

Electromagnetismo

LEEC 2023

transcrição das transparências
usadas na aula teórica

F. Salzedas

Electromagnetismo 2023

LEEC



FEUP

11 de dezembro de 2023

As transparências aqui transcritas servem de apoio à aula teórica. Como tal e por serem apenas um resumo, a sua consulta não dispensa a consulta da bibliografia principal da disciplina.

A versão mais recente deste documento está disponível em:
<https://paginas.fe.up.pt/~fsal/Elem/leecElem.htm>

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Electromagnetismo no dia a dia	1
1.1.1	Breve introdução histórica	1
1.2	Carga e a estrutura da matéria	2
1.2.1	Electroscópio	4
1.2.2	Carga induzida	4
1.2.3	Propriedades da carga eléctrica	6
1.2.4	Breve apresentação das equações de Maxwell	6
2	Lei de Coulomb	8
2.1	Lei de Coulomb	8
2.2	Princípio da sobreposição	11
2.3	Distribuições contínuas de carga	13
2.3.1	Distribuição linear de carga	13
2.3.2	Distribuição superficial de carga	14
2.3.3	Distribuição volumétrica de carga	14
2.3.4	Distribuições homogéneas de carga	14
3	Campo eléctrico	17
3.1	Campo eléctrico	17
3.2	Campo \vec{E} criado por uma distribuição contínua de cargas	18
3.3	Linhas de campo	19
3.4	Exemplos do cálculo do campo eléctrico criado por distribuições homogéneas de cargas	21
3.4.1	Campo criado por um fio retilíneo carregado	21
3.4.2	Campo criado por um anel fino carregado	26
3.4.3	Campo criado por um disco carregado	29
4	Lei de Gauss	32
4.1	Ângulo sólido	32
4.2	O fluxo do campo eléctrico	33
4.3	Lei de Gauss	34
4.3.1	Campo de uma carga pontual - sup. Gaussiana esférica	36
4.3.2	Campo de uma carga pontual - sup. Gaussiana cúbica	38
4.3.3	Fluxo de uma carga exterior à superfície Gaussiana	40

4.3.4	Campo no interior duma esfera oca homogeneamente carregada	41
5	Aplicações da lei de Gauss	44
5.1	Distribuições de carga com simetria cilíndrica, plana e esférica	44
5.1.1	Campo de distribuições de carga com simetria cilíndrica	44
5.1.2	Campo de distribuições de carga com simetria plana . .	50
5.1.3	Campo de distribuições de carga com simetria esférica	52
6	Divergência de um campo vectorial	56
6.1	A divergência de um campo vectorial \vec{A}	56
6.2	O significado físico da divergência de \vec{A}	58
6.3	Divergência em coordenadas cartesianas	58
6.3.1	Divergência em coordenadas cilíndricas e esféricas . . .	58
6.4	Teorema de Gauss	59
6.5	Significado físico de $\nabla \cdot \vec{E}$	59
6.6	Aplicações do cálculo de $\nabla \cdot \vec{E}$	60
7	Energia potencial eléctrica	64
7.1	Energia potencial eléctrica	64
7.2	Potencial eléctrico	67
7.3	Potencial eléctrico e o campo eléctrico	68
7.4	Potencial eléctrico duma carga pontual	70
7.5	Potencial eléctrico duma distribuição contínua de cargas . . .	71
8	Exemplos de Cálculo do Potencial Eléctrico	73
8.1	Exemplos de cálculo do potencial eléctrico	73
8.1.1	Potencial eléctrico dum fio infinito com $\lambda = \text{Const.}$. . .	73
8.1.2	Potencial eléctrico dum disco com $\sigma = \text{Const.}$	75
8.1.3	Potencial eléctrico duma casca cilíndrica infinita com $\sigma = \text{Const.}$	76
8.1.4	Potencial eléctrico duma esfera com $\rho = \text{constante}$. . .	78
8.1.5	Potencial e campo dum dipolo eléctrico	81
9	Energia potencial eléctrica duma distribuição de cargas	85
9.1	A energia potencial eléctrica duma distribuição de cargas . . .	85
9.1.1	Distribuição de cargas pontuais	85
9.1.2	Distribuição contínua de cargas	87
9.1.3	Energia potencial eléctrica em função do campo eléctrico	88
9.2	Circulação do campo eléctrico	90
9.3	Rotacional em coordenadas cartesianas	91
9.4	Significado físico do rotacional	92
9.4.1	$\nabla \times \vec{A}$ em coordenadas cilíndricas e esféricas	93
9.4.2	Exemplo: rotacional do campo eléctrico de uma carga pontual	93
9.4.3	Exemplo: rotacional do campo eléctrico de um dipolo . . .	94

9.5	Teorema de Stokes	94
9.6	Equações de Maxwell para a electrostática	95
10	As equações de Poisson e de Laplace e condutores em campos electrostáticos	97
10.1	As equações de Poisson e de Laplace	97
10.1.1	Unicidade da solução da Eq. de Poisson	98
10.1.2	Potencial duma distribuição esférica e uniforme de carga	99
11	Campos electrostáticos e condutores	102
11.1	Electrostática de condutores	102
11.1.1	Campo dentro de um condutor	102
11.1.2	Localização da carga dentro de um condutor	102
11.1.3	Condutor com uma cavidade	103
11.1.4	Campo electrostático à superfície dum condutor	104
11.1.5	Potencial eléctrico num condutor	106
11.1.6	O campo eléctrico perto de uma ponta	106
11.1.7	Forças eléctricas em condutores	107
11.1.8	Potencial entre duas placas condutoras paralelas	109
11.1.9	Potencial num cabo coaxial	110
11.1.10	A energia potencial eléctrica duma esfera condutora carregada	112
12	Capacidade e condensadores	115
12.1	Capacidade de um condutor	115
12.1.1	Capacidade de uma esfera condutora	115
12.2	Capacidade entre dois condutores	116
12.2.1	Capacidade de um condensador de placas paralelas	117
12.2.2	Capacidade dum cabo coaxial	117
12.3	A energia armazenada num condensador	118
12.3.1	A energia armazenada num condensador de placas paralelas	120
12.3.2	Condensador Diferencial	120
12.3.3	Detetor de polaridade capacitivo	121
13	Campo electrostático na matéria	122
13.1	Momento Dipolar	122
13.2	Dieléctricos: polarização da matéria	122
13.2.1	Cargas de polarização e livres	123
13.2.2	O vector polarização eléctrica	123
13.3	A carga de polarização na superfície e no interior do dieléctrico	125
13.3.1	A densidade superficial de carga de polarização	125
13.3.2	A densidade volumétrica de carga de polarização	125
13.4	A lei de Gauss num dieléctrico	126
13.4.1	Permitividade relativa	128

13.4.2	Relação entre densidades volumétricas de cargas livres e ligadas	129
13.5	Condições fronteira em dielétricos	129
13.5.1	Componente normal do deslocamento eléctrico	129
13.5.2	Componente tangencial do campo eléctrico	130
13.5.3	Desvio do campo eléctrico numa interface	131
13.6	Condensador com dieléctrico	131
13.6.1	A energia num condensador com dieléctrico	134
13.7	O campo de cargas livres em dieléctricos	135
13.8	O potencial num dieléctrico	135
13.9	Rotura eléctrica	135
14	Corrente eléctrica	138
14.1	Corrente eléctrica	138
14.2	Lei de Ohm não local	139
14.3	Resistência e resistividade - abordagem clássica	139
14.3.1	Densidade de corrente	142
14.4	Lei de Ohm local	142
14.4.1	Resistividade e a temperatura	143
14.5	Resistividade e a temperatura	144
14.6	A lei da conservação da carga eléctrica	145
14.6.1	Tempo de relaxamento	146
14.6.2	Tempo de relaxamento num condensador real	147
14.7	Força electromotriz	148
14.8	Leis de Kirchhoff	149
14.9	Potência e efeito de Joule	151
15	Magnetostática	153
15.1	Magnetostática	153
15.2	A lei de Biot-Savart	154
15.2.1	Fio longo e rectilíneo I	156
15.2.2	Campo magnético no eixo duma espira circular	157
15.2.3	Campo magnético no eixo dum solenoide circular	158
15.3	A força magnética	160
15.4	A definição de ampere	161
15.5	A força de Lorentz	162
15.5.1	A experiência de Thompson	164
15.5.2	Movimento de uma partícula carregada num campo B	166
15.5.3	Efeito de Hall	168
16	As leis de Gauss e de Ampère	170
16.1	A lei de Gauss para o campo magnético	170
16.2	Teorema de Gauss e o campo B	171
16.3	A lei de Ampère	171
16.4	A lei de Ampère e o Teorema de Stokes	172

16.5	Exemplos de aplicação da lei de Ampère	173
16.5.1	Fio longo e rectilíneo II	173
16.5.2	B criado por uma corrente cilíndrica e infinita	174
16.5.3	O campo magnético dum solenóide	176
16.5.4	B criado por um solenoide toroidal	178
17	A lei de Faraday	181
17.1	A lei de Faraday	181
17.1.1	A lei de Lenz	182
17.2	As leis de Faraday-Lenz e as eq. de Maxwell	183
17.3	Geradores Eléctricos	185
17.3.1	Um gerador simples	185
17.3.2	O gerador de corrente alternada	187
17.3.3	Correntes de Foucault	189
18	Indutância mútua	191
18.1	Indutância	191
18.1.1	Indutância mútua	191
18.1.2	Indutância mútua de dois solenóides	193
18.1.3	Auto-indutância	194
18.1.4	A auto-indutância dum solenóide	195
18.2	A energia armazenada num indutor	196
18.3	A densidade de energia dum campo magnético	197
18.3.1	O transformador	198
19	Potencial vector	201
19.1	O potencial vector	201
19.1.1	O potencial vector perto dum fio de corrente	204
19.1.2	Campo magnético no centro duma espira quadrada	206
19.2	A equação de Poisson do potencial vector	207
19.3	Campo eléctrico em termos dos potenciais	208
20	Momento dipolar magnético	210
20.1	O momento dipolar magnético	210
20.2	Potencial vector do dipolo magnético	211
20.2.1	Linhas de campo do dipolo magnético	214
20.2.2	Os pólos do dipolo magnético	214
20.3	Torque das forças exercidas sobre uma espira	216
20.4	Galvanómetros	218
21	Origem do magnetismo permanente	221
21.1	Vector magnetização \vec{M}	221
21.1.1	Densidades volumétrica e superficial de corrente de magnetização	222
21.1.2	Cilindro com magnetização constante	224
21.2	A divergência do campo magnético em materiais magnéticos	225

21.3	Campo magnético \vec{H}	225
21.3.1	Lei de Ampère na presença de matéria	226
21.3.2	Susceptibilidade e permeabilidade magnética de um meio	226
21.4	Materiais diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos	227
21.5	O ciclo de histerese	228
21.6	Condições fronteira em materiais magnéticos	230
21.7	Circuitos magnéticos	231
21.7.1	Lei de Hopkinson	234
21.7.2	Analogia com os circuitos eléctricos	234
21.7.3	Diferenças com os circuitos eléctricos	235
22	A corrente de deslocamento e as ondas eletromagnéticas	236
22.1	A corrente de deslocamento	236
22.2	Ondas electromagnéticas	242
22.3	Energia em ondas electromagnéticas	247
A	Alfabeto Grego	249
B	Revisões de álgebra vectorial	250
B.1	Propriedades gerais dos vectores	250
B.1.1	Vectores unitários	250
B.1.2	O sistema de coordenadas cartesianas	251
B.1.3	Co-senos directores	252
B.1.4	Operações com vectores	253
B.1.5	Produto escalar de dois vectores	253
B.1.6	Produto vectorial de dois vectores	254
B.1.7	Lei dos co-senos	255
B.1.8	Exemplo: Diâmetro da Lua	256
B.1.9	Exemplo: soma de vectores	257
B.1.10	Rotação de coordenadas	258
C	Sistemas de coordenadas	259
C.1	Coordenadas Cartesianas (Revisão)	259
C.2	Coordenadas Cilíndricas	260
C.3	Coordenadas Esféricas	261
C.4	Relação entre Coordenadas Cartesianas, Cilíndricas e Esféricas	263
C.5	Conversão entre versores de coordenadas Cartesianas, Cilíndricas e Esféricas	264
D	Equação de Neumann para a indutância mutua	265
E	Comparação das equações válidas apenas para campos estáticos com as equações gerais	266
F	Equação de onda	267

Aula 1

Introdução

1.1 Electromagnetismo no dia a dia

- A electricidade revolucionou as sociedades a partir do séc. XX, mesmo aquelas que não a usam extensivamente
- Algumas aplicações tecnológicas:
 - Uso doméstico (iluminação, climatização, electrodomésticos, smartphones, computadores) e industrial
 - Telecomunicações, analógicas ou digitais (internet, telefones fixos e móveis, rádio, TV, satélite, etc.)
 - Transportes (comboio, eléctrico, metro, automóveis?!, etc.)
 - Instrumentação médica (RX, TAC, RNM, ecografia, ECG, EEG, DNA chips, etc.)
 - Electrónica, computadores, Robôs, etc.
- A vida na Terra está protegida do vento solar, pelo campo magnético terrestre, sem ele a superfície da Terra seria parecida à de Vénus.

1.1.1 Breve introdução histórica

Manifestações de electricidade

- O relâmpago é possivelmente das manifestações da electricidade mais antigas
- Outra manifestação conhecida à já alguns milénios era a capacidade do âmbar (uma resina fossilizada a que os Gregos chamavam *elektron*) após ser friccionado poder atrair objectos leves, como uma pena
- Muito mais tarde descobriram-se outros materiais com propriedades semelhantes bem como novos efeitos, e.g. ao esfregar âmbar com um pedaço de pele com pêlos este adquire "*electricidade resinosa*" e esfregando vidro com seda este adquire "*electricidade vítrea*"

- Efeito triboelétrico (prefixo tribo - friccionar em Grego)

Carga Eléctrica

- Foi observado o facto importante que "electricidades" do mesmo tipo repeliam-se e de tipo diferente atraíam-se
- Foi no séc.18 que se desenvolveu o conceito de carga para explicar o grande número de observações feitas em incontáveis experiências
- Concluiu-se que há dois tipos de carga: *positiva e negativa*
- *Cargas iguais repelem-se, cargas opostas atraem-se*
- Igualmente importante foi a observação que ao esfregar dois corpos é transferida carga dum para o outro mantendo-se a *carga total constante* i.e. a carga não é criada

1.2 Carga e a estrutura da matéria

Átomos

- No Séc. XX descobriu-se que a matéria é constituída por átomos e que estes por sua vez eram constituídos por um núcleo em torno do qual giram electrões, e
- Os *electrões têm carga negativa* e até à data não se conhece estrutura interna ao electrão, ou seja um electrão parece ser apenas uma só partícula
- Descobriu-se que o núcleo têm carga positiva e ainda que este é constituído por outras partículas, chamados protões, p , que têm carga positiva e neutrões, n , que têm carga ZERO

Dentro do Núcleo

- Descobriu-se ainda também que cada um destes 2 nucleões (protão e neutrão) é constituído por 3 outras partículas chamadas quarks ($p = uud$, $n = udd$)
- Carga eléctrica quark u (up) é $2/3$ da carga do electrão e o quark d (down) tem $-1/3$
- Logo um protão ($p = uud$) tem carga $+1$ e um neutrão ($n = udd$) tem carga 0
- As experiências feitas até à data mostram que os quarks também não são constituídos por outras partículas

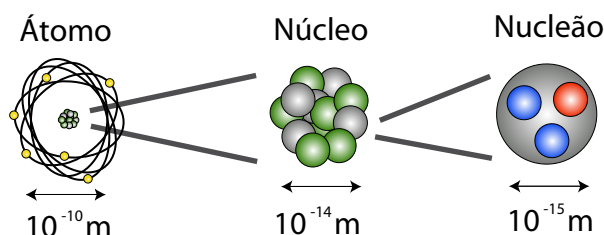


Figura 1.1: Estrutura da matéria.

Figura 1.2: Tabela periódica

Tabela Periódica

- Com estas 3 partículas elementares (eléctron e quarks) podem formar-se 116 átomos, normalmente ordenados na familiar **tabela periódica**

A matéria

- Os átomos por sua vez agrupam-se em moléculas ou sólidos dos mais variados e exuberantes tipos, constituindo uma parte importante da Natureza, incluindo nós próprios.
- *Os electrões que ocupam a parte mais externa do átomo podem transitar com mais ou menos facilidade entre átomos.*
- Ao esfregar uma barra de vidro com seda, por efeito triboelétrico, *alguns electrões transitam do vidro para a seda*, deixando o vidro com carga positiva e a seda com uma carga igual mas negativa.
- Em circunstâncias normais a matéria é electricamente neutra,

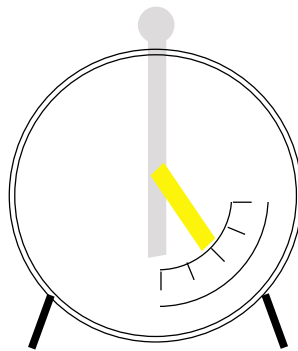
$$N_{\text{electrões}} = N_{\text{protões}}$$

Condutores e isoladores

- Materiais que permitem a passagem de cargas eléctricas são chamados condutores eléctricos e por oposição os materiais que não o permitem são isoladores eléctricos.
- *Todos os metais* (Cobre, Ouro, Prata, Platina, Mercúrio, etc.) são *condutores* pois pelo menos um electrão por átomo é livre de se mover pelo metal.
- Toda a matéria onde os electrões estão fortemente ligados aos átomos são isoladores (gases, o vidro, a borracha, Carbono, Silício, Quartzo, etc.).

1.2.1 Electoscópio

- A carga eléctrica é detectada com um aparelho chamado electoscópio (ver figura).



- Ao depositar cargas eléctricas na esfera estas distribuem-se pelo instrumento provocando uma repulsão entre a folha de Ouro e a placa de metal que leva a uma deflexão da leve folha de Ouro, sendo a deflexão proporcional à carga depositada
- Um electrómetro mede a carga eléctrica
- Electrómetros modernos, muito sensíveis, são construídos a partir de FET (Transístores de Efeito de Campo)

1.2.2 Carga induzida

- É possível medir o sinal da carga em excesso num objecto?
- Aproximando (SEM TOCAR) um objecto carregado electrostaticamente dum electoscópio também já carregado, se as cargas forem do mesmo sinal a deflexão da folha de ouro aumenta, ou diminui se forem de sinal oposto

- *O electroscópio consegue assim medir o sinal relativo da carga sem alterar a quantidade de carga*
- Repetindo o procedimento anterior mas com o electroscópio descarregado, observa-se igualmente a deflexão da folha de Ouro, permitindo assim a detecção de objectos carregados na vizinhança do electroscópio

Exercício 1

O que acontece se aproximarmos uma barra, carregada negativamente, a um electroscópio descarregado e em contacto eléctrico com um grande condutor externo também descarregado e em seguida interrompermos o contacto eléctrico?

Os electrões em excesso na barra, repelem os electrões livres no electroscópio. Estes electrões repelidos vão afastar-se o mais possível da barra, passando também para o grande condutor externo. Ao interromper o contacto eléctrico o electroscópio perde os electrões que passaram para o grande condutor externo. O electroscópio ganha assim um excesso de carga positiva de módulo exactamente igual à carga negativa (os electrões livres) que passou para o grande condutor externo. *O electroscópio foi carregado por indução.*

- A Terra é um grande e razoável bom condutor
- Ligando um electroscópio à Terra este pode ser carregado por indução se estiver na vizinhança de um objecto carregado

Exercício 2

O que acontece se aproximarmos uma barra carregada negativamente dum isolador?

Os electrões da barra repelem os electrões do isolador. No entanto como estes últimos não são livres e simplesmente giram em torno dos núcleos dos átomos o que vai acontecer é que as suas órbitas vão ficar levemente distorcidas, afastando-se da barra. Diz-se que *os átomos ficam polarizados*. Deste modo os núcleos positivos ficam ligeiramente mais próximos da barra e se o isolador for leve, e.g. um pedaço de papel a força atractiva entre os núcleos e a barra é suficiente para levantar o papel. As impressoras a laser ou fotocopiadoras fazem uso deste mecanismo para atrair o toner apenas para certos pontos (polarizados) no papel.

1.2.3 Propriedades da carga eléctrica

- Há dois tipos de carga: carga positiva e carga negativa
- Cargas iguais repelem-se, cargas opostas atraem-se
- *Princípio da Conservação da Carga*, num sistema fechado a soma de todas as cargas eléctricas mantém-se constante
- A unidade do Sistema Internacional para a carga eléctrica é o *coulomb* indicada pelo símbolo C (1 coulomb é uma quantidade de carga muito grande)
- A carga de 1 electrão é $e = -1.602\,176\,634 \times 10^{-19}C$ (valor exato) o seu módulo é considerado na prática a carga elementar

1.2.4 Breve apresentação das equações de Maxwell

As equações de Maxwell (1861-1862)

- A evolução no tempo e no espaço (vazio) do campo electromagnético é descrita pelas seguintes 4 equações:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

- Estas são as equações de Maxwell onde
 - t é o tempo
 - \vec{E} é o campo eléctrico e \vec{B} é o campo magnético
 - ρ é a carga eléctrica que está num volume unitário
 - \vec{j} é a carga eléctrica que atravessa uma secção unitária numa unidade de tempo
 - μ_0 e ϵ_0 são constantes universais

O Caso Estático

- Nas aulas que se seguem vamos estudar as equações de Maxwell e usá-las para compreender algumas das suas vastas aplicações

- Iniciaremos o estudo pelo caso mais simples em que nada depende do tempo, o caso estático. Neste caso as equações reduzem-se a:

– *Electrostática:*

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.6)$$

– *Magnetostática:*

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.8)$$

- No caso estático \vec{E} e \vec{B} não dependem um do outro, são independentes
- Só quando existem variações significativas no tempo de cargas ou correntes \vec{E} depende de \vec{B} e vice versa

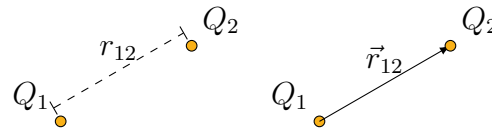
Aula 2

Lei de Coulomb

2.1 Lei de Coulomb

- As primeiras medidas precisas da força entre duas cargas foram realizadas por Charles-Augustin de Coulomb em 1788, usando uma balança de torção
- Coulomb concluiu que *a força eléctrica entre duas cargas (Q_1 e Q_2) em repouso é directamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância (r) entre as cargas*, ou na forma algébrica:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (2.1)$$



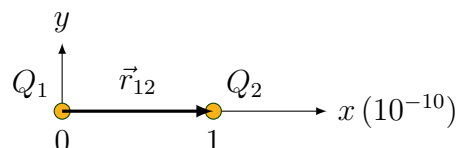
- Esta lei universal é conhecida pela lei de Coulomb
- Como qualquer força também a força eléctrica é um vector, que actua no sentido do vector posição das duas cargas, indicado pelo versor \hat{r}_{12}
- A constante universal $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ é chamada *permi-tividade eléctrica do vazio* (ou também constante dieléctrica do vazio como veremos quando estudarmos os dieléctricos)
- A força eléctrica que a carga Q_1 exerce na carga Q_2 tem o mesmo módulo, a mesma direcção mas sentido oposto à força que Q_2 exerce em Q_1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.2)$$

Cálculo Explícito da Força Eléctrica

Exercício 3

Considere uma carga de valor $Q_1 = eC$ na origem dum referencial cartesiano XY. Calcule a força eléctrica que esta carga exerce numa outra carga $Q_2 = Q_1$ que se encontra no ponto de coordenadas $x = 10^{-10}\text{m}$ e $y = 0\text{m}$. Indique o módulo, a direcção e o sentido desta força.

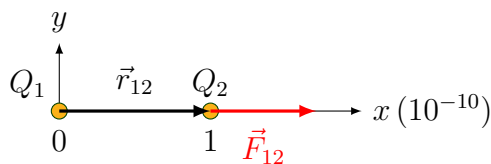


$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

- $\vec{r}_{12} = (1\hat{i} + 0\hat{j})10^{-10} = 10^{-10}\hat{i}$ m
- O módulo é $r_{12} = 10^{-10}$ m
- O versor $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{1 \times 10^{-10} \hat{i}}{1 \times 10^{-10}} = \hat{i}$.
- Então a força eléctrica que a carga Q_1 exerce na carga Q_2 é o vector,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ee}{(10^{-10})^2} \hat{i} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{10^{-20}} \hat{i} \\ &= 2.31 \times 10^{-8} \hat{i} \text{ N} \end{aligned}$$

- Esta força é aplicada no ponto $x = 10^{-10}\text{m}$ e $y = 0\text{m}$



Exercício 4

Repita o exercício anterior considerando que $r_{12} = 1\text{m}$.

- $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{1} \hat{i} = 2.31 \times 10^{-28} \hat{i} \text{ N}$
- Uma força insignificante!

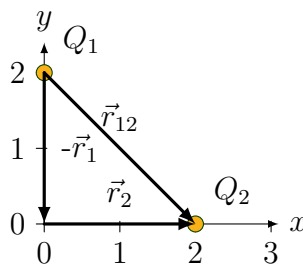
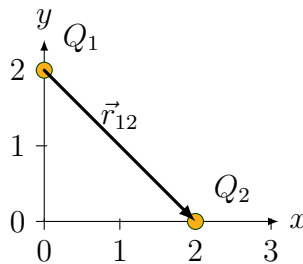
Exercício 5

Repita o exercício anterior considerando que $Q_1 = 1\text{C}$.

- $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1} \hat{i} = 8.99 \times 10^9 \hat{i} \text{ N}$
- Uma força colossal!
- *Não é expectável que se encontrem cargas da ordem do coulomb facilmente!*

Exercício 6

Considere agora que $Q_1 = e \text{ C}$ e $Q_2 = 3e \text{ C}$. A carga Q_2 está no ponto de coordenadas $x = 2 \text{ m}$ e $y = 0 \text{ m}$, e Q_1 está no ponto $x = 0 \text{ m}$ e $y = 2 \text{ m}$. Indique o módulo, a direcção e o sentido de \vec{F}_{12} .



- O vector posição da carga Q_2 relativamente à carga Q_1 é

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

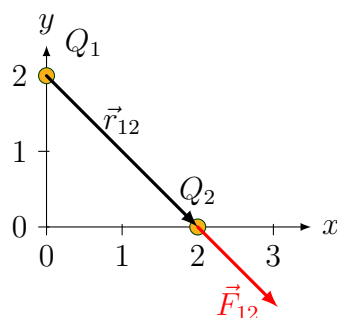
onde \vec{r}_1 é o vector posição da carga 1 e \vec{r}_2 o vector posição da carga 2,

$$= 2\hat{i} + 0\hat{j} - (0\hat{i} + 2\hat{j}) = 2\hat{i} - 2\hat{j} \text{ m}$$

- O seu módulo é $r_{12} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ m.
- Então $\hat{r}_{12} = \frac{2\hat{i}-2\hat{j}}{\sqrt{8}} = \frac{\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{2}}$.
- Assim a força eléctrica que a carga Q_1 exerce na carga Q_2 é o vector,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e^2}{8} \frac{\hat{i} - \hat{j}}{\sqrt{2}} \\ &= 6.12 \times 10^{-29} (\hat{i} - \hat{j}) \text{ N}\end{aligned}$$

- Esta força é aplicada no ponto $x = 2$ m e $y = 0$ m



2.2 Princípio da sobreposição

Exercício 7

Se além da carga Q_1 e da carga Q_2 houver uma terceira carga Q_3 , qual é a força total que actua em Q_1 ?

Princípio da Sobreposição

A força F_{21} não é afectada pela força F_{31} que a carga Q_3 exerce na carga Q_1 , logo a força total é a soma *VECTORIAL* destas duas forças:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

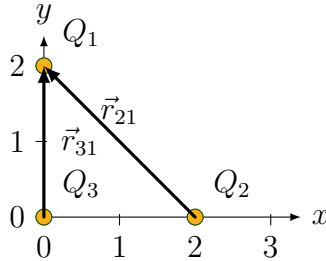
- Caso haja N cargas a força total que actua em Q_1 é soma vectorial de todas as forças

$$\vec{F}_1 = \sum_{i=2}^N \vec{F}_{i1} \quad (2.3)$$

- Este é o chamado *Princípio da Sobreposição*.

Exercício 8

Considere 3 cargas $Q_1 = e$ C e $Q_2 = 3e$ C e $Q_3 = e$ C que, respectivamente, se encontram nos pontos de coordenadas $x = 0$ m e $y = 2$ m, $x = 2$ m e $y = 0$ m e $x = 0$ m e $y = 0$ m. Indique o módulo, a direção e o sentido da força eléctrica exercida na carga Q_1 , \vec{F}_1 .



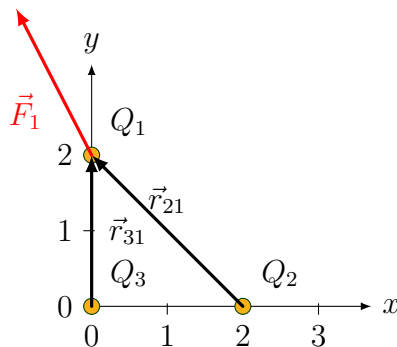
- Necessitamos de calcular $\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$
- Como $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, usando os resultados anteriores obtemos,

$$\vec{F}_{21} = 6.12 \times 10^{-29}(-\hat{i} + \hat{j}) \text{ N}$$
- O vector posição da carga Q_1 relativamente à carga Q_3 é $\vec{r}_{31} = 2\hat{j}$ m e o seu módulo é $r_{31} = 2$ m
- Assim $\hat{r}_{31} = \frac{2\hat{j}}{2} = \hat{j}$.
- Então a força eléctrica que a carga Q_3 exerce na carga Q_1 é o vector,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{31} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4} \hat{j} \\ &= 5.77 \times 10^{-29} \hat{j} \text{ N} \end{aligned}$$

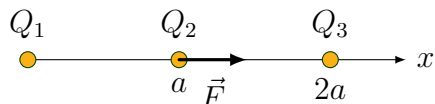
- Finalmente

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{F}_{31} + \vec{F}_{21} = \\ &= 5.77 \times 10^{-29} \hat{j} + 6.12 \times 10^{-29} (-\hat{i} + \hat{j}) \\ &= -6.12 \times 10^{-29} \hat{i} + 11.89 \times 10^{-29} \hat{j} \text{ N} \end{aligned}$$



Exercício 9

Uma carga $Q_1 = +q$ é colocada na origem do eixo dos x . Uma carga $Q_2 = +Q$ é colocada no ponto $x = +a$, sendo a força aplicada sobre a carga Q_2 igual a \vec{F} . Uma terceira carga $Q_3 = -q$ é colocada em $x = +2a$. Qual é a força agora em Q_2 ?



A força de Q_3 em Q_2 é:

$$\vec{F}_{32} = \frac{-Qq}{4\pi\epsilon_0 a^2}(-\hat{i}) = \vec{F} = \vec{F}_{12}$$

logo a força total em Q_2 é $2\vec{F}$

2.3 Distribuições contínuas de carga

- Até agora considerámos apenas cargas pontuais
- Iremos encontrar situações onde é muito mais prático considerar que a carga se encontra distribuída continuamente
- De seguida analisaremos 3 distribuições contínuas de carga. Carga distribuída
 - ao longo de um comprimento
 - numa superfície
 - num volume

2.3.1 Distribuição linear de carga

- Consideremos uma distribuição contínua de cargas ao longo de um fio de comprimento L
- Num comprimento elementar dl existe a carga elementar dq
- Define-se a densidade linear de carga, λ por

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \tag{2.4}$$

- A unidade SI de λ é C/m (coulomb por metro)

- A carga total no fio é,

$$Q = \int_L \lambda dl \quad (2.5)$$

2.3.2 Distribuição superficial de carga

- Consideremos uma distribuição contínua de cargas numa superfície com área A
- Numa superfície elementar ds existe a carga elementar dq
- Define-se a densidade superficial de carga, σ por

$$\sigma = \frac{dq}{ds} \quad (2.6)$$

- A unidade SI de σ é C/m^2 (coulomb por metro quadrado)
- A carga total na superfície é,

$$Q = \int_A \sigma ds \quad (2.7)$$

2.3.3 Distribuição volumétrica de carga

- Consideremos uma distribuição contínua de cargas num sólido com volume V
- Num volume elementar dv existe a carga elementar dq
- Define-se a densidade volumétrica de carga, ρ por

$$\rho = \frac{dq}{dv} \quad (2.8)$$

- A unidade SI de ρ é C/m^3 (coulomb por metro cúbico)
- A carga total no volume é,

$$Q = \int_V \rho dv \quad (2.9)$$

2.3.4 Distribuições homogêneas de carga

- Um caso particular é aquele em que a densidade de carga elementar não varia logo $\lambda = \text{constante}$, $\sigma = \text{constante}$ e $\rho = \text{constante}$

- Os três integrais anteriores simplificam-se

$$Q = \int_L \lambda dl = \lambda \int_L dl = \lambda L$$

$$Q = \int_A \sigma ds = \sigma \int_A ds = \sigma A$$

$$Q = \int_V \rho dv = \rho \int_V dv = \rho V$$

Exercício 10

Considere um fio de comprimento L com densidade linear de carga constante $\lambda = \frac{Q_0}{L}$. Qual é a carga total no fio?

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^L \lambda(x) dx \\ &= \frac{Q_0}{L} L = Q_0 \end{aligned}$$

Exercício 11

Considere um fio de comprimento L com densidade linear de carga $\lambda(x) = \frac{Q_0}{L^2}x$. Qual é a carga total no fio?

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^L \lambda(x) dx \\ &= \frac{Q_0}{L^2} \int_0^L x dx = \frac{Q_0}{2} \end{aligned}$$

Exercício 12

Considere uma esfera de raio a com densidade volúmica de carga $\rho(r) = Cr^2$. Qual é a carga total na esfera?

$$Q = \int dq = \int \rho(r) dV$$

como o elemento de volume em coordenadas esféricas é $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ vem,

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a Cr^4 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= C \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a r^4 dr \\ &= C \frac{4}{5} \pi a^5 \end{aligned}$$

Exercício 13

Sabe-se que a densidade de massa do Cobre é 8920 kg m^{-3} . Cada átomo de Cobre tem $Z = 29$ electrões e uma massa de $A_{\text{Cobre}} \times u = 1.05 \times 10^{-25} \text{ kg}$. Considere duas esferas de Cobre A e B, cada com um volume de 1 dm^3 . Se o número de electrões em cada uma das esferas aumentar em 1%, qual a força que tem de se aplicar para manter as esferas afastadas de 10 cm ?

Como as esferas são iguais basta calcular a carga numa das esferas, que é igual a 1% do número de electrões numa esfera, N_{el} , vezes a carga de um electrão.

$$\begin{aligned} N_{el} &= N_{\text{átomos}} \times Z \\ &= \frac{\text{densidade de massa}}{A \times u} \times \text{volume} \times Z \\ &= \frac{8920 \times 10^{-3} \times 29}{1.05 \times 10^{-25}} = 1.48 \times 10^{27}. \end{aligned}$$

Então a carga eléctrica da esfera é igual a,

$$Q = \frac{1}{100} N_{el} \times (-)1.6 \times 10^{-19} = -2.36 \times 10^6 \text{ C},$$

logo pela lei de Coulomb,

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2.36 \times 10^6)^2}{0.1^2} \\ &= 5.02 \times 10^{24} \text{ N} \approx 0.5 \times 10^{24} \text{ kgf}. \end{aligned}$$

A massa da Terra é cerca de $6 \times 10^{24} \text{ kg}$, i.e.

se uma esfera estivesse pousada na Terra, para manter a outra 10 cm por cima seria necessário colocar uma massa da mesma grandeza (aproximadamente com a massa de Marte) por cima da esfera superior.

Aula 3

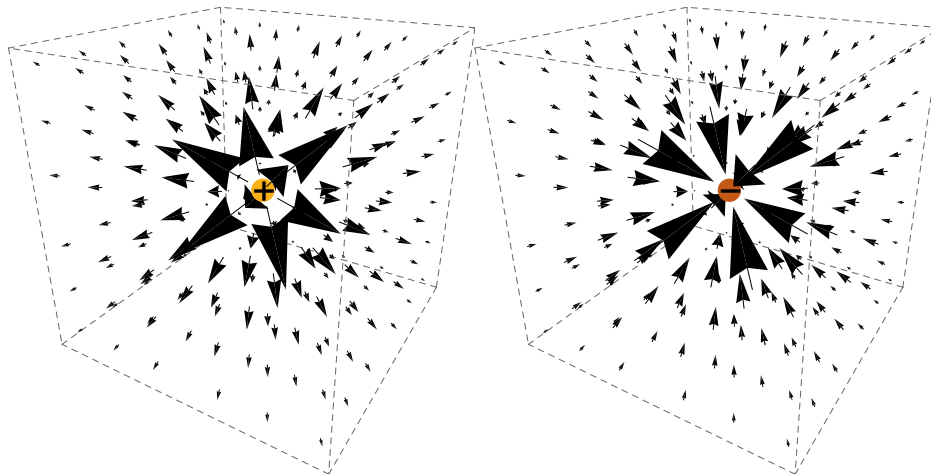
Campo eléctrico

3.1 Campo eléctrico

- A força eléctrica \vec{F}_{12} depende sempre da magnitude das duas cargas Q_1 e Q_2
- Dividindo \vec{F}_{12} por Q_2 obtemos uma grandeza que é independente da carga Q_2 e que mantém a mesma direcção de \vec{F}_{12}

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R^2} \hat{R} \quad (3.1)$$

- À nova grandeza \vec{E}_1 chamamos o *campo eléctrico* criado pela carga Q_1 num ponto do espaço à distância R de Q_1 na direcção e sentido de \hat{R}
- O campo eléctrico é uma força por unidade de carga, como tal é expresso em *newtons por coulomb*, N/C
- Uma carga pontual produz um campo eléctrico radial que aponta para fora da carga se esta é positiva e para dentro se esta é negativa



- Assim uma carga Q_2 no campo \vec{E}_1 produzido por uma carga Q_1 sente uma força electrostática,

$$\vec{F}_{12} = Q_2 \vec{E}_1. \quad (3.2)$$

- Desta expressão conclui-se naturalmente que o campo total criado por N cargas é a soma vectorial dos campos individuais de cada uma das cargas, em acordo com o princípio da sobreposição,

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (3.3)$$

3.2 Campo \vec{E} criado por uma distribuição contínua de cargas

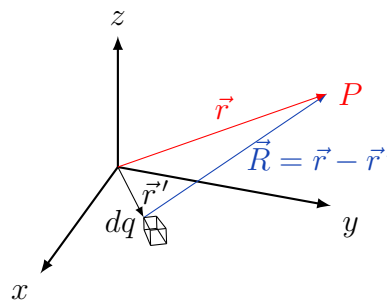
- Consideremos uma distribuição contínua de carga
- Uma carga elementar dq cria num ponto P do espaço à distância R um campo eléctrico,

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \hat{R} \quad (3.4)$$

- O campo total é a soma dos campos criados em P por cada uma das cargas elementares

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{R^2} \hat{R} \quad (3.5)$$

- dq deve ser substituído por λdl , σds ou ρdV , se a distribuição de cargas for respectivamente, linear, superficial ou volúmica
- O vector posição da carga é diferente do vector posição do ponto P
- Se \vec{r} é o vector posição do ponto P , onde queremos calcular o campo
- E se \vec{r}' é o vector posição da carga que cria o campo, então



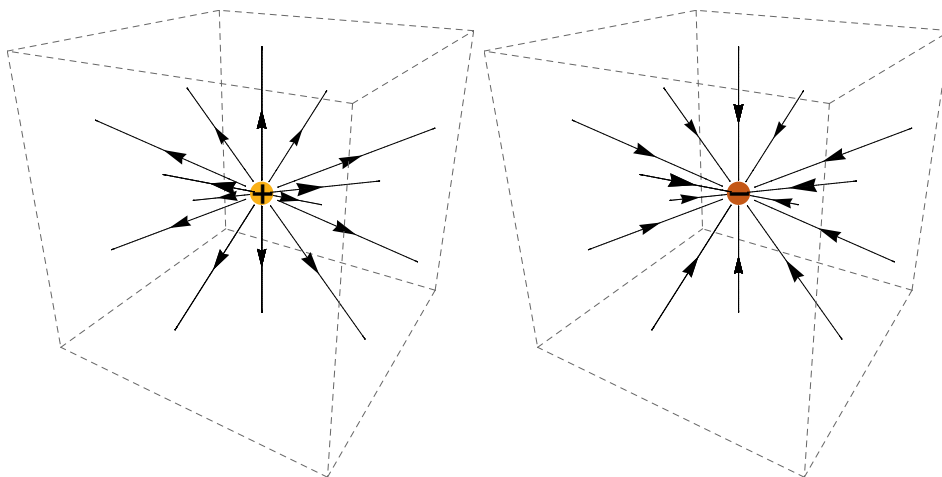
- Como $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$
- A expressão do campo elétrico em função de \vec{r} e \vec{r}' é,

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}'} \quad (3.6)$$

- $\hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \hat{R}$ é o versor que aponta da carga dq para o ponto P

3.3 Linhas de campo

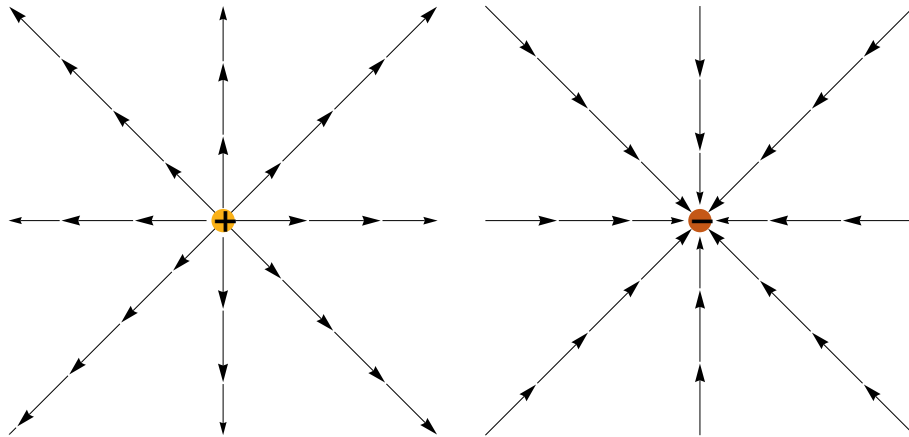
- Um campo eléctrico é uma função tridimensional e contínua no espaço
- Para melhor visualizar um campo com estas características é costume representar apenas um conjunto de linhas com setas, chamadas linhas de campo, seguindo as seguintes regras:
 - *Em qualquer ponto a direcção do campo eléctrico é tangente à linha de campo e o sentido é o indicado pelas setas.*
 - *A magnitude do campo eléctrico é proporcional ao número de linhas de campo que atravessam uma secção unitária perpendicular às linhas.*
- Resumindo o campo aponta na direcção das setas e é intenso onde as linhas estão muito juntas e fraco onde estão muito afastadas
- Deste modo as linhas do campo eléctrico criado por uma carga pontual positiva formam um conjunto de linhas radiais, igualmente separadas pelo mesmo ângulo sólido, que divergem da carga, enquanto que as linhas de campo convergem numa carga pontual negativa



- Em ambos estes casos o número de linhas de campo por unidade de superfície perpendicular às linhas (*qual a forma desta superfície?*) decresce com $1/r^2$ pois o número de linhas é fixo mas a área da superfície é $4\pi r^2$
- Então, como esperado, a intensidade do campo eléctrico diminui com o inverso do quadrado da distância à carga, $1/r^2$, respeitando-se a lei de Coulomb

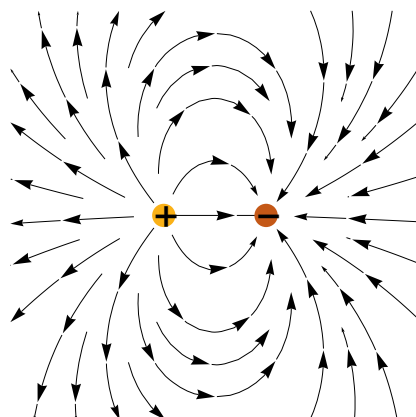
Propriedades das Linhas de Campo Eléctrico

- Resulta da definição que as linhas de campo eléctrico:
 - Começam em cargas positivas e terminam em cargas negativas.
 - No espaço vazio entre as cargas, são contínuas (o campo existe em todo o espaço).
 - Nunca se cruzam (o campo eléctrico só pode ter um valor em cada ponto do espaço).
 - Se as linhas de campo se tocam então o campo nesse ponto é nulo. *Porquê?*
- As representações tridimensionais anteriores de campos eléctricos criados por cargas pontuais são em geral difíceis de visualizar como tal são comuns representações bidimensionais das linhas de campo



- As linhas de campo ajudam a visualizar o campo total duma distribuição de cargas
- Não podemos calcular o campo total duma distribuição de cargas sobrepondo as linhas de campo de cada carga
- E.g. a figura anterior mostra as linhas de campo em torno de uma carga + e - (isoladas)

- A figura seguinte mostra as linhas de campo em torno de um par de cargas $+$ e $-$, o dipolo eléctrico que estudaremos mais tarde

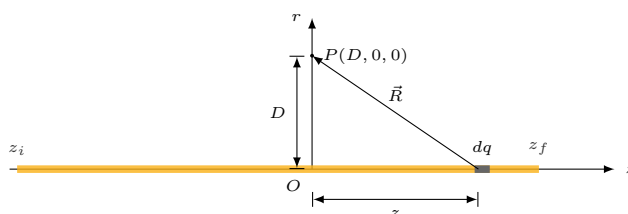


3.4 Exemplos do cálculo do campo eléctrico criado por distribuições homogéneas de cargas

3.4.1 Campo criado por um fio retilíneo carregado

Exercício 14

Consideremos uma distribuição linear, contínua e homogénea, de cargas λ dispostas ao longo de um fio. Qual o campo eléctrico criado por esta distribuição, num ponto P à distância D do fio?



