xx} ao longo do processo de avanço no tempo. Escoamento viscoelástico na contracção com $De=3$, na malha M2.

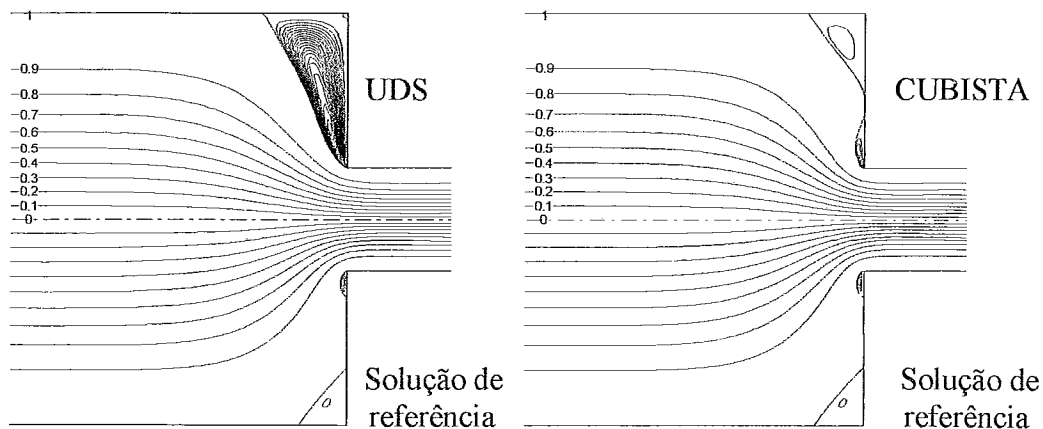


Fig. 8 - Comparação das linhas de corrente previstas na malha M1 com o esquema *upwind* (UDS) e o novo esquema CUBISTA. Na parte inferior apresenta-se um resultado de referência em malha muito fina, Alves et al (2001).

5.3 Escoamento Viscoelástico em torno de um Cilindro

Neste segundo exemplo de cálculo em reologia computacional é considerado o escoamento em torno de um cilindro colocado transversalmente no eixo de um canal plano (ver pormenor na Fig. 9). A largura do canal é igual ao dobro do diâmetro do cilindro e o número de Deborah considerado foi $De = \lambda U / R = 0.6$.

A Fig. 9 apresenta a evolução dos resíduos para a equação de τ_{xx} ao longo do processo de avanço no tempo. Novamente, só os esquemas *upwind* e CUBISTA garantem convergência, para uma tolerância de 10^{-5} . Qualquer um dos outros esquemas conduz a estagnação dos resíduos, que não decaem abaixo dum certo valor. Obviamente, nessas

condições é impossível ter-se a certeza que os resultados da simulação são adequados. A Fig. 10 compara os resultados do coeficiente de arrasto sobre o cilindro, C_d , obtidos com o UDS e o CUBISTA na malha aqui utilizada (M30; uma malha relativamente grosseira) e os resultados de elevada precisão obtidos por Alves et al (2001) e Fan et al (1999). À medida que a elasticidade do líquido aumenta, a solução obtida com UDS conduz a valores de C_d demasiado elevados. Os valores de C_d obtidos com o CUBISTA são quase coincidentes com os resultados padrão de Alves et al (2001), apesar da malha computacional ter muito menos células.