Da definição de campo eléctrico temos,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R^2} \hat{R}$$

- Esta distribuição tem simetria cilíndrica pelo que é apropriado usar coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z)

- Assim $dq = \lambda dz$ onde dz é o comprimento elementar que contém a carga dq
- O vector posição de P relativamente a dq é dado por

$$\vec{R} = -z\hat{k} + D\hat{r}$$

e o seu módulo e versor são,

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{z^2 + D^2}$$

$$\hat{R} = \frac{-z\hat{k} + D\hat{r}}{\sqrt{z^2 + D^2}}$$

- Temos então todos os "ingredientes" para o cálculo de \vec{E} ,

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{z^2 + D^2} \frac{-z\hat{k} + D\hat{r}}{\sqrt{z^2 + D^2}} \lambda dz$$

- Repare-se que \vec{E} tem duas componentes,

$$\vec{E} = E_z\hat{k} + E_r\hat{r}$$

uma paralela ao fio, a outra perpendicular

- Calculemos então o integral entre os pontos z_i e z_f , o início e o fim do fio,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{z_i}^{z_f} \frac{-z dz \hat{k}}{(z^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_{z_i}^{z_f} \frac{D dz \hat{r}}{(z^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

- Mudando de variável $u = z^2 + D^2$ vem $z dz = du/2$ logo o 1º integral fica,

$$\int \frac{-z dz \hat{k}}{(z^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} = \hat{k} \int \frac{-du}{2u^{3/2}} = \hat{k} u^{-1/2} = \frac{\hat{k}}{\sqrt{z^2 + D^2}}$$

- Fazendo a mudança de variável $z = D \tan \theta$ vem $dz = D \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ concluindo-se rapidamente que o 2º integral fica

$$\begin{aligned} \int \frac{dz \hat{r}}{(D^2 + z^2)^{3/2}} &= \int \frac{D d\theta}{\cos^2 \theta \left(\frac{D^2}{\cos^2 \theta}\right)^{3/2}} \hat{r} \\ &= \frac{\hat{r}}{D^2} \int \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\sin \theta}{D^2} \hat{r} \end{aligned}$$

como $\sin \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+D^2}}$ vem

$$= \frac{z \hat{r}}{D^2 \sqrt{z^2 + D^2}}$$

- Usando estes resultados o campo eléctrico vem,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{z_i}^{z_f} \frac{-z dz \hat{k}}{(z^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_{z_i}^{z_f} \frac{D dz \hat{r}}{(z^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\left[\frac{\hat{k}}{\sqrt{z^2 + D^2}} \right]_{z_i}^{z_f} + \left[\frac{z \hat{r}}{D\sqrt{z^2 + D^2}} \right]_{z_i}^{z_f} \right) \end{aligned}$$

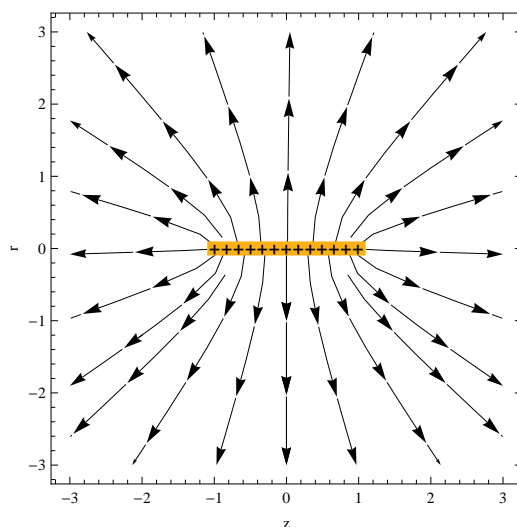
- A componente paralela ao fio é,

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z_f^2 + D^2}} - \frac{1}{\sqrt{z_i^2 + D^2}} \right)$$

- A componente perpendicular ao fio é,

$$E_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z_f}{D\sqrt{z_f^2 + D^2}} - \frac{z_i}{D\sqrt{z_i^2 + D^2}} \right)$$

- A figura seguinte ilustra as linhas de campo do campo \vec{E} em torno do fio, indicado a amarelo
- Apenas são mostradas linhas no plano rz com $\phi = 0$ e rz com $\phi = \pi$ (valores $r < 0$)



Fio infinito

- No limite em que o comprimento do fio tende para infinito, então $z_i \rightarrow -\infty$ e $z_f \rightarrow +\infty$

- A componente paralela ao fio anula-se,

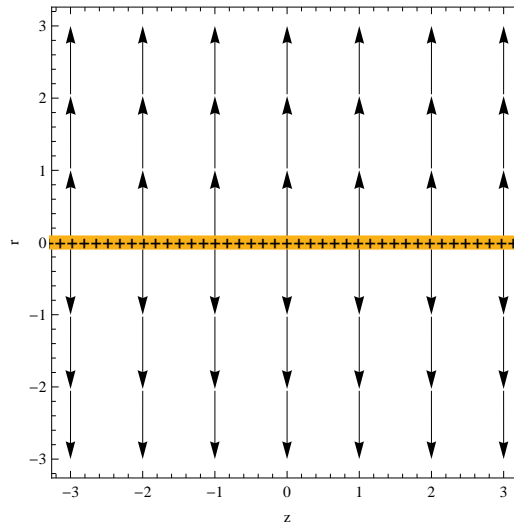
$$E_z = 0$$

- A componente perpendicular ao fio fica,

$$E_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{D\sqrt{1 + \frac{D^2}{z_f^2}}} + \frac{1}{D\sqrt{1 + \frac{D^2}{z_i^2}}} \right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D}$$

- \vec{E} é independente de z
- A figura seguinte ilustra as linhas de campo do campo \vec{E} em torno do fio, indicado a amarelo
- Apenas são mostradas linhas no plano rz com $\phi = 0$ e rz com $\phi = \pi$ (valores $r < 0$)



Ponto no espaço muito afastado dum fio finito

- Consideremos agora $z_i = -L/2$ e $z_f = L/2$ ou seja um fio finito de comprimento L
- Calculemos o campo eléctrico criado por este fio num ponto muito afastado do fio, onde $D \gg L$

- A componente paralela ao fio anula-se,

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{L^2/4 + D^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2/4 + D^2}} \right) = 0$$

- A componente perpendicular ao fio fica,

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{L}{2D\sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4}}} + \frac{L}{2D\sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4}}} \right) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{D\sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4}}} \end{aligned}$$

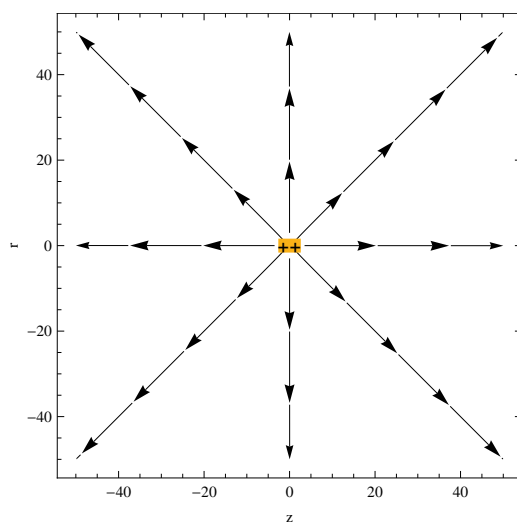
- Como $D \gg L$ então $\sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4}} = D\sqrt{1 + \frac{L^2}{4D^2}} \approx D$

- Assim,

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 D^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \end{aligned}$$

que é o campo criado por uma carga pontual $Q = \lambda L$

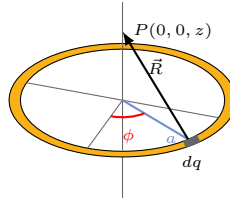
- *O fio comporta-se como uma carga pontual*
- A figura seguinte ilustra as linhas de campo do campo \vec{E} em torno do fio, indicado a amarelo
- Apenas são mostradas linhas no plano rz com $\phi = 0$ e rz com $\phi = \pi$ (valores $r < 0$)



3.4.2 Campo criado por um anel fino carregado

Exercício 15

Consideremos uma distribuição linear, contínua e homogénea, de cargas λ dispostas ao longo de um anel de raio a e largura dr . Qual o campo eléctrico criado por esta distribuição, num ponto P no eixo do anel e a uma altura z ?



- Da definição de campo eléctrico temos,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R^2} \hat{R}$$

- Esta distribuição tem simetria cilíndrica pelo que é apropriado usar coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z)
- Assim $dq = \lambda a d\phi$ onde $a d\phi$ é o comprimento elementar que contém a carga dq
- O vector posição de P relativamente a dq é dado por

$$\vec{R} = -a\hat{r} + z\hat{k}$$

e o seu módulo e versor são,

$$|\vec{R}| = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$\hat{R} = \frac{-a\hat{r} + z\hat{k}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

- Temos agora todos os "ingredientes" para o cálculo de \vec{E} ,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\phi}{a^2 + z^2} \frac{-a\hat{r} + z\hat{k}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

- Repare-se que \vec{E} tem duas componentes,

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_z \hat{k}$$

uma paralela ao plano do anel e outra perpendicular

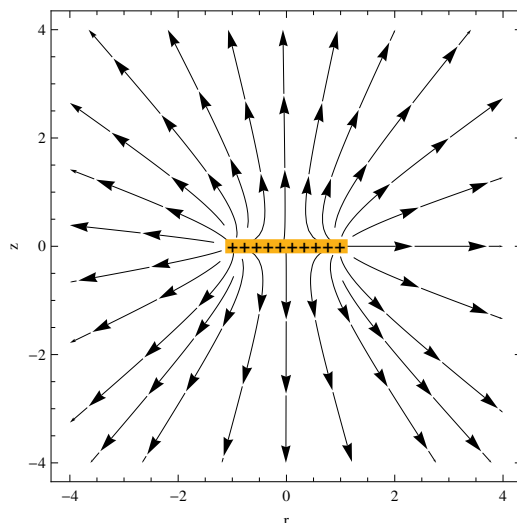
- Calculemos então o integral,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \hat{r} d\phi + \frac{az\hat{k}}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi \right)$$

- O 1º integral é nulo (*Porquê?*), $\int_0^{2\pi} \hat{r} d\phi = 0$
- No eixo do anel o campo eléctrico tem apenas componente segundo \hat{k} ,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi az\hat{k}}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{az\lambda}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \end{aligned}$$

- A figura seguinte ilustra as linhas de campo do campo \vec{E} em torno do anel, indicado a amarelo
- Apenas são mostradas linhas no plano rz com $\phi = 0$ e rz com $\phi = \pi$ (valores $r < 0$)



Ponto no espaço muito afastado do anel

- Calculemos o campo eléctrico criado por este anel num ponto muito afastado, $z \gg a$

- Como vimos o campo é dado por,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{az\lambda}{2\epsilon_0(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \\ &= \frac{az\lambda}{2\epsilon_0z^3\left(\frac{a^2}{z^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}\end{aligned}$$

- Como $z \gg a$ então $\left(\frac{a^2}{z^2}+1\right)^{\frac{3}{2}} \approx 1$

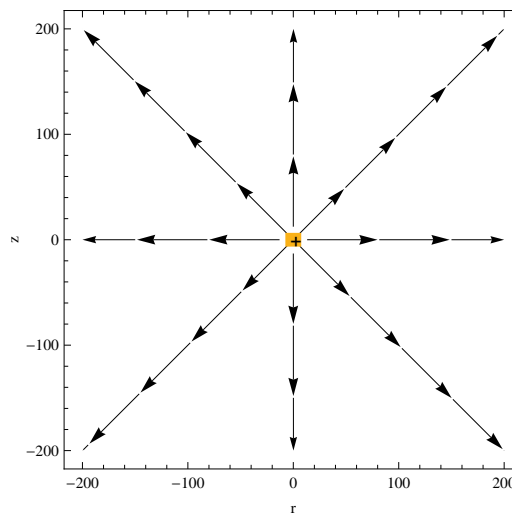
- Assim

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{az\lambda}{2\epsilon_0z^3\left(\frac{a^2}{z^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \\ &= \frac{az\lambda}{2\epsilon_0z^3}\hat{k}\end{aligned}$$

- A carga total no anel é $Q = 2\pi a\lambda$ logo,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0z^2}\hat{k}$$

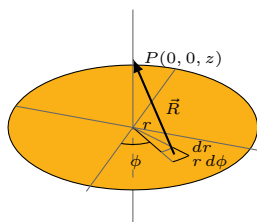
- Que é o campo criado por uma carga pontual
- A figura seguinte ilustra as linhas de campo do campo \vec{E} em torno do anel, indicado a amarelo
- Apenas são mostradas linhas no plano rz com $\phi = 0$ e rz com $\phi = \pi$ (valores $r < 0$)



3.4.3 Campo criado por um disco carregado

Exercício 16

Consideremos uma distribuição linear, contínua e homogénea, de cargas σ dispostas ao longo de um disco de raio a . Qual o campo eléctrico criado por esta distribuição, num ponto P no eixo do disco e a uma altura z ?



- Da definição de campo eléctrico temos,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R^2} \hat{R}$$

- Esta distribuição tem simetria cilíndrica pelo que é apropriado usar coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z)
- Assim $dq = \sigma dr r d\phi$ onde $dr r d\phi$ é área elementar que contém a carga dq
- O vector posição de P relativamente a dq é dado por

$$\vec{R} = -r\hat{r} + z\hat{k}$$

e o seu módulo e versor são,

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\hat{R} = \frac{-r\hat{r} + z\hat{k}}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

- Temos agora todos os "ingredientes" para o cálculo de \vec{E} ,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r dr d\phi}{r^2 + z^2} \frac{-r\hat{r} + z\hat{k}}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r dr d\phi}{r^2 + z^2} \frac{-r\hat{r} + z\hat{k}}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{-r^2 dr \hat{r} d\phi}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{zr dr d\phi}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \right)\end{aligned}$$

- O 1º integral duplo é nulo (*Porquê?*)
- Resta calcular o 2º integral duplo

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{zr dr d\phi}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

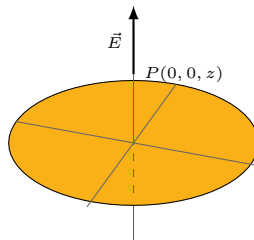
integrando em ϕ

$$= \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

- No exemplo anterior encontrámos o mesmo integral $\int \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{r^2 + z^2}}$
- Substituindo na expressão do campo obtemos,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k}\end{aligned}$$

- *No eixo do disco o campo aponta na perpendicular ao plano do disco*



Campo num ponto do eixo muito afastado do disco

- Investiguemos o que acontece quando $z \gg a$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{z^2} + 1}} \right) \hat{k}\end{aligned}$$

quando $z \gg a$ então $a^2/z^2 \approx 0$

- Expandindo o segundo termo em série de Taylor em torno de $x = 0$ onde $x = a/z$,

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \approx 1 - \frac{x^2}{2} + O[x]^3 = 1 - \frac{a^2}{2z^2} + O\left[\frac{1}{z}\right]^3$$

- Substituindo na expressão do campo obtemos,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{a^2}{z^2} \hat{k} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{k}\end{aligned}$$

- Que é o campo de uma carga pontual. *Nota:* $Q = \sigma\pi a^2$

Plano infinito

- Investiguemos o que acontece quando $a \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - 0) \hat{k} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}\end{aligned}$$

- *Um plano infinito com uma distribuição superficial de cargas, homogénea, produz um campo eléctrico que é, em qualquer ponto do espaço, constante em módulo, direcção e sentido*

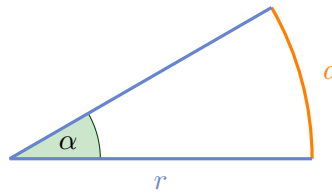
Aula 4

Lei de Gauss

4.1 Ângulo sólido

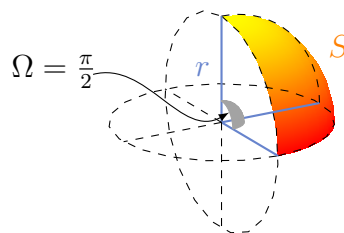
- Num plano define-se o ângulo plano α entre duas semi-retas que se cruzam num ponto, como sendo a razão entre o comprimento do arco a entre elas e o raio r desse arco,

$$\alpha = \frac{a}{r} \tag{4.1}$$



- A unidade de ângulo no SI é o radiano
- O ângulo é uma grandeza adimensional, i.e. não tem dimensões
- Um círculo varre um ângulo de 2π radianos
- De forma análoga no espaço 3D o ângulo sólido Ω varrido por parte duma superfície esférica com área S e raio r é igual à razão,

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$



- A unidade de ângulo sólido no SI é o esferorradiano ou esterradiano, símbolo sr
- O ângulo sólido também é uma grandeza adimensional
- Uma esfera de raio r varre um ângulo sólido de 4π esferorradianos

$$\Omega = \frac{\text{superfície da esfera}}{\text{raio da esfera}^2} = \frac{\int dS}{r^2}$$

com dS em coordenadas esféricas (ver pág. 262)

$$\begin{aligned} &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{r^2} \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

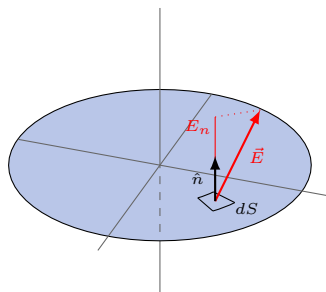
- O ângulo sólido elementar é dado por:

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{r^2} \\ &= \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

4.2 O fluxo do campo eléctrico

- O fluxo do campo eléctrico numa superfície elementar dS é definido por

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E_n dS$$



onde $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$

e \hat{n} é um vetor normal à superfície dS

- O fluxo de \vec{E} em dS é igual ao produto da componente normal do campo E_n pela área da superfície dS
- O fluxo numa superfície finita S é o integral

$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

- Se a superfície for fechada (e.g. esfera, cubo) usa-se o símbolo \oint_S para indicar que a integração é feita sobre toda a superfície fechada,

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

- Usaremos a convenção que o *fluxo é positivo se o campo eléctrico aponta para fora da superfície* e negativo se aponta para dentro.

4.3 Lei de Gauss

- Em 1835 Karl Gauss desenvolveu uma das mais úteis ferramentas em electrostática, que hoje é conhecida pela lei de Gauss,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (4.2)$$

- S é qualquer superfície fechada que envolve a carga Q_{int}
- \hat{n} é o versor normal ao elemento de superfície dS onde se considera o campo eléctrico e aponta para fora de S
- Q_{int} é a carga total *INTERIOR* à superfície S

$$Q_{int} = \sum_{\text{interior de } S} q_i \quad (4.3)$$

Superfície gaussiana

- Se a carga está distribuída continuamente por um volume V então cada volume elementar dV contém a carga ρdV e assim,

$$Q_{int} = \int_{\substack{\text{volume} \\ \text{interior de } S}} \rho dV \quad (4.4)$$

- A superfície fechada S chama-se *superfície gaussiana*

- O integral $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$ representa o *fluxo de \vec{E} em S* e é comum representar o fluxo pela letra Φ
- Assim uma forma mais compacta de escrever a lei de Gauss é

$$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (4.5)$$

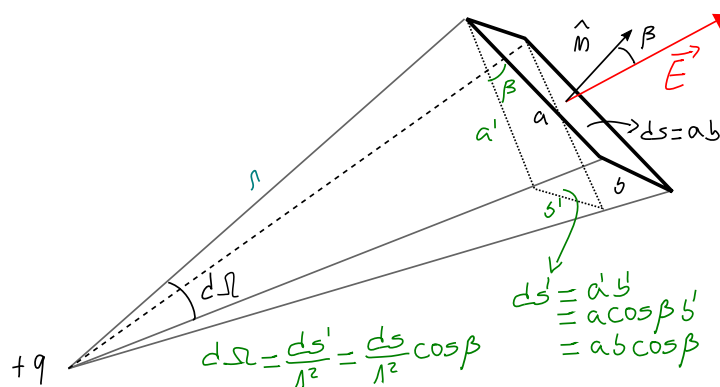
O fluxo eléctrico numa qualquer superfície fechada, é igual à carga total envolvida pela superfície, dividida por ϵ_0

Demonstração da lei de Gauss

- Consideremos uma superfície gaussiana S que envolve uma carga pontual, q .
- O fluxo do campo numa superfície elementar dS é,

$$\begin{aligned} d\Phi_E &= \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= E dS \cos \beta \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos \beta \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{aligned}$$

- onde β é o ângulo que o campo \vec{E} faz com a normal \hat{n} à superfície ds e $d\Omega = \frac{1}{r^2} dS \cos \beta$ é o ângulo sólido com origem na carga e que varre dS .



- Para obter o fluxo em toda a superfície S (fechada) temos de integrar sobre o ângulo sólido de 4π .

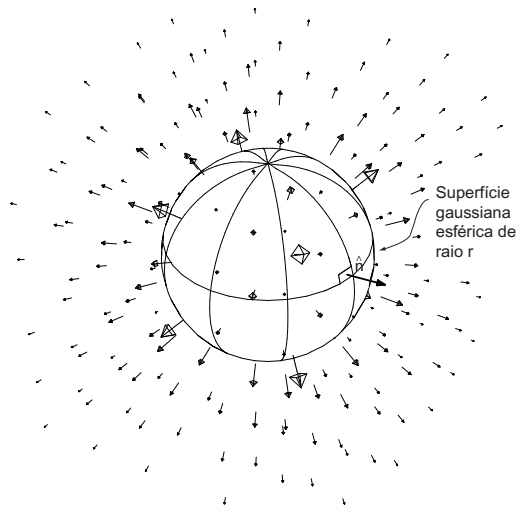
$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

4.3.1 Campo de uma carga pontual - sup. Gaussiana esférica

Exercício 17

Calcular, usando a lei de Gauss, o módulo do campo elétrico criado por uma carga pontual Q_1 num ponto P a uma distância r de Q_1

Já vimos anteriormente que o campo \vec{E} criado por uma carga pontual Q_1 tem simetria esférica. Considerando uma superfície gaussiana esférica, de raio r e centrada no ponto onde está Q_1 , podemos tirar partido da simetria esférica de \vec{E} (ver figura)



Assim,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

sendo \vec{E} perpendicular a S para qualquer ponto vem,

$$\Phi_E = \oint_S E dS,$$

e como E é constante em qualquer ponto de S então,

$$\Phi_E = E \oint_S dS.$$

Ora o integral,

$$\begin{aligned}\oint_S dS &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 4\pi r^2\end{aligned}$$

que é a área da superfície duma esfera

Assim da lei de Gauss, o fluxo é dado por,

$$\begin{aligned}E \oint_S dS &= \frac{Q_1}{\epsilon_0} \\ E 4\pi r^2 &= \frac{Q_1}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Logo o módulo do campo eléctrico é,

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Já vimos esta equação anteriormente

Nota: Apenas foi calculado o módulo do vector \vec{E}

A direcção (perpendicular a S) e sentido (paralelo a \hat{n}) foram deduzidos da simetria da carga.

Lei de Gauss

- Em que casos é útil a lei de Gauss?
- *A lei de Gauss é válida para qualquer superfície gaussiana, no entanto é uma ferramenta muito poderosa para simplificar o trabalho de cálculo quando a superfície gaussiana tem a mesma simetria do campo*
- Note-se que é necessário saber previamente a direcção e o sentido de \vec{E} para que o campo seja calculado rapidamente

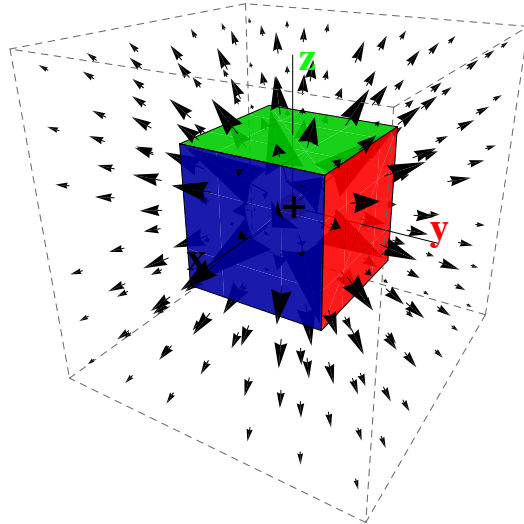
4.3.2 Campo de uma carga pontual - sup. Gaussiana cúbica

Exercício 18

Verificar a validade da lei de Gauss no problema anterior, considerando uma superfície gaussiana cúbica, centrada no ponto onde está Q_1 e com arestas de comprimento 2.

Este exercício mostra como o cálculo se torna muito mais complexo, só pela escolha duma superfície gaussiana inapropriada, que não tem a simetria do campo.

Repare-se que Φ_E é a soma dos fluxos em cada um dos 6 lados da superfície gaussiana e que estes são iguais entre si,



$$\begin{aligned}
 \Phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS \\
 &= \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 \, dS_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 \, dS_2 \\
 &\quad + \dots + \int_{S_6} \vec{E} \cdot \hat{n}_6 \, dS_6 \\
 &= 6 \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 \, dS_1.
 \end{aligned}$$

- Usemos um referencial cartesiano (x, y, z) cuja origem coincide com a carga Q_1

- Sem perda de generalidade podemos escolher $\hat{n}_1 = \hat{k}$

- Como vimos

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

e como $\hat{r} = \vec{r}/r$ podemos escrever

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- O vector posição de qualquer ponto na superfície S_1 (onde queremos calcular o campo) é

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z_1 \hat{k}$$

Campo de uma carga pontual

- Assim $r^3 = (x^2 + y^2 + z_1^2)^{3/2}$ e temos que

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot \hat{n}_1 \\ &= \frac{Q_1 z_1}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z_1^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

- Como $dS_1 = dx dy$, podemos então iniciar o cálculo do fluxo de \vec{E} na superfície S_1 ,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dS_1 \\ &= \int_{-x_1}^{x_1} \int_{-y_1}^{y_1} \frac{Q_1 z_1}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z_1^2)^{3/2}} dx dy. \end{aligned}$$

- A superfície cúbica está centrada na origem e o comprimento da aresta é 2, logo $x_1 = y_1 = z_1 = 1$.

- Passando as constantes para fora do integral vem,

$$\Phi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} dx dy,$$

- Como

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} dx = \frac{2}{(1 + y^2)\sqrt{2 + y^2}},$$

vem

$$\Phi_1 = \frac{2Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} dy.$$

- O integral

$$\int \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} dy = \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{2+y^2}}\right),$$

logo

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{2Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \right) \\ &= \frac{2Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{-\pi}{6} \right) \\ &= \frac{Q_1}{6\epsilon_0} \end{aligned}$$

- Finalmente podemos calcular então o fluxo total,

$$\Phi_E = 6\Phi_1 = \frac{Q_1}{\epsilon_0},$$

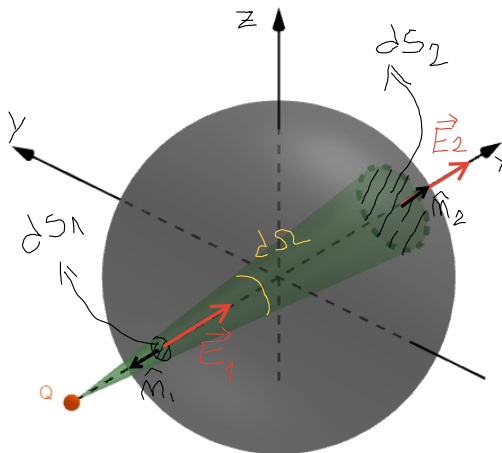
em perfeito acordo com a lei de Gauss.

4.3.3 Fluxo de uma carga exterior à superfície Gaussiana

Fluxo de uma carga exterior à superfície Gaussiana

Exercício 19

Calcular o fluxo do campo elétrico numa superfície fechada esférica, criada por uma carga pontual Q exterior à superfície Gaussiana.



- Consideremos uma carga Q fora duma superfície esférica.
- Qual o fluxo elementar do campo desta carga em dS_1 e dS_2 ?
- O fluxo elementar em dS_1 é,

$$d\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 dS_1 = -E_1 dS_1$$

- O fluxo elementar em dS_2 é,

$$d\phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 dS_2 = E_2 dS_2$$

- Usando a lei de Coulomb,

$$d\phi_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} dS_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_1}{r_1^2}$$

$$d\phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} dS_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_2}{r_2^2}$$

- Como as duas superfícies são varridas pelo mesmo ângulo sólido,

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} = d\Omega$$

- Assim,

$$d\phi_1 = -d\phi_2$$

são iguais com sinal oposto, logo $d\phi_1 + d\phi_2 = 0$.

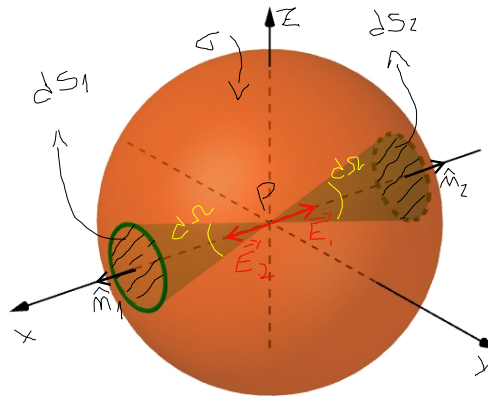
- O mesmo se passa no resto da superfície, logo *o fluxo total do campo elétrico criado pela carga Q exterior à superfície é nulo.*
- Por simplicidade considerámos uma superfície esférica, mas o resultado é válido para qualquer superfície fechada.

4.3.4 Campo no interior duma esfera oca homogeneamente carregada

Campo no interior duma esfera oca carregada

Exercício 20

Consideremos uma esfera oca, de raio R , carregada com uma densidade superficial de carga σ , constante, homogénea e isotrópica. Qual é o campo elétrico no interior da esfera?



- Calculemos primeiro o campo no ponto P no centro da esfera.
- O campo da carga elementar dQ_1 que está na superfície elementar dS_1 é,

$$d\vec{E}_1 = -\frac{dQ_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r}$$

- Considerando a superfície elementar $dS_2 = dS_1 = dS$ (diametralmente oposta a dS_1) o campo da carga elementar dQ_2 é,

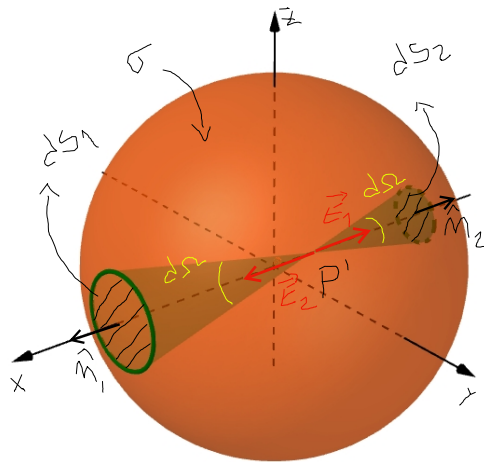
$$d\vec{E}_2 = \frac{dQ_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r}.$$

- Como σ é constante e homogênea, então $dQ_1 = \sigma dS_1 = \sigma dS_2 = dQ_2$ logo,

$$d\vec{E}_1 = -d\vec{E}_2$$

ou seja o campo criado por estas duas cargas no centro da esfera é nulo.

- Repetindo o argumento para qualquer outro par de cargas, diametralmente oposto, concluí-se que *no centro da esfera oca o campo total é nulo.*
- Qual será o campo total \vec{E} noutro ponto interior P' diferente do centro da esfera?



- P' está a uma distância r_1 de dS_1 e r_2 de dS_2 .
- O campo em P' da carga elementar dQ_1 que está na superfície dS_1 é,

$$d\vec{E}_1 = -\frac{dQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{i}.$$

- O campo da carga elementar dQ_2 (oposta a dQ_1) é,

$$d\vec{E}_2 = \frac{dQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \hat{i}.$$

- Como vimos antes $dQ_1 = \sigma dS_1$ e $dQ_2 = \sigma dS_2$ logo,

$$d\vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_1}{r_1^2} \hat{i} \quad \text{e} \quad d\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_2}{r_2^2} \hat{i}$$

- Como $dS_1/r_1^2 = dS_2/r_2^2 = d\Omega$ i.e. fazem o mesmo ângulo sólido com P' então,

$$d\vec{E}_1 = -d\vec{E}_2$$

- O campo elétrico total criado por estas duas cargas em P' é também nulo.
- Seguindo o mesmo raciocínio podemos concluir que qualquer outro par de cargas elementares abrangidas pelo mesmo ângulo sólido, criam um campo elétrico em P' nulo.
- Podemos concluir que a carga superficial distribuída homogeneamente não cria campo elétrico no interior da esfera.

Aula 5

Aplicações da lei de Gauss

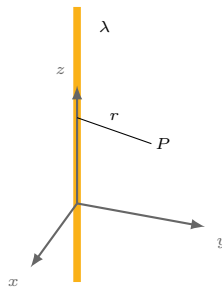
5.1 Distribuições de carga com simetria cilíndrica, plana e esférica

5.1.1 Campo de distribuições de carga com simetria cilíndrica

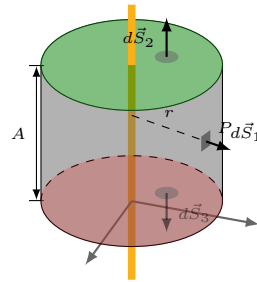
Campo criado por um fio muito longo com $\lambda = \text{constante}$

Exercício 21

Consideremos uma distribuição linear de cargas, $\lambda = \text{constante}$, ao longo de um fio infinito. Usando a lei de Gauss, calcular novamente o campo criado por esta distribuição num ponto P qualquer do espaço, a uma distância r do fio.



- Vamos progredir com grande detalhe para explicitar claramente todos os passos, por vezes implícitos, no uso da lei de Gauss
- Como a distribuição de carga tem simetria cilíndrica usemos uma *superfície gaussiana cilíndrica*, cujo eixo coincide com o eixo do fio e tem raio r e altura A



- A lei de Gauss diz que $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
- Calculemos o fluxo de \vec{E} em toda a superfície gaussiana,

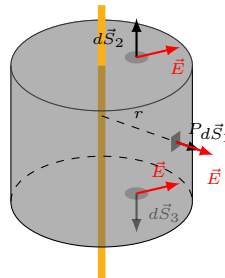
$$\begin{aligned} \Phi_E &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \\ &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 \end{aligned}$$

- Anteriormente vimos que \vec{E} é perpendicular ao eixo do fio
- Contudo por argumentos de simetria também concluímos que \vec{E} é perpendicular ao eixo do fio
- Assim

$$\vec{E} \perp d\vec{S}_2 \wedge \vec{E} \perp d\vec{S}_3$$

então

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = 0$$



- Logo $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_1$
- Mas $\vec{E} \parallel d\vec{S}_1$ (Porquê?) e $E = \text{constante}$ em toda a superfície gaussiana

- O fluxo de \vec{E} na superfície gaussiana

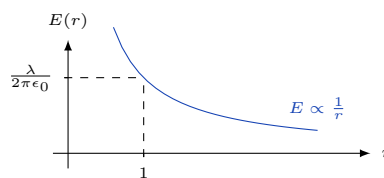
$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \\ &= \int E dS_1 \\ &= E \int dS_1 \\ &= E \int_0^A \int_0^{2\pi} dz r d\phi \\ &= 2\pi r A E\end{aligned}$$

- Pela lei de Gauss

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ 2\pi r A E &= \frac{\lambda A}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

então o módulo do campo eléctrico procurado

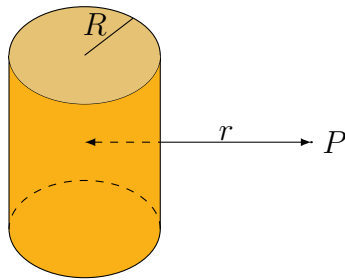
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



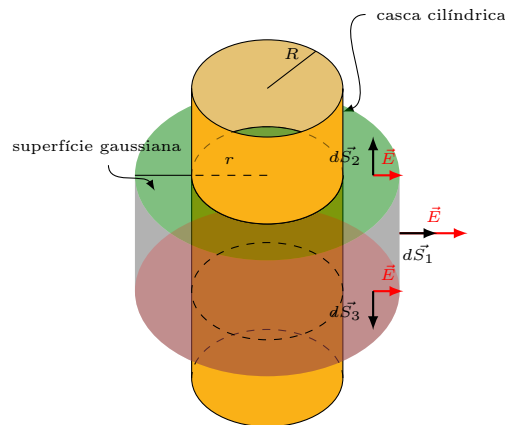
Campo criado por uma casca cilíndrica muito longa com $\sigma = \text{constante}$

Exercício 22

Consideremos uma distribuição superficial de cargas, $\sigma = \text{constante}$, ao longo de uma casca cilíndrica muito longa e com raio R . Usando a lei de Gauss, calcular o campo criado por esta distribuição num ponto P qualquer do espaço, a uma distância r do eixo da casca.



- A lei de Gauss diz que $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
- Primeiro devemos encontrar a direcção e o sentido de \vec{E}
- Por argumentos de simetria (*quais?*) podemos ver que \vec{E} é perpendicular ao eixo da casca
- Como a distribuição de carga tem simetria cilíndrica usemos uma superfície gaussiana cilíndrica, coaxial com a casca e com raio r e altura A



- Calculemos o fluxo de \vec{E} em toda a superfície gaussiana,

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \\ &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_3\end{aligned}$$

- Como

$$\vec{E} \perp d\vec{S}_2 \wedge \vec{E} \perp d\vec{S}_3$$

então

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = 0$$

- Logo $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_1$
- Mas $\vec{E} \parallel d\vec{S}_1$ (*Porquê?*) e $E = \text{constante}$ em toda a superfície S_1
- O fluxo de \vec{E} na superfície gaussiana

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \\ &= E \int_0^A \int_0^{2\pi} dz r d\phi \\ &= 2\pi r A E\end{aligned}$$

- Pela lei de Gauss

$$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- Resta calcular a carga *interna* à superfície gaussiana,

$$Q_{int} = \int_Q dQ$$

como $dQ = \sigma dz R d\phi$ vem

$$\begin{aligned}&= \int_0^A \int_0^{2\pi} \sigma dz R d\phi \\ &= \sigma 2\pi R A\end{aligned}$$

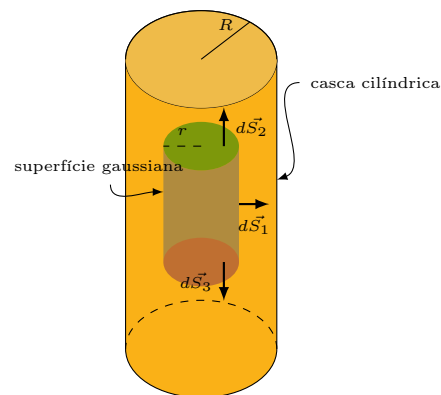
- Usando este resultado o fluxo de \vec{E} é dado por

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ 2\pi r A E &= \frac{\sigma 2\pi R A}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

assim para $r > R$

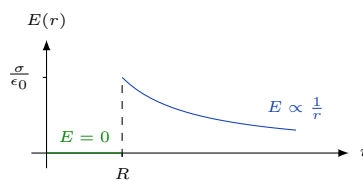
$$E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

- No caso em que $r < R$ escolhemos uma superfície gaussiana cilíndrica que passa por P
- Não há carga interior a esta superfície, logo o fluxo do campo \vec{E} é nulo nesta superfície
- Como a superfície pode ser qualquer uma (com $r < R$) então $\vec{E} = 0$ no interior da casca cilíndrica



- O módulo do campo eléctrico procurado é

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

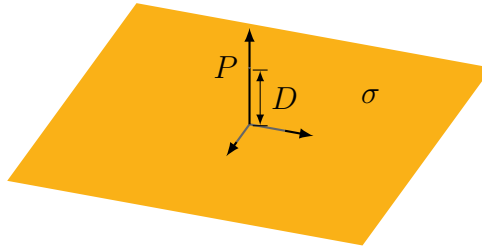


5.1.2 Campo de distribuições de carga com simetria plana

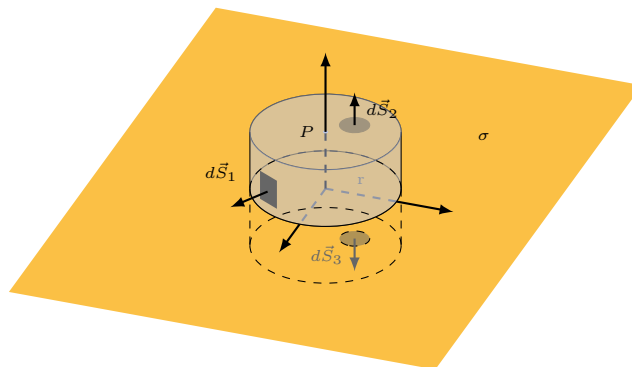
Campo criado por um plano infinito com $\sigma = \text{constante}$

Exercício 23

Consideremos uma distribuição superficial de cargas, $\sigma = \text{constante}$, sobre um plano infinito. Usando a lei de Gauss, calcular o campo criado por esta distribuição num ponto P qualquer do espaço, a uma distância D do plano.

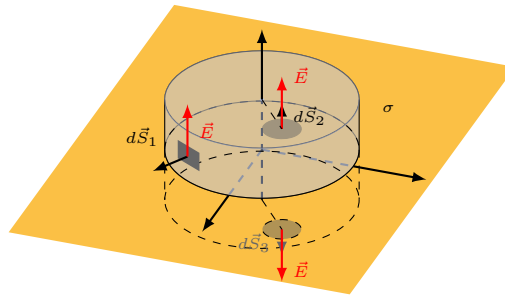


- A lei de Gauss diz que $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
- Primeiro devemos encontrar a direcção e o sentido de \vec{E} .
- Por argumentos de simetria (*quais?*) podemos ver que \vec{E} é perpendicular ao plano carregado e a sua intensidade é constante para qualquer ponto à mesma distância do plano carregado.
- Usemos uma superfície gaussiana com faces paralelas e perpendiculares ao plano como um cilindro de raio r e meia altura D



- Calculemos o fluxo de \vec{E} em toda a superfície gaussiana,

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \\ &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 \end{aligned}$$



- Verifica-se que,

$$\vec{E} \perp d\vec{S}_1 \wedge \vec{E} \parallel d\vec{S}_2 \wedge \vec{E} \parallel d\vec{S}_3$$

- Então

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = 0 \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = E dS_2$$

- Logo $\Phi_E = 2 \int E dS_2$

- Como $E = \text{constante}$ em toda a superfície S_2 ou S_3 vem

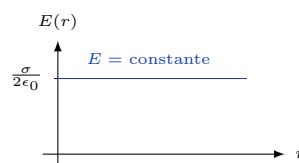
$$\begin{aligned} \Phi_E &= 2 \int E dS_2 \\ &= 2E\pi r^2 \end{aligned}$$

- A carga interna é a carga que está no círculo de raio r que resulta da intercepção da superfície gaussiana com o plano

$$Q_{int} = \sigma \pi r^2$$

- Logo

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ 2E\pi r^2 &= \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

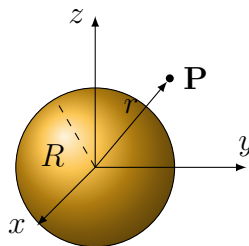


5.1.3 Campo de distribuições de carga com simetria esférica

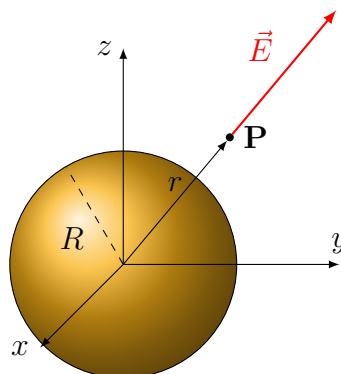
Campo criado por uma casca esférica com $\sigma = \text{constante}$

Exercício 24

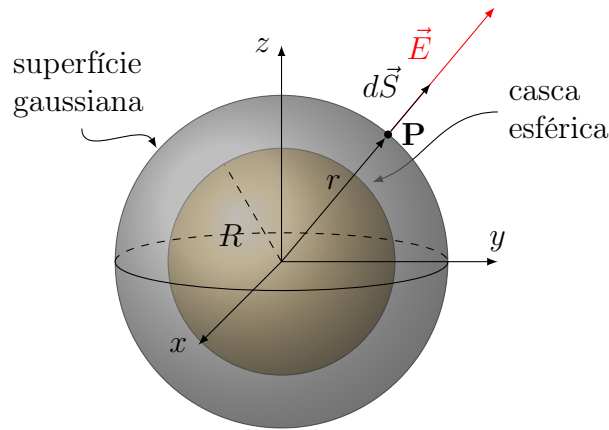
Consideremos uma distribuição superficial de cargas, $\sigma = \text{constante}$, sobre uma casca esférica de raio R . Usando a lei de Gauss, calcular o campo criado por esta distribuição num ponto P qualquer do espaço, a uma distância r do centro da superfície esférica.



- Consideremos primeiro um ponto P com $r > R$
- A lei de Gauss diz que $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
- Por argumentos de simetria (*quais?*) podemos ver que \vec{E} é radial e com módulo constante à distância r



- Como o campo tem simetria esférica usamos uma superfície gaussiana esférica de raio r concêntrica com a casca carregada



- O fluxo de \vec{E} em toda a superfície gaussiana é,

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= E \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= E 4\pi r^2\end{aligned}$$

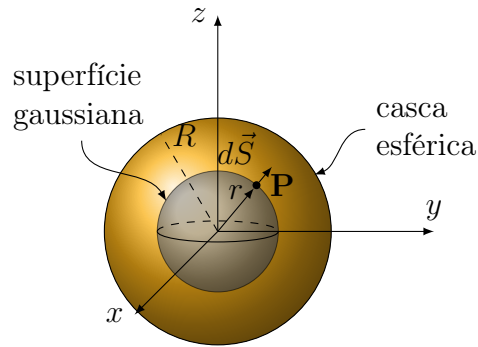
- A carga interna à superfície é,

$$\begin{aligned}Q_{int} &= \int \sigma dS \\ &= \sigma \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \sigma 4\pi R^2\end{aligned}$$

- Assim da lei de Gauss vem,

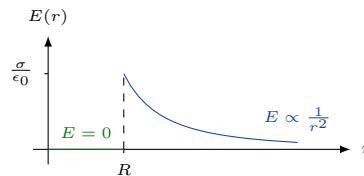
$$\begin{aligned}\Phi_E &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ E 4\pi r^2 &= \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

- No caso da superfície gaussiana ter raio $r < R$ a carga interna à superfície é $Q_{int} = 0$
- Então $\Phi_E = 0$ para qualquer S logo $E = 0$



- O módulo do campo eléctrico procurado é então,

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} & \text{se } r > R \end{cases}$$



Campo criado por uma esfera com $\rho = \text{constante}$

Exercício 25

Consideremos uma distribuição volumétrica de cargas, $\rho = \text{constante}$, sobre uma esfera de raio R . Usando a lei de Gauss, calcular o campo criado por esta distribuição num ponto P qualquer do espaço, a uma distância r do centro da esfera.

- Consideremos primeiro uma superfície gaussiana com raio $r > R$
- A lei de Gauss diz que $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
- Por argumentos de simetria podemos ver que \vec{E} é radial e com módulo constante à distância r
- Tendo o campo simetria esférica usemos uma superfície gaussiana esférica S de raio r concêntrica com a esfera carregada

- Assim o fluxo de \vec{E} em toda a superfície S é,

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= E \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= E 4\pi r^2\end{aligned}$$

- A carga interna à superfície é,

$$\begin{aligned}Q_{int} &= \int \rho dv \\ &= \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \rho \frac{4}{3} \pi R^3\end{aligned}$$

o integral em r resulta da carga ocupar todo o volume da esfera

- No caso da superfície gaussiana ter raio $r < R$ a carga interna à superfície é

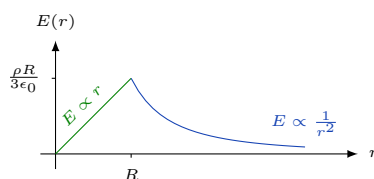
$$\begin{aligned}Q_{int} &= \rho \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \rho \frac{4}{3} \pi r^3\end{aligned}$$

- Assim da lei de Gauss vem,

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi \epsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

- O módulo do campo eléctrico procurado é então,

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{se } r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

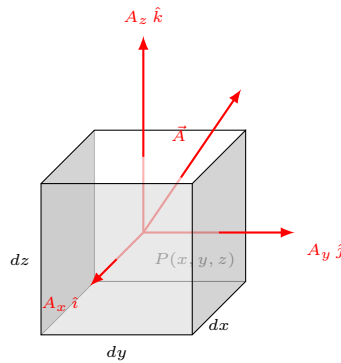


Aula 6

Divergência de um campo vectorial

6.1 A divergência de um campo vectorial \vec{A}

- Considere-se um vector \vec{A} num ponto do espaço $P(x, y, z)$
- Considere-se também o elemento de volume dV com lados dx , dy e dz centrado no ponto P
- Pretende-se calcular o fluxo do vector \vec{A} sobre a superfície de dV



- Calculemos primeiro o fluxo de A_y sobre as faces sombreadas perpendiculares ao eixo y
- O fluxo de A_y sobre a face da direita é

$$\vec{A}(x, y + \frac{dy}{2}, z) \cdot \hat{j} dx dz = A_y(x, y + \frac{dy}{2}, z) dx dz$$

- O fluxo de A_y sobre a face da esquerda é

$$\vec{A}(x, y - \frac{dy}{2}, z) \cdot (-1) \hat{j} dx dz = -A_y(x, y - \frac{dy}{2}, z) dx dz$$

- O fluxo total de A_y sobre as faces (sombreadas) perpendiculares ao eixo y é a soma dos dois termos anteriores

$$\begin{aligned} d\Phi_{A_y} &= A_y\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) dx dz - A_y\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) dx dz \\ &= \left(A_y\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) - A_y\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) \right) dx dz \end{aligned}$$

- Usando o conceito de derivada podemos escrever

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{A_y\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) - A_y\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right)}{dy}$$

portanto

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} dy = A_y\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) - A_y\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right)$$

- Então o fluxo total de A_y sobre as faces (sombreadas) perpendiculares ao eixo y é

$$\begin{aligned} d\Phi_{A_y} &= \left(A_y\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) - A_y\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) \right) dx dz \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial y} dy dx dz \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial y} dV \end{aligned}$$

- De forma análoga podemos calcular o fluxo total de A_x sobre as faces perpendiculares ao eixo x ,

$$d\Phi_{A_x} = \frac{\partial A_x}{\partial x} dV$$

- E o fluxo total de A_z sobre as faces perpendiculares ao eixo z ,

$$d\Phi_{A_z} = \frac{\partial A_z}{\partial z} dV$$

- O fluxo sobre todo o volume elementar dV será então,

$$\begin{aligned} d\Phi_A &= d\Phi_{A_x} + d\Phi_{A_y} + d\Phi_{A_z} \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV \\ &= \nabla \cdot \vec{A} dV \end{aligned}$$

- onde dV é o volume elementar e $\nabla \cdot \vec{A}$ é a divergência do campo vectorial \vec{A} no ponto P

6.2 O significado físico da divergência de \vec{A}

- O significado físico da divergência de \vec{A} pode ver-se em,

$$d\Phi_A = \nabla \cdot \vec{A} dV$$

logo

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{d\Phi_A}{dV}$$

- Assim a *divergência do campo vectorial \vec{A} no ponto P é o fluxo, por unidade de volume*, na superfície dum volume elementar, que envolve P
- Ou seja a *divergência é a densidade volumétrica de fluxo de \vec{A} no ponto P*

6.3 Divergência em coordenadas cartesianas

- Como vimos antes em coordenadas cartesianas a divergência de \vec{A} toma a forma,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \quad (6.1)$$

- Por vezes a divergência aparece escrita como

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k})$$

- Esta notação (algo comum) é perigosa!!
- A *divergência não é um vetor é um operador*
- Este aparente produto escalar (e.g. não é comutativo) só *funciona* em coordenadas cartesianas

6.3.1 Divergência em coordenadas cilíndricas e esféricas

- Por um raciocínio semelhante ao anterior pode mostrar-se que:
 - Em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) a divergência de \vec{A} toma a forma,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) a divergência de \vec{A} toma a forma,

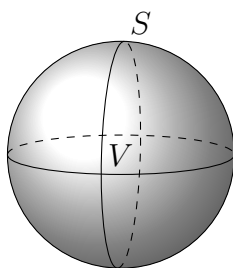
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

6.4 Teorema de Gauss

- O teorema de Gauss diz que para uma superfície fechada S que envolve um volume V o fluxo dum campo vectorial A através de S é dado por,

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV \quad (6.2)$$

onde $\nabla \cdot \vec{A}$ é a divergência de A



- Segundo a lei de Gauss, o fluxo através duma superfície fechada S , do campo eléctrico \vec{E} gerado por uma distribuição volumétrica de cargas de densidade ρ é,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

- Aplicando o teorema de Gauss ao campo \vec{E} temos,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

- Então do teorema de Gauss e da lei de Gauss conclui-se que,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

assim

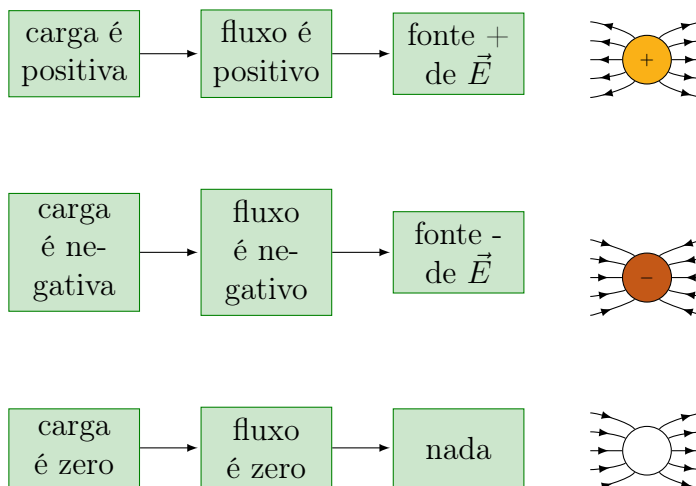
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.3)$$

esta equação é a primeira das equações de Maxwell na forma local

6.5 Significado físico de $\nabla \cdot \vec{E}$

- Recordar que a divergência $\nabla \cdot \vec{E}$ é também o fluxo de \vec{E} por unidade de volume

- Então como $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ significa que o fluxo de \vec{E} por unidade de volume é igual ao valor da densidade volumétrica de carga vezes uma constante
- I.e, num ponto do espaço onde



6.6 Aplicações do cálculo de $\nabla \cdot \vec{E}$

Exercício 26

Calcule a divergência do seguinte campo eléctrico, num ponto $P(x, y, z)$ do espaço,

$$\vec{E} = 2x^2y \hat{i} + y^2z \hat{j} + x^5y^{1/2} \hat{k}$$

e diga qual o valor da densidade de fluxo elementar nos pontos $P_1(2, 1, 0)$, $P_2(1, 1, -2)$ e $P_3(1, 1, -4)$

- Em coordenadas cartesianas a divergência de \vec{E} é,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

- As componentes do campo são,

$$E_x = 2x^2y$$

$$E_y = y^2z$$

$$E_z = x^5y^{1/2}$$

- Podemos assim efectuar o cálculo da divergência,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \left(\frac{\partial 2x^2y}{\partial x} + \frac{\partial y^2z}{\partial y} + \frac{\partial x^5y^{1/2}}{\partial z} \right) \\ &= 4xy + 2yz\end{aligned}$$

- Nos pontos $P_1(2, 1, 0)$, $P_2(1, 1, -2)$ e $P_3(1, 1, -4)$ a divergência tem o valor,

$$\nabla \cdot \vec{E}(P_1) = 8\text{N}/(\text{Cm})$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(P_2) = 4 - 4 = 0\text{N}/(\text{Cm})$$

e

$$\nabla \cdot \vec{E}(P_3) = 4 - 8 = -4\text{N}/(\text{Cm})$$

Exercício 27

O campo eléctrico a grande distância de um dipolo é dado por,

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}).$$

Calcule a divergência deste campo num ponto muito afastado do dipolo.

- Em coordenadas esféricas a divergência de \vec{E} é,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}$$

- As componentes do campo são,

$$E_r = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = \frac{Qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = 0$$

- Assim a divergência vem,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \right) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial 0}{\partial \phi}\end{aligned}$$

- Assim a divergência vem,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{Qd2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) \\ &= \left(-\frac{Qd2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^4} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{Qd2 \cos \theta \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercício 28

Calcule num ponto P a divergência do campo criado por uma esfera com raio R e uma densidade volúmica de carga constante

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} & \text{se } r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

- Em coordenadas esféricas a divergência de \vec{E} é,

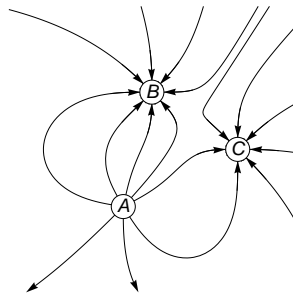
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}$$

- O campo só tem componente E_r , então a divergência vem,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} \right) & \text{se } r < R \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \right) & \text{se } r > R \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{se } r < R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases}\end{aligned}$$

Exercício 29

Considere uma superfície fechada de área S e volume V que envolve as 3 cargas de módulo Q_A , Q_B e Q_C , indicadas na figura. Calcule o integral sobre todo o volume V da divergência do campo eléctrico total criado pelas 3 cargas $\oint_V \nabla \cdot \vec{E} dV$



- Do teorema de Gauss, sabemos que:

$$\oint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

para qualquer superfície fechada S que ocupa o volume V

- Por outro lado a lei de Gauss implica que,

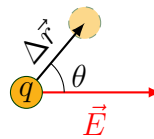
$$\begin{aligned} \oint_V \nabla \cdot \vec{E} dV &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ &= \frac{Q_A - Q_B - Q_C}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Aula 7

Energia potencial eléctrica

7.1 Energia potencial eléctrica

- Qual o trabalho necessário para deslocar muito lentamente por uma distância $\Delta\vec{r}$ em linha recta, uma carga q sujeita a um campo \vec{E} constante?



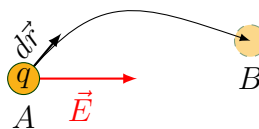
- O trabalho realizado para vencer a força electrostática ($\vec{F} = q\vec{E}$) é dado por,

$$W = -\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -F\Delta r \cos \theta \quad (7.1)$$

onde θ é o ângulo entre $\Delta\vec{r}$ e \vec{E} .

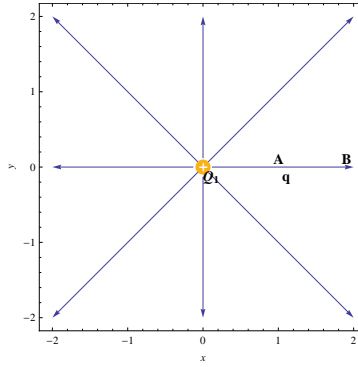
- Se o deslocamento for por um caminho qualquer entre dois pontos A e B num campo \vec{E} não uniforme então o trabalho é a soma do trabalho realizado nos vários caminhos elementares $d\vec{r}$ efectuados entre A e B e é dado pelo seguinte integral de caminho,

$$W = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (7.2)$$



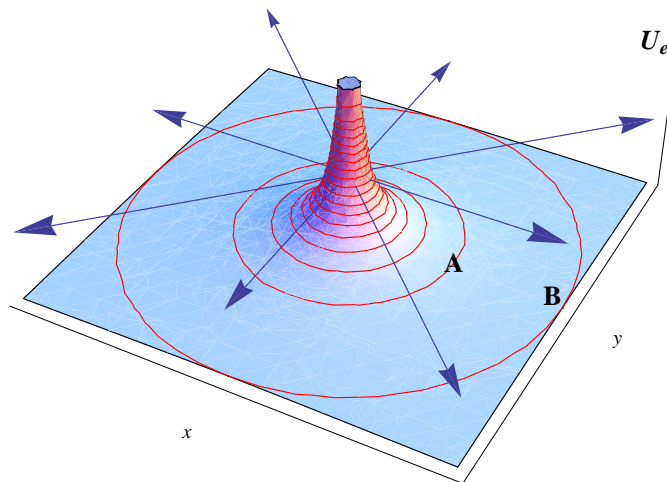
- Calculemos o trabalho quando q se move no campo duma carga pontual Q_1 ,

$$\begin{aligned}
 W &= - \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_A^B q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr \\
 &= - \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{r_B} - \frac{-1}{r_A} \right) \\
 &= U_e(B) - U_e(A)
 \end{aligned}$$



- O trabalho obtido só depende da posição inicial e final da carga q
- À energia que uma carga adquire em função da sua posição num campo electrostático \vec{E} chama-se energia potencial eléctrica U_e
- A carga q adquire no campo de Q_1 uma energia potencial eléctrica,

$$U_e = \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$



- Movendo uma carga positiva no sentido de \vec{E} o trabalho realizado é negativo (a carga perde energia no campo) se o movimento for no sentido oposto a \vec{E} o trabalho é positivo (ganha energia no campo)

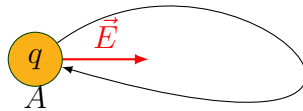
- Então ao deslocar q num campo \vec{E} , entre dois pontos A e B , a energia potencial eléctrica de q sofre uma variação de W Joules, i.e.:

$$W = - \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_e(B) - U_e(A) \quad (7.3)$$

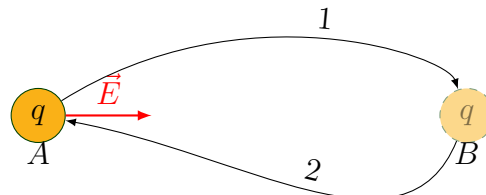
- Se q descrever uma trajectória fechada, partindo de A e regressando a A então o trabalho realizado nesse percurso é zero,

$$\begin{aligned} W &= - \oint q \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- O campo electrostático é conservativo $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$



- Como o campo electrostático é conservativo se 1 e 2 forem dois caminhos diferentes entre A e B , deslocando a carga q por 1 desde A até B e regressando ao ponto A por 2 o trabalho realizado é zero
- 1 e 2 podem ser quaisquer, logo o trabalho entre A e B é independente do caminho seguido e só depende exclusivamente do ponto de partida e de chegada



- Resumindo:

- O trabalho realizado por uma carga que descreve um *caminho fechado* num campo eléctrico criado por cargas fixas, é zero.
- O trabalho realizado por uma carga que descreve um *caminho entre dois pontos* num campo eléctrico criado por cargas fixas, é independente do caminho seguido entre esses dois pontos.
- Se o campo eletrostático \vec{E} resultar de uma distribuição arbitrária de cargas pontuais então pelo *princípio da sobreposição* o integral num caminho fechado é zero, logo *para uma distribuição arbitrária de cargas*,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (7.4)$$

- Sendo W independente do caminho também o é a variação de energia potencial eléctrica,

$$\begin{aligned} W &= U_e(B) - U_e(A) \\ &= \Delta U_e \end{aligned}$$

- Repare-se no entanto que *quer* $U_e(A)$ *quer* $U_e(B)$ *estão definidas a menos de uma constante, C* , pois se somarmos uma mesma constante à energia potencial nos dois pontos a diferença continua a ser W

$$\begin{aligned} W &= U_e(B) + C - (U_e(A) + C) \\ &= \Delta U_e \end{aligned}$$

7.2 Potencial eléctrico

- Além da dependência da posição a variação da energia potencial eléctrica dum carga q também depende do valor de q (ver Eq. 7.3).
- Dividindo a energia potencial eléctrica por q obtém-se uma quantidade chamada de **potencial eléctrico** que denominaremos por V , que só depende do campo \vec{E} e das posições onde o potencial é calculado,

$$\begin{aligned} \frac{U_e(B) - U_e(A)}{q} &= \frac{W}{q} \\ V(B) - V(A) &= \frac{W}{q} \\ \Delta V &= \frac{\Delta U_e}{q} \end{aligned} \quad (7.5)$$

onde $V(A)$ e $V(B)$ designam o potencial eléctrico em A e B respectivamente

- Tal como a energia potencial também *o potencial num ponto está definido a menos de uma constante*.
- Atribuindo um valor arbitrário ao potencial num ponto definimos completamente o potencial em todos os outros pontos do campo.
- Por exemplo definindo $V(A) = 0$ então $U_e(B) = qV(B)$.
- Quer o trabalho quer a energia potencial têm dimensões de energia, logo as *unidades do potencial eléctrico são joules por coulomb* (JC^{-1}) mais conhecido por *volt* i.e.

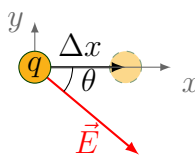
$$1\text{V} \equiv 1\text{JC}^{-1} \quad (7.6)$$

- Por exemplo, uma bateria de 12V gera uma diferença de potencial eléctrico entre os seus terminais de 12V ou de 12J/C, o que implica que para mover uma carga de +1C do terminal negativo para o positivo é necessário realizar um trabalho de 12J contra o campo eléctrico.
- Se um electrão ($q = -1.6 \times 10^{-19}\text{C}$) for deslocado através duma diferença de potencial de -1V é necessário gastar 1.6×10^{-19} joules. A esta quantidade de energia chama-se um **electrãovolt** (eV),

$$1\text{eV} \equiv 1.6 \times 10^{-19}\text{J} \quad (7.7)$$

7.3 Potencial eléctrico e o campo eléctrico

- Voltemos à carga q que se desloca entre dois pontos considerando agora que estes pontos se situam no eixo x , distando entre si de apenas Δx .



- Podemos então escrever que,

$$W = -qE\Delta x \cos \theta = -qE_x\Delta x, \quad (7.8)$$

por outro lado também sabemos que,

$$\Delta U_e = q\Delta V \quad (7.9)$$

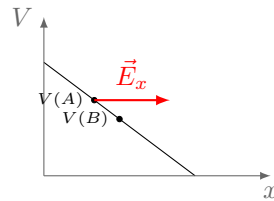
- Como $W = \Delta U_e$ vem que $q\Delta V = -qE_x\Delta x$ ou que,

$$E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

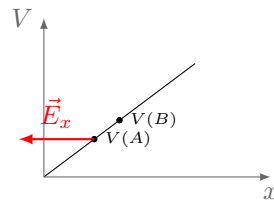
- Se o deslocamento em x for infinitesimal, dx , então a componente x de \vec{E} escreve-se,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (7.10)$$

- A quantidade $\frac{\partial V}{\partial x}$ é o chamado gradiente do potencial eléctrico na direcção de x
- Se o gradiente é grande, então o potencial varia muito para uma pequena variação de x e vice versa
- O sinal negativo na relação anterior impõe que \vec{E} aponte no sentido em que V diminui



$$V(A) > V(B)$$



$$V(A) < V(B)$$

- Uma carga positiva é acelerada no sentido do campo, logo é também acelerada no sentido em que V diminui (o contrário acontece com as cargas negativas)
- Se o deslocamento da carga q for feito numa direcção qualquer, podemos mostrar que em coordenadas cartesianas,

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}\right) = -\nabla V \quad (7.11)$$

esta equação mostra como *num ponto* $P(x, y, z)$ o campo eléctrico \vec{E} , que é *uma função vectorial*, se relaciona com o potencial que é *uma função escalar*

- Tal como a força eléctrica e o campo eléctrico, também o potencial eléctrico obedece ao princípio da sobreposição.
- *O potencial eléctrico resultante duma distribuição estática de cargas é igual à soma do potencial gerado por cada uma das cargas.*
- O gradiente do potencial em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) toma a forma,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

- O gradiente do potencial em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) toma a forma,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

- Já tínhamos exprimido anteriormente \vec{E} em unidades de N/C
- Da relação entre \vec{E} e V vemos que as unidades do campo eléctrico podem também igualmente ser volts por metro,

$$1\text{V/m} \equiv 1\text{N/C} \quad (7.12)$$

7.4 Potencial eléctrico duma carga pontual

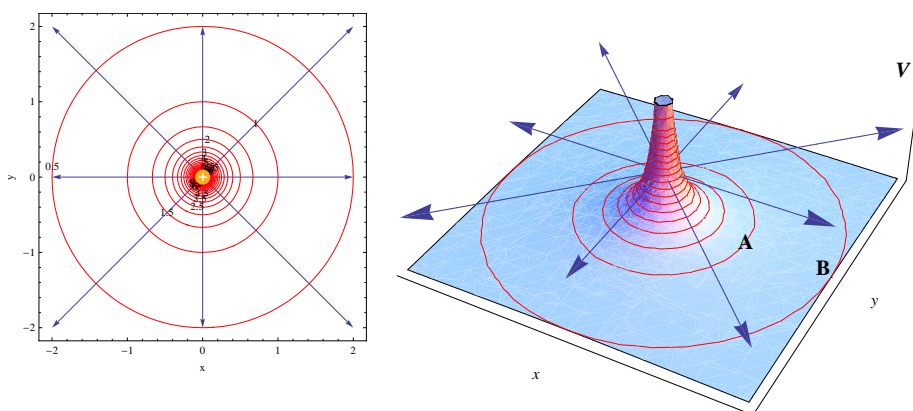
- É comum considerar que o potencial num ponto P a uma distância r duma carga pontual Q é o trabalho por unidade de carga, realizado contra o campo por uma carga de teste que vem do infinito até ao ponto P , *assumindo que o potencial no infinito é zero* ($V(\infty) = 0$).
- Assim de 7.3 e de 7.5 podemos rapidamente chegar à expressão para o *potencial duma carga pontual*,

$$\begin{aligned} V(P) &= - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{\infty}^P \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \end{aligned}$$

Repare-se que *o sinal de V é o mesmo de Q .*

- A figura à esquerda ilustra linhas equipotenciais (vermelho) de uma carga pontual positiva e as linhas de campo (azul)

- A figura à direita mostra a mesma informação, sobreposta à superfície equipotencial



7.5 Potencial eléctrico duma distribuição contínua de cargas

- Devido ao princípio da sobreposição então o *potencial* num ponto P gerado por uma distribuição contínua de cargas é dado por,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dQ}{r}$$

- Se as cargas ocupam um *volume* v ,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho dv}{r}$$

- Se as cargas ocupam uma *superfície* S ,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}$$

- Se as cargas ocupam um *comprimento* L ,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dL}{r}$$

- O potencial de distribuições de carga mistas resulta de combinações das expressões anteriores
- E.g., para cargas distribuídas sobre um volume e uma superfície o potencial é dado por,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_v \frac{\rho}{r} dv + \int_S \frac{\sigma}{r} dS \right)$$

- Resumindo, assumindo a origem do potencial no infinito ($V(\infty) = 0$) vimos que podemos calcular o potencial criado por uma distribuição contínua de carga, num ponto P das seguintes duas formas,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{r}$$

ou se conhecermos o campo eléctrico,

$$V(P) = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- A diferença de potencial entre dois pontos A e B é dada por,

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Aula 8

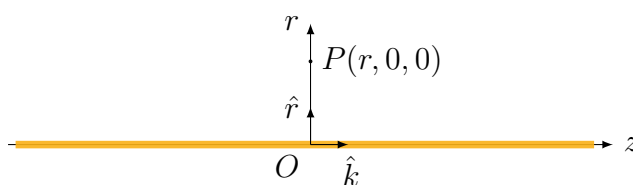
Exemplos de Cálculo do Potencial Eléctrico

8.1 Exemplos de cálculo do potencial eléctrico

8.1.1 Potencial eléctrico dum fio infinito com $\lambda = \text{Const.}$

Exercício 30

Consideremos uma distribuição linear de cargas, $\lambda = \text{constante}$, num fio infinito. Calcular o potencial eléctrico criado por esta distribuição num ponto P qualquer, a uma distância r do fio.



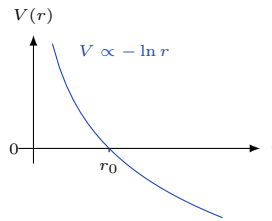
-
- Calculámos anteriormente em coordenadas cilíndricas o campo criado por esta distribuição de cargas,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

- Podemos escolher o potencial zero em qualquer ponto que esteja à distância r_0 do fio

- Assim o potencial vem,

$$\begin{aligned}
 V(P) &= - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_{r_0}^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr \\
 &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}
 \end{aligned}$$



- Calculemos \vec{E} pelo gradiente do potencial,

$$\vec{E} = - \nabla V$$

em coordenadas cilíndricas

$$= - \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

as componentes $\hat{\phi}$ e \hat{z} são nulas

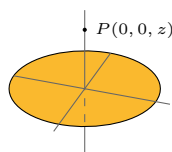
$$\begin{aligned}
 &= - \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} \right) \hat{r} \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln \frac{r}{r_0} \right) \hat{r} \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}
 \end{aligned}$$

verificando-se o valor obtido anteriormente

8.1.2 Potencial eléctrico dum disco com $\sigma = \text{Const.}$

Exercício 31

Consideremos uma distribuição superficial de cargas, $\sigma = \text{constante}$, num disco de raio a . Calcular o potencial eléctrico criado por esta distribuição num ponto P do eixo do disco, a uma distância z do disco.



- Calculámos anteriormente em coordenadas cilíndricas o campo criado por esta distribuição de cargas,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k}$$

- Escolhendo o potencial zero em $z = 0$, o potencial vem,

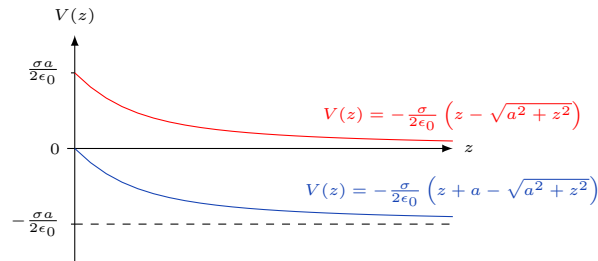
$$\begin{aligned} V(P) &= - \int_0^z \vec{E} \cdot d\vec{z} \\ &= - \int_0^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k} \cdot d\vec{z} \\ &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^z \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) dz \\ &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(z - \int_0^z \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} dz \right) \\ &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(z + a - \sqrt{a^2 + z^2} \right) \end{aligned}$$

- Neste caso podemos também escolher o potencial zero em $z = \infty$, o

potencial vem,

$$\begin{aligned}
 V(P) &= - \int_{\infty}^z \vec{E} \cdot d\vec{z} \\
 &= - \int_{\infty}^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{k} \cdot d\vec{z} \\
 &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(z - \sqrt{a^2 + z^2} - \infty + \infty \right) \\
 &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(z - \sqrt{a^2 + z^2} \right)
 \end{aligned}$$

- A variação do potencial com z é,



- Note que os dois valores do potencial diferem de uma constante
- Podemos agora verificar o cálculo de \vec{E} pelo gradiente do potencial,

$$\vec{E} = - \nabla V$$

em coordenadas cilíndricas

$$= - \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

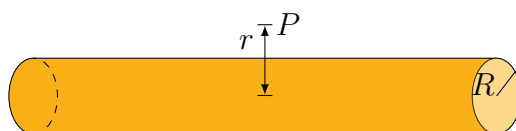
as componentes \hat{r} e $\hat{\phi}$ são nulas

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(z + a - \sqrt{a^2 + z^2} \right) \hat{z} \\
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \hat{z}
 \end{aligned}$$

8.1.3 Potencial eléctrico numa casca cilíndrica infinita com $\sigma = \text{Const.}$

Exercício 32

Consideremos uma distribuição superficial de cargas, $\sigma = \text{constante}$, numa casca cilíndrica infinita e com raio R . Calcular o potencial eléctrico criado por esta distribuição num ponto P qualquer, a uma distância r da casca.



- Calculámos anteriormente em coordenadas cilíndricas o campo criado por esta distribuição de cargas,

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

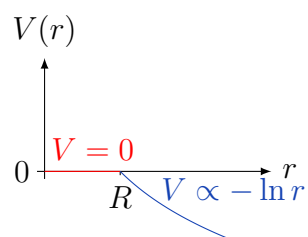
- No exterior da casca temos,

$$\begin{aligned} V(P) &= - \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_R^r \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\ &= - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int_R^r \frac{dr}{r} \\ &= - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \end{aligned}$$

- O potencial é nulo na superfície ($r = R$)
- No interior da superfície $E = 0$ logo o potencial é também nulo
- O potencial em qualquer ponto é então

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} & \text{se } r > R \end{cases}$$

- A variação do potencial com r é,



- Podemos agora verificar a possibilidade de calcular \vec{E} pelo gradiente do potencial,

$$\vec{E} = -\nabla V$$

em coordenadas cilíndricas

$$= -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\phi} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

as componentes $\hat{\phi}$ e \hat{z} são nulas

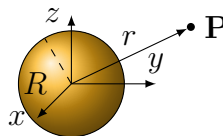
$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\sigma R}{\epsilon_0}\ln\frac{r}{R}\right)\hat{r} \\ &= \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}\hat{r} \end{aligned}$$

que é o valor do campo para $r \geq R$

8.1.4 Potencial eléctrico duma esfera com $\rho = \text{constante}$

Exercício 33

Consideremos uma distribuição volúmica de cargas, $\rho = \text{constante}$, numa esfera com raio R . Calcular o potencial eléctrico criado por esta distribuição num ponto P qualquer, a uma distância r da esfera.



- Calculámos anteriormente em coordenadas esféricas o campo criado por esta distribuição de cargas,

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} & \text{se } r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

- No exterior da esfera o potencial fica,

$$\begin{aligned}
 V(P) &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_{\infty}^r \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} \\
 &= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) \\
 &= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}
 \end{aligned}$$

- O potencial é nulo em ($r = \infty$)
- No interior da esfera o potencial fica,

$$\begin{aligned}
 V(P) &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{r}
 \end{aligned}$$

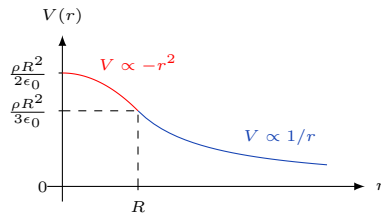
o 1º integral já foi calculado

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \int_R^r \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr \\
 &= \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2) \\
 &= \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)
 \end{aligned}$$

- O potencial em qualquer ponto é então

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) & \text{se } r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

- A variação do potencial com r é,



- Podemos agora calcular \vec{E} pelo gradiente do potencial,

$$\vec{E} = -\nabla V$$

em coordenadas esféricas

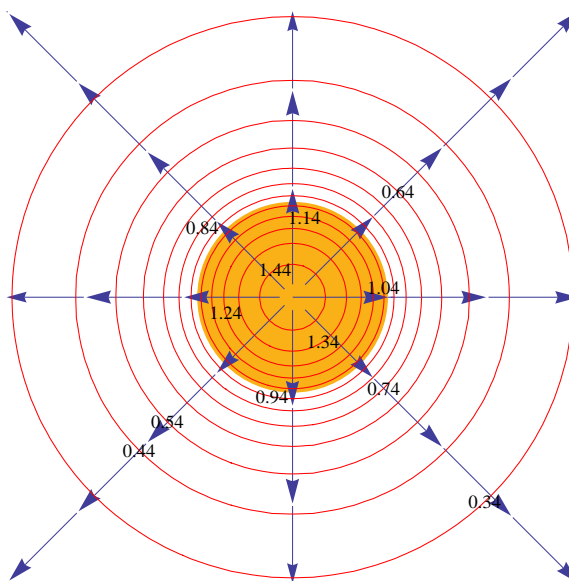
$$= -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

as componentes $\hat{\phi}$ e $\hat{\theta}$ são nulas

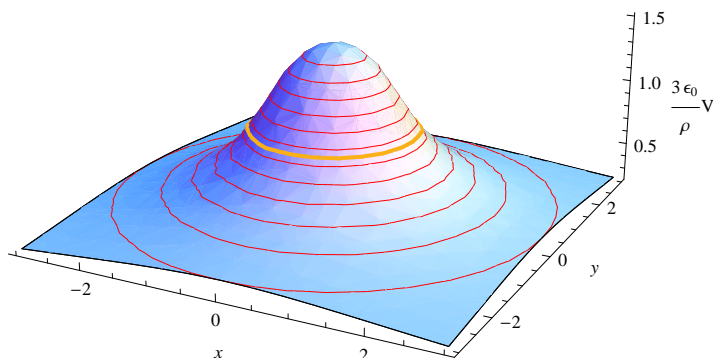
$$= \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \right) \hat{r} & \text{se } r < R \\ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \right) \hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} & \text{se } r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

- A figura mostra **linhas de campo** perpendiculares às **linhas equipotenciais** e a esfera com **carga**



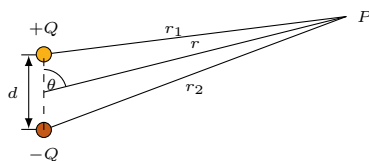
- A figura mostra a função $\frac{3\epsilon_0}{\rho}V$ e as **linhas equipotenciais**, onde a linha amarela indica o potencial na superfície da esfera



8.1.5 Potencial e campo dum dipolo eléctrico

Exercício 34

Calcule o potencial eléctrico e o campo eléctrico criados por um dipolo eléctrico num ponto P muito afastado do dipolo.



- Uma vez que ainda não calculámos \vec{E} dum dipolo vamos calcular V directamente da distribuição de cargas,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i}$$

- As cargas do dipolo (opostas) distam de P respectivamente, r_1 e r_2 então,

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) \end{aligned}$$

- Da geometria do problema e usando a lei dos co-senos temos para r_1 ,

$$r_1^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \cos \theta$$

e para r_2

$$\begin{aligned} r_2^2 &= r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \cos(\pi - \theta) \\ &= r^2 + \frac{d^2}{4} + rd \cos \theta \end{aligned}$$

- Dividindo ambas as expressões por r^2 e invertendo vem,

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{r^2} &= 1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r} \cos \theta \\ \frac{r}{r_1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r} \cos \theta}} \end{aligned}$$

e para r_2

$$\begin{aligned} \frac{r_2^2}{r^2} &= 1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r} \cos \theta \\ \frac{r}{r_2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r} \cos \theta}} \end{aligned}$$

- Como $r \gg d$ podemos expandir as expressões anteriores em série de potências e reter apenas os termos de 1ª ordem,

$$\frac{r}{r_1} \approx 1 + \frac{d}{2r} \cos \theta + O\left(\frac{1}{r}\right)^2$$

e para r_2

$$\frac{r}{r_2} \approx 1 - \frac{d}{2r} \cos \theta + O\left(\frac{1}{r}\right)^2$$

- Substituindo, temos para o potencial em P ,

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) \\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{d}{2r^2} \cos \theta - \frac{1}{r} + \frac{d}{2r^2} \cos \theta \right) \\ V(P) &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d}{r^2} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Campo dum dipolo eléctrico num ponto afastado

- Tendo o potencial em P podemos também calcular \vec{E} ,

$$\vec{E} = -\nabla V$$

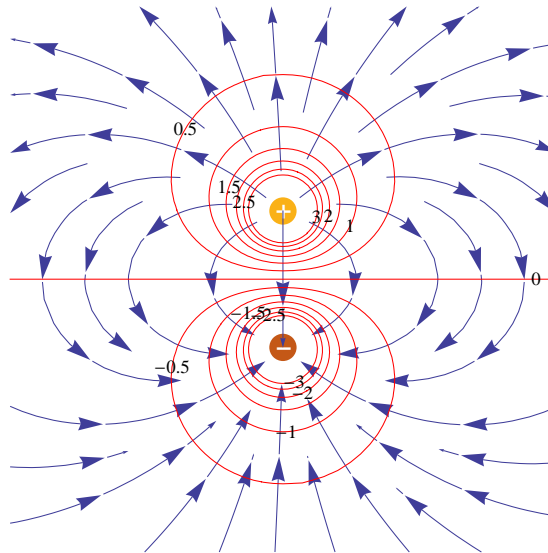
em coordenadas esféricas o gradiente é dado por

$$= -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

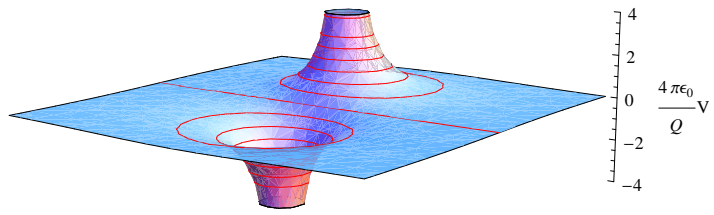
o termo em $\hat{\phi}$ é nulo

$$\begin{aligned} &\approx -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{d}{r^2}\cos\theta\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{d}{r^2}\cos\theta\right)\hat{\theta}\right) \\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2d}{r^3}\cos\theta\hat{r} + \frac{d}{r^3}\sin\theta\hat{\theta}\right) \\ \vec{E} &\approx \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right) \end{aligned}$$

- A figura mostra **linhas de campo** perpendiculares às **linhas equipotenciais** e as **cargas** considerando $d = 1$



- A figura mostra a função $\frac{4\pi\epsilon_0}{Q}V$ e as **linhas equipotenciais**

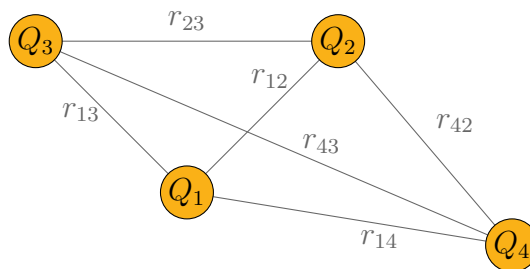


Aula 9

Energia potencial eléctrica duma distribuição de cargas

9.1 A energia potencial eléctrica duma distribuição de cargas

9.1.1 Distribuição de cargas pontuais



- Consideremos 4 cargas pontuais fixas no espaço
- Cada carga está no campo das outras 3 e portanto tem nesse campo uma energia potencial eléctrica U_{e_i}
- A energia potencial do conjunto U_e é o trabalho que as forças eléctricas realizam para dispersar as cargas até estas estarem infinitamente afastadas entre si
- Começemos então por retirar uma carga de cada vez
- A energia potencial de cada carga Q_i é,

$$\begin{aligned} U_{e_1} &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(+\frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_4}{r_{14}} \right) \\ U_{e_2} &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(+\frac{Q_1}{r_{21}} + \frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} \right) \\ U_{e_3} &= \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(+\frac{Q_1}{r_{31}} + \frac{Q_2}{r_{32}} + \frac{Q_4}{r_{34}} \right) \\ U_{e_4} &= \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0} \left(+\frac{Q_1}{r_{41}} + \frac{Q_2}{r_{42}} + \frac{Q_3}{r_{43}} \right) \end{aligned}$$

- Note-se que no fim a carga Q_4 fica infinitamente afastada de todas as outras, logo o seu potencial é zero.
- A energia potencial total é a soma de todos estes termos,

$$\begin{aligned}
 U_e &= U_{e_1} + U_{e_2} + U_{e_3} + U_{e_4} \\
 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + \frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_4}{r_{14}} \right) + \\
 &\quad \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + 0 + \frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} \right) + \\
 &\quad \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + 0 + 0 + \frac{Q_4}{r_{34}} \right) + \\
 &\quad \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + 0 + 0 + 0 \right)
 \end{aligned}$$

- Reescrevendo a expressão anterior na seguinte forma,

$$\begin{aligned}
 2U_e &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + \frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_4}{r_{14}} \right) + \\
 &\quad \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{21}} + 0 + \frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} \right) + \\
 &\quad \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{31}} + \frac{Q_2}{r_{32}} + 0 + \frac{Q_4}{r_{34}} \right) + \\
 &\quad \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{41}} + \frac{Q_2}{r_{42}} + \frac{Q_3}{r_{43}} + 0 \right)
 \end{aligned}$$

- Repare-se que esta expressão è duas vezes o valor da energia potencial eléctrica do sistema
- Contudo a 1ª linha é igual a Q_1 multiplicada pelo potencial que todas as cargas, excepto Q_1 , criam no ponto onde estava a carga Q_1 , a que chamamos V_1
- A 2ª linha é igual a Q_2 multiplicada pelo potencial que todas as cargas, excepto Q_2 , criam no ponto onde estava a carga Q_2 , a que chamamos V_2 , etc.
- A energia potencial desta distribuição de cargas discretas é,

$$U_e = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + Q_4 V_4)$$

- Generalizando obtemos a energia potencial duma distribuição de N cargas discretas,

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i^N Q_i V_i$$

- onde V_i é o potencial na posição da carga Q_i , excluindo Q_i

9.1.2 Distribuição contínua de cargas

- A expressão anterior pode ser generalizada para uma distribuição contínua de cargas,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_Q V dQ$$

se a distribuição é superficial

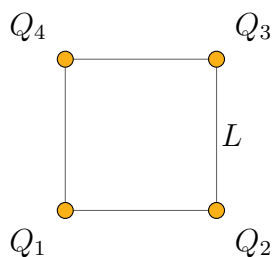
$$U_e = \frac{1}{2} \int_S V \sigma dS$$

se a distribuição é volumétrica

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v V \rho dv$$

Exercício 35

Quatro cargas pontuais de $10 \mu\text{C}$ cada, estão nos vértices de um quadrado de lado $L = 1 \text{ m}$. Qual a energia potencial eletrostática quando a) todas as cargas são positivas, b) apenas uma é negativa e c) duas são positivas e duas negativas.