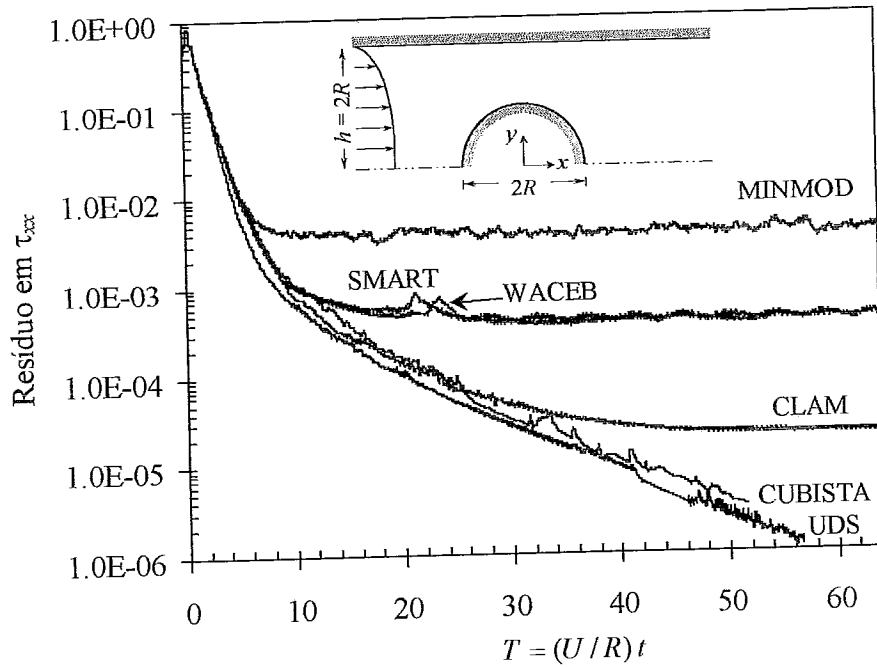


Fig. 9 - Variação dos resíduos da equação para τ_{xx} ao longo do processo de avanço no tempo. Escoamento viscoelástico em torno de cilindro com $De=0.6$, na malha M30.

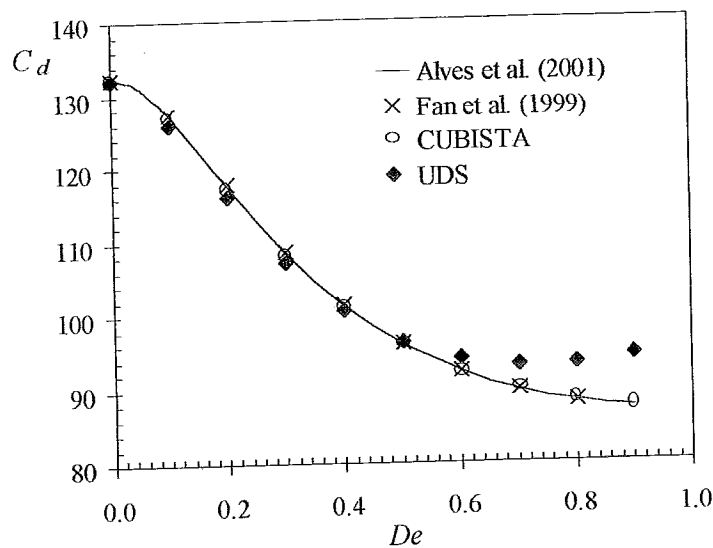


Fig. 10 - Comparação de previsões do coeficiente de arrasto sobre o cilindro.

REFERÊNCIAS

- Alves, M.A., Pinho, F.T. e Oliveira, P.J., Effect of a high-resolution differencing scheme on finite-volume predictions of viscoelastic flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* (2000) **93**, pp. 287-314.
- Alves, M.A., Pinho, F.T. e Oliveira, P.J., The flow of viscoelastic fluids past a cylinder: finite-volume high-resolution methods. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* (2001) **97**, pp. 207-232.
- Alves, M.A., Oliveira, P.J. e Pinho, F.T., A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *Int. J. Num. Meth. Fluids* (2003) **41**, pp. 47-75.
- Fan, Y., Tanner, R.I. e Phan-Thien, N., Galerkin/least-square finite-element methods for steady viscoelastic flows. *J. Non-Newt. Fluid Mech.* (1999) **84**, pp. 233-256.
- Gaskell, P.H. e Lau, A.K.C., Curvature compensated convective transport: SMART, a new boundedness preserving transport algorithm. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* (1988) **8**, pp. 617-641.
- Harten, A., High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.* (1983) **49**, pp. 357-393. (Nota: esquema MINMOD)
- Jasak, H., Weller, H.G. e Gosman, A.D., High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes. *Int. J. Numer. Methods Fluids* (1999) **31**, pp. 431-449.
- Leonard, B.P., A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic interpolation, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* (1979) **19**, pp. 59-98.
- Leonard, B.P., The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* (1991) **88**, pp. 17-74.
- Leonard, B.P., Why you should not use 'hybrid' 'power-law' or related exponential schemes for convective modelling - there are much better alternatives, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* (1995) **20**, pp. 421-442.
- Patankar, S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Pub. (1980).
- Song, B., Liu, G.R., Lam, K.Y. e Amano, R.S., On a higher-order bounded discretization scheme. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* (2000) **32**, pp. 881-897 (Nota: esquema WACEB, Fig. 3).
- Sweby, P.K., High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* (1984) **21**, pp. 995-1011.
- Van Leer, B., Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *J. Comput. Phys.* (1974) **14**, pp. 361-370.