- A energia potencial eléctrica duma distribuição de 4 cargas discretas é,

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 Q_i V_i$$

- Calculemos V_i , o potencial na posição da carga Q_i , excluindo Q_i ,

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{L} + \frac{Q_3}{L\sqrt{2}} + \frac{Q_4}{L} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L} \left(Q_2 + \frac{Q_3}{\sqrt{2}} + Q_4 \right)$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L} \left(Q_3 + \frac{Q_4}{\sqrt{2}} + Q_1 \right)$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L} \left(Q_4 + \frac{Q_1}{\sqrt{2}} + Q_2 \right)$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L} \left(Q_1 + \frac{Q_2}{\sqrt{2}} + Q_3 \right)$$

- Assim a energia potencial eléctrica é,

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L} \left(Q_1 Q_2 + \frac{Q_1 Q_3}{\sqrt{2}} + Q_1 Q_4 \right. \\ &\quad \left. + Q_2 Q_3 + \frac{Q_2 Q_4}{\sqrt{2}} + Q_2 Q_1 \right. \\ &\quad \left. + Q_3 Q_4 + \frac{Q_3 Q_1}{\sqrt{2}} + Q_3 Q_2 \right. \\ &\quad \left. + Q_4 Q_1 + \frac{Q_4 Q_2}{\sqrt{2}} + Q_4 Q_3 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L} \left(Q_1 Q_2 + Q_2 Q_3 + Q_3 Q_4 + Q_4 Q_1 + \frac{Q_1 Q_3}{\sqrt{2}} + \frac{Q_4 Q_2}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

- a) $Q_i = 10 \mu\text{C}$ a energia potencial é,

$$U_e = \frac{100 \times 10^{-12}}{4\pi\epsilon_0} (4 + \sqrt{2}) = 4,9 \text{ J}$$

- b) $Q_1 = -10 \mu\text{C}$ e as restantes cargas > 0 a energia potencial é,

$$U_e = 0 \text{ J}$$

- c) $Q_1 = Q_2 = -10 \mu\text{C}$ e as restantes cargas > 0 a energia potencial é,

$$U_e = \frac{100 \times 10^{-12}}{4\pi\epsilon_0} (-\sqrt{2}) = -1,3 \text{ J}$$

9.1.3 Energia potencial eléctrica em função do campo eléctrico

- Usando a lei de Gauss,

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

podemos escrever a equação para a energia potencial como,

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_v V \rho \, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_v V \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \, dv \end{aligned}$$

- Sabendo que $\nabla \cdot (\vec{E}V) = V \nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla V$ vem,

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_v V \nabla \cdot \vec{E} \, dv \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_v \nabla \cdot (\vec{E}V) \, dv - \int_v \vec{E} \cdot \nabla V \, dv \right] \end{aligned}$$

como $\vec{E} = -\nabla V$ o integral da direita fica

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_v \nabla \cdot (\vec{E}V) \, dv + \int_v E^2 \, dv \right]$$

- Usando o teorema de Gauss podemos transformar o integral de volume da divergência num integral de superfície do fluxo,

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_S V \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_v E^2 \, dv \right]$$

- A superfície gaussiana S é qualquer uma, logo podemos escolher uma esfera de raio infinito
- No infinito o campo de uma distribuição finita de cargas é semelhante ao de uma carga pontual ($E \propto \frac{1}{r^2}$)
- Por outro lado $V \propto \frac{1}{r}$ e $S \propto r^2$
- Então o integral de superfície decresce com $1/r$ e anula-se quando $r \rightarrow \infty$
- A energia potencial pode escrever-se então na forma,

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v E^2 \, dv$$

o integral de volume é sobre todo o espaço

- Em contraste com a expressão análoga da energia potencial,

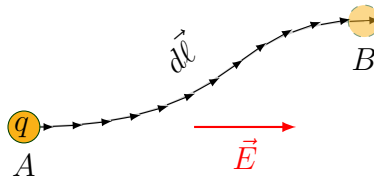
$$U_e = \frac{1}{2} \int_v V \rho \, dv$$

onde o integral é apenas sobre o volume ocupado pelas cargas

9.2 Circulação do campo eléctrico

- Como vimos o trabalho realizado para vencer a força eletrostática ao levar uma carga q , por um caminho entre os pontos A e B é dado pelo seguinte integral ao longo desse caminho,

$$W = - \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \Delta U_e$$



- Vimos também que a diferença de potencial entre os pontos A e B é definida como,

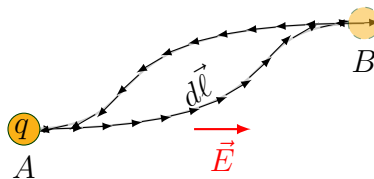
$$\Delta V = \frac{W}{q} = \frac{\Delta U_e}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

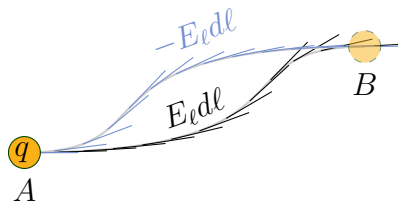
- Para um caminho fechado,

$$\Delta V = V(A) - V(A) = - \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

- Ao integral de \vec{E} ao longo de um caminho fechado chama-se a circulação de \vec{E}

$$\Delta V = - \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \oint E_{\ell} dl$$





9.3 Rotacional em coordenadas cartesianas

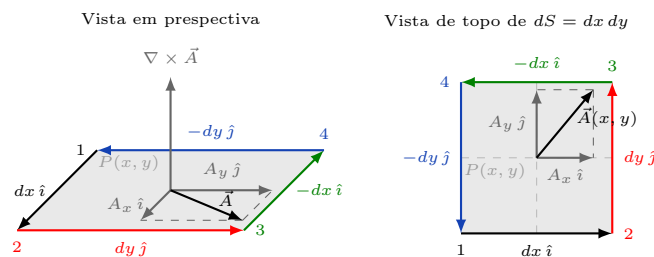
- Em coordenadas cartesianas $\nabla \times \vec{A}$ toma a forma,

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (9.1)$$

- O rotacional dum campo vectorial \vec{A} é um operador que transforma um vector, noutro vector
- A semelhança que tem com o produto externo permite escrever,

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (9.2)$$

- Calculemos a circulação de $\vec{A}(x, y)$ contornando uma área elementar dS , centrada no ponto $P(x, y, 0)$,



$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_1 \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_1 + \dots + \int_4 \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_4$$

- Os elementos de caminho são $d\vec{\ell}_1 = dx \hat{i}$, $d\vec{\ell}_2 = dy \hat{j}$, $d\vec{\ell}_3 = -dx \hat{i}$ e $d\vec{\ell}_4 = -dy \hat{j}$
- Note-se que para a circulação apenas importa a componente de $\vec{A} \parallel d\vec{\ell}$

- A circulação por estes 4 caminhos é,

$$\begin{aligned}
 \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} &= \int_1 \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_1 + \dots + \int_4 \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_4 \\
 &= \vec{A}(x, y - \frac{dy}{2}) \cdot dx \hat{i} + \vec{A}(x + \frac{dx}{2}, y) \cdot dy \hat{j} \\
 &\quad + \vec{A}(x, y + \frac{dy}{2}) \cdot (-dx) \hat{i} + \vec{A}(x - \frac{dx}{2}, y) \cdot (-dy) \hat{j} \\
 &= \left[A_x(x, y - \frac{dy}{2}) - A_x(x, y + \frac{dy}{2}) \right] dx \\
 &\quad + \left[A_y(x + \frac{dx}{2}, y) - A_y(x - \frac{dx}{2}, y) \right] dy
 \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo o 1º termo entre [] por dy e o segundo por dx obtemos,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A_x(x, y - \frac{dy}{2}) - A_x(x, y + \frac{dy}{2})}{dy} dy dx \\
 &\quad + \frac{A_y(x + \frac{dx}{2}, y) - A_y(x - \frac{dx}{2}, y)}{dx} dx dy
 \end{aligned}$$

que são as derivadas parciais de A_x e A_y ,

$$= -\frac{\partial A_x}{\partial y} dy dx + \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy$$

- A circulação pelos 4 caminhos é então,

$$\begin{aligned}
 \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dy dx \\
 &= \left| \nabla \times \vec{A} \right|_z dx dy
 \end{aligned}$$

- Que é a componente segundo z do rotacional em coordenadas cartesianas multiplicada pela área interior ao caminho fechado.
- As outras componentes do rotacional podem obter-se circulando por caminhos análogos no plano XZ e ZY

9.4 Significado físico do rotacional

- Da expressão anterior podemos ver o significado físico do rotacional dum vector num ponto $P(x, y, z)$,

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \left| \nabla \times \vec{A} \right|_z dS$$

- Logo,

$$\left| \nabla \times \vec{A} \right|_z = \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}{dS}$$

- O rotacional é a circulação do vector num caminho elementar fechado por unidade de área (envolvida pelo caminho)
- O rotacional indica se num ponto o campo tem tendência a rodar ou não

9.4.1 $\nabla \times \vec{A}$ em coordenadas cilíndricas e esféricas

- A forma do rotacional em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) é,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

- E em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) é,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\theta} + \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$

9.4.2 Exemplo: rotacional do campo eléctrico de uma carga pontual

Exercício 36

Calcule o rotacional do campo de uma carga pontual.

- O campo de uma carga pontual, Q é (em coordenadas esféricas),

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

apenas tem componente radial $\vec{E} = E_r \hat{r}$ e

$$\frac{\partial E_r}{\partial \phi} = \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = 0$$

logo

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

- Quando o rotacional é nulo o campo diz-se irrotacional (sem circulação)

9.4.3 Exemplo: rotacional do campo eléctrico de um dipolo

Exercício 37

Calcule o rotacional do campo de um dipolo eléctrico, que em coordenadas esféricas é dado por $\vec{E}(r, \theta) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$.

- O campo tem duas componentes

$$E_r = \frac{Qd}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta$$

e

$$E_\theta = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta$$

- Como não há dependência em ϕ o rotacional vem,

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

- Substituindo os valores de E_r e E_θ obtemos,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \right) - \frac{2}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \right] \hat{\phi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

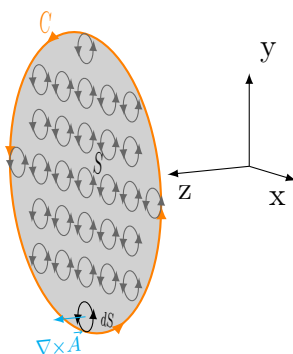
- Como veremos em electrostática o campo eléctrico é irrotacional, porque é conservativo

9.5 Teorema de Stokes

- O teorema de Stokes (também conhecido por teorema da circulação) diz que o integral de percurso dum campo vectorial A ao longo dum caminho **fechado** C que delimita uma superfície de área S é dado por,

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (9.3)$$

- onde $\nabla \times \vec{A}$ é o rotacional de A



- Vimos atrás (Eq. 7.4) que o integral de percurso de \vec{E} por um caminho fechado é zero
- Este resultado conjugado com o teorema de Stokes implica que,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (9.4)$$

- Como a superfície S pode ser qualquer, desde que seja delimitada por C então este integral só é zero se

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (9.5)$$

esta equação é outra das equações de Maxwell na forma local, e válida só em electrostática

- Um campo eléctrico que satisfaz esta equação, i.e. *cujo integral de percurso é independente do caminho seguido, diz-se um campo conservativo*
- Chama-se a atenção que *só campos eléctricos estáticos são conservativos*
- *Um campo eléctrico conservativo é irrotacional, i.e. $\nabla \times \vec{E} = 0$*
- Como veremos mais à frente se o campo eléctrico variar no tempo então o rotacional não é zero, logo o integral de percurso do campo depende do caminho seguido

9.6 Equações de Maxwell para a electrostática

- Em electrostática o problema de descobrir o campo eléctrico resume-se a resolver as duas seguintes equações,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

- A primeira é a lei de Gauss que garante que o fluxo de \vec{E} numa superfície fechada é proporcional à carga que está dentro dessa superfície
- A segunda equação garante que \vec{E} é conservativo, pois impõe que a circulação do campo num caminho fechado seja nula

Aula 10

As equações de Poisson e de Laplace e condutores em campos electrostáticos

10.1 As equações de Poisson e de Laplace

- Vimos antes que o comportamento de um campo electrostático é descrito pelas equações

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

- Vimos também que,

$$\vec{E} = -\nabla V$$

usando esta equação a divergência de \vec{E} pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \nabla V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

- A divergência do gradiente é $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$
- O operador ∇^2 é chamado Laplaciano e em coordenadas cartesianas tem a forma,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- Em coordenadas cilíndricas é dado por,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- E em coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

- Então as duas equações de Maxwell para o campo electrostático reduzem-se a apenas uma equação para o potencial,

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

esta é a *equação de Poisson*

- A electrostática resume-se à resolução da equação de Poisson
- Numa região onde a densidade de carga é zero a equação de Poisson reduz-se a

$$\nabla^2 V = 0$$

que é conhecida pela *equação de Laplace*

- Note-se que uma vez encontrado V pode rapidamente encontrar-se \vec{E} pelo gradiente de V
- Se a distribuição de cargas é conhecida então uma das soluções da Eq. de Poisson é,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho}{r} dv$$

10.1.1 Unicidade da solução da Eq. de Poisson

- As equações de Poisson e Laplace envolvem derivadas de segunda ordem
- *De um modo geral, a solução para o potencial V depende de duas constantes de integração*
- Para encontrar estas constantes são necessárias as chamadas *condições fronteira*
- O teorema da unicidade afirma que:

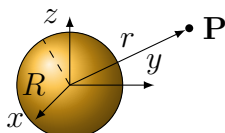
uma solução da equação de Poisson que satisfaz determinadas condições fronteira é uma solução única

- O teorema aplica-se, qualquer que seja o método para encontrar a solução, mesmo que seja adivinhada

10.1.2 Potencial duma distribuição esférica e uniforme de carga

Exercício 38

Consideremos uma distribuição esférica de cargas com ρ constante e raio R . Calcular o potencial electrostático num ponto P usando a equação de Poisson e Laplace.



- Como fora da esfera $\rho = 0$ usamos a Eq. de Laplace para $r > R$,

$$\nabla^2 V_f = 0$$

- Por simetria V_f é independente de θ e ϕ logo apenas usamos a componente radial do laplaciano em coordenadas esféricas,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_f}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_f}{dr} \right) = 0$$

integrando em r

$$\frac{dV_f}{dr} = \frac{B_1}{r^2}$$

onde B_1 é uma constante de integração

- Assim o campo fora da esfera é,

$$E_f = -\frac{B_1}{r^2}$$

- Vimos antes (noutra aula) que o campo na superfície da esfera é

$$E_f(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

- Desta *condição fronteira* obtemos $B_1 = -Q/(4\pi\epsilon_0)$

- Logo o campo fora da esfera é,

$$E_f = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Prosseguindo o cálculo do potencial fora da esfera,

$$\frac{dV_f}{dr} = \frac{B_1}{r^2}$$

integrando em r

$$V_f = -\frac{B_1}{r} + B_2$$

- B_2 é outra constante de integração
- Para a determinar usamos a *condição fronteira* $V_f(\infty) = 0$ que implica que $B_2 = 0$
- Assim o potencial fora da esfera é dado por,

$$V_f = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Dentro da esfera ($r < R$) a equação de Poisson fica,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_d}{\partial r} \right) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_d}{dr} \right) &= -\frac{\rho r^2}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

integrando em r

$$\begin{aligned}r^2 \frac{dV_d}{dr} &= -\frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + C_1 \\ \frac{dV_d}{dr} &= -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{C_1}{r^2}\end{aligned}$$

onde C_1 é uma constante de integração

- Logo o campo dentro da esfera é,

$$E_d = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \frac{C_1}{r^2}$$

- Como E_d não pode ser infinito na origem ($r = 0$) então $C_1 = 0$ assim,

$$E_d = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

- Prosseguindo o cálculo do potencial,

$$\frac{dV_d}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

integrando em r

$$V_d = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_2$$

- *O potencial tem de ser contínuo na superfície da esfera (Porquê?)*

$$\begin{aligned} V_f(R) &= V_d(R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} &= -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_2 \\ \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} &= -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_2 \end{aligned}$$

logo

$$C_2 = \frac{3\rho R^2}{6\epsilon_0}$$

- Finalmente temos,

$$\begin{aligned} V_d &= -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{3\rho R^2}{6\epsilon_0} \\ &= \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \end{aligned}$$

- Usando a Eq. de Poisson e Laplace obtivemos a mesma expressão já calculada anteriormente,

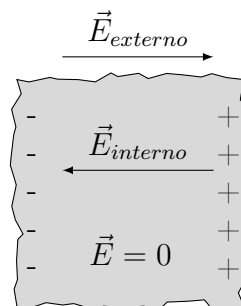
$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) & \text{se } r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

Aula 11

Campos electrostáticos e condutores

11.1 Electrostática de condutores

11.1.1 Campo dentro de um condutor



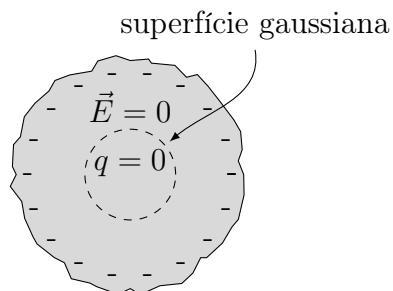
$$\vec{E} = \vec{E}_{externo} + \vec{E}_{interno} = 0$$

- Na presença dum campo eléctrico externo os electrões livres existentes em qualquer condutor deslocam-se até que o campo eléctrico criado dentro do condutor cancele totalmente o campo externo.
- As regiões do condutor com excesso de electrões ficam carregadas negativamente.
- As regiões do condutor com defeito de electrões ficam carregadas positivamente.
- *Portanto numa situação electrostática o campo dentro dum condutor é exactamente NULO.*

11.1.2 Localização da carga dentro de um condutor

- Carregando negativamente (ou positivamente) um condutor onde vão as cargas encontrar as suas posições de equilíbrio?

- Sobe a acção dum campo electrostático externo, o campo eléctrico dentro de um condutor é sempre zero.
- Então o fluxo de \vec{E} através de qualquer superfície gaussiana interior ao condutor é zero.



- Assim sendo a lei de Gauss impõe que a carga no interior da superfície gaussiana seja zero.

$$\phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

$$\text{logo } Q_{int} = 0$$

- E na forma diferencial,

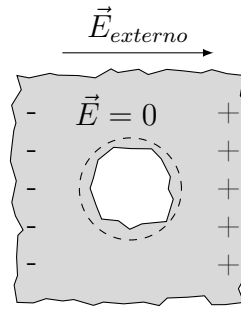
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\text{logo } \rho = 0$$

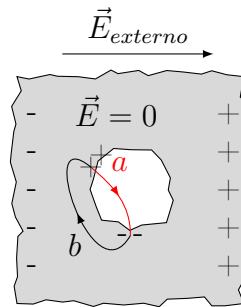
- Não podendo existir cargas no interior dum condutor, em regime electrostático, o único local possível que resta é a superfície do condutor.
- Então qualquer carga adicionada a um condutor desloca-se para a superfície do condutor e aí permanece.

11.1.3 Condutor com uma cavidade

- Considere-se que um condutor com uma cavidade é colocado numa região onde existe um campo eléctrico.



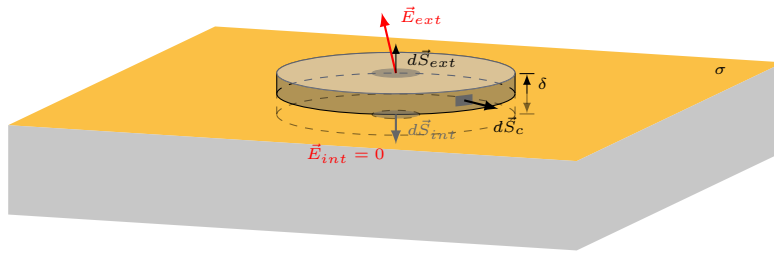
- Como vimos dentro do condutor $\vec{E} = 0$, logo $\phi_E = 0$ em qualquer superfície gaussiana interior e também nas que envolvem a cavidade.
- Pode existir igual número de cargas positivas e negativas na superfície da cavidade?



- Como no condutor $\vec{E} = 0$, a circulação seria $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a \vec{E}(a) \cdot d\vec{l}_a + \int_b \vec{E}(b) \cdot d\vec{l}_b \neq 0$ o que não é possível pois \vec{E} é conservativo.
- Assim da lei de Gauss e da circulação de \vec{E} concluí-se que não há cargas na superfície da cavidade, logo \vec{E} no seu interior também será zero.
- Este resultado tem aplicações tecnológicas muito úteis pois indica que *um condutor oco cria uma blindagem eléctrica no seu interior*.
- Este efeito de blindagem ocorre apenas para campos estáticos ou que variem lentamente.

11.1.4 Campo electrostático à superfície dum condutor

- O que diz a lei de Gauss sobre \vec{E}_{ext} na superfície exterior dum condutor?
- Consideremos uma superfície gaussiana cilíndrica de altura infinitesimal δ
- A superfície (S_c) da casca cilíndrica é tão pequena que $\phi_{S_c} \approx 0$



- Como $\vec{E}_{int} = 0$ vem que,

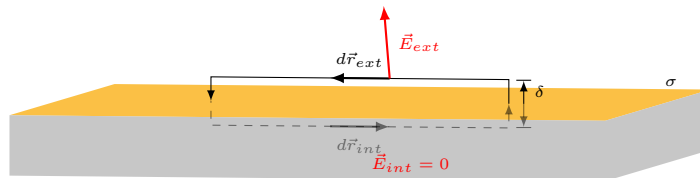
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E_{ext_n} S_{ext} = \frac{\sigma S_{ext}}{\epsilon_0}$$

$$E_{ext_n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

que é a componente normal do campo electrostático na superfície externa do condutor

- Qual o valor da componente tangencial do campo na superfície exterior, E_{ext_t} ?
- Consideremos um caminho rectangular, fechado com 2 lados paralelos à superfície do condutor, cada de comprimento Δr
- Os outros 2 lados perpendiculares têm um comprimento infinitesimal δ



- Calculando a circulação de \vec{E} por este caminho obtemos,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

porque \vec{E} é conservativo

- o integral tem duas componentes,

$$\int E_{ext_t} dr_{ext} + \int E_{int_t} dr_i = 0$$

assumindo o campo constante no pequeno caminho Δr vem

$$\begin{aligned} E_{ext_t} \Delta r - E_{int_t} \Delta r &= 0 \\ (E_{ext_t} - E_{int_t}) \Delta r &= 0 \end{aligned}$$

logo $E_{ext_t} = E_{int_t}$ e a componente tangencial é contínua

- Como num condutor $E_{int} = 0$ logo $E_{ext_t} = 0$
- *O campo electrostático é perpendicular à superfície externa do condutor*

$$E_{ext} = E_{ext_n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

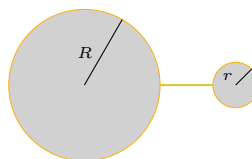
11.1.5 Potencial eléctrico num condutor

Resumindo vimos que na presença dum campo electrostático:

- Dentro dum condutor $\rho = 0$
- Num condutor $\sigma \neq 0$ apenas na sua superfície
- Na superfície exterior $E = \sigma/\epsilon_0$
- \vec{E} é perpendicular à superfície do condutor
- Sendo $\vec{E} \perp$ todos os pontos dentro do condutor estão ao mesmo potencial (Porquê?)
- Note-se também que dada a mobilidade das cargas num condutor, o cálculo de \vec{E} é muito mais complexo

11.1.6 O campo eléctrico perto de uma ponta

- Como se comporta o campo num condutor carregado com uma ponta?
- A superfície numa ponta é muito pequena
- Tal aumenta bastante a densidade de carga e $E = \sigma/\epsilon_0$
- *Então na ponta o campo vai ser muito mais intenso*
- Consideremos duas esferas condutoras carregadas e ligadas por um fio como uma aproximação duma ponta



- O fio vai alterar pouco o campo fora das esferas, servindo apenas para garantir que estas estão ao mesmo potencial
- *Em qual das esferas o campo à superfície é maior?*
- Podemos estimar o campo em cada esfera do seguinte modo
- Se a esfera maior tem uma carga Q o seu potencial à superfície é aproximadamente,

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

- Se a esfera menor tem carga q o seu potencial é aproximadamente,

$$V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Devido ao fio que liga as duas esferas $V_1 = V_2$ logo,

$$\frac{Q}{R} = \frac{q}{r}$$

- Por outro lado E na superfície é proporcional à densidade superficial,

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$
$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

assim,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{Q}{R^2}}{\frac{q}{r^2}}$$
$$= \frac{r}{R}$$

- Ou seja *o campo é maior na esfera pequena*

11.1.7 Forças eléctricas em condutores

- Uma carga elementar dq na superfície dum condutor sente o campo eléctrico de todas as outras cargas
- Logo dq sofre uma força eléctrica dessas cargas que, em electrostática, é perpendicular à superfície
- Como dq está ligada ao condutor por forças internas, *o condutor também sente essa força eléctrica*

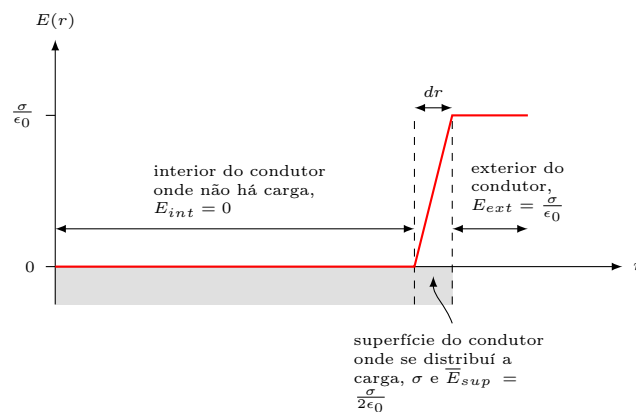
- Como vimos, imediatamente acima da superfície dum condutor,

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

- Imediatamente por baixo da superfície o campo é nulo $E_{int}=0$.
- Na superfície o campo médio é metade de E_{ext} ,

$$\vec{E}_{sup} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

- Voltaremos a deduzir este resultado mais à frente usando argumentos diferentes.



- Assim a força electrostática que actua numa carga dq na superfície dum condutor é,

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= dq \vec{E}_{sup} \\ &= \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \hat{n} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_{ext}^2}{2} dS \hat{n} \end{aligned}$$

- A força por unidade de superfície (*pressão electrostática*) é

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\epsilon_0 E_{ext}^2}{2} \hat{n} \quad \text{N/m}^2$$

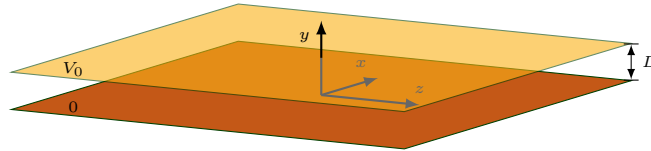
- A força num condutor com uma superfície S é

$$\vec{F} = \oint_S \frac{\epsilon_0 E_{ext}^2}{2} d\vec{S} \quad \text{N}$$

11.1.8 Potencial entre duas placas condutoras paralelas

Exercício 39

Consideremos duas placas condutoras e paralelas. Uma placa está ao potencial 0 a outra a V_0 . As placas são quadradas de lado L e distam entre si de D com $D \ll L$. Calcular o potencial na região entre as placas.



- Como não há carga entre as placas usamos a equação de Laplace nessa região para encontrar V
- Da simetria da distribuição de carga é conveniente usar coordenadas cartesianas
- Como não há variação em x ou z temos,

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{d^2}{dy^2} V = 0$$

integrando em y obtemos

$$\frac{d}{dy} V = C_1$$

e integrando novamente obtemos a seguinte expressão para v

$$V = C_1 y + C_2$$

- Para encontrar o valor das duas constantes de integração temos de impor condições a V
- Duas condições são: uma das placas está a um potencial nulo e a outra a V_0

$$V(0) = 0$$

$$V(D) = V_0$$

temos assim

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ V_0 &= C_1 D \end{aligned}$$

ou seja

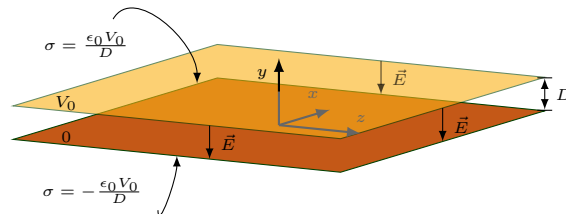
$$C_2 = 0 \wedge C_1 = \frac{V_0}{D}$$

- O potencial é uma função linear com y ,

$$V(y) = \frac{V_0}{D} y$$

- Este resultado está de acordo com o campo eléctrico gerado por um plano infinito de cargas ser constante como vimos antes
- Podemos rapidamente obter o campo neste caso e verificar que é constante,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= - \frac{d}{dy} V \hat{j} \\ &= - \frac{V_0}{D} \hat{j} \end{aligned}$$

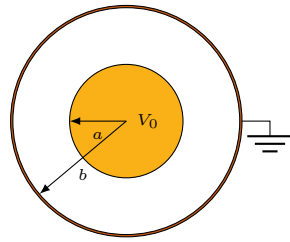


- Vimos já também que na superfície dum condutor $E = \sigma/\epsilon_0$ e é normal à superfície
- Assim $\sigma = \pm \frac{\epsilon_0 V_0}{D}$ sendo positiva (negativa) na placa superior (inferior)

11.1.9 Potencial num cabo coaxial

Exercício 40

Consideremos um cabo coaxial que consiste num cilindro condutor muito comprido de raio interno b coaxial com outro cilindro condutor (também muito comprido) de raio a com $a < b$. O condutor interior está ao potencial V_0 e o exterior está ligado à Terra. Calcular o potencial e o campo eléctrico na região $a < r < b$ bem como a densidade superficial de carga, σ em $r = a$ e $r = b$.



- Fazendo o eixo do cabo coincidir com o eixo z , é claro que a distribuição de carga tem simetria cilíndrica.
- Não havendo carga na região $a < r < b$ usamos a Eq. de Laplace,

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

como $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ (porquê?)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

- Integrando em r a Eq. de Laplace vem,

$$r \frac{dV}{dr} = K_1$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{K_1}{r}$$

integrando novamente em r

$$V(r) = K_1 \ln r + K_2$$

- Para encontrar as constantes de integração usamos os valores de $V(a)$ e $V(b)$

$$\begin{cases} K_1 \ln a + K_2 = V_0 \\ K_1 \ln b + K_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \\ K_2 = -V_0 \frac{\ln b}{\ln \frac{a}{b}} \end{cases}$$

- Então o potencial electrostático em $a < r < b$ fica,

$$V(r) = -\frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{b}$$

- O campo electrostático é dado por,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla V(r) \\ &= -\frac{K_1}{r}\hat{r} \\ &= \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r}\hat{r}\end{aligned}$$

- A densidade superficial de carga em a e b é,

$$\begin{aligned}E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \sigma &= \epsilon_0 E\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \frac{\epsilon_0 V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{a} \\ \sigma(b) &= \frac{\epsilon_0 V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{b}\end{aligned}$$

- $\sigma(a) > \sigma(b)$
- Na superfície externa (ligada à Terra) $V(b + \delta) = V(b) = 0$, onde δ é a espessura do condutor exterior
- De igual modo $\sigma(b + \delta) = 0$

11.1.10 A energia potencial eléctrica dum esfera condutora carregada

Exercício 41

Calculemos a energia potencial U_e dum esfera condutora, com raio R e que tem uma carga Q .

- Vamos calcular U_e por 3 métodos distintos:
 1. energia associada à carga Q
 2. o trabalho gasto para juntar (ou separar) toda a carga Q
 3. e a energia associada ao campo criado por Q
- *Primeiro método:* calcular a energia associada à carga Q

- Para saber qual a energia potencial da carga Q é necessário saber qual o potencial na superfície da esfera
- O campo eléctrico fora da esfera é,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- Então o potencial em R é,

$$\begin{aligned} V(R) &= - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

- Assim a energia potencial associada à carga Q (que como vimos só pode estar distribuída na superfície do condutor) é

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} QV \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

- *Segundo método:* calcular o trabalho gasto para separar a carga Q
- Suponhamos que o raio da esfera aumenta lentamente até infinito
- Da lei de Gauss o campo eléctrico fora da esfera fica inalterado
- Vimos antes que uma carga elementar $dq = \sigma dS$ na superfície da esfera sente um campo $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
- Então o trabalho realizado para separar esta carga quando o raio da esfera aumenta dr é,

$$\begin{aligned} dU_e &= dq \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dr \\ &= \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dr \end{aligned}$$

como $\sigma = Q/4\pi r^2$ e $dS dr = dv$

$$= \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 \frac{dv}{2\epsilon_0}$$

- Assim o trabalho (a energia potencial) associada à separação da carga Q é

$$U_e = \int \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 \frac{dv}{2\epsilon_0}$$

em coordenadas esféricas $dv = 4\pi r^2 dr$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\epsilon_0} \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

- *Terceiro método:* calcular a energia associada ao campo criado por Q
- Como E se estende a todo o espaço é necessário somar o produto da densidade de energia do campo, $(\epsilon_0 E^2/2)$, por um volume elementar, dv , desde a superfície da esfera (R) até ao infinito,

$$U_e = \int_v \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv$$

- *Porque não é necessário integrar dentro da esfera?*
- O campo tem simetria esférica logo,

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty E^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

- Por qualquer dos 3 métodos obtemos o mesmo valor da energia electrostática

Aula 12

Capacidade e condensadores

12.1 Capacidade de um condutor

- Devido à natureza linear das leis da electrostática, duplicando a carga num condutor duplica o campo eléctrico
- Duplicando o campo eléctrico duplica também o potencial
- Assim a razão Q/V é uma quantidade que se mantém constante, não dependendo nem de Q nem de V .
- Define-se a capacidade C de um condutor,

$$C = \frac{Q}{V}$$

- A capacidade só depende das dimensões e da forma do condutor
- A capacidade mede-se em farads (F), sendo esta unidade equivalente a coulombs por volt,

$$1\text{F} \equiv 1\text{CV}^{-1}$$

- Valores típicos de capacidade são milhares de milhões de vezes inferiores ao farad (μF , nF , pF)

12.1.1 Capacidade de uma esfera condutora

Exercício 42

Calcular a capacidade de uma esfera condutora de raio R carregada com uma carga Q .

- Já calculámos antes o potencial num ponto a uma distância r de uma esfera condutora carregada,

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

na superfície da esfera

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

- Então a capacidade da esfera é,

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} \\ &= 4\pi\epsilon_0 R = 111.3R \text{ pF e } R \text{ em metros} \end{aligned}$$

Exercício 43

Considere a Terra como um condutor de raio $R = 6.378 \times 10^6$ m e calcule a sua capacidade.

- Usando o valor antes calculado para a capacidade duma esfera condutora,

$$\begin{aligned} C &= 111.3 \times 10^{-12} R \\ &= 111.3 \times 10^{-12} \times 6.378 \times 10^6 \\ &= 0.7 \text{ mF} \end{aligned}$$

12.2 Capacidade entre dois condutores

- Para qualquer par de condutores no espaço em que um tenha uma carga $+Q$ e o outro uma carga $-Q$ verifica-se também uma razão constante entre Q e a diferença de potencial ΔV entre os condutores
- Por definição a capacidade C entre os dois condutores é,

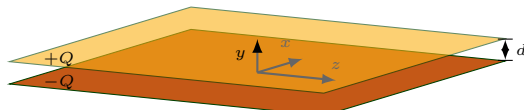
$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

- A capacidade só depende das posições relativas dos condutores e das suas formas

12.2.1 Capacidade de um condensador de placas paralelas

Exercício 44

Um condensador pode ser constituído por duas placas condutoras e paralelas. Cada placa tem área A , tendo uma carga $+Q$ e a outra carga $-Q$. A separação entre elas é $d \ll \sqrt{A}$. Calcular a capacidade deste condensador.



- Pela lei de Gauss, o campo eléctrico entre as placas é constante e perpendicular a estas,

$$E = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

- A diferença de potencial entre elas é,

$$\begin{aligned} \Delta V &= E d \\ &= \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \end{aligned}$$

- Então a capacidade deste condensador é,

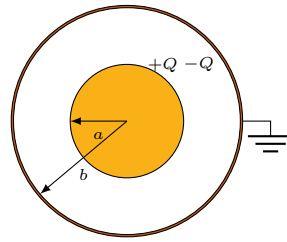
$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{\Delta V} \\ &= \frac{\epsilon_0 A}{d} \end{aligned}$$

- A capacidade C só depende das dimensões do condensador

12.2.2 Capacidade dum cabo coaxial

Exercício 45

Consideremos um cabo coaxial de altura h onde o condutor externo tem raio b e o condutor interno raio a com $a < b$. Qual é a sua capacidade?



- Sendo a diferença de potencial entre os dois condutores V_0 a capacidade é dada por,

$$C = \frac{Q}{V_0}$$

- Exprimindo Q em função de V_0 ou vice versa, podemos calcular C
- Já calculámos antes a densidade superficial de carga nas superfícies interiores dum cabo coaxial com uma diferença de potencial V_0 entre $r = a$ e $r = b$,

$$\sigma(a) = \frac{\epsilon_0 V_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

como $\sigma(a) = Q/(2\pi ah)$ obtemos imediatamente a relação entre Q e V_0

$$\frac{Q}{2\pi ah} = \frac{\epsilon_0 V_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

- Então a sua capacidade é dada por,

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

Note-se que a capacidade apenas depende da geometria do condensador, neste caso da altura h e dos raios a e b .

12.3 A energia armazenada num condensador

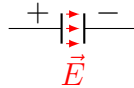
- Consideremos o processo de carga dum condensador descarregado



- Ao transferir uma carga dQ duma placa para a outra, uma das placas fica com excesso $+dQ$ de carga e a outra com $-dQ$

$$+dQ \quad | \quad -dQ$$

- Esta diferença de cargas estabelece de imediato um campo eléctrico da placa positiva para a negativa que se opõem a nova transferência de carga



- *Para continuar a carregar o condensador é necessário realizar trabalho contra este campo eléctrico, tornando-se este trabalho em energia armazenada no condensador*
- Se o condensador tiver uma carga Q quando a diferença de potencial entre as placas for V , o trabalho para transferir uma carga elementar dQ da placa $-$ para a placa $+$ é dado por,

$$dW = V dQ$$

- Da definição de capacidade temos que,

$$dW = \frac{Q}{C} dQ$$

integrando ambos os membros

$$W = \int \frac{Q}{C} dQ \\ = \frac{Q^2}{2C},$$

obtendo assim a energia armazenada no condensador.

- Usando mais uma vez a definição de capacidade ($C = Q/V$) podemos reescrever a energia armazenada nas seguintes formas, todas equivalentes,

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

- Repare-se que o último termo é igual à energia electrostática, já antes calculada, duma distribuição de carga Q que gera um potencial V

12.3.1 A energia armazenada num condensador de placas paralelas

Exercício 46

Qual é a energia armazenada num condensador de placas paralelas?

•

$$W = \frac{CV^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (Ed)^2 = \frac{\epsilon_0 E^2 Ad}{2}$$

- Como Ad é o volume entre as placas do condensador podemos escrever a energia por unidade de volume, ou densidade de energia w ,

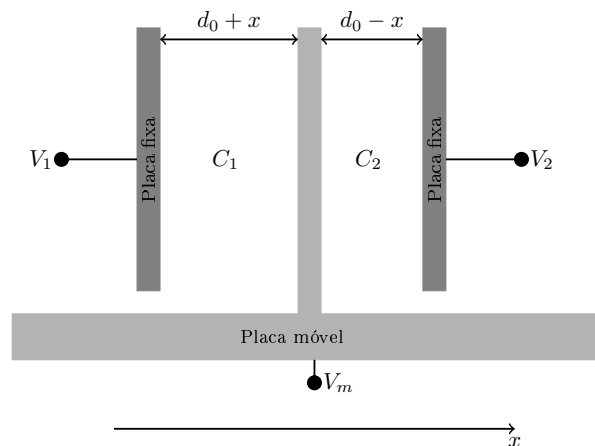
$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

- Esta é a expressão que já vimos antes para a densidade de energia electrostática duma distribuição de cargas que gera um campo E

12.3.2 Condensador Diferencial

Exercício 47

Um condensador diferencial pode ser usado para medir o deslocamento x da placa central (ver figura). Tendo o valor do deslocamento pode-se calcular a aceleração. Usando o facto de que a carga elétrica é a mesma nos dois condensadores, exprimir o deslocamento x em função da diferença de potencial em cada condensador.



- A capacidade de cada condensador é:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_0 + x} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_0 - x}$$

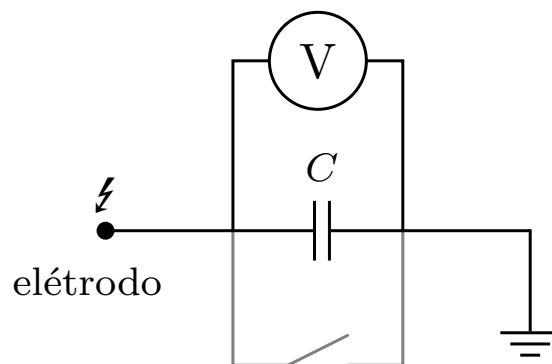
- Como $Q_1 = Q_2$ vem,

$$\begin{aligned} C_1(V_1 - V_m) &= C_2(V_2 - V_m) \\ C_1 \Delta V_1 &= C_2 \Delta V_2 \\ \frac{\Delta V_1}{d_0 + x} &= \frac{\Delta V_2}{d_0 - x} \\ \Delta V_1(d_0 - x) &= \Delta V_2(d_0 + x) \\ x &= \frac{\Delta V_1 - \Delta V_2}{\Delta V_1 + \Delta V_2} d_0 \end{aligned}$$

12.3.3 Detetor de polaridade capacitivo

Exercício 48

A figura ilustra como se pode usar um condensador para medir o sinal da carga de um objeto carregado. Um terminal do condensador é ligado à terra, o outro terminal é ligado a um elétrico onde é captada a carga. A cinzento está indicado um interruptor que serve para descarregar o condensador, antes de fazer uma medição. Medindo a diferença de potencial no condensador com um voltímetro pode-se calcular a carga no condensador e o sinal da mesma.

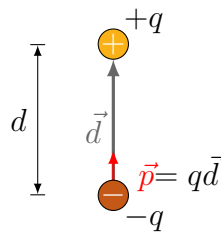


Aula 13

Campo electrostático na matéria

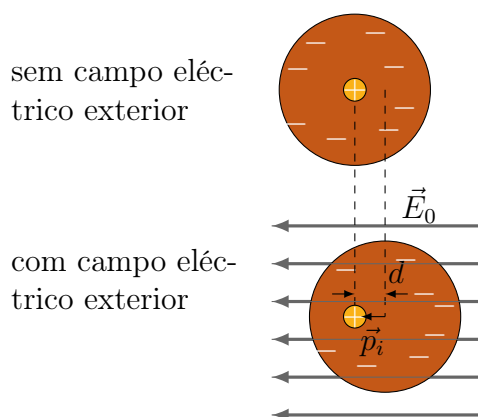
13.1 Momento Dipolar

- Já vimos antes que um *dipolo eléctrico* consiste em duas cargas com a mesma magnitude, mas sinais opostos, separadas por uma distância d
- Define-se o vector *momento dipolar* \vec{p} como, $\vec{p} = q\vec{d}$ onde o vector \vec{p} aponta da carga negativa para a positiva
- As linhas do campo eléctrico do dipolo apontam da carga positiva para a negativa



13.2 Dieléctricos: polarização da matéria

- Um campo eléctrico exterior \vec{E}_0 perturba a distribuição de cargas em torno do núcleo arrastando os electrões no sentido oposto ao de \vec{E}_0 , induzindo em todos os átomos um momento dipolar \vec{p}_i dado por, $\vec{p}_i \propto \vec{E}_0$
- Deste modo é induzido um momento dipolar p_i em cada átomo e estes dizem-se *polarizados*



13.2.1 Cargas de polarização e livres

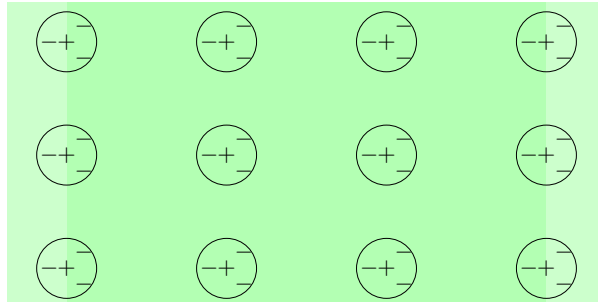
- Vimos no slide anterior que submetendo um átomo ou molécula a um \vec{E} surge um dipolo
- *Designemos as cargas que formam dipolos chamando-lhes cargas de polarização*
- *Deste modo qualquer carga que não pertença a um dipolo é dita livre (de dipolos), mesmo que não se possa mover livremente pelo material*
- *Aos electrões incrustados no dieléctrico chamamos também cargas livres, no sentido em que não estão polarizadas (e.g. bombardeando um dieléctrico com electrões)*
- *Os electrões livres num metal também são cargas livres (de dipolos)*

13.2.2 O vector polarização eléctrica

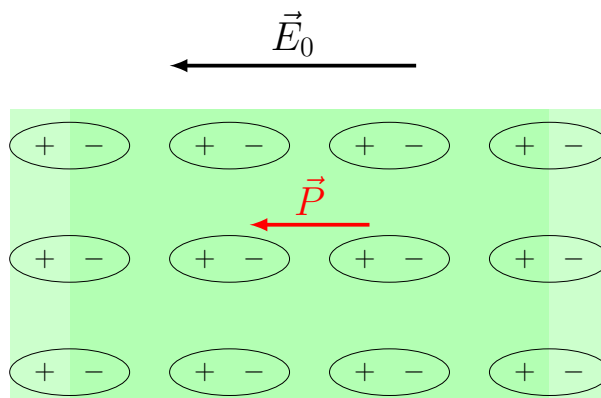
- Se na vizinhança de um determinado ponto o momento dipolar médio por átomo é \vec{p}_i e se existem n átomos por metro cúbico, então todos estes dipolos *atómicos* dão origem a um campo,

$$\vec{P} = n\vec{p}_i \quad (13.1)$$

que é o vector polarização eléctrica nesse ponto



Dielétrico sem aplicação de campo elétrico externo

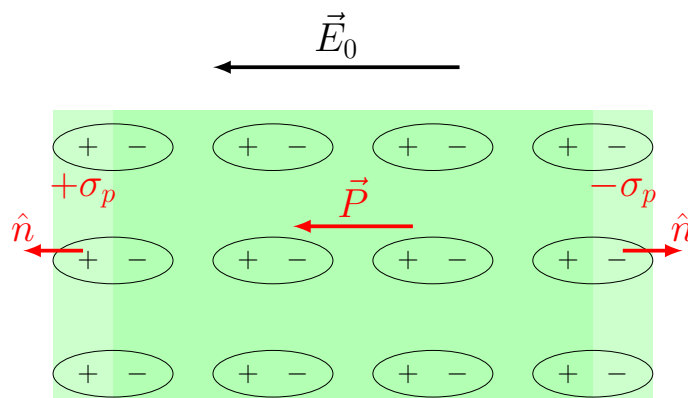


Dielétrico com aplicação de campo elétrico externo \vec{E}_0

- O *vector polarização eléctrica* \vec{P} é o momento dipolar por unidade de volume num determinado ponto e as suas unidades são C/m^2
- \vec{P}/ϵ_0 tem as mesmas unidades do campo eléctrico e a sua projecção na direcção de \vec{E}_0 aponta no sentido de \vec{E}_0 , somente devido à definição de \vec{p}_i

13.3 A carga de polarização na superfície e no interior do dielétrico

13.3.1 A densidade superficial de carga de polarização



Dielétrico com aplicação de campo elétrico externo \vec{E}_0

- Consideremos um dielétrico polarizado por um campo elétrico exterior
- O número de cargas que atravessa um elemento de superfície $d\vec{S} = \hat{n} dS$ do dielétrico é,

$$\begin{aligned} dQ &= \vec{P} \cdot d\vec{S} \\ &= \vec{P} \cdot \hat{n} dS \end{aligned}$$

- Então a *densidade superficial de cargas polarizadas* é,

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{dQ}{dS} \\ &= \vec{P} \cdot \hat{n} \end{aligned}$$

- σ_p é igual em magnitude à componente normal de \vec{P} que aponta para fora da superfície

13.3.2 A densidade volumétrica de carga de polarização

- Calculemos agora Q_p , a carga polarizada que sai para fora duma superfície fechada S no mesmo dielétrico

$$Q_p = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

- Então dentro do volume V limitado por S fica uma carga igual a $-Q_p$ que é,

$$-Q_p = \int_V \rho_p dV$$

- Onde ρ_p é a densidade volumétrica de carga de polarização
- Podemos encontrar o valor de ρ_p da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \int_V \rho_p dV &= -Q_p \\ &= - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

usando o teorema da divergência temos

$$= - \int_V \nabla \cdot \vec{P} dV$$

- Esta igualdade é válida para qualquer volume no dielétrico, logo a *densidade volumétrica de carga de polarização* é,

$$\rho_p = - \nabla \cdot \vec{P}$$

13.4 A lei de Gauss num dielétrico

- Consideremos um volume v que contém cargas de polarização Q_p e livres Q_ℓ ,
- A lei de Gauss diz que o fluxo total de \vec{E} que sai da superfície S que envolve o volume v é,

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_\ell + Q_p}{\epsilon_0} \\ &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

onde $Q_{int} = Q_\ell + Q_p$ é a carga total dentro do volume v

- Usando o valor anterior obtido para Q_p podemos escrever,

$$\begin{aligned}\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} &= Q_\ell + Q_p \\ \oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} &= Q_\ell - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} &= Q_\ell\end{aligned}$$

- É conveniente destacar a diferença entre a polarização \vec{P} e o campo eléctrico \vec{E} denominado o *campo deslocamento eléctrico* $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.
- Assim podemos escrever a lei de Gauss para o campo deslocamento eléctrico \vec{D} ,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_\ell$$

- Usando o teorema da divergência obtemos (*porquê?*),

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell$$

- No caso simples e praticamente ideal em que sob o efeito dum campo eléctrico não muito forte a polarização da matéria é linear, homogénea e isotrópica tem-se que, $\vec{P} \propto \vec{E}$,

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

- onde a susceptibilidade eléctrica χ_e é uma constante adimensional que indica o grau de polarização dum dielétrico
- Então para materiais em que a polarização é homogénea, isotrópica e linear verifica-se que,

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 (\vec{E} + \chi_e \vec{E}) \\ &= \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \\ &= \varepsilon \vec{E},\end{aligned}\tag{13.2}$$

onde ε é a *permissividade eléctrica do material* que também é chamada de *constante dielétrica do material*

- A susceptibilidade relaciona-se com a permissividade pela relação,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

13.4.1 Permitividade relativa

- Define-se a permitividade eléctrica relativa ou constante dielétrica relativa (relativa ao valor do vazio) por,

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \\ &= 1 + \chi_e\end{aligned}$$

- ε ou ε_0 têm as mesmas unidades ($\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2} \equiv \text{Fm}^{-1}$)
- ε_r é adimensional (não tem unidades)
- No vácuo $\varepsilon_r = 1$ e se as cargas não oscilarem
- Em geral $\varepsilon_r > 1$
- Tipicamente verifica-se:
 - $\varepsilon_r \approx 1.001$, para gases
 - $1.1 \lesssim \varepsilon_r \lesssim 10000$ para sólidos isoladores
 - $\varepsilon_r =$ indeterminado para condutores
- Os dados na tabela indicam que uma gama variada de sólidos tem valores de ε_r desde 2 a 16, que são superiores aos valores típicos dos gases (e.g. para o ar a 20°C , $\varepsilon_r = 1.000536$)
- A cerâmica Titanato de Bário (BaTiO_3) tem $1250 < \varepsilon < 10000$ um valor muito superior aos restantes materiais, revelando uma polarização induzida pelo campo exterior muito superior

Substância		ε_r
Elementos		
Silício	Si	11.9
Germânio	Ge	16.0
Cerâmicos		
Alumina	Al_2O_3	8.5
Titanato de Estrôncio	SrTiO_3	200
Zirconato de Estrôncio	SrZrO_3	38
Vidros		
Quartzo	SiO_2	4.5
Vidro Boro-Silicato	SiO_2 com BO	4 - 5
Cristal	SiO_2 com PbO	7
Plásticos		
Polietileno		2.3
Polistireno		2.6
Politetrafluoretileno	PTFE	2.1
Poliamida	Nylon	3 - 4

13.4.2 Relação entre densidades volumétricas de cargas livres e ligadas

- Como se relacionam ρ , ρ_ℓ e ρ_p , num dielétrico linear, homogéneo e isotrópico?
- Usando a relação entre os campos \vec{D} , \vec{E} e \vec{P} temos,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

como $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$$\vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \vec{D}$$

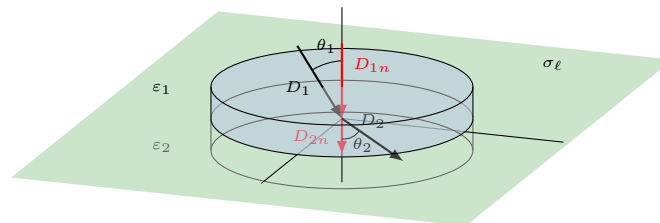
calculando a divergência vem,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{P} &= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \nabla \cdot \vec{D} \\ \rho_p &= \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \rho_\ell \\ \rho &= \rho_\ell + \rho_p = \frac{\rho_\ell}{\varepsilon_r} \end{aligned}$$

13.5 Condições fronteira em dielétricos

13.5.1 Componente normal do deslocamento eléctrico

- *Entre dois meios diferentes o potencial V é contínuo para garantir valores finitos do campo E*
- Consideremos uma superfície gaussiana cilíndrica com uma altura muito pequena, na fronteira entre dois dielétricos diferentes (ε_1 e ε_2)



- Na fronteira há uma densidade superficial de carga livre, σ_ℓ
- O fluxo pela parede do cilindro é desprezível, pois este tem uma altura muito pequena
- Qual é o fluxo de \vec{D} pela base e pelo topo do cilindro?

- A lei de Gauss diz que o fluxo de \vec{D} é igual à carga livre interna ao cilindro,

$$(D_{2n} - D_{1n}) A = \sigma_\ell A$$

onde A é a área da base do cilindro

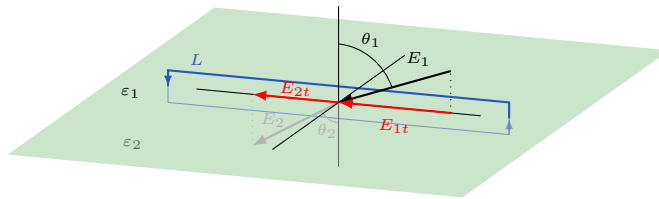
$$(D_{2n} - D_{1n}) = \sigma_\ell$$

- A normal à superfície do campo \vec{D} é contínua se $\sigma_\ell = 0$
- A normal à superfície do campo \vec{E} é descontínua se $\sigma_\ell = 0$ pois,

$$\begin{aligned} D_{2n} &= D_{1n} \\ \varepsilon_2 E_{2n} &= \varepsilon_1 E_{1n} \end{aligned}$$

13.5.2 Componente tangencial do campo eléctrico

- Consideremos um caminho fechado de comprimento $2L$ paralelo à fronteira entre dois dielétricos diferentes (ε_1 e ε_2) e infinitesimalmente próximo da superfície



- Consideremos L muito pequeno de modo a que \vec{E} seja constante no caminho
- A circulação de \vec{E} nos caminhos perpendiculares à superfície fronteira é desprezável pois os seus comprimentos são infinitesimais
- A circulação total de \vec{E} ao longo do caminho é então dada por,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = (E_{1t} - E_{2t}) L$$

mas como \vec{E} é conservativo

$$(E_{1t} - E_{2t}) L = 0$$

logo

$$E_{1t} = E_{2t}$$

- Ou seja a componente tangencial de \vec{E} à fronteira entre os dielétricos é contínua
- Contudo a componente tangencial de $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ não é contínua,

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

13.5.3 Desvio do campo eléctrico numa interface

- Os vectores \vec{E} e \vec{D} mudam de direcção ao atravessarem a interface entre dois dielétricos diferentes, lineares, homogéneos e isotrópicos
- Se $\sigma_\ell = 0$ na interface vimos que,

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n} \\ D_1 \cos \theta_1 &= D_2 \cos \theta_2 \\ \varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 &= \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

- Por outro lado a continuidade de E_t implica que,

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ E_1 \sin \theta_1 &= E_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

- Logo resulta que,

$$\frac{\tan \theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\varepsilon_2}$$

- Resumindo,

$$\begin{aligned} D_{2n} &= \sigma_\ell + D_{1n} \\ D_{2t} &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_{1t} \end{aligned}$$

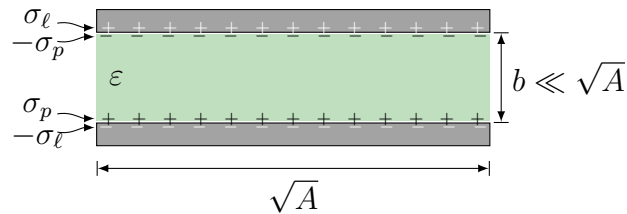
$$\begin{aligned} E_{2n} &= \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n} \\ E_{2t} &= E_{1t} \end{aligned}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan \theta_1$$

13.6 Condensador com dielétrico

Exercício 49

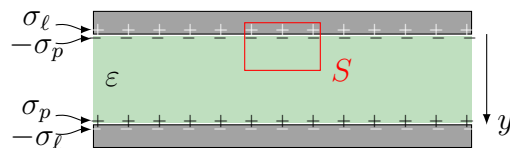
Considere-se um condensador de placas paralelas com área A e que distam entre si de b . Esta é também a espessura do dielétrico de permitividade ε , que preenche o espaço entre as placas. Considere que $b \ll \sqrt{A}$ e que no interior do dielétrico não há cargas livres. Calcule a capacidade C e as densidades superficiais de cargas livres e de polarização, σ_ℓ e σ_p .



- Na superfície do condutor existe σ_ℓ e na superfície do dielétrico existe σ_p
- No interior do condutor têm-se que $E_c = D_c = 0$
- As condições de continuidade implicam que \vec{E}_d e \vec{D}_d sejam perpendiculares à interface no interior do dielétrico pois,

$$E_{c_t} = E_{d_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{c_t} = D_{d_t} = 0$$

- Vamos começar por calcular \vec{D}_d no dielétrico considerando uma superfície gaussiana S cilíndrica cuja base está no dielétrico e o topo está no condutor sendo paralelos à interface dos dois meios



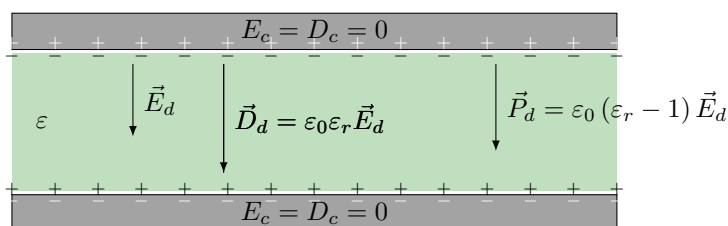
- A lei de Gauss para o campo D_d diz que o fluxo deste campo apenas depende da carga livre logo,

$$\oint \vec{D}_d \cdot d\vec{S} = Q_\ell$$

$$D_d = \sigma_\ell$$

e o vetor é,

$$\vec{D}_d = \sigma_\ell \hat{j}$$



- Para encontrar \vec{E}_d usamos a relação $\vec{D}_d = \epsilon \vec{E}_d$ que conduz a,

$$\vec{E}_d = \frac{\sigma_\ell}{\epsilon} \hat{j}$$

- A diferença de potencial entre as placas V é,

$$\begin{aligned} V &= E_d b \\ &= \frac{\sigma_\ell}{\epsilon} b \\ &= \frac{Q_\ell}{A\epsilon} b \end{aligned}$$

- Logo a capacidade C é,

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q_\ell}{V} \\ &= \frac{\epsilon A}{b} \\ &= \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{b} \end{aligned}$$

- *A capacidade aumenta de um factor de ϵ_r relativamente ao condensador sem dielétrico*

- Recordemos a capacidade dum condensador de placas paralelas é,

$$\begin{aligned} C_{\text{dielétrico}} &= \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \quad \text{com dielétrico} \\ C_{\text{vazio}} &= \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{sem dielétrico} \end{aligned}$$

- Repare que,

$$C_{\text{dielétrico}} = \epsilon_r C_{\text{vazio}}$$

logo

$$C_{\text{dielétrico}} > C_{\text{vazio}}$$

- Para encontrar o campo \vec{P}_d usamos a relação $\vec{D}_d = \varepsilon_0 \vec{E}_d + \vec{P}_d$ que conduz a,

$$\begin{aligned}\vec{P}_d &= \vec{D}_d - \varepsilon_0 \vec{E}_d \\ &= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \sigma_\ell \hat{j}\end{aligned}$$

- Recordando que $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$ a densidade superficial de carga de polarização é,

$$\sigma_p = \pm \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \sigma_\ell,$$

em cada uma das superfícies do dielétrico

13.6.1 A energia num condensador com dielétrico

Exercício 50

Calcule a energia armazenada num condensador com placas paralelas com e sem dielétrico de constante dielétrica ε . Calcule igualmente a força entre as placas nos dois casos. Concretize os valores de energia se $C = 5 \mu\text{F}$ e $C = 5 \text{kF}$ (super-condensador que não tem as armaduras paralelas) e considerando uma diferença de potencial entre as placas de 2 V.

- A energia é,

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2$$

como $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 A/d$ vem,

$$= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{2d} V^2$$

- Conclui-se então que a energia armazenada no condensador aumenta de ε_r quando o espaço entre as placas é preenchido por um dielétrico com $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$.
- Condensadores a 2 V com capacidades de $C = 5 \mu\text{F}$ e $C = 5 \text{kF}$ armazenam uma energia de 10 μJ e 10 kJ, respetivamente.
- Nestas condições seriam precisos 360 condensadores com $C = 5 \text{kF}$ para armazenar 1 kWh de energia.

13.7 O campo de cargas livres em dieléctricos

- A lei de Coulomb para duas cargas livres embebidas em dieléctricos, lineares homogéneos e isotrópicos é,

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}$$

e o campo eléctrico criado pela carga livre Q_1 é,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1}{r^2} \hat{r}$$

13.8 O potencial num dieléctrico

- Consideremos um dieléctrico com cargas superficiais σ_p e volumétricas ρ_p de polarização
- O potencial num ponto P do espaço criado por estas cargas é dado por,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho_p dv'}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma_p dS'}{r}$$

onde r é a distância entre a carga de polarização e o ponto P

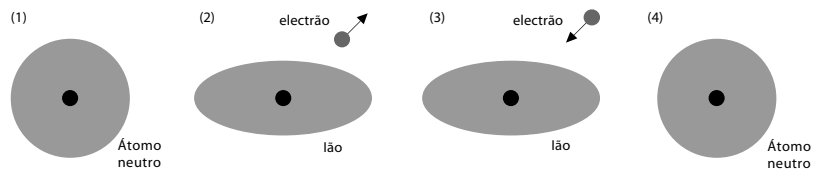
- Se houver cargas livres no dieléctrico adicionamos os termos correspondentes para obter V
- Resumindo os materiais que no seu interior reduzem a intensidade dum campo eléctrico externo são chamados de dieléctricos (do Grego *diá*, contra + *eléctrico*)
- Esta redução que resulta do efeito colectivo dos dipolos *atómicos* é caracterizada pela constante dieléctrica do material ϵ_r

13.9 Rotura eléctrica

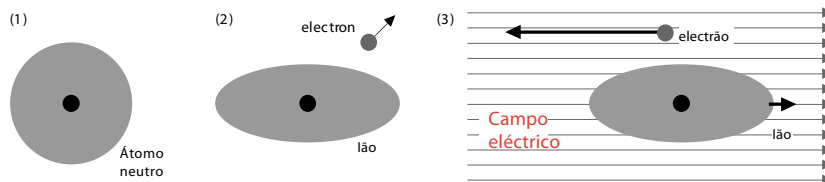
- *Haverá um limite para a quantidade de carga que se pode armazenar num condensador?*
- Adicionando mais carga a um condensador aumenta a diferença de potencial entre as placas e como tal aumenta também o campo eléctrico entre as placas

- Este aumento não é ilimitado. Para um certo intervalo de valores do campo eléctrico, observa-se a rotura eléctrica do meio isolante entre as placas ocorrendo a transferência de cargas entre as placas
- O valor do campo para o qual se observa a rotura eléctrica é denominado campo de rotura eléctrica
- Para o *ar* a 25°C e pressão atmosférica normal 0.1013MPa a *rotura eléctrica dá-se a* $3.13 \times 10^6 \text{V/m}$
- O mecanismo da rotura eléctrica dum gás como o ar pode ser explicado concentrando a atenção num átomo do gás recordando que este é constituído por Z electrões em órbita dum núcleo que tem Z protões
- Enquanto os electrões permanecerem em orbita do núcleo, não pode haver condução de electricidade (corrente eléctrica) pelo gás
- Se um ou mais electrões *adquirirem uma energia superior à sua energia potencial* no campo eléctrico do núcleo, então *podem abandonar o átomo*, deixando para trás um *ião*, neste caso *um átomo com excesso de carga positiva*
- Ora se não houver mais nenhum outro campo eléctrico na vizinhança do ião, o electrão é rapidamente atraído pelo campo positivo do ião e o átomo volta a ser neutro
- Mas caso haja um campo eléctrico exterior \vec{E} , o electrão e o ião podem ser acelerados através do gás pelo campo
- Antes de colidir o ião percorre uma distância d *ganhando uma energia* do campo \vec{E} dada por, $\int_0^d q\vec{E} \cdot d\vec{x} = qEd$, onde qE é a força exercida pelo o campo eléctrico
- Se a distância d *for suficientemente longa* pode adquirir energia suficiente para *arrancar outro electrão do átomo com que vai colidir*, bastando que para tal energia ganha seja igual ou superior à energia de ionização do electrão alvo

Ionização dum átomo na **ausência** dum campo eléctrico exterior



Ionização dum átomo na **presença** dum campo eléctrico exterior



- A repetição deste processo pode gerar rapidamente uma avalanche de iões/electrões que permitem a condução de corrente eléctrica pelo gás, transformando assim subitamente um gás isolador num gás condutor
- O campo de ruptura E_R será aquele que permitirá a ocorrência da avalanche
- Voltando à questão da carga máxima que se pode armazenar num condensador, podemos concluir que o campo de ruptura eléctrica impõem o limite
- Pode aumentar-se o limite reduzindo o campo de ruptura eléctrica
- *Preenchendo o espaço entre as placas com um dieléctrico reduz a diferença de potencial entre as placas e um conseqüente aumento da capacidade do condensador*

Aula 14

Corrente eléctrica

14.1 Corrente eléctrica

- Até agora estudámos fenómenos que envolviam cargas eléctricas paradas
- *Vamos considerar agora que as posições das cargas podem variar no tempo*
- Um campo eléctrico (força eléctrica) é necessário para mover cargas
- De forma análoga podemos analisar o movimento de cargas numa diferença de potencial eléctrico
- Um conceito muito importante é o de corrente eléctrica
- Se num determinado ponto dum condutor flui, através duma superfície, uma quantidade de carga dQ num pequeno intervalo de tempo dt a *corrente eléctrica* I que flui nessa superfície é definida como,

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- *Por convenção o sentido da corrente é aquele em que cargas positivas se movem do potencial mais elevado ($+V$) para o mais baixo ($-V$) (frequentemente em condutores sólidos as cargas móveis são electrões livres que se movem no sentido oposto)*
- *Vamos em seguida considerar apenas regimes estacionários onde a corrente em qualquer ponto do condutor permanece constante no tempo*
- A unidade de corrente eléctrica é o *ampère* (A), que é equivalente a coulomb por segundo,

$$1\text{A} \equiv 1\text{C/s}$$

dada a enorme facilidade em medir amperes e a grande dificuldade em medir coulomb, o coulomb é definido em função do ampère

14.2 Lei de Ohm não local

- Qual é a relação entre a intensidade da corrente I que flui num fio condutor e a diferença de potencial V aplicada entre as pontas do fio?
- O físico Alemão Georg Ohm foi o primeiro a descobrir que I é directamente proporcional a V ,

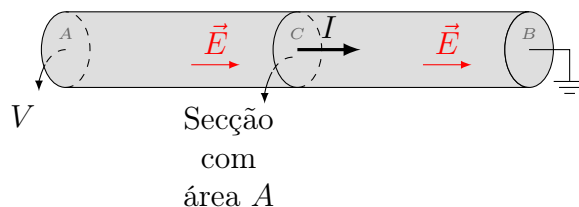
$$V = RI$$

onde a constante de proporcionalidade R é denominada a *resistência eléctrica do condutor*

- A unidade de resistência eléctrica é o ohm (Ω) e é equivalente a volt por ampere,

$$1 \Omega \equiv 1 \text{V/A}$$

- A lei de Ohm na forma $V = RI$ diz-se *não local* pois as grandezas de que depende não são medidas no mesmo ponto
- V é a diferença de potencial entre dois pontos A e B , num condutor
- I é a corrente eléctrica num ponto do condutor $A \leq C \leq B$ mas assume-se constante entre A e B
- R é a resistência eléctrica do condutor entre A e B



14.3 Resistência e resistividade - abordagem clássica

- Vamos em seguida calcular a resistência eléctrica seguindo uma abordagem clássica usando o modelo de Drude
- A corrente eléctrica é transportada por electrões livres
- Consideremos um fio condutor de comprimento L e secção A sujeito a uma diferença de potencial V
- O campo eléctrico longitudinal dentro do condutor é

$$E = \frac{V}{L}$$

- Consideremos um elétron livre do condutor, com carga $-e$ e massa m_e



- O campo eléctrico no condutor exerce uma força

$$F_e = -eE$$

no elétron provocando-lhe uma aceleração

$$a = \frac{-eE}{m_e}$$

- O elétron não acelera indefinidamente, acabando por colidir com um dos átomos do condutor
- Sendo os átomos muito mais pesados, o elétron perde todo o seu momento linear na colisão
- Assim além da força eléctrica F_e o elétron está também sujeito a uma força de atrito F_a , resultante das colisões que sofre ao longo do seu movimento
- Por simplicidade vamos assumir que essa força é proporcional à velocidade do elétron

$$F_a = -\frac{m_e}{\Delta t}v$$

sendo Δt o tempo médio entre colisões

- Usando a 2ª lei de Newton temos:

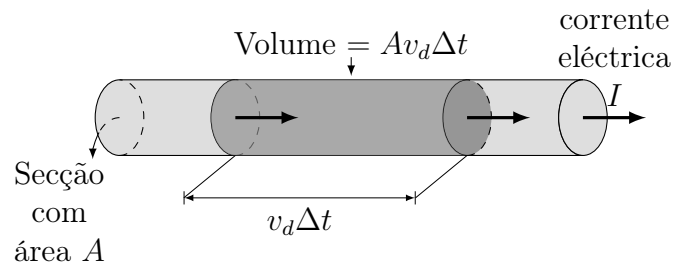
$$\begin{aligned} \sum F &= m_e a \\ F_e + F_a &= m_e \frac{dv}{dt} \\ -eE - \frac{m_e}{\Delta t}v &= m_e \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

- Em regime estacionário $v = v_d = \text{constante}$ logo $dv/dt = 0$,

$$\begin{aligned} -eE - \frac{m_e}{\Delta t}v_d &= 0 \\ v_d &= \frac{-e\Delta t}{m_e}E \end{aligned}$$

- v_d é a chamada velocidade de deriva dos electrões livres num condutor, quando sujeitos a um campo eléctrico E
- O sinal $-$ indica que os electrões derivam no sentido oposto ao do campo \vec{E}
- Como calcular então a corrente eléctrica gerada por um campo E ?
- A corrente eléctrica num dado ponto do condutor é o número de cargas ΔQ que nesse ponto atravessam uma superfície A por unidade de tempo
- Seja n_e o número de electrões livres por unidade de volume no condutor, que derivam pelo fio com velocidade v_d
- Tal como é ilustrado na figura a carga procurada ΔQ é igual à carga dum electrão vezes o número de electrões livres no volume $Av_d\Delta t$

$$\Delta Q = -en_e Av_d \Delta t$$



- A corrente eléctrica que passa no condutor é então dada por,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Delta Q}{\Delta t} \\ &= -en_e Av_d \\ &= -en_e A \frac{-e\Delta t}{m_e} E \\ &= \frac{e^2 n_e \Delta t}{m_e} \frac{A}{L} V \end{aligned} \tag{14.1}$$

- Comparando esta expressão com a lei de Ohm ($I = V/R$) obtemos uma expressão microscópica para R ,

$$R = \frac{m_e}{e^2 n_e \Delta t} \frac{L}{A}$$

- A resistividade eléctrica ρ_e do material define-se como,

$$\rho = \frac{m_e}{e^2 n_e \Delta t}$$

que não depende das dimensões do material

- As unidades da resistividade são ohm vezes metro (Ωm)
- O recíproco da resistividade $\sigma = 1/\rho$ é a *condutividade eléctrica*
- σ mede-se em siemens por metro (S/m) onde $S=1/\Omega$.
- A resistência relaciona-se com a resistividade por,

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

- A *resistência depende das dimensões do condutor*, sendo proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à sua secção, sendo a resistividade a constante de proporcionalidade

14.3.1 Densidade de corrente

- À quantidade de corrente por unidade de superfície, S chamamos *densidade de corrente*,

$$J = \frac{I}{S}$$

que se mede em ampère por metro quadrado (A/m^2)

- Microscopicamente vector densidade de corrente \vec{J} é definido por,

$$\vec{J} = -en_e \vec{v}_d$$

- A corrente I que atravessa uma superfície S é dada pelo fluxo de \vec{J} em S ,

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

14.4 Lei de Ohm local

- Recordemos a Eq. 14.1,

$$\begin{aligned} I &= -en_e A \frac{-e\Delta t}{m_e} E \\ &= A\sigma E \end{aligned}$$

- Desta expressão podemos escrever a *lei de Ohm local*, válida em cada ponto dum condutor,

$$J = \sigma E \tag{14.2}$$

ou

$$\rho J = E \tag{14.3}$$

14.4.1 Resistividade e a temperatura

Exercício 51

Considere um fio de Cobre com uma secção de 1 mm^2 , atravessado por uma corrente eléctrica de 1 A que está à temperatura de $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Compare a velocidade térmica v_T com a velocidade de deriva v_d dos electrões livres deste metal.

Nota: O número de electrões livres por unidade de volume no Cobre é $n_e = 8.50 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ (ver Eq. (41)).

- Admitindo que os electrões estão à temperatura ambiente do metal, em média cada electrão tem uma energia térmica $3k_B T/2$ onde $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ é a constante de Boltzman
- Essa energia térmica manifesta-se na forma de energia cinética,

$$\begin{aligned} \frac{m_e v_T^2}{2} &= \frac{3k_B T}{2} \\ &= \frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} (273.15 + 20)}{2} \\ &= 6.07 \times 10^{-21} \text{ J} \end{aligned}$$

- Então a velocidade térmica é,

$$\begin{aligned} v_T &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \\ &= \sqrt{\frac{12.14 \times 10^{-21}}{9.1 \times 10^{-31}}} \\ &= 1.1 \times 10^5 \text{ m/s} \\ &= 4.2 \times 10^5 \text{ km/h} \end{aligned}$$

- Para estimar a velocidade de deriva recorde-se que por definição,

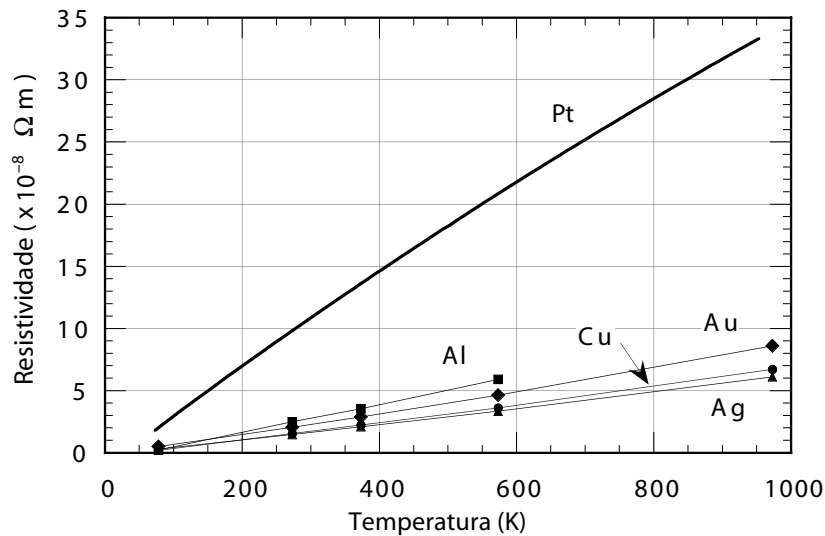
$$\begin{aligned} J &= e n_e v_d \\ v_d &= \frac{J}{e n_e} \\ &= 7.3 \times 10^{-5} \text{ m/s} \\ &= 26.5 \text{ cm/h} \end{aligned}$$

- Repare-se que a velocidade térmica é 1.5 mil milhões de vezes maior que a velocidade de deriva dos electrões livres (9 ordens de magnitude)

- Porque é que do movimento térmico dos electrões não resulta qualquer corrente eléctrica, mesmo sendo $v_T \gg v_d$?
- Como pode existir corrente alternada sendo v_d tão baixa?

14.5 Resistividade e a temperatura

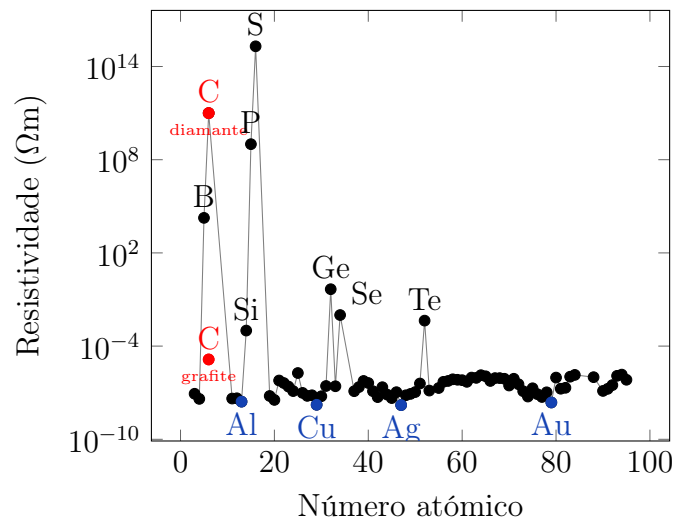
- Experimentalmente observa-se que a resistividade depende quase linearmente da temperatura, aumentando com a temperatura.



- Para pequenos intervalos de temperatura é comum usar a aproximação linear:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha_0(T - T_0)]$$

- onde T_0 é a temperatura de referência a que são medidos os correspondentes valores de ρ_0 e do coeficiente de temperatura α_0 .
- Valores comuns são conhecidos para a temperatura ambiente $T_0 = 293 \text{ K} = 20^\circ\text{C}$.
- Para valores de temperatura muito diferentes de T_0 é necessário determinar novo coeficiente α .
- Se $T \approx 0 \text{ K}$ a resistividade atinge um valor mínimo, que é zero para alguns materiais, chamados supercondutores.
- O gráfico mostra a resistividade em função da massa atômica dos elementos sólidos, ($\approx 293 \text{ K}$), da tabela periódica. Os melhores condutores são a Prata ($1.59 \times 10^{-8} \Omega m$), Cobre $1.67 \times 10^{-8} \Omega m$, e Ouro ($2.35 \times 10^{-8} \Omega m$), metais nobres, seguidos por perto pelo Alumínio ($2.66 \times 10^{-8} \Omega m$)



14.6 A lei da conservação da carga eléctrica

- Consideremos um volume V limitado por uma superfície S contendo uma densidade volumétrica de carga ρ
- As cargas saem e entram e num dado ponto da superfície a densidade de corrente é J
- Até hoje nunca se observou a criação ou a destruição líquida de carga eléctrica
- Então se sair carga do volume V num certo instante temos,

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= - \frac{dQ}{dt} \\ &= - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \end{aligned}$$

- Usando o teorema da divergência podemos escrever,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

como a igualdade é válida para qualquer volume

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

que é a *equação da continuidade* baseada no princípio da conservação da carga

14.6.1 Tempo de relaxamento

- Quando carregamos um condutor quanto tempo demoram as cargas a espalharem-se pela sua superfície?
- A lei de conservação da carga obriga a que,

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

usando a lei de Ohm temos

$$\nabla \cdot \sigma_e \vec{E} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

e da lei de Gauss vem

$$\begin{aligned} \sigma_e \nabla \cdot \vec{E} &= - \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \sigma_e \frac{\rho}{\varepsilon} &= - \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

- Podemos reescrever a equação diferencial como,

$$\sigma_e \frac{dt}{\varepsilon} = - \frac{d\rho}{\rho}$$

integrando ambos os membros vem

$$\begin{aligned} - \int_0^t \frac{\sigma_e}{\varepsilon} dt &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} \\ - \frac{\sigma_e}{\varepsilon} t &= \ln \frac{\rho}{\rho_0} \end{aligned}$$

exponenciando ambos os membros vem

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Em que $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma_e}$ é o tempo de relaxamento da carga
- A permitividade dum condutor não é mensurável, devido à condutividade mascarar o efeito da polarização
- Assumindo um valor da ordem de

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

temos por exemplo para o Cobre que tem uma condutividade de

$$\sigma_e = 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma_e} \approx 1.5 \times 10^{-19} \text{ s}$$

- Contudo o valor medido experimentalmente, à temperatura ambiente, é 5 ordens de magnitude maior $\tau \approx 1 \times 10^{-14}$ s o que indica uma permitividade eléctrica relativa para o Cobre $\epsilon_r = 99952.70$

14.6.2 Tempo de relaxamento num condensador real

- Consideremos a definição de capacidade dum condensador,

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} \\ &= \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}} \\ &= \frac{\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S}}{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}} \end{aligned}$$

- A superfície fechada S envolve a região na placa condutora do condensador onde estão as cargas positivas
- O caminho L vai desde a placa *negativa* (ao potencial mais baixo) à placa *positiva* (potencial mais elevado)
- O meio *dieléctrico entre as placas do condensador tem uma resistência, R muito alta mas não infinita*
- Então da lei de Ohm temos,

$$R = \frac{V}{I}$$

I é a corrente residual que atravessa o dieléctrico logo

$$\begin{aligned} &= \frac{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}} \end{aligned}$$

usando a lei de Ohm local $J = \sigma_e E$ vem,

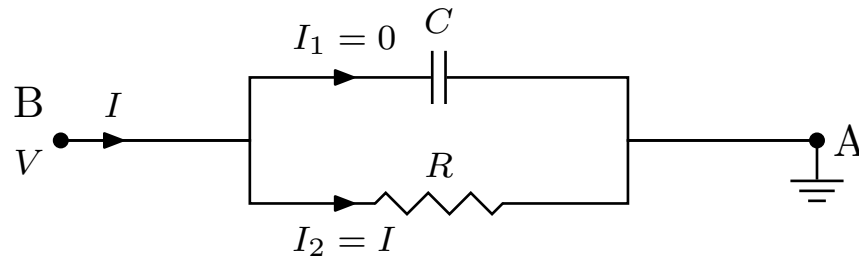
$$\begin{aligned} &= \frac{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\sigma_e \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}} \end{aligned}$$

- A superfície fechada S e o caminho L são os mesmos usados na expressão da capacidade

- Multiplicando a expressão obtida para a capacidade pela obtida para a resistência vem,

$$\begin{aligned}
 RC &= \frac{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\sigma_e \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}} \frac{\varepsilon \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}} \\
 &= \frac{\varepsilon}{\sigma_e} \\
 &= \rho_e \varepsilon \\
 &= \tau
 \end{aligned}$$

- O tempo de relaxamento τ está assim relacionado com a permissividade ε do dielétrico e a condutividade σ_e (resistividade ρ_e)
- Um condensador real pode ser representado por um condensador ideal, com um dielétrico de $\rho_e = \infty$ e capacidade C igual à do condensador real, em paralelo com uma resistência R de valor igual à resistência do dielétrico real.
- A carga no condensador é $Q = I\tau$



14.7 Força electromotriz

- Já vimos que um campo elétrico estático é conservativo e portanto num caminho fechado c ,

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

usando a lei de Ohm local podemos escrever

$$\oint_c \rho_e \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

- Logo com um *campo eletrostático conservativo não é possível manter uma corrente elétrica num circuito fechado*

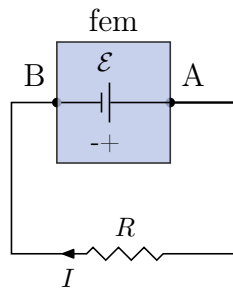
- Como manter então a corrente estacionária num circuito fechado?
- É necessário usar um campo eléctrico não conservativo que leve as cargas de volta ao potencial inicial

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\int_A^B \vec{E}_{con} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^A \vec{E}_{ncon} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

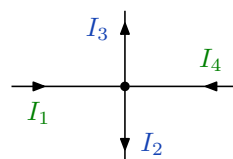
$$V(B) - V(A) + \mathcal{V}(A) - \mathcal{V}(B) = 0$$

- À diferença de potencial $\mathcal{V}(A) - \mathcal{V}(B)$ chamamos *força eletromotriz*, \mathcal{E} ou fem
- O nome mais realista deveria ser *potencial electromotriz* pois uma fem não se mede em Newtons



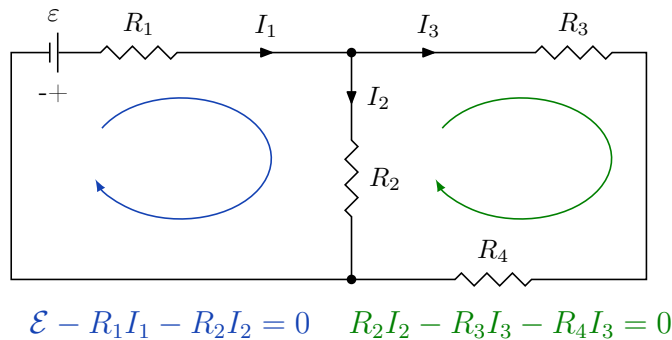
14.8 Leis de Kirchhoff

- O físico Alemão Gustav Kirchhoff identificou duas leis que simplificam a análise dum circuito eléctrico.
- *As leis de Kirchhoff são as leis fundamentais da teoria de circuitos e a sua aplicação é geral*, sendo válidas tanto em circuitos lineares como não lineares ou quando a corrente ou voltagem depende do tempo
- De alguma forma, *todos os teoremas de circuitos derivam destas duas leis*
- O seu enunciado é relativamente intuitivo:
- Lei de Kirchhoff para a corrente: *A soma de todas as correntes que entram num nó é igual à soma de todas as correntes que saem do nó*



$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3$$

- Se a lei da corrente não fosse verificada, então dava-se a acumulação de carga no nó em causa
- Um nó por definição tem capacidade zero relativamente à terra, caso contrário esse condensador tem de ser indicado no circuito como um ramo separado entre esse ponto e a terra
- Lei de Kirchhoff para a voltagem: *A soma das diferenças de potencial (voltagem) ao longo dum percurso fechado é zero*



- A existência duma corrente estacionária num circuito aberto sujeito a uma campo conservativo implica uma diferença de potencial (portanto uma perda de energia) entre o início e o fim do circuito
- E.g. os electrões perdem energia nas colisões que vão tendo ao longo do circuito (resistência)
- Então num circuito fechado é necessário um campo não conservativo (e.g. o criado por uma bateria) para que o trabalho ao longo de um circuito fechado seja nulo, ou a soma de todas as diferenças de potencial seja nula
- Como o trabalho é igual ao produto de q pela diferença de potencial ΔV entre os terminais do percurso fechado, esta diferença tem de ser zero
- Nas fem \mathcal{E} que são atravessadas ao longo do percurso, dum potencial mais baixo para outro mais elevado a voltagem é $+\mathcal{E}$, se o potencial diminuir então a voltagem é $-\mathcal{E}$
- De igual modo a diferença de potencial aos terminais duma resistência R sujeita a uma corrente I que é atravessada no sentido da corrente é $-IR$ e vice-versa

14.9 Potência e efeito de Joule

- Como vimos a corrente eléctrica é transportada por electrões livres que derivam pelo condutor com velocidade v_d
- v_d é constante devido às colisões que os electrões sofrem com os átomos do condutor
- *Em cada colisão os electrões transferem energia do campo eléctrico para os átomos*
- Quanta energia é necessária por unidade de tempo para manter a corrente?
- Para mover um electrão uma distância $d\ell$ a energia necessária é $dW = -eE d\ell$
- Assim a energia por unidade de tempo (potência) é dada por,

$$\frac{dW}{dt} = -eE v_d$$

assumindo que o electrão se move com velocidade constante $v_d = d\ell/dt$

- Para manter uma corrente eléctrica num condutor de volume dV transportada por N electrões é necessária uma potência,

$$dP = \frac{dW}{dt} N = -eE v_d n_e dV$$

onde n_e é o número de electrões por unidade de volume

- Usando a definição de $J = e n_e v_d$ a potência fica,

$$dP = \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

e num volume V

$$P = \int \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

- *Esta é a potência eléctrica total dissipada no condutor sob a forma de calor*

- Num condutor de secção constante $dV = dS d\ell$ em que $d\ell$ tem a direcção de \vec{J} e \vec{E} temos,

$$\begin{aligned} P &= \int J dS \int E d\ell \\ &= IV \end{aligned}$$

onde I é a corrente no condutor

- A unidade de potência é o watt (W),

$$1\text{W} \equiv 1\text{Js}^{-1} \equiv 1\text{V} \cdot 1\text{A}$$

- Em função de E , J ou ρ a potência é dada por,

$$P = JE = \rho J^2 = \frac{E^2}{\rho}$$

- Em função de V , I ou R a potência é dada por,

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

- A conta mensal da electricidade que pagamos ao fornecedor de electricidade, depende da quantidade de energia eléctrica que é consumida nas nossas casas
- A unidade em que essa energia é medida é o *kilowatthora*
- Um electrodoméstico que durante 1 hora consome energia à taxa de 1 kW consome 1 kilowatthora (kWh) de energia,

$$1\text{kWh} = 1000 \times 60 \times 60 = 3.6 \times 10^6 \text{J} \tag{14.4}$$

Aula 15

Magnetostática

15.1 Magnetostática

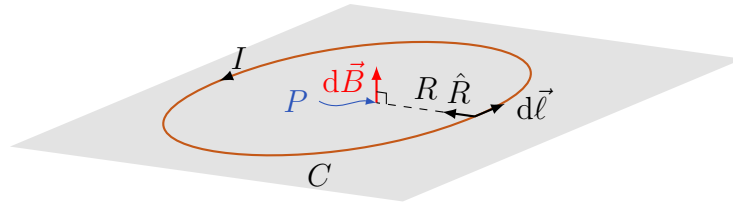
- Exceptuando os circuitos eléctricos, até aqui estudámos a interacção de cargas eléctricas com posições fixas ou movendo-se muito lentamente
- Vimos que estas cargas interagem através dos campos eléctricos estáticos que criam à sua volta
- Vimos também que em electrostática o campo é descrito apenas pelas duas equações de Maxwell,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

- *Cargas eléctricas em movimento produzem campos magnéticos*
- Vamos agora iniciar o estudo dos *campos magnéticos produzidos por correntes eléctricas constantes*
- Tais campos magnéticos não variam no tempo i.e., são também estáticos
- Veremos que neste caso também apenas duas equações de Maxwell descrevem o comportamento do campo magnetostático,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

15.2 A lei de Biot-Savart



- Uma corrente eléctrica constante I que percorre um circuito eléctrico C cria em todo o espaço um campo magnético
- A lei de Biot-Savart (1820) indica que num ponto P qualquer do espaço o campo magnético $d\vec{B}$ criado por um elemento de corrente $I d\vec{\ell}$ é dado por,

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{R}}{R^2}$$

onde $d\ell$ é um comprimento elementar do circuito C que cria um campo com intensidade dB no ponto P , \hat{R} é o versor que aponta de $d\ell$ para o ponto P que está à distância R de $d\ell$

- A constante μ_0 é a *permeabilidade magnética do vazio*,

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$$

- A unidade em que se exprime o campo magnético é o *tesla* (T) que é o mesmo que newton por ampere por metro,

$$1 \text{ T} \equiv 1 \frac{\text{N}}{\text{A m}}. \quad (15.1)$$

- Para obter o campo magnético total \vec{B} que todo o circuito C cria no ponto P temos de somar as contribuições de todos os elementos de corrente $I d\vec{\ell}$ existentes no circuito,

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{R}}{R^2}$$

- Nesta forma da lei de Biot-Savart é assumido que uma corrente I flui por um fio fino
- Se a corrente flui por uma superfície finita de largura L , substitui-se I por $K dL$ ficando,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K} \times \hat{R}}{R^2} dS$$

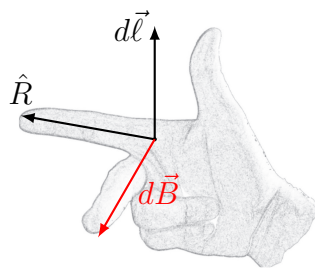
onde \vec{K} é a densidade superficial de corrente (em A/m) num ponto da superfície elementar dS

- Se a corrente flui por um volume finito de secção A , substitui-se I por JdA ficando,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_V \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} dV$$

onde \vec{J} é a densidade volúmica de corrente (em A/m²) num ponto do volume elementar dV

- A lei de *Biot-Savart* estabelece o campo magnético num ponto P , em função da distância entre a corrente fonte do campo e o ponto P , de forma *análoga* à lei de *Coulomb* que permite estabelecer o campo eléctrico num ponto P em função da distância entre a carga fonte do campo e o ponto P onde se quer determinar o campo
- Chama-se a atenção que enquanto o campo eléctrico \vec{E} é um vector colinear com o vector posição do ponto P relativamente à carga fonte, *o vector campo magnético \vec{B} não é colinear com o vector posição do ponto P relativamente à corrente fonte que percorre $d\vec{l}$*
- *A direcção do campo magnético* que um elemento de corrente $I d\vec{l}$ cria num ponto P é dada pelo produto vectorial, $d\vec{l} \times \hat{R}$ entre o elemento de corrente e o vector posição do ponto P
- Se o polegar da mão direita apontar no sentido de $d\vec{l}$ e o dedo indicador no sentido de \hat{R} o dedo médio (ou a palma da mão) indica o sentido do campo tal como mostra a figura,

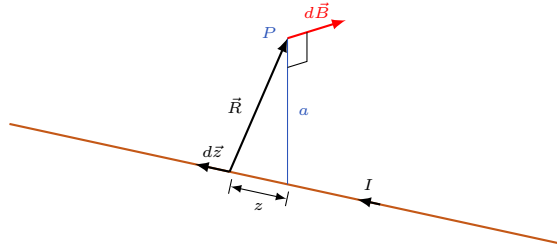


- De modo análogo às linhas de \vec{E} , as linhas de \vec{B} apontam sempre no sentido de \vec{B} e a densidade das linhas é proporcional à magnitude do campo \vec{B}
- *O princípio da sobreposição também se aplica aos campos magnéticos*
- Logo se existem várias correntes eléctricas, o campo total \vec{B} é a soma dos campos magnéticos individuais criados por cada uma das correntes

15.2.1 Fio longo e retilíneo I

Exercício 52

Calcular, usando a lei de Biot-Savart, o campo magnético B criado num ponto P afastado de uma distância a dum fio longo e retilíneo percorrido por uma corrente constante I



- Alinhando o fio com o eixo dos zz , podemos tirar partido da simetria cilíndrica do fio usando um sistema de coordenadas cilíndricas com origem na intercepção da perpendicular a P com o fio
- Tal como indicado na figura o elemento de corrente $I d\vec{z}$ cria no ponto P que está a uma distância R de dz , o campo magnético elementar $d\vec{B}$,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{z} \times \hat{R}}{R^2}$$

- O vector posição $\vec{R} = a\hat{r} - z\hat{k}$
- Assim

$$dz\hat{k} \times \hat{R} = \frac{adz}{\sqrt{a^2 + z^2}} \hat{\phi}$$

- Então podemos prosseguir o cálculo de $d\vec{B}$,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{adz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\phi}$$

- Para levar em conta a contribuição de todos os elementos de corrente para o campo total \vec{B} em P temos de integrar sobre todo o fio,

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I a}{4\pi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

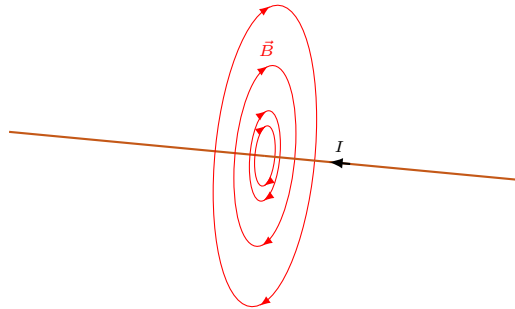
este integral já surgiu antes

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \hat{\phi} \left[\frac{z}{a^2 \sqrt{z^2 + a^2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

- Resolvendo a indeterminação obtemos,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \hat{\phi} \left[\frac{z}{z \sqrt{1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\phi} \end{aligned}$$

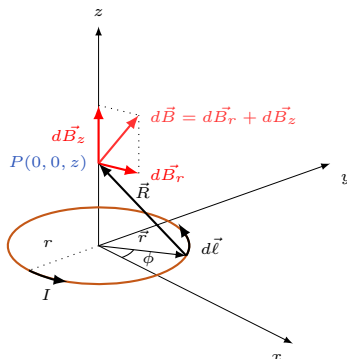
- A intensidade do campo só depende do inverso da distância ao fio
- A direcção de \vec{B} é sempre perpendicular ao fio, i.e. a $I d\vec{\ell}$



15.2.2 Campo magnético no eixo duma espira circular

Exercício 53

Consideremos uma espira circular de raio r por onde circula uma corrente I . Calcular o campo magnético \vec{B} no ponto P no eixo da espira.



- Usemos a lei de Biot-Savart para calcular \vec{B} ,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^3}$$

- No referencial da figura temos em coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= r d\phi \hat{\phi} \\ \vec{R} &= z \hat{k} - r \hat{r} \end{aligned}$$

logo

$$R = \sqrt{z^2 + r^2}$$

- Da regra da mão direita temos,

$$\begin{aligned} \hat{\phi} \times \hat{r} &= -\hat{k} \\ \hat{\phi} \times \hat{k} &= \hat{r} \end{aligned}$$

então o produto vectorial fica

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} \times \vec{R} &= r d\phi \hat{\phi} \times (z \hat{k} - r \hat{r}) \\ &= z r d\phi \hat{r} + r^2 d\phi \hat{k} \end{aligned}$$

- Voltando ao campo magnético temos,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z r \hat{r} + r^2 \hat{k}}{(z^2 + r^2)^{3/2}} d\phi \end{aligned}$$

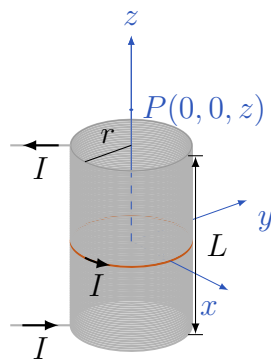
como o integral da componente radial é nulo de 0 a 2π vem,

$$= \frac{\mu_0 I r^2}{2 (z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k}$$

15.2.3 Campo magnético no eixo dum solenoide circular

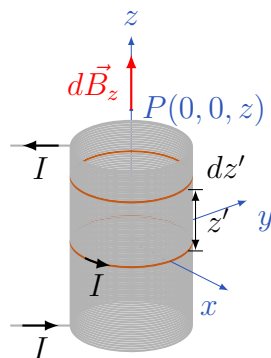
Exercício 54

Calcular o campo magnético \vec{B} num ponto P do eixo de um solenoide com secção circular de raio r por onde circula uma corrente I . O solenoide é constituído por N espiras e tem comprimento L .



- O solenoid tem N espiras com um enrolamento muito apertado ao longo do seu comprimento L .
- Assim podemos considerar o solenóide constituído por N espiras circulares.
- A uma altura z' com espessura dz' há uma fração de espiras $dz'N/L$
- Usado o resultado obtido para o campo numa espira no seu eixo, o campo magnético em P criado por uma espessura do solenóide dz' que está à altura z' é,

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I r^2}{2 [(z - z')^2 + r^2]^{3/2}} \frac{dz' N}{L} \hat{k}$$



- Para obter o campo total integramos sobre toda a altura L do solenoide,

$$\begin{aligned}\vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 N I r^2}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[(z-z')^2 + r^2]^{3/2}} \hat{k} \\ &= \frac{\mu_0 N I r^2}{2L} \frac{1}{r^2} \left[\frac{z' - z}{\sqrt{(z-z')^2 + r^2}} \right]_{-L/2}^{L/2} \hat{k} \\ &= \frac{\mu_0 I N}{2} \frac{1}{L} \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{(z - \frac{L}{2})^2 + r^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{(z + \frac{L}{2})^2 + r^2}} \right] \hat{k}\end{aligned}$$

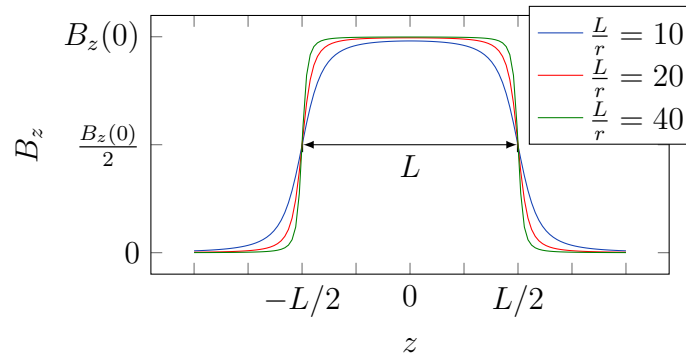
- Na origem para $z = 0$,

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I N}{2} \frac{1}{L} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + (\frac{r}{L})^2}} \hat{k}$$

e para um solenoide muito comprido $L \gg r$,

$$\vec{B}(0) = \mu_0 I \frac{N}{L} \hat{k}$$

- A figura ilustra $B_z(z)$ para 3 valores de L/r .
- Na extremidade do solenoide $B_z = B_z(0)/2$.



15.3 A força magnética

- Andre Marie Ampère levou a cabo uma série de experiências para estudar a interacção entre um campo magnético estático \vec{B} e um *elemento de corrente eléctrica* $I d\vec{\ell}$
- Concluiu que o campo magnético exerce no elemento de corrente a força $d\vec{F}$,

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

- Desta equação é claro que *o campo magnético é uma força por unidade de elemento de corrente*, tal como já tínhamos visto na definição da unidade tesla

- A força magnética por unidade de comprimento, $\vec{\mathcal{F}}$, num fio por onde circula uma corrente I é

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{I} \times \vec{B}$$

- A *força total* que \vec{B} exerce num circuito fechado C por onde circula uma corrente eléctrica I é a soma de todas as forças elementares,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int d\vec{F} \\ &= \oint_C I d\vec{\ell} \times \vec{B} \end{aligned}$$

se \vec{B} é uniforme a força magnética total é zero

- Se a corrente circula por uma superfície S que está sujeita a um campo \vec{B} a *força total* é dada por,

$$\vec{F} = \int_S \vec{K} \times \vec{B} dS$$

onde \vec{K} é densidade superficial de corrente em amperes/metro.

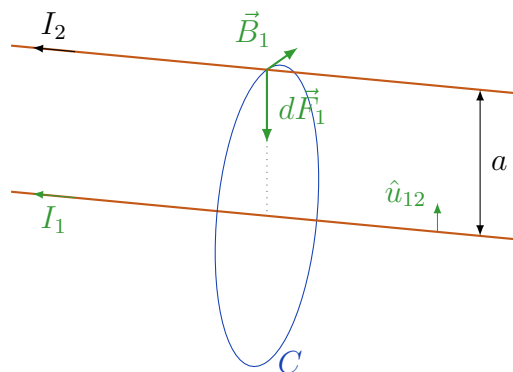
- Se a corrente circula por um volume V sujeito a um campo \vec{B} a *força total* é dada por,

$$\vec{F} = \int_V \vec{J} \times \vec{B} dV$$

onde \vec{J} é densidade volúmica de corrente em amperes/metro².

15.4 A definição de ampere

- Calculemos a força magnética por unidade de comprimento, exercida por duas correntes I_1 e I_2 que circulam em fios longos e rectilíneos, separados por uma distância a



- Já vimos antes que o campo magnético criado por I_1 em I_2 é dado por,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

então a força por unidade de comprimento $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ que I_1 exerce em I_2 é,

$$\vec{\mathcal{F}}_{12} = \vec{I}_2 \times \vec{B}_1$$

como $\vec{I}_2 \perp \vec{B}_1$ vem,

$$\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \hat{u}_{12}$$

onde \hat{u}_{12} é o vector unitário que aponta do fio 1 para o 2

- Portanto se as correntes têm o mesmo sentido a força é atractiva e se têm sentidos opostos a força entre elas é repulsiva
- A força magnética é desprezável para correntes normais, mesmo assim é usada no S.I. para definir a unidade de corrente eléctrica o ampere, *quando a força magnética por metro, entre dois fios longos e paralelos, afastados de um metro, é exactamente 2×10^{-7} N, a intensidade de corrente eléctrica que flui em cada fio é um ampere*
- Esta definição *fixa o valor da permeabilidade magnética do vazio*

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

15.5 A força de Lorentz

- A corrente eléctrica num fio resulta do movimento de cargas eléctricas (electrões)
- Assim *a força magnética que um campo \vec{B} exerce num circuito por onde circula uma corrente I_1 deve resultar da força que \vec{B} exerce nos electrões* (ou quaisquer outras cargas que transportem a corrente eléctrica)
- Foi esta ideia que o físico Holandês Hendrick Lorentz desenvolveu (1892) da forma a seguir ilustrada
- Mostrámos anteriormente que num condutor com n cargas q por unidade de volume, microscopicamente a corrente eléctrica I que atravessa uma secção A desse condutor é devida à deriva com velocidade, v_d das cargas livres

- A expressão da corrente é,

$$\vec{I} = qnA\vec{v}_d,$$

note-se que a direcção da corrente é a mesma que a direcção da velocidade de deriva

- Substituindo esta expressão na equação da força magnética vem,

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= qnAv_d d\vec{\ell} \times \vec{B} \\ &= nAd\ell q\vec{v}_d \times \vec{B} \end{aligned}$$

- Esta é a *força magnética que actua em todas as $nAd\ell$ cargas que estão no volume elementar $Ad\ell$*
- Assim a força magnética que actua em cada uma das cargas é,

$$\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B}$$

- Lorentz combinou esta força com a força eléctrica e chegou à seguinte expressão para a força que actua numa carga q que se move com uma velocidade \vec{v} num campo \vec{E} e \vec{B} ,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (15.2)$$

esta é a chamada *força de Lorentz*

- A força eléctrica é paralela a \vec{E} , mas a *força magnética é perpendicular a \vec{B} e \vec{v}*
- A força magnética só actua em cargas em movimento
- Se $v = 0$ a força magnética é zero
- O trabalho feito por uma força \vec{F} que faz uma partícula deslocar-se uma distância \vec{r} é

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = Fr \cos \theta$$

- Para uma partícula sujeita a uma força magnética o deslocamento da partícula faz sempre um ângulo de 90° com a força, logo
um campo magnético não realiza trabalho sobre uma carga eléctrica
- Uma carga eléctrica nunca ganha ou perde energia quando interage com um campo magnético

- Os campos magnéticos são usados para alterar a direcção do movimento das cargas, mas estas só ganham energia sob a acção dum campo eléctrico
- Da lei de Newton e da força de Lorentz pode escrever-se a equação do movimento duma partícula com carga q e massa m que se move num campo \vec{E} e \vec{B} ,

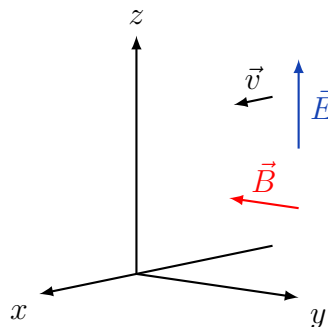
$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

sendo \vec{a} a aceleração que a partícula adquire sob a acção da força de Lorentz

15.5.1 A experiência de Thompson

- No final do Séc.19 Thompson deu um contributo importante para o esclarecimento da natureza do electrão
- Até essa altura sabia-se que um filamento de metal quente mantido a um potencial negativo elevado (cátodo) emitia uma forma de radiação desconhecida a que se chamava simplesmente *raios catódicos*
- Thomson defendia que os raios catódicos consistiam em partículas carregadas e para o demonstrar fez passar um feixe de raios catódicos por um campo \vec{E} e um campo \vec{B} perpendiculares entre si
- Direccionando o feixe segundo o eixo X , o campo \vec{E} foi aplicado no sentido do eixo Z e o campo \vec{B} no sentido $-Y$
- Assim usando a força de Lorentz obtém-se para a componente da aceleração segundo Z ,

$$ma_z = q(E_z - v_x B_y) \quad (15.3)$$



- Inicialmente Thompson aplicou só o campo \vec{E} aos raios catódicos e mediu a deflexão d do feixe na direcção Z que segundo a equação anterior é dada por,

$$a_z = \frac{qE_z}{m}$$

integrando no tempo,

$$v_z = a_z t$$

integrando outra vez no tempo,

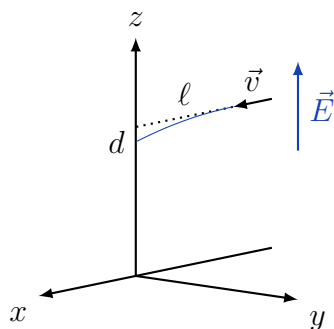
$$d = a_z \frac{t^2}{2}$$

- Portanto se o feixe é constituído por partículas que se movem com velocidade v_x , o feixe percorre num tempo t uma distância ℓ na direcção X e é deflectido na direcção Z uma distância d ,

$$\begin{aligned} d &= \frac{q E_z t^2}{m \cdot 2} \\ &= \frac{q E_z \ell^2}{m \cdot 2 v_x^2} \end{aligned} \quad (15.4)$$

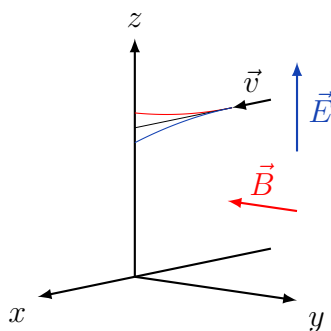
onde $t = \ell/v_x$

- Este resultado só é válido quando $d \ll \ell$



- Em seguida Thompson aplicou simultaneamente o campo \vec{B} regulando a sua intensidade até anular a deflexão d
- O valor de B que anula a deflexão, ou seja cancela a força eléctrica, obtêm-se da equação 15.3,

$$B_y = \frac{E_z}{v_x} \quad (15.5)$$



- *Desta forma Thompson mostrou que os raios catódicos eram partículas com carga negativa (pois deflectiam na direcção oposta a \vec{E}_z)*
- Das equações 15.4 e 15.5 Thomson conseguiu ainda calcular a razão entre a carga e a massa dessas partículas,

$$\frac{q}{m} = \frac{2Ed}{\ell^2 B^2}$$

obtendo um valor de $-1.7 \times 10^{11} \text{ Ckg}^{-1}$

- *A partir desta convincente demonstração experimental os raios catódicos passaram a ser partículas*
- Dez anos mais tarde Robert MilliKan medindo a velocidade que gotículas de óleo electrizadas, e em queda através duma região onde existe um campo eléctrico, concluiu que essas gotículas adquiriam sempre carga em múltiplos de $-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Assumindo que se tratava da mesma partícula que constituía os raios catódicos, foi possível calcular uma massa para essas partículas de $9.4 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- *O electrão começou a ganhar forma*
- Experiências mais precisas mediram um valor para a massa do electrão de $9.109534 \times 10^{-31} \text{ kg}$

15.5.2 Movimento de uma partícula carregada num campo B

- A aceleração centríptia duma partícula com massa m que se move numa órbita circular de raio r , com velocidade constante v é,

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

e é sempre dirigida para o centro da órbita, i.e. é perpendicular à velocidade

- A força magnética, F_m que actua numa carga q que se move com velocidade \vec{v} é também sempre perpendicular a \vec{v}
- *Se o campo magnético for constante então a força magnética obriga a carga a descrever uma trajectória circular*
- Se a partícula com carga q tiver uma massa m , e se $\vec{v} \perp \vec{B}$ então a equação do movimento é,

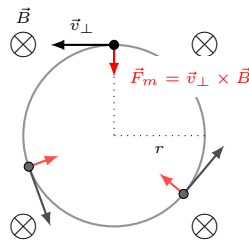
$$F_m = m a$$

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

e o raio da órbita é dado por,

$$r = \frac{mv}{qB}$$

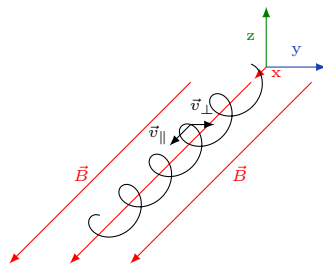
A r chama-se o *raio de Larmor*



- A frequência angular (ω) de rotação da partícula (i.e. o número de radianos que a partícula descreve num segundo) é,

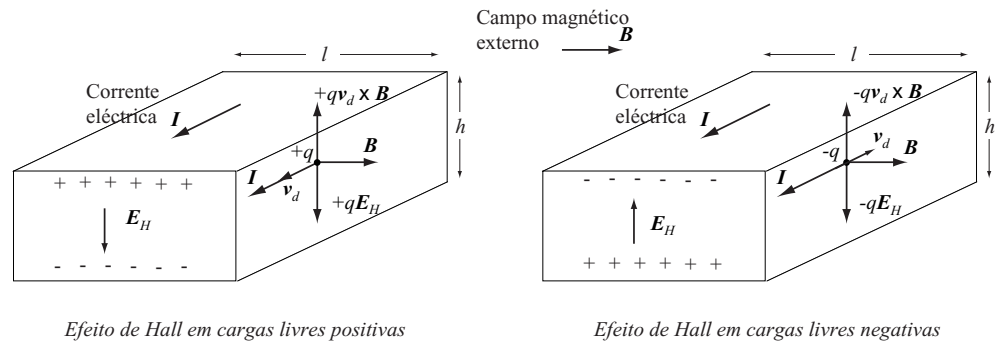
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

- Que também é conhecida pela *frequência ciclotrónica*
- No mesmo campo magnético cargas positivas descrevem órbitas com o sentido oposto ao das cargas negativas mas com o mesmo raio de Larmor
- A medição da frequência ciclotrónica pode ser usada para determinar também a razão entre a carga e massa duma carga
- Conhecendo q/m e medindo o raio de Larmor é possível determinar v , ou vice versa
- O movimento mais geral duma carga num campo \vec{B} constante é um movimento em hélice, pois se a velocidade da carga tiver uma componente paralela a \vec{B} além da componente perpendicular ($\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$), a carga move-se também na direcção do campo \vec{B} descrevendo uma trajectória helicoidal



15.5.3 Efeito de Hall

- Edwin Hall observou que se uma barra condutora achatada, percorrida por uma corrente eléctrica \vec{I} (ver figura) for colocada num campo magnético \vec{B} perpendicular à direcção da corrente, surge uma diferença de potencial na barra numa direcção perpendicular a \vec{B} e \vec{I} (entre o topo e base)
- Chama-se *efeito de Hall* a esta tendência das partículas transportadoras de corrente derivarem na transversal do campo magnético \vec{B}



- À medida que as cargas derivam na direcção transversal a diferença de potencial aumenta até o campo eléctrico transversal ser suficiente para parar essa deriva
- A este campo eléctrico transversal chama-se o *campo de Hall* \vec{E}_H e a diferença de potencial que gera \vec{E}_H chama-se a tensão de Hall V_H
- Os casos ilustrados na figura anterior, a corrente e o campo magnético mantêm o mesmo sentido, apenas muda o sinal da carga que transporta a corrente \vec{I}
- Tanto as cargas livres positivas $+q$ como as negativas $-q$ são deflectidas para o topo da barra, pela força magnética $q\vec{v}_d \times \vec{B}$
- No caso em que as cargas livres $+q$ são deflectidas para o topo, pela força magnética, a acumulação de uma carga positiva no topo induz uma carga igual negativa na base da barra, gerando um campo eléctrico de Hall \vec{E}_H que aponta do topo para a base
- No caso em que as cargas livres $-q$ são deflectidas para o topo, pela força magnética, a acumulação de uma carga negativa no topo induz uma carga igual positiva na base, gerando um campo eléctrico de Hall \vec{E}_H que aponta da base para o topo
- Consequentemente *medindo a diferença de potencial entre o topo e a base é possível determinar o sinal das cargas livres que transportam a corrente*

- O efeito de Hall na maioria dos metais, mostra que as cargas livres são negativas (electrões)
- Contudo alguns tipos de semicondutores (tipo P) o efeito de Hall mostra que as cargas livres são positivas
- As cargas livres estão sujeitas aos campos \vec{B} e \vec{E}_H e da definição de E_H a força de Lorentz em cada carga é zero
- Assim a magnitude da tensão de Hall (e do campo de Hall E_H) é dada por,

$$qE_H = \frac{qV_H}{h} = qv_d B$$

logo,

$$V_H = hv_d B$$

- O facto de V_H ser proporcional à magnitude de B é explorado para medir campos magnéticos em instrumentos chamados *sondas de Hall*
- Usando as dimensões indicadas na figura anterior, a definição microscópica de corrente eléctrica fica,

$$I = qn\ell hv_d$$

logo $v_d = I/(qn\ell h)$ e a tensão de Hall fica,

$$\begin{aligned} V_H &= hv_d B \\ &= \frac{IB}{qn\ell} \end{aligned}$$

onde n é a densidade de cargas livres

- Esta equação mostra que uma sonda de Hall sensível (i.e. uma sonda que produz uma grande tensão de Hall na presença dum campo B fraco) deve ser percorrida por uma corrente elevada e ser feita de um material de largura elevada e com baixa densidade de cargas livres n como um semicondutor.
- O campo magnético pode ser medido experimentalmente usando,

$$B = \frac{qn\ell}{I} V_H \propto V_H$$

Aula 16

As leis de Gauss e de Ampère

16.1 A lei de Gauss para o campo magnético

- De forma análoga ao fluxo do campo eléctrico podemos definir o *fluxo do campo magnético* através duma superfície S como,

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- Em homenagem ao físico Alemão Wilhelm Weber a unidade no S.I. do fluxo magnético é o weber (Wb), lê-se weber em Português
- Um weber é portanto igual a um tesla vezes um metro quadrado,

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Tm}^2$$

- Dos cálculos anteriores dos campos magnéticos criados, quer por um fio rectilíneo infinito, quer por um solenóide, concluiu-se que as linhas de campo magnético eram linhas fechadas
- Em geral *as linhas de campo magnético criado por uma corrente são linhas fechadas que envolvem a corrente*
- Num dipólo magnético e noutras configurações mais complexas é possível encontrar linhas de campo B abertas, contudo estas linhas nunca divergem ou convergem num ponto logo o fluxo do campo magnético através duma superfície fechada, é sempre nulo
- Assim, sendo *o número de linhas de campo que entram numa superfície fechada é exactamente igual ao número de linhas de campo que saem* conclui-se que não existem *cargas magnéticas*

- Estas são duas formas equivalentes de enunciar a lei de Gauss para o campo magnético, que na forma matemática é,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

onde S é uma superfície qualquer fechada

16.2 Teorema de Gauss e o campo B

- Aplicando o teorema de Gauss ao campo magnético \vec{B} vem,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot \vec{B} dv$$

- Segundo a lei de Gauss para o campo magnético, o fluxo através duma superfície fechada S do campo \vec{B} é nulo então,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

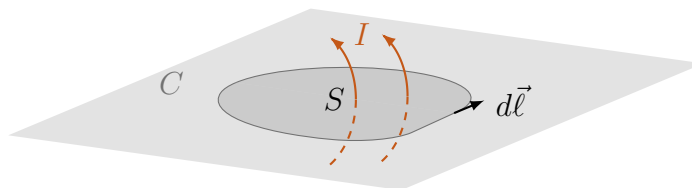
- Assim do teorema de Gauss e da lei de Gauss resulta para \vec{B} que,

$$\int_v \nabla \cdot \vec{B} dv = 0$$

como este resultado é independente do volume v conclui-se que,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

16.3 A lei de Ampère



- Consideremos uma curva fechada C
- A lei de Ampère afirma que a circulação de \vec{B} ao longo da curva C é proporcional à corrente eléctrica que atravessa a superfície S circunscrita pela curva C ,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (16.1)$$

- Se a corrente I que atravessa a superfície S , for dada em função da densidade de corrente eléctrica J a lei de Ampère toma a forma,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

- A lei de Ampère tem em magnetostática um papel análogo à lei de Gauss na electrostática, no sentido em que permite calcular facilmente B quando este é uniforme ao longo da curva C , tal como a lei de Gauss permite calcular E quando este é uniforme na superfície gaussiana
- Chamaremos à curva C *caminho de ampère ou caminho amperiano*

16.4 A lei de Ampère e o Teorema de Stokes

- Aplicando o teorema de Stokes ao campo \vec{B} obtemos,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

- Contudo a lei de Ampère afirma que o integral de caminho de \vec{B} ao longo da curva C é igual a $\mu_0 I$ logo,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

- Se a corrente eléctrica total I que atravessa a superfície S , for dada em função da densidade de corrente eléctrica J a equação anterior fica,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

sendo este resultado independente da superfície S vem que,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

que é uma das equações de Maxwell, ou seja esta equação de Maxwell é a lei de Ampère local para um campo magnético estático

- por outras palavras a lei de Ampère só é válida para um campo magnético estático
- Se \vec{B} variar no tempo então a forma correcta do rotacional de \vec{B} contém outro termo de que falaremos mais à frente

- esta é a última das duas equações de Maxwell para a magnetostática que nos faltava mostrar
- Quando quer os campos quer as fontes dos campos são independentes do tempo, i.e. são estáticas, verificamos que as equações de Maxwell são equivalentes às seguintes leis por nós estudadas:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 && \text{lei de Gauss para } \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && \text{lei de Gauss para } \vec{E} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} && \text{lei de Ampère (circulação de } \vec{B}) \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 && \vec{E} \text{ é conservativo (circulação de } \vec{E})\end{aligned}$$

- Estas equações descrevem os campos \vec{E} e \vec{B} estáticos no vazio

16.5 Exemplos de aplicação da lei de Ampère

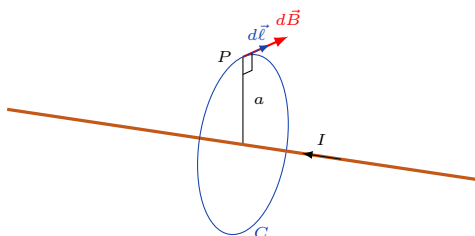
16.5.1 Fio longo e rectilíneo II

Exercício 55

Vamos repetir o cálculo, usando a lei de Ampère, do campo magnético B criado num ponto P afastado de uma distância a dum fio longo e rectilíneo percorrido por uma corrente constante I

Da resolução anterior deste problema usando a lei de Biot-Savart concluímos que \vec{B} num ponto P é perpendicular ao fio e a sua intensidade é constante em qualquer ponto à mesma distância de P (na perpendicular) ao fio

Tendo a corrente I simetria cilíndrica podemos concluir igualmente que o módulo do campo B é constante em qualquer ponto à mesma distância do fio, pois rodando o fio em torno do seu eixo, nada se altera



O **caminho de Ampère** adequado à resolução deste problema é um círculo (com raio a) centrado no ponto do fio que está na perpendicular a P

Além de B ser constante neste caminho também é paralelo a $d\vec{\ell}$ em todos os pontos do caminho C

A lei de Ampère impõe então que,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

como $B = \text{const.}$ em C e $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$ temos,

$$\begin{aligned} B \oint_C d\ell &= \mu_0 I \\ B 2\pi a &= \mu_0 I \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \end{aligned}$$

note-se que com a lei de Ampère apenas calculámos o módulo do vector \vec{B} tal como na electrostática com a lei de Gauss só calculámos o módulo do vector \vec{E}

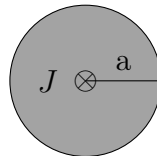
A direcção e o sentido do vector são inferidos pela análise da simetria do campo

Concluimos ainda que as linhas do campo magnético criado por um fio rectilíneo infinito são círculos centrados no eixo do fio e perpendiculares ao fio

16.5.2 B criado por uma corrente cilíndrica e infinita

Exercício 56

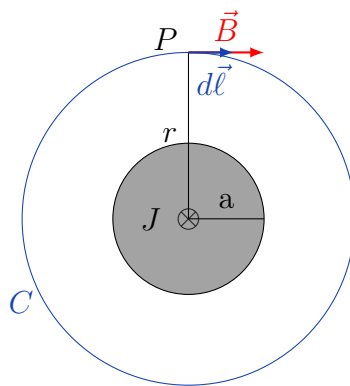
Considere um cilindro infinito de raio a por onde circula uma densidade de corrente constante e homogénea \vec{J} . Calcule o campo magnético criado em qualquer ponto.



- Como \vec{J} tem simetria cilíndrica usemos um referencial em coordenadas cilíndricas com o eixo z alinhado com o eixo do cilindro

- Para encontrar \vec{B} num ponto P no exterior do fio usamos um caminho amperiano circular C que passe por P , esteja centrado no eixo do fio e seja perpendicular ao eixo
- Pela lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$



- Como $B = \text{const.}$ no caminho C e $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$ temos,

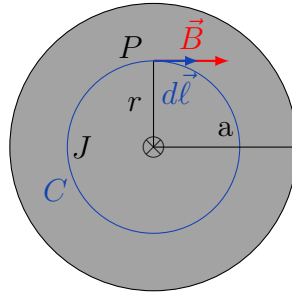
$$\begin{aligned} B \oint_C d\ell &= \mu_0 I \\ B 2\pi r &= \mu_0 \int_S j dS \\ B &= \frac{\mu_0 j \pi a^2}{2\pi r} \\ &= \frac{\mu_0 j a^2}{2r} \end{aligned}$$

em função da corrente total I no fio

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- De forma análoga para encontrar \vec{B} num ponto P no interior do fio usamos um caminho amperiano circular C que passe por P , esteja centrado no eixo do fio e seja perpendicular ao eixo
- Pela lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$



- Como $B = \text{const.}$ no caminho C e $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$ temos,

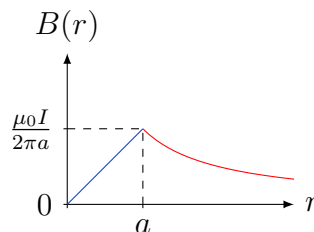
$$\begin{aligned} B \oint_C d\ell &= \mu_0 I \\ B 2\pi r &= \mu_0 \int_S j dS \\ B &= \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} \\ &= \frac{\mu_0 j r}{2} \end{aligned}$$

em função da corrente total I no fio

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

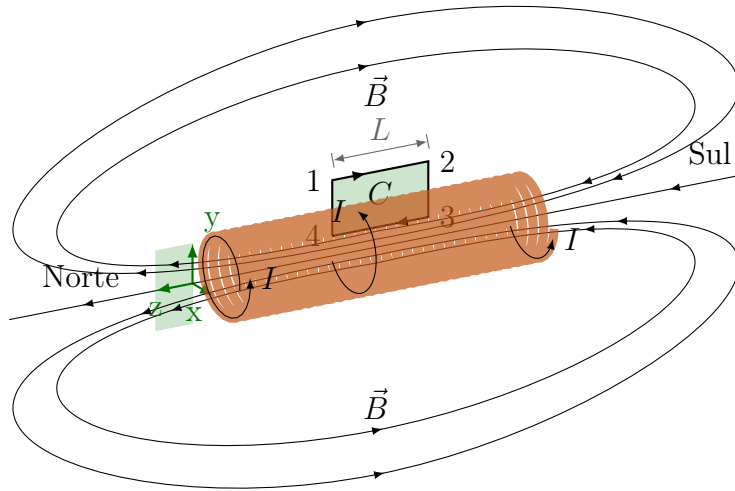
- O campo magnético no espaço é assim dado por,

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} & \text{se } r \geq a \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{\phi} & \text{se } r \leq a \end{cases}$$



16.5.3 O campo magnético dum solenóide

- Um solenóide (do Grego solenoidés, em forma de tubo) é um fio metálico enrolado em hélice formando um tubo com um diâmetro pequeno comparado com seu comprimento
- O enrolamento é apertado por forma a que cada volta seja comparável a um círculo perpendicular ao eixo do solenóide



- O campo \vec{B} no centro dum solenóide, percorrido por uma corrente eléctrica, é praticamente uniforme e tem a direcção do eixo do solenóide (ver figura)
- Fora do solenóide $\vec{B} \approx 0$
- Se o fio der n voltas por unidade axial de comprimento do solenóide, qual é a intensidade do campo magnético B no interior do solenóide?
- Considerando o caminho de Ampère rectangular, C , indicado na figura a lei de Ampère diz que o integral de caminho de $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo de C é igual à corrente total que cruza a superfície limitada por C
- Sendo L o comprimento do rectângulo C então a corrente total que atravessa este rectângulo é nLI
- Falta calcular o integral de caminho,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

- O integral entre 1 e 2 é praticamente nulo, pois nessa região $B \approx 0$
- Os integrais entre 2 e 3 e entre 4 e 1 são nulos, pois nessa região $\vec{B} \perp d\vec{\ell}$, logo o produto escalar entre eles é zero
- Entre 3 e 4, $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$ e sendo B uniforme vem,

$$\int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_3^4 B d\ell = B \int_3^4 d\ell = BL$$

- Logo pela lei de Ampère,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{total}$$

$$BL = \mu_0 nLI$$

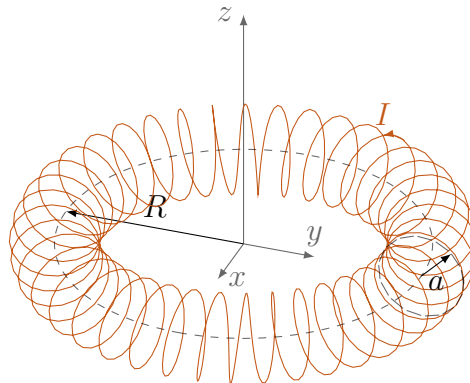
$$B = \mu_0 nI$$

este resultado é exacto no limite em que o comprimento do solenóide é muito maior que o seu diâmetro

16.5.4 B criado por um solenoide toroidal

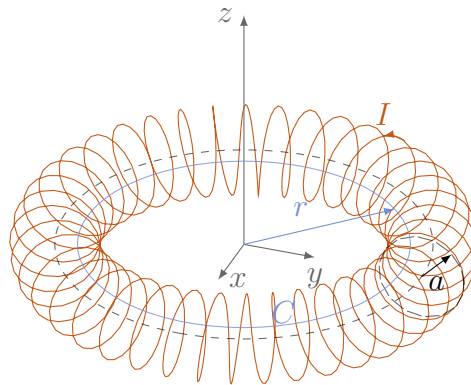
Exercício 57

Considere um solenoide toroidal de raio maior R e raio menor a por onde circula uma corrente constante I . O solenoide tem N espiras. Calcule o campo magnético em qualquer ponto do espaço.



- Para encontrar \vec{B} num ponto P no interior do toróide usamos um caminho amperiano circular C que passe por P , esteja centrado na origem do eixo z
- Pela lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$



- Como $B = \text{const.}$ no caminho C e $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$ temos,

$$\begin{aligned} B \oint_C d\ell &= \mu_0 N I \\ B 2\pi r &= \mu_0 N I \\ B &= \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \end{aligned}$$

- Para encontrar \vec{B} num ponto P no exterior do toróide usamos um caminho amperiano circular C que passe por P , esteja centrado na origem do eixo z
- Repare-se que fora do toróide a superfície circunscrita pelo caminho C não é atravessada por qualquer corrente
- Pela lei de Ampère

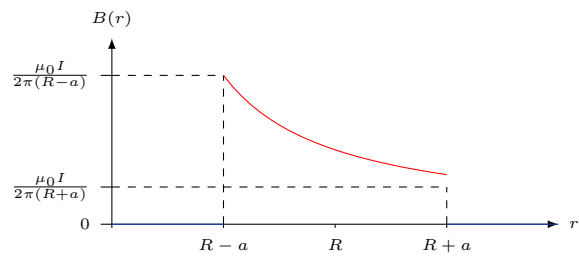
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

logo,

$$B = 0$$

- O campo magnético no espaço é assim dado por,

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{\phi} & \text{se } R - a < r < R + a \\ 0 & \text{outros valores de } r \end{cases}$$

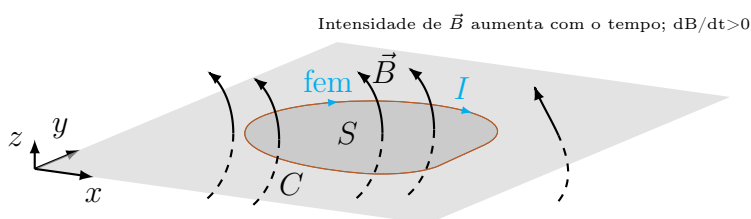


Aula 17

A lei de Faraday

17.1 A lei de Faraday

- Consideremos um fio condutor eléctrico C , fechado, que é colocado numa região onde existe um campo magnético \vec{B}
- A superfície delimitada pelo fio tem uma área S



- Faraday descobriu que
 - se o campo magnético (indutor) variar no tempo então é induzida uma *fem* (força electromotriz) no fio, sendo a magnitude da *fem* diretamente proporcional à taxa de variação de \vec{B} com o tempo
 - é induzida uma *fem* no fio se o fio se mover duma região onde B é fraco para outra onde B é forte ou vice versa, sendo a *fem* diretamente proporcional à velocidade com que o fio se move entre as duas regiões
 - é induzida uma *fem* no fio se este rodar numa região onde \vec{B} é uniforme e constante
- Para explicar estas observações Faraday propôs a lei da indução eletromagnética,
- A *fem* induzida num circuito C é proporcional à taxa de variação no tempo do fluxo do campo magnético através do circuito,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (17.1)$$

onde $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ representa o fluxo do campo magnético através da superfície S delimitada pelo circuito, t o tempo e $\mathcal{E} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

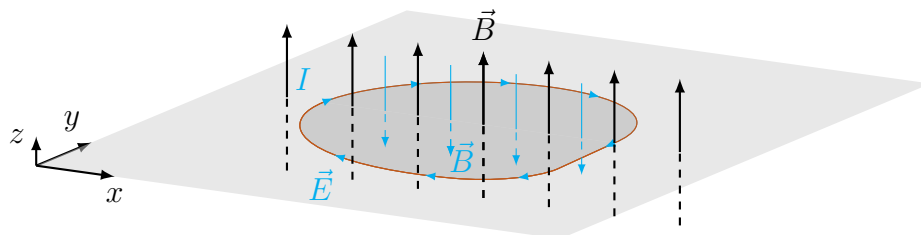
- O sinal menos foi adicionado por Heinrich Lenz (ver à frente)
- *O fluxo magnético ($\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$) que atravessa um circuito pode variar de diversas formas*
- Ou porque,
 - a intensidade do campo magnético \vec{B} varia
 - a direcção do campo magnético \vec{B} varia
 - a posição do circuito C varia
 - a forma do circuito varia
 - a superfície circunscrita pelo circuito S varia
 - a orientação do circuito varia
- A lei de Faraday afirma que todas estas formas de variar o fluxo são equivalentes no que respeita à indução de uma **fem** no circuito

17.1.1 A lei de Lenz

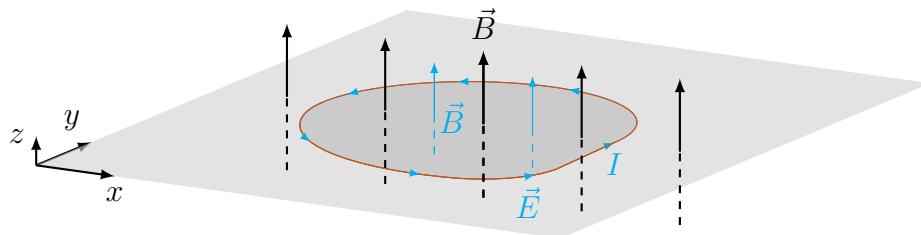
- Lenz especificou em que sentido actua a **fem** induzida no fio

A fem induzida num circuito eléctrico atua sempre num sentido tal que, a corrente I gerada por essa fem crie um campo magnético induzido \vec{B} que se oponha à variação do fluxo do campo magnético indutor \vec{B}

- Deste modo foi introduzido o sinal menos na lei de Faraday para lembrar que a **fem** atua sempre de modo a se opor à variação do fluxo magnético indutor



Intensidade de \vec{B} aumenta com o tempo; $dB/dt > 0$



Intensidade de \vec{B} diminui com o tempo; $dB/dt < 0$

- O que aconteceria se a lei de Lenz não se verificasse?
- Se a fem induzida no circuito contribuísse para o aumento do fluxo indutor então a intensidade dum campo B indutor crescia para infinito sem controlo, o que é irrealista.

17.2 As leis de Faraday-Lenz e as eq. de Maxwell

- Como é produzida a fem na lei de Faraday(-Lenz)?
- Uma fem tem dimensões de energia por unidade de carga
- Quando uma \mathcal{E} é induzida num circuito fechado C , a energia duma carga q que circula ao longo de C varia de $q\mathcal{E}$
- De onde vem esta energia?
- Como já vimos atrás, um campo magnético não consegue realizar trabalho numa carga, então a variação de energia deve vir dum campo eléctrico \vec{E}
- Se a carga q se mover uma distância $d\vec{\ell}$ no campo \vec{E} o trabalho que este campo realiza na carga é

$$dW = q\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

- Quando a carga dá uma volta completa ao circuito C o trabalho total é,

$$\begin{aligned} W &= q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= q\mathcal{E} \end{aligned}$$

logo,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (17.2)$$

- Com a equação anterior podemos escrever a lei de Faraday como,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (17.3)$$

- Usando o teorema de Stokes podemos também escrever a expressão 17.2 como,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (17.4)$$

onde S é a superfície aberta circunscrita por C

- Como o fluxo de \vec{B} através de S é,

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- A lei de Faraday-Lenz e o teorema de Stokes implicam que,

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} &= - \frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

- Sendo a igualdade válida para qualquer superfície S (limitada por C) concluímos que,

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (17.5)$$

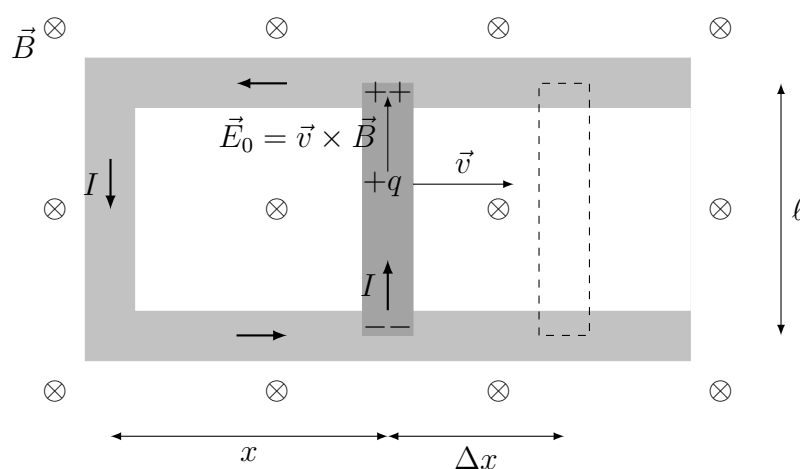
que é uma das equações de Maxwell que vimos logo na primeira aula

- A lei de Faraday-Lenz também é válida se o caminho C não coincide com um circuito condutor
- Esta lei é válida num circuito fechado arbitrário no espaço
- Note-se que a corrente I induzida num circuito C pela \mathcal{E} é segundo a lei de Ohm igual a $I = \mathcal{E}/R$, sendo R a resistência do circuito
- Se R for arbitrariamente grande, não circula corrente o que não invalida a lei de Faraday
- Logo esta lei pode aplicar-se a qualquer circuito fechado no espaço
- Da lei de Faraday-Lenz sabemos que a variação dum campo magnético no tempo gera um **campo eléctrico** no espaço
- As linhas deste **campo eléctrico** \vec{E} são curvas fechadas no plano perpendicular a \vec{B} e é este **campo eléctrico** que origina a **fem** em torno do circuito
- A natureza deste campo \vec{E} é distinta do campo eletrostático, cujas linhas de campo são abertas e vão das cargas positivas para as cargas negativas
- As linhas do **campo eléctrico** geradas por indução magnética não têm princípio nem fim, são linhas fechadas
- Note-se que o **campo eléctrico** induzido não é conservativo porque existe uma **fem** diferente de zero
- Assim o conceito de potencial eléctrico (V) como o definimos em electrostática não é válido para este **campo induzido**, pois já não depende só da posição mas varia também no tempo

17.3 Geradores Eléctricos

17.3.1 Um gerador simples

- Normalmente um gerador eléctrico transforma energia mecânica em energia eléctrica, movendo fios condutores numa direcção perpendicular a um campo magnético
- Um gerador muito simples mas nada prático está ilustrado na figura e consiste numa barra condutora de comprimento ℓ que desliza sobre um condutor em forma de C envolto num campo magnético \vec{B} , perpendicular ao plano do circuito



- Se \vec{B} apontar para dentro da página o fluxo magnético através da parte fechada do circuito é dado por,

$$\Phi_B = Blx$$

e se deslocarmos a barra com velocidade v , no intervalo de tempo Δt a barra percorre a distância $\Delta x = v\Delta t$ e Φ_B aumenta de,

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_B &= Bl\Delta x \\ &= Blv\Delta t\end{aligned}$$

- Assim a lei de Faraday implica que é gerada uma fem no circuito de magnitude,

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} \\ &= -Blv\end{aligned}$$

- Como o fluxo aumenta a corrente induzida I pela fem, gera-se um campo magnético que aponta no sentido oposto ao campo \vec{B} externo, como tal a corrente induzida tem que circular no sentido oposto ao dos ponteiros do relógio

- Quanto menor for a resistência R do circuito maior é a corrente

$$I = \mathcal{E}/R$$

- *Qual a origem desta fem que actua em torno do circuito?*
- Uma carga q que deriva em torno do circuito devido à força electromotriz ganha uma energia igual a $q\mathcal{E}$
- A carga deriva muito devagar (porque v_d é muito baixa) logo na parte em forma de C do circuito a força magnética é muito pequena
- Contudo na barra em movimento, uma força magnética $F_m = qvB$ empurra q (para cima se for positiva) e então o trabalho realizado por esta força é,

$$\begin{aligned} W &= qvBl \\ &= q\mathcal{E} \end{aligned}$$

- Contrariamente ao que possa parecer, a carga q não adquire a energia do campo B , pois recordemos que *um campo magnético não realiza trabalho numa carga eléctrica*
- *Então donde vem a energia?*
- Repare-se que no referencial da barra a carga deriva muito lentamente com a velocidade v_d (não confundir com v a velocidade da barra), assim neste referencial a força magnética é desprezável
- Só um campo eléctrico consegue fazer uma força significativa numa carga que se move lentamente e para produzir a fem observada q tem de ser empurrada por uma força qvB
- Portanto tal só é possível porque *a carga sente um campo eléctrico que aponta para cima e tem uma magnitude,*

$$E_0 = vB$$

- E_0 não existe no referencial do laboratório, existe apenas no referencial da barra em movimento
- De um modo geral, *se um condutor se move com velocidade v no referencial do laboratório, na presença dum campo \vec{B} então uma carga dentro do condutor sente uma força magnética*

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

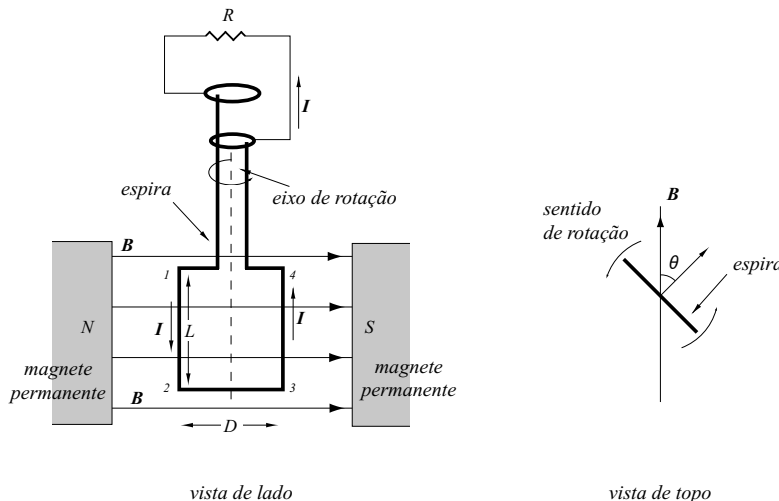
- No referencial do condutor a mesma força toma a forma duma força eléctrica $\vec{F}_e = q\vec{E}_0$ onde \vec{E}_0 é o campo eléctrico no referencial do condutor e é dado por,

$$\vec{E}_0 = \vec{v} \times \vec{B}$$

- Este é o campo eléctrico que origina todas as fem geradas sempre que um circuito se move relativamente a um campo magnético
- Concluimos então que a lei de Faraday-Lenz é devida aparentemente à combinação de dois efeitos distintos
 1. o campo eléctrico gerado no espaço por um campo magnético variável no tempo
 2. o campo eléctrico gerado dentro dum condutor quando se move através dum campo magnético
- Estes dois efeitos são dois aspectos dum mesmo fenómeno e a lei de Faraday-Lenz não faz distinção entre eles

17.3.2 O gerador de corrente alternada

- Analisemos agora o mecanismo dum simples gerador eléctrico de corrente alternada, como o indicado na figura, que converte a energia mecânica de rotação duma espira rectangular num campo magnético uniforme, em energia eléctrica



- Se A for a área da espira e θ o ângulo entre o campo \vec{B} e a normal ao plano da espira, então o fluxo magnético de \vec{B} através da espira é dado por,

$$\Phi_B = BA \cos \theta$$

- Forçando a espira a rodar com velocidade angular constante ω então a variação de θ no tempo é $\theta = \omega t$ e pela lei de Faraday-Lenz é induzida na espira uma fem,

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= - \frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= - \frac{d}{dt}(BA \cos(\omega t))\end{aligned}$$

logo,

$$= BA\omega \sin(\omega t)$$

- Caso haja N espiras, então o fluxo será N vezes superior e portanto,

$$\mathcal{E} = NBA\omega \sin(\omega t)$$

- Usando a relação $\omega = 2\pi f$ entre a frequência angular ω e a frequência f , podemos escrever a equação anterior como,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{Max} \sin(2\pi ft)$$

onde, $\mathcal{E}_{Max} = 2\pi NBAf$

é o valor máximo da força electromotriz gerada, que como se vê, é proporcional à área da espira A , ao número de espiras N , ao número de voltas que as espiras dão num segundo f e ao módulo do campo magnético B

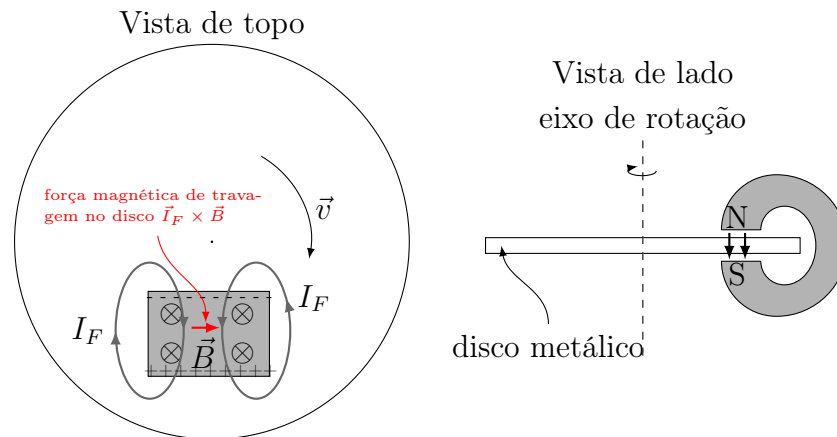
- Esta fem é sinusoidal no tempo, atingindo os valores extremos quando o plano da espira é paralelo ao campo magnético (quando o fluxo varia mais) e é zero quando o plano da espira é perpendicular ao campo magnético (quando o fluxo varia menos), invertendo o sinal a cada meio período de rotação da espira
- Ligando uma resistência de carga R à espira então de acordo com a lei de Ohm a corrente I que flúi por R é,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_{Max}}{R} \sin(2\pi ft)$$

esta corrente I também flúi pela espira

17.3.3 Correntes de Foucault

- Vimos anteriormente que sempre que um *condutor se move num campo magnético externo \vec{B}* é induzida uma corrente eléctrica I nesse condutor
- Se o condutor tiver uma resistência R a corrente induzida aquece o condutor pois dissipa-se no condutor uma energia RI^2 por unidade de tempo
- Por outro lado *o campo magnético externo \vec{B} interage com a corrente induzida* exercendo uma força magnética por unidade de comprimento no condutor $\vec{I} \times \vec{B}$
- Léon Foucault (1855) notou que era necessário exercer uma força maior para girar um disco condutor quando lhe era aplicado um campo magnético (ver ilustração)



- A fem induzida na região do disco sob o efeito de \vec{B} actua na direcção $\vec{v} \times \vec{B}$, sendo \vec{v} a velocidade do disco
- No caso ilustrado essa fem é composta duma diferença de potencial no sentido do centro para a periferia do disco gerando uma corrente de Foucault I_F no sentido oposto na região com $B \neq 0$
- Como a carga não se pode acumular no disco, estas correntes I_F têm de ser fechadas e como tal circulam para trás pela parte do disco exterior ao campo magnético
- Este movimento circular fechado tem a forma dum vórtice (ou dum remoinho)
- Pela regra da mão direita facilmente se descobre que na região onde há campo, as correntes I_F , originam uma força magnética $\vec{I}_F \times \vec{B}$ no disco que se opõem ao movimento de rotação do disco

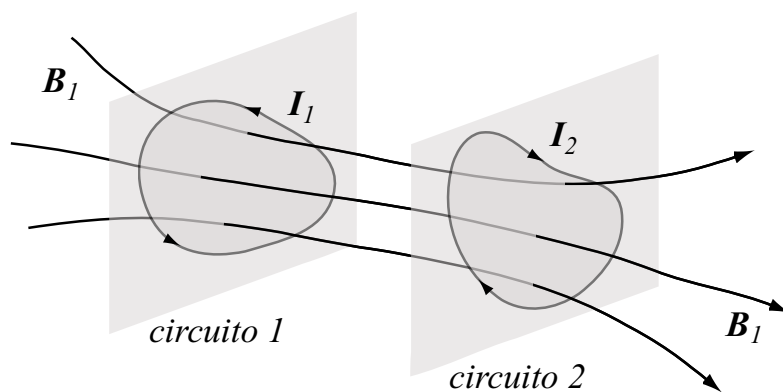
- Se o disco não for mantido a rodar por uma força externa I_F leva à paragem do disco devido à energia de rotação do disco ser continuamente dissipada em calor pelas correntes de Foucault
- Alguns exemplos do uso das correntes de Foucault são:
 - Travões electromagnéticos
 - Levitação magnética
 - Controlo eletrónico de motores elétricos
 - Correntes peliculares
 - Detectores de metais
 - Detectação de falhas em metais
 - Aquecimento por indução (fornos)
 - Núcleo laminado dum transformador (para reduzir as correntes de Foucault)

Aula 18

Indutância mútua

18.1 Indutância

18.1.1 Indutância mútua



- Consideremos dois circuitos eléctricos fechados 1 e 2, como os ilustrados em cima
- A corrente I_1 no circuito 1 gera um campo magnético \vec{B}_1 que passa pelo circuito 2, provocando um fluxo magnético Φ_{12} neste circuito
- Se I_1 duplicar, então B_1 também duplica em todo o espaço e portanto também o fluxo magnético Φ_{12} gerado por I_1 e que atravessa o circuito 2, duplica
- Esta é uma consequência da linearidade das leis da magnetostática e da definição de fluxo magnético
- O fluxo Φ_{12} através do circuito 2 é directamente proporcional à corrente I_1 no circuito 1 e como tal podemos escrever,

$$\Phi_{12} = M_{21} I_1 \quad (18.1)$$

onde a constante M_{21} é a chamada indutância mútua do circuito 2 relativamente ao circuito 1

- Por um raciocínio semelhante concluimos que o fluxo magnético Φ_{21} através do circuito 1 devido a uma corrente I_2 que circula pelo circuito 2 é dado por,

$$\Phi_{21} = M_{12}I_2 \quad (18.2)$$

onde a constante M_{12} é a chamada indutância mútua do circuito 1 relativamente ao circuito 2

- Pode mostrar-se matematicamente que independentemente da forma, das posições ou orientações relativas dos circuitos,

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (18.3)$$

onde M é a indutância mútua dos dois circuitos, uma quantidade puramente geométrica que só depende da forma, das posições e orientações relativas dos circuitos

- No Sistema Internacional a unidade da indutância mútua é o Henry (H)
- Um henry é igual a um volt-segundo por ampere,

$$1\text{H} \equiv 1\text{VsA}^{-1} \quad (18.4)$$

que é uma unidade um pouco desproporcionada, pois as indutâncias mútuas típicas dos circuitos comuns são da ordem dos mili-henry

- A um instrumento com dois circuitos desenhado para ter indutância mútua chama-se um indutor mútuo ou transformador
- Se no intervalo de tempo dt a corrente que flui no circuito 1 varia de dI_1 então o fluxo que atravessa o circuito 2 varia no mesmo intervalo de tempo de

$$d\Phi_{B12} = M dI_1$$

o que gera uma fem no circuito 2

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= - \frac{d\Phi_{B12}}{dt} \\ &= - M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned}$$

- De forma análoga se a corrente que flui no circuito 2 varia no intervalo de tempo dt de dI_2 então a fem gerada no circuito 1 é dada por,

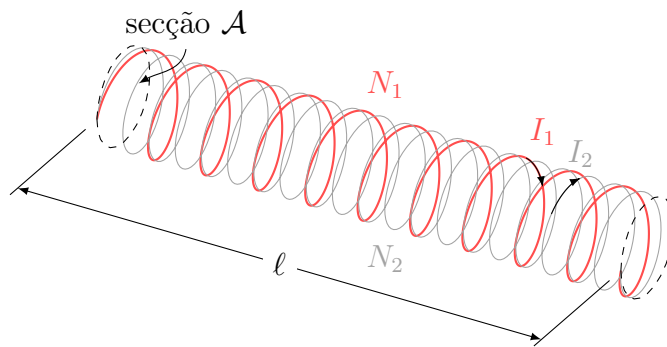
$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt} \quad (18.5)$$

- *Enfatiza-se que este acoplamento entre os dois circuitos ocorre sem nenhum contacto físico.*
- O acoplamento é realizado apenas pelo campo magnético.

18.1.2 Indutância mútua de dois solenóides

Exercício 58

Como exemplo calculemos a indutância mútua de dois solenóides 1 e 2 de comprimento ℓ enrolados um por cima do outro, ficando no interior o solenóide 1. O solenóide 1 tem uma secção de área \mathcal{A} e N_1 espiras e o solenóide 2 (exterior) tem N_2 espiras.



- Se uma corrente I_1 flui pelo solenóide 1, então no seu núcleo é gerado um campo magnético com intensidade

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell}$$

- O campo magnético no exterior do solenóide 1 é desprezável
- O fluxo através duma espira do solenóide 2 é $B_1 \mathcal{A}$, logo através das N_2 espiras o fluxo é,

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= N_2 B_1 \mathcal{A} \\ &= \frac{\mu_0 N_2 N_1 I_1 \mathcal{A}}{\ell} \end{aligned}$$

- Então a indutância mútua do solenóide 2 relativamente ao 1 é,

$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{\Phi_{B12}}{I_1} \\ &= \frac{\mu_0 N_2 N_1 \mathcal{A}}{\ell} \end{aligned}$$

- Por outro lado quando passa uma corrente I_2 pelo solenóide 2 este gera um fluxo através do solenóide 1

$$\begin{aligned}\Phi_{21} &= N_1 B_2 \mathcal{A} \\ &= \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_2 \mathcal{A}}{\ell}\end{aligned}$$

pois,

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{\ell}$$

- Então a indutância mútua do solenóide 1 relativamente ao 2 é,

$$\begin{aligned}M_{12} &= \frac{\Phi_{21}}{I_2} \\ &= \frac{\mu_0 N_1 N_2 \mathcal{A}}{\ell}\end{aligned}$$

- Verificando-se assim que

$$M_{21} = M_{12}$$

logo,

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \mathcal{A}}{\ell}$$

- Claramente a *indutância mútua destes dois circuitos é uma quantidade geométrica*, independente das correntes eléctricas e dos campos magnéticos, só dependendo das dimensões dos solenóides e do número de espiras de cada um

18.1.3 Auto-indutância

- *Um só circuito fechado* por onde circula uma corrente I também *interage com ele próprio*, pois é atravessado pelo seu próprio fluxo magnético Φ_B
- Dada a natureza linear das leis da magnetostática e da definição de fluxo magnético resulta que o fluxo Φ_B é proporcional à corrente I logo,

$$\Phi_B = LI \tag{18.6}$$

onde a constante de proporcionalidade L é a *chamada auto-indutância do circuito*

- A auto-indutância dum circuito mede-se em henry e é também uma *quantidade puramente geométrica*
- Se a corrente I que flúi no circuito varia no intervalo de tempo dt de dI então o fluxo que atravessa o circuito varia no mesmo intervalo de tempo de $d\Phi_B = L dI$, gerando pela lei de Faraday-Lenz uma fem no circuito,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad (18.7)$$

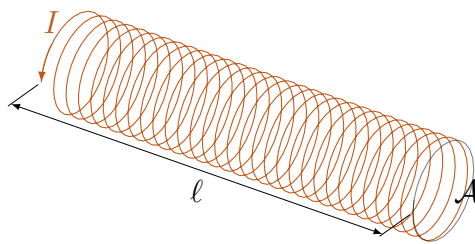
ou seja, *se uma corrente que flúi num circuito fechado aumenta no tempo é induzida no próprio circuito uma fem que se opõe ao aumento da corrente (e vice versa)*

- Como já vimos anteriormente na lei de Lenz, a fem induzida nunca poderia reforçar a corrente indutora, caso contrário a corrente não pararia de aumentar, o que é irrealista e violaria o princípio da conservação da energia
- Então *a auto-indutância L dum circuito é sempre uma quantidade positiva* ao contrário das indutâncias mútuas que podem ser positivas ou negativas

18.1.4 A auto-indutância dum solenóide

Exercício 59

Como exemplo calculemos a auto-indutância dum solenóide de comprimento ℓ com uma secção de área \mathcal{A} e N espiras.



- Quando uma corrente I flúi pelo solenóide no seu núcleo é gerado um campo magnético com intensidade,

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \quad (18.8)$$

- O campo magnético no exterior do solenóide é desprezável

- O fluxo através duma só espira do solenóide é $B\mathcal{A}$, logo através das N espiras o fluxo é,

$$\begin{aligned}\Phi_B &= N B \mathcal{A} \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I \mathcal{A}}{\ell}\end{aligned}\quad (18.9)$$

- Então a auto-indutância do solenóide é dada por,

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \mathcal{A}}{\ell}\quad (18.10)$$

onde se vê claramente que a auto-indutância L é uma quantidade positiva, independente da corrente eléctrica e do campo magnético, só dependendo da dimensão do solenóide e do número de espiras

18.2 A energia armazenada num indutor

- Consideremos um indutor com indutância L que é ligado a uma fonte de tensão variável, de forma a que uma corrente eléctrica i flua pelo indutor desde zero até um valor final I

- Ao aumentar a corrente no indutor é gerada uma fem

$$\mathcal{E} = -L di/dt$$

que se opõe ao aumento de i

- A fonte de tensão tem de realizar trabalho contra essa fem de modo a conseguir aumentar a corrente i no circuito

- O trabalho realizado no intervalo dt é,

$$dW = P dt = -\mathcal{E} i dt = i L \frac{di}{dt} dt = L i di\quad (18.11)$$

onde $P = -\mathcal{E}i$ é a taxa por unidade de tempo à qual a fonte de tensão realiza trabalho (potência dada pela fonte de tensão) contra a fem no indutor

- Então o trabalho total realizado para estabelecer a corrente I é,

$$W = \int dW = \int_0^I L i di$$

logo a energia magnética armazenada no indutor, U_m que é igual ao trabalho total realizado para estabelecer a corrente I é dada por,

$$W = U_m = \frac{LI^2}{2}$$

- Recordando que $\Phi_B = LI$ podemos escrever a energia magnética noutra forma,

$$U_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi_B}{2} = \frac{\Phi_B^2}{2L}$$

- Estas formas são todas equivalentes e são gerais para qualquer corrente.

18.3 A densidade de energia dum campo magnético

- Das equações (18.8), (18.9) e (18.10) a energia armazenada num solenóide pode escrever-se como,

$$U_m = L \frac{I^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 \mathcal{A}}{2\ell} \left(\frac{B\ell}{\mu_0 N} \right)^2,$$

simplificando vem,

$$= \frac{B^2}{2\mu_0} \ell \mathcal{A},$$

onde $\ell \mathcal{A}$ é o volume do núcleo do solenóide

- Assim a densidade de energia é,

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{18.12}$$

- *Esta expressão não é válida apenas para o campo magnético no interior dum solenóide, mas aplica-se a qualquer campo magnético*
- A energia contida num campo magnético que ocupa um volume v pode ser calculada de forma geral por,

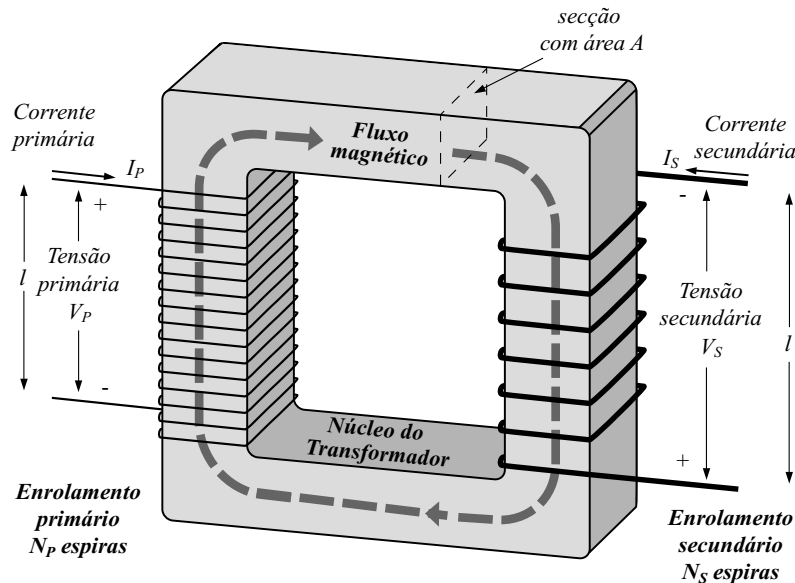
$$\begin{aligned} U_m &= \int_v u_m dv \\ &= \int_v \frac{B^2}{2\mu_0} dv \end{aligned}$$

é como se o volume v fosse dividido em cilindros com volume elementar dv (no interior dos quais o campo é aproximadamente uniforme) e somássemos a energia de todos esses pequeníssimos cilindros para obter a energia total no volume v

- Quando existem conjuntamente campos eléctricos e magnéticos no espaço a densidade de energia total contida no campo electromagnético é,

$$u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (18.13)$$

18.3.1 O transformador



- Um transformador consegue aumentar ou diminuir uma tensão alterada
- Este aparelho tem um papel crucial no transporte de energia eléctrica desde o local onde é gerada (barragens, centrais termoeléctricas, geradores eólicos, centrais nucleares, etc.) até às nossas casas onde é consumida
- Como ilustra a figura, *num transformador dois solenóides*, o primário e o secundário, *trocam fluxo magnético entre si*
- *Não há ligação física directa entre os enrolamentos destes solenóides*, que são enrolados em volta dum núcleo de ferro comum
- O núcleo de ferro serve apenas para conduzir a maior quantidade possível de fluxo magnético, gerado pela corrente que flui no primário, até ao enrolamento secundário, aumentando a interacção entre os dois enrolamentos
- Consideremos *um transformador ideal*, que não tem perdas de energia (normalmente causadas por correntes de Foucault induzidas no núcleo de ferro) e *onde o fluxo gerado no primário é igual ao que atravessa o secundário*

- Consideremos que ambos os enrolamentos têm comprimento l e secção de área A e que N_P e N_S são o número de espiras dos enrolamentos primário e secundário, respectivamente
- Se uma tensão alternada com frequência angular ω ,

$$V_P = V_{P_0} \cos(\omega t)$$

é aplicada ao primário e a corrente é,

$$I_P = I_{P_0} \sin(\omega t)$$

então I_P gera por indução no secundário uma fem também alternada,

$$V_S = V_{S_0} \cos(\omega t)$$

e se o secundário estiver ligado a uma resistência a tensão V_S produz uma corrente,

$$I_S = I_{S_0} \sin(\omega t)$$

no enrolamento secundário

- Pela lei de Kirchoff para a tensão, a equação do circuito primário fica,

$$\begin{aligned} V_P - L_P \frac{dI_P}{dt} - M \frac{dI_S}{dt} &= 0 \\ V_{P_0} - L_P \omega I_{P_0} - M \omega I_{S_0} &= 0 \end{aligned} \quad (18.14)$$

onde o segundo termo é a fem auto-induzida no enrolamento primário e o terceiro termo é a fem resultante da indutância mútua M dos enrolamentos primários e secundários

- Por razões semelhantes a equação do circuito secundário fica,

$$\begin{aligned} V_S - L_S \frac{dI_S}{dt} - M \frac{dI_P}{dt} &= 0 \\ V_{S_0} - L_S \omega I_{S_0} - M \omega I_{P_0} &= 0 \end{aligned} \quad (18.15)$$

- Sendo o transformador ideal, a energia por unidade de tempo transferida indutivamente do primário para o secundário não sofre quaisquer perdas logo,

$$\begin{aligned} I_P V_P &= I_S V_S \\ I_{P_0} V_{P_0} &= I_{S_0} V_{S_0} \end{aligned} \quad (18.16)$$

- Então das equações (18.14), (18.15) e (18.16) vem,

$$\begin{aligned}
 I_{P_0} V_{P_0} &= I_{S_0} V_{S_0} \\
 \omega(L_P I_{P_0}^2 + M I_{P_0} I_{S_0}) &= \omega(L_S I_{S_0}^2 + M I_{S_0} I_{P_0}) \\
 L_P I_{P_0}^2 &= L_S I_{S_0}^2 \\
 \frac{I_{P_0}}{I_{S_0}} &= \sqrt{\frac{L_S}{L_P}}
 \end{aligned} \tag{18.17}$$

- Ou,

$$\frac{V_{P_0}}{V_{S_0}} = \sqrt{\frac{L_P}{L_S}}$$

- Da expressão para a auto-indutância dum solenóide eq. (18.10) vem que $L_P = \frac{\mu_0 N_P^2 A}{l}$ e $L_S = \frac{\mu_0 N_S^2 A}{l}$ logo

$$\frac{L_P}{L_S} = \left(\frac{N_P}{N_S}\right)^2$$

e então,

$$\frac{V_{P_0}}{V_{S_0}} = \frac{I_{S_0}}{I_{P_0}} = \frac{N_P}{N_S} \tag{18.18}$$

que indica que a razão entre a amplitude máxima das tensões e correntes, no primário e no secundário é igual à razão entre o número de espiras no primário e no secundário

- Se o enrolamento secundário tiver mais espiras que o primário então a amplitude máxima da tensão no secundário é superior à amplitude máxima da tensão no primário, tendo a corrente um comportamento inverso
- Portanto *um transformador que aumenta a tensão diminui a corrente e vice versa*

Aula 19

Potencial vector

19.1 O potencial vector

- Vimos anteriormente que o fluxo do campo magnético \vec{B} numa superfície fechada é zero i.e.,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- A divergência do rotacional ($\nabla \cdot \nabla \times$) é zero para qualquer vector
- Podemos então concluir que matematicamente se verifica,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

pois como,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} &= 0\end{aligned}$$

- \vec{A} é chamado o *vector potencial magnético*
- Se adicionarmos a \vec{A} qualquer quantidade vectorial \vec{Q} cujo rotacional seja zero então \vec{B} não se altera

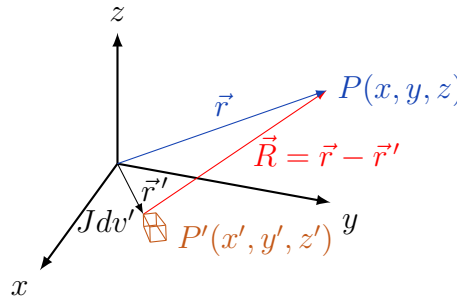
$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \nabla \times (\vec{A} + \vec{Q}) \\ &= \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{Q} \\ &= \vec{B}\end{aligned}$$

- Logo existem uma infinidade de possíveis vectores \vec{A}

- Como \vec{B} depende da derivada espacial de \vec{A} para encontrar \vec{B} num ponto P a partir do vector potencial é necessário conhecer \vec{A} na vizinhança de P
- Encontremos uma expressão integral para \vec{A} partindo da lei de Biot-Savart,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} dv'$$

em que R é a distância do ponto $P'(x', y', z')$, onde está o elemento de corrente $\vec{J} dv'$, ao ponto $P(x, y, z)$ onde queremos encontrar o campo \vec{B}



- Verifiquemos antes que,

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{\hat{R}}{R^2}$$

- Em coordenadas cartesianas,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

- Aplicando o gradiente,

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{R} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) \hat{k} \\ &= - \frac{(x-x') \hat{i} + (y-y') \hat{j} + (z-z') \hat{k}}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \\ &= - \frac{\vec{R}}{R^3} \\ &= - \frac{\hat{R}}{R^2} \end{aligned}$$

- Usando a relação anterior podemos escrever a lei de Biot-Savart como,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times \vec{J} dv'\end{aligned}$$

- Pode-se mostrar que,

$$\left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times \vec{J} = \nabla \times \frac{\vec{J}}{R} - \frac{\nabla \times \vec{J}}{R}$$

como \vec{J} é função de (x', y', z') e ∇ deriva em relação a (x, y, z) o segundo termo da direita é nulo logo,

$$\left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times \vec{J} = \nabla \times \frac{\vec{J}}{R}$$

- Desta relação e da lei de Biot-Savart obtemos o potencial vector pois,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times \vec{J} dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \left(\nabla \times \frac{\vec{J}}{R} \right) dv' \\ &= \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}}{R} dv' \right)\end{aligned}$$

logo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}}{R} dv'$$

- O potencial vector duma corrente I que passa num circuito C é,

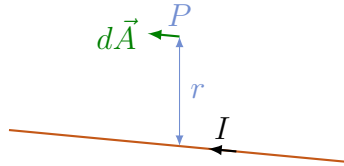
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{\ell}}{R}$$

- Sendo as unidades de \vec{B} tesla ou newton por (amper vezes metro), o potencial vector \vec{A} pode exprimir-se em tesla vezes metro, Tm ou newton por ampere, N/A
- Podemos também exprimir as unidades do potencial vector em joules por (ampere vezes metro), $J/(Am)$ que fisicamente representa energia por elemento de corrente

19.1.1 O potencial vector perto dum fio de corrente

Exercício 60

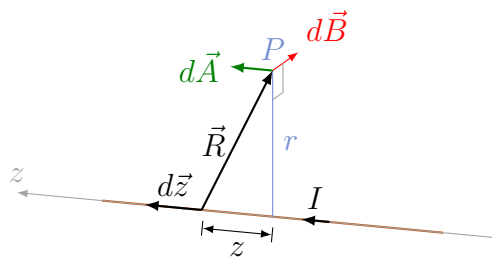
Uma corrente eléctrica I circula num fio recto de comprimento L . Calcular o potencial vector \vec{A} criado pela corrente eléctrica num ponto P do espaço a uma distância r do fio.



- O potencial vector num ponto P gerado por um elemento de corrente à distância R é,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell}}{R}$$

$d\vec{A}$ tem o mesmo sentido da corrente



- Alinhando o fio com o eixo z dum sistema de coordenadas cilíndricas podemos escrever,

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz}{R} \hat{k} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \hat{k} \end{aligned}$$

- Integrando entre $-L/2$ e $L/2$ vem,

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \hat{k} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \left(2\sqrt{r^2 + z^2} + 2z \right) \right]_{-L/2}^{L/2} \hat{k} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{4r^2 + L^2} + L}{\sqrt{4r^2 + L^2} - L} \hat{k}\end{aligned}$$

- Podemos calcular \vec{B} no mesmo ponto,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- Recordando o rotacional em coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \\ &\quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \hat{z}\end{aligned}$$

- Note-se que todos os termos são nulos excepto,

$$\nabla \times \vec{A} = - \frac{dA_z}{dr} \hat{\phi}$$

- Então \vec{B} no ponto P é dado por,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= - \frac{dA_z}{dr} \hat{\phi} \\ &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d}{dr} \ln \frac{\sqrt{4r^2/L^2 + 1} + 1}{\sqrt{4r^2/L^2 + 1} - 1} \hat{\phi} \\ &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-2}{r \sqrt{4r^2/L^2 + 1}} \hat{\phi} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{4r^2/L^2 + 1}} \hat{\phi}\end{aligned}$$

que se reduz ao resultado conhecido se o fio for infinito.

- *O potencial vector dum fio infinito pode ser obtido considerando que $r \ll L$*

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{4r^2/L^2 + 1} + 1}{\sqrt{4r^2/L^2 + 1} - 1} \hat{k}$$

- Expandindo em torno de zero os logaritmos e retendo só os termos lineares temos,

$$\ln \left(\sqrt{4r^2/L^2 + 1} + 1 \right) \approx \ln 2$$

$$\ln \left(\sqrt{4r^2/L^2 + 1} - 1 \right) \approx -\ln 2 + 2 \ln \frac{2r}{L}$$

- Então o potencial vector fica,

$$\begin{aligned} \vec{A} &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(2 \ln 2 - 2 \ln \frac{2r}{L} \right) \hat{k} \\ &\approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{L}{r} \hat{k} \end{aligned}$$

- Podemos calcular o campo \vec{B} na aproximação $r \ll L$,

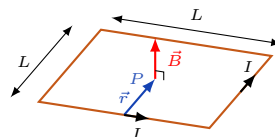
$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \nabla \times \left(\ln \frac{L}{r} \right) \hat{k} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{L}{r} \right) \hat{\phi} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \end{aligned}$$

que é a expressão que já tínhamos deduzido antes para um fio infinito

19.1.2 Campo magnético no centro duma espira quadrada

Exercício 61

Consideremos uma espira quadrada de lado L por onde circula uma corrente I . Calcular o campo magnético \vec{B} no ponto P que está no centro da espira.



- Calculámos anteriormente o campo \vec{B} criado por um fio de comprimento L por onde circula uma corrente I ,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{4r^2/L^2 + 1}} \hat{\phi}$$

- Podemos reutilizar este resultado para calcular \vec{B}_{total} no centro da espira criado por cada um dos 4 lados,

$$\begin{aligned} \vec{B}_{total} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 \\ &= 4\vec{B} \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi r} \frac{1}{\sqrt{4r^2/L^2 + 1}} \hat{u}_\perp \end{aligned}$$

onde \hat{u}_\perp aponta para cima e é perpendicular ao plano da espira

- Como a distância de P à espira é $r = L/2$ o valor de \vec{B}_{total} é dado por,

$$\vec{B}_{total} = \frac{\mu_0 I 2\sqrt{2}}{\pi L} \hat{u}_\perp$$

- Note-se que no centro da espira o potencial vector $\vec{A} = 0$, contudo a circulação de \vec{A} num caminho elementar em torno do centro não é nula, sendo precisamente igual ao campo mágnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

19.2 A equação de Poisson do potencial vector

- Recordemos a equação de Poisson para o potencial electrostático,

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

que tem como solução a equação,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho}{r} dv'$$

- O potencial vector é dado por,

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}}{R} dv' \end{aligned}$$

onde as componentes são,

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{J_x}{R} dv' \quad \dots \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{J_z}{R} dv'$$

A equação de Poisson do potencial vector

- Por analogia podemos escrever a Eq. de Poisson para cada uma das componentes de \vec{A} ,

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_x &= -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_0 J_z\end{aligned}$$

ou

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

- *Esta equação é válida apenas em magnetoestática*

19.3 Campo eléctrico em termos dos potenciais

- Vimos que para qualquer superfície S (limitada por C) a lei de Faraday-Lenz diz que,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- Também já tínhamos visto antes que,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

logo,

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

usando o teorema de Stokes,

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

- Voltando à lei de Faraday-Lenz podemos substituir o fluxo magnético por,

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= -\frac{d}{dt} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \\ &= -\int_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}\end{aligned}$$

então vem,

$$\oint_C \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\ell} = 0$$

- A circulação do campo que está entre parêntesis é nula
- Podemos assim escrever esse campo em função do gradiente de um potencial escalar, tal como fizemos em electrostática,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$
$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

onde V é o potencial eléctrico e \vec{A} o potencial vector magnético.

- A expressão anterior permite escrever o campo eléctrico num ponto P em função dos valores dos potenciais V e \vec{A} numa vizinhança de P no espaço-tempo
- Para referência recordamos as expressões análogas para \vec{E} e \vec{B} ,

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Aula 20

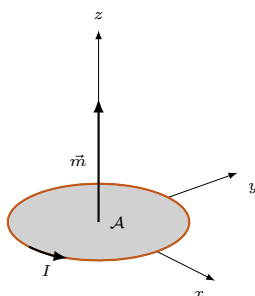
Momento dipolar magnético

20.1 O momento dipolar magnético

- Para uma espira plana de forma arbitrária e área \mathcal{A} por onde passa uma corrente I , define-se o *momento dipolar magnético* \vec{m} como,

$$\vec{m} = \mathcal{A}I\hat{u}$$

onde \hat{u} é o versor perpendicular à superfície da espira e satisfaz a regra da mão direita



- O momento dipolar magnético dum *circuito fechado arbitrário* é dado por,

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{\ell}$$

- O momento dipolar magnético dum *distribuição de corrente arbitrária* é dado por,

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_{v'} \vec{r} \times \vec{J} dv'$$

onde \vec{r} é o vector posição do elemento de corrente.

- O momento dipolar magnético tem *unidades de Am²*
- Em função do momento dipolar o campo magnético no eixo da espira circular antes calculado é dado por,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{k} \\ &= \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi(z^2 + r^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

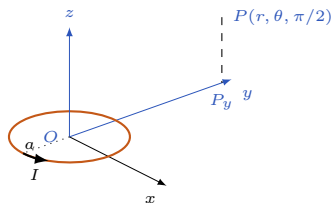
- E o campo magnético da espira rectangular é dado por,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0 I 2\sqrt{2}}{\pi L} \hat{u}_\perp \\ &= \frac{\mu_0 2\sqrt{2}}{\pi L^3} \vec{m}\end{aligned}$$

20.2 Potencial vector do dipolo magnético

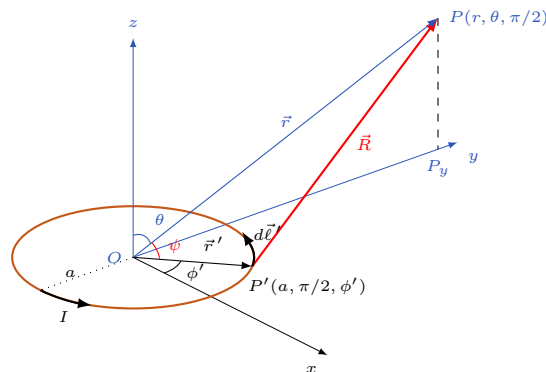
Exercício 62

Consideremos uma espira circular de raio a por onde circula uma corrente I . Calcular o potencial vector \vec{A} no ponto P muito afastado da espira.



- Recordemos a expressão do potencial vector,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{\ell}'}{R}$$



- Relativamente ao referencial de coordenadas esféricas centrado no centro da espira temos,

$$d\vec{\ell}' = ad\phi' \hat{\phi}' = ad\phi' (-\sin\phi' \hat{i} + \cos\phi' \hat{j})$$

- Notar que para cada $d\vec{\ell}'$ existe um outro que *cancela a componente y* e reforça a componente x
- Assim \vec{A} fica,

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin\phi' \hat{i} + \cos\phi' \hat{j})}{R} d\phi' \\ &= -\frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi'}{R} d\phi' \hat{i} \end{aligned}$$

- Da lei dos cossenos obtemos,

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2r'r \cos\psi$$

onde ψ é o ângulo entre \vec{r} e \vec{r}'

- Note-se que $r \cos\psi$ é a projecção de r na direcção OP'
- Esta projecção é igual à projecção de OP_y na direcção de OP'
- Como $r \sin\theta = OP_y$ vem que,

$$r \cos\psi = r \sin\theta \sin\phi'$$

- Notando que $r' = a$ podemos reescrever R como,

$$R^2 = r^2 + a^2 - 2ar \sin\theta \sin\phi'$$

e o inverso desta expressão fica

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \sin\theta \sin\phi'}}$$

como $a/r \ll 1$, expandindo em torno de 0 o lado direito até 1ª ordem em a/r obtemos,

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin\theta \sin\phi' \right)$$

- Então o potencial vector em $P(r, \theta, \pi/2)$ é,

$$\begin{aligned}\vec{A} &= -\frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi'}{R} d\phi' \hat{i} \\ &\approx -\frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi'}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \sin \phi'\right) d\phi' \hat{i}\end{aligned}$$

o primeiro integral é nulo e o segundo π assim,

$$\vec{A} \approx -\frac{\mu_0 I a^2}{4r^2} \sin \theta \hat{i}$$

- Da simetria cilíndrica da corrente se concluí que num ponto afastado $P(r, \theta, \phi)$ obteríamos,

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0 I a^2}{4r^2} \sin \theta \hat{\phi}$$

- Em função do momento dipolar $\vec{m} = I\pi a^2 \hat{k}$ o potencial vector fica,

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0 \vec{m} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

pois $\hat{k} \times \hat{r} = \hat{\phi}$.

- Podemos também obter o campo magnético,

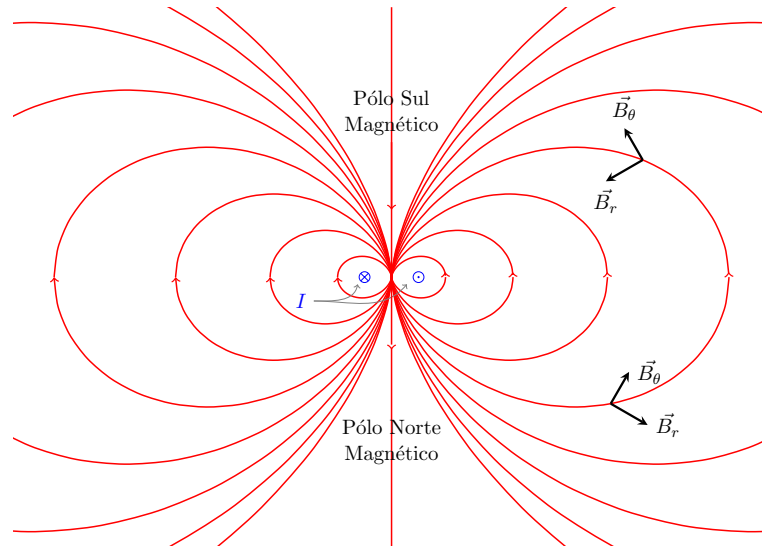
$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &\approx \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta} \\ &\approx \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \cos \theta \hat{r} + \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3} \sin \theta \hat{\theta} \\ &\approx \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \\ &\approx \mu_0 m \frac{1}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})\end{aligned}$$

- A forma de \vec{B} é semelhante à obtida para o campo eléctrico do dipolo eléctrico, daí o nome dipolo magnético

$$\vec{E} \approx \frac{p}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

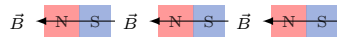
20.2.1 Linhas de campo do dipolo magnético

- A figura seguinte ilustra as linhas de campo do dipolo magnético no plano da folha

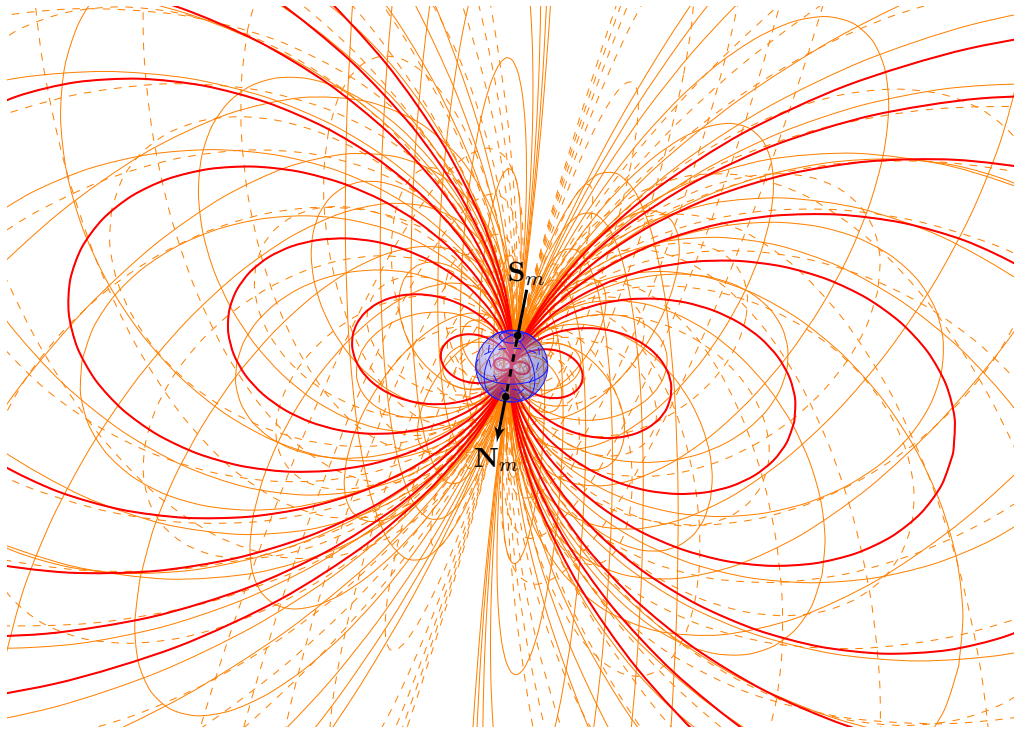


20.2.2 Os pólos do dipolo magnético

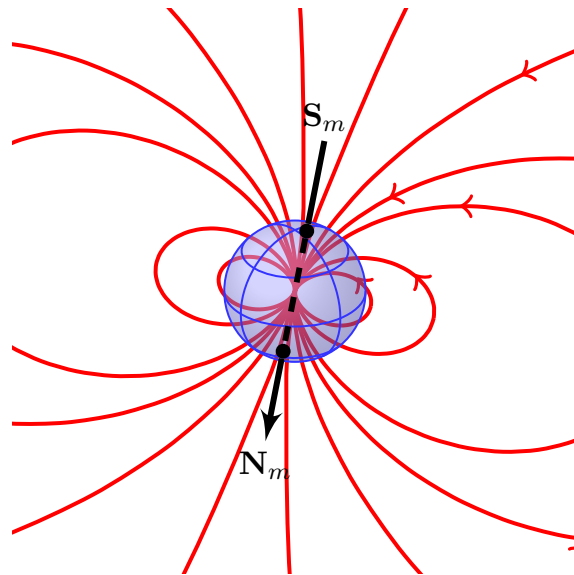
- Pólos diferentes atraem-se, e pólos iguais repelem-se



- Uma bússula (dipolo) também se alinha com o campo magnético (dipolar) da Terra
- *O pólo Norte magnético da bússula aponta para o Norte geográfico da Terra*
- *Quando uma bússula aponta para o Norte geográfico está na realidade a apontar para o pólo Sul magnético*
- O campo magnético da Terra é um campo dipolar (excluindo o efeito do vento solar) a figura seguinte ilustra em 3D as linhas desse campo, onde as linhas a vermelho estão no plano da folha, as linhas laranjas tracejadas estão para trás e as laranjas a cheio para a frente



O pólo Norte geográfico está (perto) do pólo Sul magnético e vice versa



Perto do equador as linhas de campo são paralelas à superfície da Terra, e nos polos magnéticos são perpendiculares à superfície da Terra.

Nas restantes latitudes as linhas do campo geomagnético são inclinadas à superfície.

20.3 Torque das forças exercidas sobre uma espira

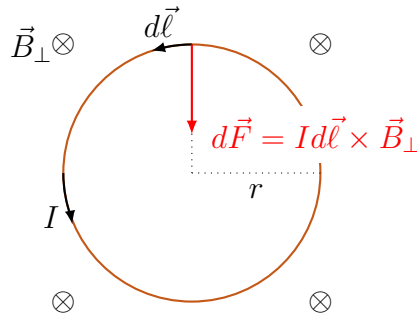
- Consideremos uma espira circular percorrida por uma corrente I e sujeita a um campo magnético uniforme \vec{B}
- O campo magnético tem uma componente *paralela* ao plano da espira \vec{B}_{\parallel} e outra *perpendicular* \vec{B}_{\perp} ,

$$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}$$

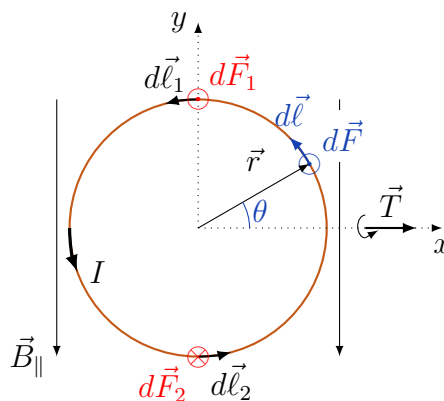
- Vimos antes que a força magnética que um campo \vec{B} exerce numa corrente I é dada por,

$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

- A figura ilustra que \vec{B}_{\perp} exerce uma força que tende a contrair ou expandir a espira, dependendo da direcção da corrente



- A força total exercida pela componente paralela \vec{B}_{\parallel} é nula mas tem um torque finito



- As forças em $d\vec{\ell}_1$ e $d\vec{\ell}_2$ são,

$$d\vec{F}_1 = Id\ell B_{\parallel} \hat{k}$$

$$d\vec{F}_2 = - Id\ell B_{\parallel} \hat{k}$$

criam um binário

- O torque resultante destas duas forças (*não nulo*) é,

$$\begin{aligned} d\vec{T} &= \vec{r}_1 \times d\vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times d\vec{F}_2 \\ &= 2r^2 Id\ell B_{\parallel} \hat{i} \end{aligned}$$

- Cada $d\vec{F}$ tem um par com o qual forma um binário
- Para obter o torque total basta calcular a contribuição entre 0 e π e multiplicar por 2
- O elemento de corrente é,

$$\begin{aligned} Id\vec{\ell} &= Ir d\theta \hat{\theta} \\ &= Ir d\theta (-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) \end{aligned}$$

- O vector campo paralelo é,

$$\vec{B}_{\parallel} = - B_{\parallel} \hat{j}$$

- Logo a força $d\vec{F}$ é dada por,

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= Id\vec{\ell} \times \vec{B}_{\parallel} \\ &= - Ir d\theta B_{\parallel} \hat{\theta} \times \hat{j} \\ &= Ir d\theta B_{\parallel} \sin\theta \hat{k} \end{aligned}$$

- O torque da força é dado por,

$$\begin{aligned} d\vec{T} &= \vec{r} \times d\vec{F} \\ &= r\hat{r} \times (Ir d\theta B_{\parallel} \sin\theta \hat{k}) \\ &= Ir^2 d\theta B_{\parallel} \sin\theta \hat{r} \times \hat{k} \end{aligned}$$

como $\hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$ vem,

$$= Ir^2 d\theta B_{\parallel} \sin\theta (-\cos\theta \hat{j} + \sin\theta \hat{i})$$

- Para obter o torque total da força basta integrar de 0 a π e multiplicar por 2, pois as contribuições dos elementos de corrente são aos pares

$$\begin{aligned}
 \vec{T} &= 2 \int_0^\pi \vec{r} \times d\vec{F} \\
 &= 2Ir^2 B_{\parallel} \int_0^\pi (-\sin\theta \cos\theta \hat{j} + \sin^2\theta \hat{i}) d\theta \\
 &= 2Ir^2 B_{\parallel} \left(\left[\frac{-\cos^2\theta}{2} \right]_0^\pi \hat{j} + \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^\pi \hat{i} \right) \\
 &= I\pi r^2 B_{\parallel} \hat{i}
 \end{aligned}$$

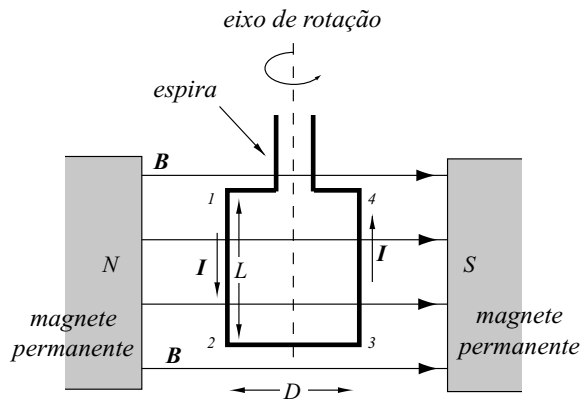
- Como πr^2 é a área \mathcal{A} da espira podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 \vec{T} &= -m \hat{k} \times B_{\parallel} \hat{j} \\
 &= \vec{m} \times \vec{B}_{\parallel} \\
 &= \vec{m} \times \vec{B}
 \end{aligned}$$

- Onde \vec{m} é o momento dipolar magnético da espira e $\vec{m} \times \vec{B}_{\perp} = 0$
- *Um campo externo \vec{B}_{ext} força um dipolo a rodar até o seu momento magnético se alinhar com \vec{B}_{ext} ($\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}_{ext\parallel}$)*

20.4 Galvanómetros

- Já falámos de correntes eléctricas, diferenças de potencial e resistências. Como podemos medir estas quantidades?
- Basicamente *basta medir directamente a corrente eléctrica*, e as diferenças de potencial e resistências deduzem-se através da medida de correntes, que podem ser medidas com um galvanómetro
- Um galvanómetro consiste numa espira rectangular que pode rodar livremente em torno dum eixo, como representado na figura
- No plano da espira é aplicado um campo magnético aproximadamente uniforme B , gerado por um ímã permanente



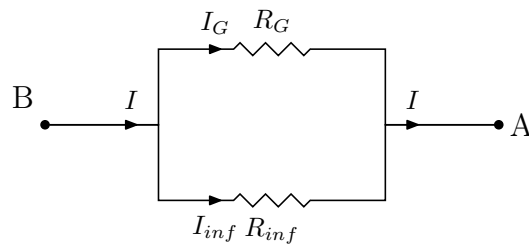
- Quais as forças exercidas pelo campo B na espira percorrida pela a corrente I ?
- Nas partes da espira de comprimento D entre os pontos 4 e 1 e entre os pontos 2 e 3, a força magnética é paralela ao eixo de rotação da espira não produzindo movimento
- A força exercida na parte da espira de comprimento L entre os pontos 1 e 2 é $F = IBL$ e aponta para fora da página sendo perpendicular ao eixo de rotação da espira
- Entre os pontos 3 e 4 a força magnética tem intensidade também igual a $F = IBL$ e aponta para dentro da página
- Estas duas forças exercem um binário na espira, fazendo-a rodar em torno do seu eixo de rotação com um torque total T ,

$$\begin{aligned} T &= 2F \frac{D}{2} \\ &= IBLD \\ &= BAI \end{aligned}$$

sendo \mathcal{A} a área da espira

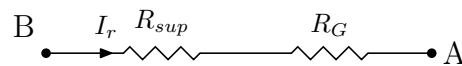
- Este resultado concorda com $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$
- *Note-se que o torque exercido na espira é proporcional à corrente I*
- Num galvanómetro a espira normalmente é suspensa num fio de torção, que exerce um torque contrário ao da força magnética, permitindo à espira voltar à posição inicial
- A intensidade deste torque é directamente proporcional ao ângulo de torção $\Delta\theta$, que por sua vez é proporcional à corrente I quando os dois torques estão em equilíbrio

- Prendendo um ponteiro ao fio para observar a deflexão da espira, o galvanómetro pode ser facilmente calibrado fazendo passar uma corrente eléctrica conhecida e registando a deflexão do ponteiro numa escala
- Para evitar destruir o galvanómetro o fio de torção está limitado a uma deflexão máxima a que corresponde uma corrente máxima
- Estas correntes são relativamente pequenas e da ordem dos micro amperes
- Para medir correntes superiores liga-se o galvanómetro em paralelo com uma resistência R_{inf} muito inferior à resistência interna do galvanómetro R_G por onde pode passar a maior parte da corrente



- Para medir diferenças de potencial (tensões) liga-se o galvanómetro em série com uma resistência muito superior R_{sup} à resistência do galvanómetro R_G , ligando em seguida o conjunto aos dois pontos entre os quais se pretende medir a tensão
- Desta forma extrai-se uma corrente residual I_r do circuito para fazer a medida
- A tensão entre os dois pontos A e B é dada por

$$V_{AB} = I_r (R_{sup} + R_G)$$



Aula 21

Origem do magnetismo permanente

Origem do magnetismo permanente

- Até agora vimos vários exemplos de campos magnéticos criados por correntes eléctricas
- Vimos também como o movimento ordenado de electrões livres gera uma corrente eléctrica
- *Os electrões não livres, fortemente ligados ao núcleo, também geram campos magnéticos?*
- *Um electrão preso a um átomo também se move em torno do núcleo atómico*
- Inclusive qualquer electrão *gira* em torno dele próprio (spin)
- Então os electrões *presos* também devem poder gerar correntes e momentos magnéticos e consequentemente campos magnéticos
- A explicação detalhada dos efeitos magnéticos da matéria requer mecânica quântica
- Em seguida daremos uma explicação qualitativa usando o modelo atómico clássico

21.1 Vector magnetização \vec{M}

- Consideremos que o momento dipolar magnético médio de cada átomo é \vec{m} e que há n átomos por unidade de volume num dado material

- Definimos o momento magnético por unidade de volume do material num dado ponto como,

$$\vec{M} = n\vec{m}$$

- Chamamos a \vec{M} o *vector magnetização*
- As unidades SI do momento dipolar magnético são A m²
- Assim a *unidade da magnetização* \vec{M} é A/m

21.1.1 Densidades volumétrica e superficial de corrente de magnetização

- Mostrámos antes que longe dum dipólo magnético o potencial vector é dado apróximadamente por,

$$\frac{\mu_0 \vec{m} \times \hat{R}}{4\pi R^2}$$

- Então se \vec{m} for o momento dipolar médio atómico num volume dv' dum material magnetizado, longe de dv' o potencial vector é,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \hat{R}}{4\pi R^2} dv'$$

onde \vec{R} é o vector posição do ponto P relativamente a P' a posição do volume dv'

- Assim \vec{A} causado por todos os dipólos do material que ocupa o volume v' é,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{M} \times \hat{R}}{R^2} dv'$$

- De forma análoga à verificada antes podemos verificar que,

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{R}}{R^2}$$

∇' actua no ponto P'

- O potencial vector pode então escrever-se como,

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{M} \times \hat{R}}{R^2} dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv'\end{aligned}$$

- Usando a identidade,

$$\vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\nabla' \times \vec{M}}{R} - \nabla' \times \frac{\vec{M}}{R}$$

- Temos,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\nabla' \times \vec{M}}{R} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \nabla' \times \frac{\vec{M}}{R} dv'$$

- Consideremos ainda a seguinte identidade que se aplica a um campo vectorial \vec{F} genérico definido numa superfície S e no volume v que ela envolve,

$$\int_v (\nabla \times \vec{F}) dv = - \int_S \vec{F} \times d\vec{S}$$

- Usando esta identidade no 2º termo do potencial vector obtemos,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\nabla' \times \vec{M}}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{R} dS'$$

onde \hat{n} é a normal à superfície S' que envolve o volume v' do material

- Comparando com a definição de \vec{A}

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}}{R} dv'$$

- Temos a densidade volúmica de corrente de magnetização,

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$$

com unidade A/m^2

- E a densidade superficial de corrente de magnetização,

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n}$$

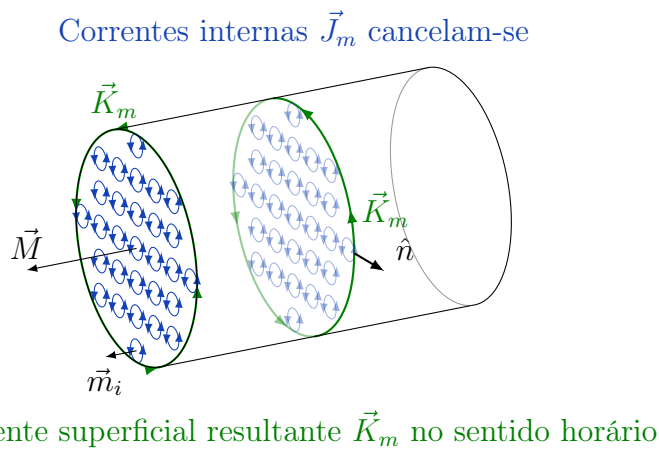
com unidade A/m

- *Correntes de magnetização*, (I_m, K_m, J_m) resultam do efeito colectivo de todos os dipolos magnéticos atómicos \vec{m}
- Cada dipolo resulta do movimento local de electrões em torno dum núcleo
- Portanto estas correntes não resultam do movimento ordenado dos electrões livres que se movem livremente pelo condutor dando origem a *correntes livres* (I_ℓ, K_ℓ, J_ℓ)

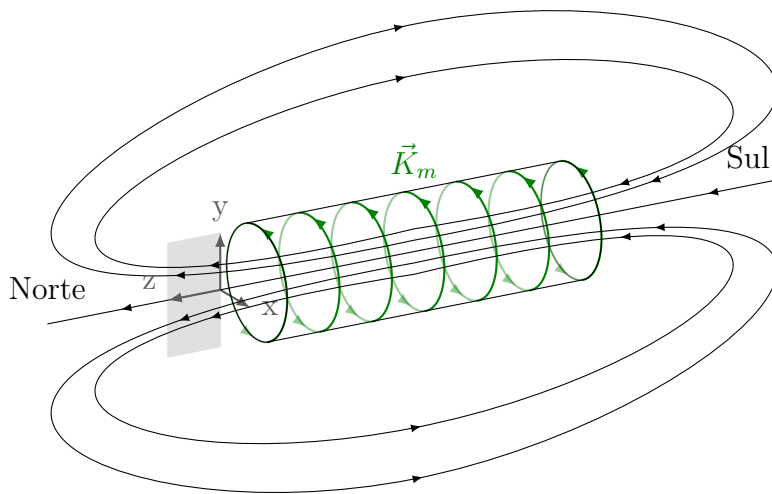
21.1.2 Cilindro com magnetização constante

- Se $\vec{M} = \text{constante}$ então,

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$$



O campo magnético é idêntico ao de um solenoide longo



21.2 A divergência do campo magnético em materiais magnéticos

- Mesmo no interior de materiais magnéticos a divergência do campo magnético é nula

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- Portanto esta equação é sempre válida

21.3 Campo magnético \vec{H}

- No interior de materiais magnéticos verifica-se,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_m + \vec{J}_\ell)$$

onde \vec{J}_ℓ é a densidade de corrente devida às cargas livres

- As derivadas não são definidas na superfície dos materiais logo aí esta equação não é válida
- Usando a definição de densidade de corrente de magnetização temos,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 (\nabla \times \vec{M} + \vec{J}_\ell) \\ \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) &= \vec{J}_\ell \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_\ell \end{aligned}$$

onde o campo $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

- Tal como \vec{M} também o campo \vec{H} é expresso em unidades A/m

21.3.1 Lei de Ampère na presença de matéria

- Integrando o rotacional de \vec{H} sobre uma superfície aberta S circunscrita por um caminho C temos,

$$\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_\ell \cdot d\vec{S}$$

e usando o teorema de Stokes vem,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_\ell$$

onde I_ℓ é corrente (de cargas livres) que atravessa a superfície S

- Esta é a lei de Ampère para \vec{H} válida mesmo em materiais magnéticos

21.3.2 Susceptibilidade e permeabilidade magnética de um meio

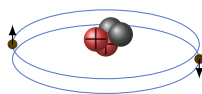
- Para *materiais* não ferromagnéticos *isotrópicos e lineares* \vec{M} é *proporcional e paralelo* a \vec{H} ,

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

- A quantidade χ_m é a *susceptibilidade magnética* do material
- Disto resulta que,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\ &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

ou seja, $\vec{B} \propto \vec{H}$



- A constante μ é a permeabilidade magnética do material,

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

- Define-se a permeabilidade magnética relativa (ao vácuo) como,

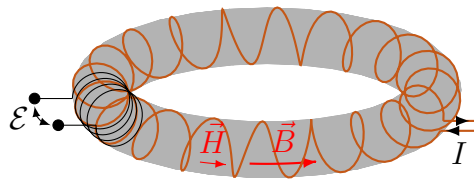
$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

21.4 Materiais diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos

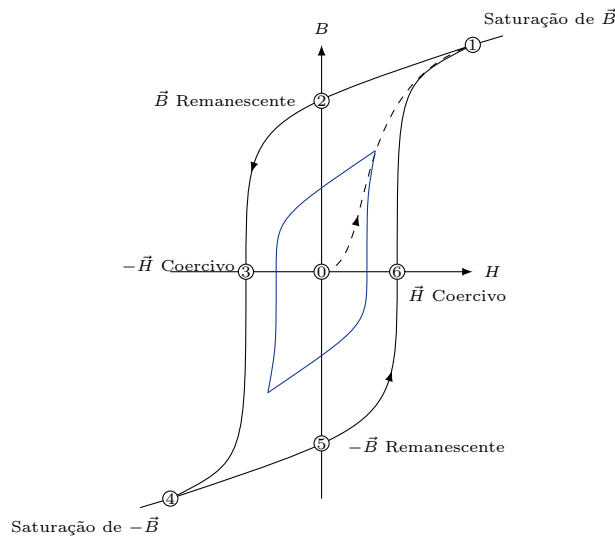
- Na maior parte dos átomos os electrões ocorrem em pares com spins opostos
- Os \vec{m} associados a cada spin cancelam-se e não geram campo magnético finito
- Materiais com electrões desemparelhados tem campo intrínseco \vec{B}_{int} finito e reagem a \vec{B}_{ext}
- A maioria dos materiais podem ser classificados em diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos
- Nos materiais diamagnéticos todos os electrões estão emparelhados logo $\vec{B}_{int} = 0$
- Aplicação de \vec{B}_{ext} produz algum desemparelhamento e consequentemente $\vec{B}_{int} \approx 0$ que desaparece quando \vec{B}_{ext} é removido
- Materiais diamagnéticos:
 - têm uma *ténue susceptibilidade negativa*, $\chi_m < 0$ a \vec{B}_{ext}
 - são *repelidos ligeiramente* por \vec{B}_{ext}
- A maioria dos materiais são diamagnéticos, e.g. Cobre, Carbono, Chumbo, Água, Ouro
- Nos materiais paramagnéticos alguns electrões estão desemparelhados logo $\vec{B}_{int} \approx 0$
- Aplicação de \vec{B}_{ext} produz desemparelhamento extra e consequentemente $\vec{B}_{int} \gtrsim 0$

- Propriedades magnéticas desaparecem quando \vec{B}_{ext} é removido
- Materiais paramagnéticos:
 - têm uma *pequena susceptibilidade positiva*, $\chi_m > 0$ a \vec{B}_{ext}
 - são *atraídos ligeiramente* por \vec{B}_{ext}
- Nos materiais ferromagnéticos alguns electrões estão desemparelhados logo $\vec{B}_{int} \gtrsim 0$
- *Mas existem domínios de muitos átomos com \vec{m} alinhados que geram um campo forte*
- Aplicação de \vec{B}_{ext} produz alinhamento dos domínios e consequentemente \vec{B}_{int} mais forte que nos outros materiais
- *Propriedades magnéticas mantêm-se quando \vec{B}_{ext} é removido*
- Materiais ferromagnéticos:
 - têm uma *grande susceptibilidade positiva* a \vec{B}_{ext}
 - são *atraídos fortemente* por \vec{B}_{ext}
 - com domínios aleatoriamente desalinhados ficam desmagnetizados
- O Ferro, Cobalto, Níquel são exemplos de materiais ferromagnéticos

21.5 O ciclo de histerese



- Consideremos uma bobine toroidal com núcleo ferromagnético
- Fazendo passar uma corrente I pela bobine é induzido um campo magnético \vec{B} no núcleo
- Existe igualmente um campo $\vec{H} \propto I$
- Para medir o campo \vec{H} basta medir a corrente aplicada I
- *Medindo o fluxo magnético, ϕ com uma segunda bobine sabe-se \vec{B}*
- A figura seguinte ilustra a relação entre \vec{B} e \vec{H}



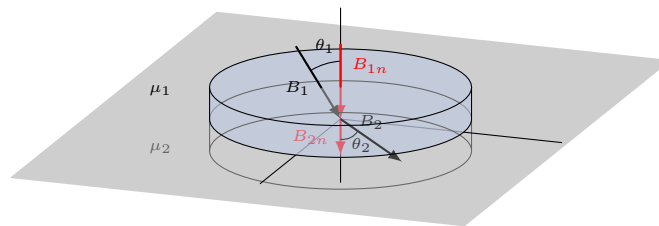
- Um material desmagnetizado está no ponto 0
- Aumentando \vec{H} , através dum aumento de I , o campo \vec{B} aumenta até 1 onde satura
- Diminuindo \vec{H} , por diminuição de I , o campo \vec{B} diminui pela curva 1- > 2
- No ponto 2 $\vec{H} = 0$ mas $\vec{B} \neq 0$ devido à magnetização remanescente (ou remanente)
- Invertendo a direcção e aumentando I , \vec{B} diminui até 0 no ponto 3
- No ponto 3 o valor de $\vec{H} < 0$ é o campo coercivo
- Continuando percorre-se o ciclo de histerese de novo até ao ponto 1
- Notar que a magnetização \vec{M} pode alcançar valores muito elevados num material ferromagnético
- Como $\vec{B} \propto \vec{H} + \vec{M}$ o aumento de \vec{B} é substancial enquanto \vec{M} aumenta
- A saturação de \vec{B} ocorre quando o aumento de \vec{M} cessa
- Após \vec{B} saturar o aumento de \vec{H} provoca um aumento ligeiro de \vec{B}
- Depois da saturação $\vec{B} \propto \vec{H}$
- Se a saturação não for atingida os campos remanescentes e coercivos são menores (curva azul)
- O ciclo de histerese permite obter algumas propriedades magnéticas do material

- *Retentividade*: o campo magnético residual, i.e. \vec{B} remanescente
- *Magnetismo residual*: valor de \vec{B} quando $\vec{H} = 0$ ($\vec{B}_{residual} < \vec{B}_{remanescente}$ se não houve saturação)
- *Campo \vec{H} coercivo*: o valor de \vec{H} que tem de ser aplicado para fazer $\vec{B} = 0$
- *Permeabilidade*: facilidade com que \vec{B} é criado no material
- *Relutância*: Resistência que um material ferromagnético oferece à criação de \vec{B} no material (análogo ao conceito de resistência elétrica)

21.6 Condições fronteira em materiais magnéticos

Componente normal do campo magnético B

- Consideremos uma superfície gaussiana cilíndrica com uma altura muito pequena, na fronteira entre dois meios com permeabilidade magnética diferentes (μ_1 e μ_2)



- O fluxo pela parede do cilindro é desprezável, pois este tem uma altura muito pequena
- Qual é o fluxo de \vec{B} pela base e pelo topo do cilindro?
- A lei de Gauss diz que o fluxo de \vec{B} é nulo,

$$(B_{2n} - B_{1n}) A = 0$$

onde A é a área da base do cilindro

$$B_{2n} = B_{1n}$$

- A normal à superfície do campo \vec{B} é contínua na fronteira
- A normal à superfície do campo \vec{H} é descontínua se $\nabla \cdot \vec{M} \neq 0$ pois,

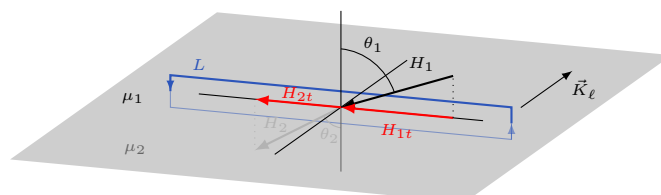
$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

logo,

$$H_{2n} - H_{1n} = M_{1n} - M_{2n}$$

Componente Tangencial do Campo H

- Consideremos um caminho fechado de comprimento $2L$ paralelo à fronteira entre dois meios diferentes (μ_1 e μ_2) e infinitesimalmente próximo da superfície
- Na fronteira há uma densidade superficial de corrente livre, \vec{K}_ℓ



- Consideremos L muito pequeno de modo a que \vec{H} seja constante no caminho
- A circulação de \vec{H} nos caminhos perpendiculares à superfície fronteira é desprezável pois os seus comprimentos são infinitesimais
- A circulação total de \vec{H} ao longo do caminho é então dada por,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_\ell = \oint \vec{K}_\ell \cdot d\vec{\ell}$$

$$(H_{1t} - H_{2t})L = K_\ell L$$

logo

$$H_{1t} - H_{2t} = K_\ell$$

- Ou seja a componente tangencial de \vec{H} à fronteira só é contínua se $K_\ell = 0$
- A componente tangencial de $\vec{B} = \mu\vec{H}$ fica,

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = K_\ell$$

21.7 Circuitos magnéticos

- Num circuito magnético procura-se canalizar fluxo magnético por materiais magnéticos
- O fluxo é gerado por ímanes ou por electroímã

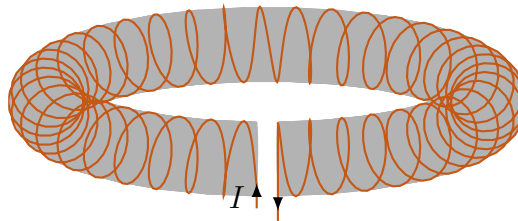
- Os materiais são normalmente ferromagnéticos, que podem ou não incluir fendas de ar
- Há algumas analogias com os circuitos eléctricos (ver à frente)
- Consideremos uma bobine com N voltas enrolada em torno de um torus ferromagnético
- A bobine é percorrida por uma corrente I
- Então a lei de Ampère para o campo \vec{H} diz que num caminho C fechado atravessado pelas N espiras temos,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI = \mathcal{V}$$

- Em analogia com a força electro motriz $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, chama-se a \mathcal{V} a *força magneto motriz*
- A unidade SI da força magneto motriz é o A (também é comum usar o A-volta)

Exercício 63

Considerar que o torus atrás referido tem uma permeabilidade μ , um raio maior R , um raio menor a e uma fenda de ar de largura ℓ_a onde $\ell_a \ll 2\pi R$. Calcular os campos \vec{B}_f e \vec{H}_f no material ferromagnético e \vec{H}_a na fenda de ar.



- Escolhendo um caminho amperiano C circular pelo interior do torus ferromagnético a lei de Ampère diz,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI$$

- Consideremos que as fugas de fluxo magnético são pequenas quer no torus quer na fenda

- Então o fluxo magnético Φ vai ser constante ao longo do torus logo,

$$\begin{aligned}\Phi_f &= \Phi_a \\ B_f A &= B_a A\end{aligned}$$

onde $A = \pi a^2$ é a área da secção do torus logo,

$$\vec{B}_f = \vec{B}_a = B_f \hat{\phi}$$

- Contudo \vec{H} varia com a permeabilidade logo,

$$\begin{aligned}\vec{H}_f &= \frac{B_f}{\mu} \hat{\phi} \\ \vec{H}_a &= \frac{B_f}{\mu_0} \hat{\phi}\end{aligned}$$

- Voltando à lei de Ampère temos,

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= NI \\ \int_{C_f} \vec{H}_f \cdot d\vec{\ell} + \int_{C_a} \vec{H}_a \cdot d\vec{\ell} &= NI \\ H_f \ell_f + H_a \ell_a &= NI \\ B_f \left(\frac{\ell_f}{\mu} + \frac{\ell_a}{\mu_0} \right) &= NI\end{aligned}$$

onde ℓ_a é o comprimento da fenda e $\ell_f = 2\pi R - \ell_a$ o comprimento do material ferromagnético

- Logo o campo magnético \vec{B} é dado por,

$$\vec{B} = \frac{NI}{\frac{\ell_f}{\mu} + \frac{\ell_a}{\mu_0}} \hat{\phi}$$

- Então o campo \vec{H} é,

$$\vec{H}_f = \frac{NI}{\ell_f + \ell_a \mu_r} \hat{\phi}$$

e na fenda de ar,

$$\vec{H}_a = \frac{NI}{\frac{\ell_f}{\mu_r} + \ell_a} \hat{\phi}$$

21.7.1 Lei de Hopkinson

- Podemos também calcular o fluxo magnético,

$$\begin{aligned}\Phi &= BA \\ &= \frac{NI}{\frac{\ell_f}{\mu A} + \frac{\ell_a}{\mu_0 A}}\end{aligned}$$

- Definindo a *relutância do circuito magnético* de comprimento L e área A como,

$$\mathcal{R} = \frac{L}{\mu A}$$

- Podemos escrever o fluxo como,

$$\Phi = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_a}$$

onde \mathcal{R}_f e \mathcal{R}_a são respectivamente as relutâncias do núcleo ferromagnético e da fenda

- Em função da relutância equivalente,

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_a$$

e reordenando a expressão do fluxo obtemos,

$$\mathcal{V} = \mathcal{R}_{eq} \Phi$$

- Esta é conhecida pela lei de Hopkinson, que afirma que a força magnetomotriz é proporcional ao fluxo magnético

21.7.2 Analogia com os circuitos eléctricos

- A seguinte tabela ilustra a analogia com circuitos eléctricos

Circuitos Eléctricos	Circuitos Magnéticos
Força electromotriz, $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$	Força magnetomotriz, $\mathcal{V} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$
Corrente I	Fluxo Magnético Φ
Densidade de corrente \vec{J}	Campo magnético \vec{B}
Condutividade σ	Permeabilidade μ
Campo eléctrico \vec{E}	Campo \vec{H}
Resistência R	Relutância \mathcal{R}
Lei de Ohm $\mathcal{E} = RI$	Lei de Hopkinson $\mathcal{V} = \mathcal{R}\Phi$
$\vec{j} = \sigma \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$

21.7.3 Diferenças com os circuitos eléctricos

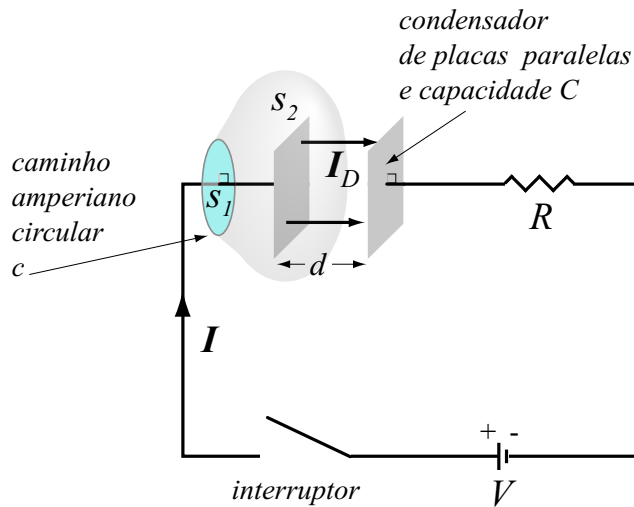
- Convém realçar que:
 - A corrente eléctrica resulta de um movimento de cargas que transportam energia que se dissipa nas resistências
 - O fluxo magnético é o fluxo dum campo e não há energia dissipada nas relutâncias
 - I está confinada ao circuito eléctrico
 - Uma parte significativa do fluxo (de cálculo difícil) pode sair do circuito magnético
 - A resistência é constante com \vec{E}
 - A relutância é não linear e depende de \vec{H}
 - O fluxo magnético depende do valor, instantâneo e passado, da \mathcal{V}

Aula 22

A corrente de deslocamento e as ondas eletromagnéticas

22.1 A corrente de deslocamento

- Na primeira aula enunciámos as equações de Maxwell e ao longo deste curso temos vindo a mostrar que estas equações são as leis de Gauss para \vec{E} e \vec{B} , a lei de Faraday-Lenz e a lei de Ampère
- No entanto quando *Maxwell* tentou resumir tudo o que era conhecido na altura sobre campos eléctricos e magnéticos *apercebeu-se que duma inconsistência na lei de Ampère*
- Maxwell acabou por descobrir que *a inconsistência desaparecia adicionando uma nova corrente à lei de Ampère a que chamou corrente de deslocamento*
- Vejamos uma explicação heurística da corrente de deslocamento
- Para tal consideremos um circuito RC, onde um condensador com capacidade C está em série com uma resistência R e uma fonte de alimentação contínua que produz uma fem V



- De acordo com a lei de Ampère (eq. 16.1) o integral de \vec{B} ao longo do caminho amperiano c é proporcional à corrente que atravessa a superfície S circunscrita por c
- Se $S = S_1$ então a corrente que atravessa S_1 é a corrente I que flui no circuito
- Se $S = S_2$ então aparentemente nenhuma corrente atravessa S_2 pois não há movimento de cargas entre as placas do condensador
- Para garantir a unicidade da lei de Ampère, Maxwell sugeriu que deve existir uma corrente que flui entre as placas do condensador
- Seja \mathcal{A} a área das placas do condensador que estão separadas por uma distância d
- Fechando o interruptor, a corrente no circuito decresce exponencialmente enquanto a carga no condensador cresce desde zero até ao valor VC
- Logo a diferença de potencial entre as placas

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

também aumenta

- Podemos também exprimir Q em função do campo $E = V/d$ entre as placas do condensador obtendo,

$$\begin{aligned} Q(t) &= CV \\ &= CE d \end{aligned}$$

- A capacidade é uma constante $C = \epsilon_0 \mathcal{A}/d$ tal como a distância d entre as placas
- Então derivando a carga em ordem ao tempo obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{dQ(t)}{dt} &= C d \frac{dE}{dt} \\ I(t) &= \mathcal{A} \epsilon_0 \frac{dE}{dt}\end{aligned}\quad (22.1)$$

esta equação relaciona a corrente que flui no circuito com a taxa de variação do campo eléctrico entre as placas do condensador

- A essa corrente chama-se corrente de deslocamento (por ser igual à derivada em ordem ao tempo do vector deslocamento eléctrico D) e é igual a,

$$I_D = \mathcal{A} \frac{\partial \epsilon_0 E}{\partial t} = \mathcal{A} \frac{\partial D}{\partial t}\quad (22.2)$$

que se pode também escrever em função do fluxo eléctrico Φ_E ,

$$I_D = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\quad (22.3)$$

ou sobre a forma duma densidade de corrente,

$$j_D = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\quad (22.4)$$

onde foram introduzidas derivadas parciais pois em geral o campo E depende também de x , y e z

- Apesar desta derivação heurística da corrente de deslocamento a validade da eq. (22.2) é geral
- É então necessário modificar a lei de Ampère de modo a incluir a corrente de deslocamento,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_D)\quad (22.5)$$

ou na forma diferencial (usando o teorema de Stokes),

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)\quad (22.6)$$

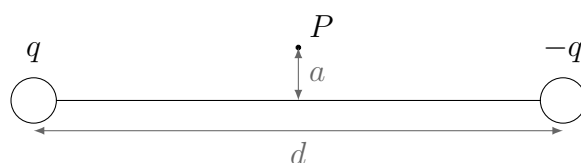
- A seguinte tabela relembra as 4 equações de Maxwell, no vácuo, na forma diferencial e integral,

Forma diferencial	Forma integral	Lei de:
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	Gauss para \vec{E}
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	Gauss para \vec{B}
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	Faraday-Lenz
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_D)$	Ampère-Maxwell

- Como curiosidade menciona-se que Maxwell escreveu estas leis numa forma bastante mais complexa, usando 20 equações
- As equações na forma compacta da notação vectorial, como as conhecemos hoje, foram pela primeira vez escritas por Oliver Heaviside
- Heaviside desenvolveu a notação compacta que usamos para o rotacional $\nabla \times$ e para a divergência $\nabla \cdot$ entre outras.

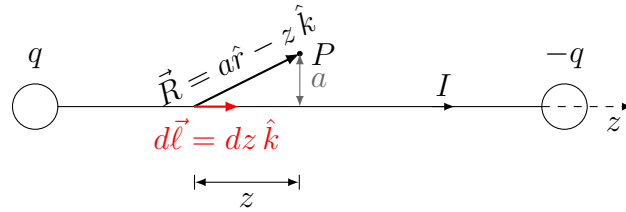
Exercício 64

Duas esferas metálicas iguais e carregadas com carga q e $-q$, estão separadas por uma distância d muito maior que o seu diâmetro. Quando se liga um fio condutor rectilíneo entre as esferas, estas descarregam-se e a passagem da carga pelo fio dá origem a uma brevíssima corrente I . Considere um ponto P a meio do fio e afastado deste de uma distância a . Calcule o campo \vec{B} em P criado por I , usando a lei de Biot e Savart (que é sempre válida) e a lei de Ampère. Corrija o valor de \vec{B} obtido pela lei de Ampère, que não é válida em regime transiente, usando a corrente de deslocamento.



- Pela lei de Biot-Savart o campo em P é,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{adz\hat{\phi}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

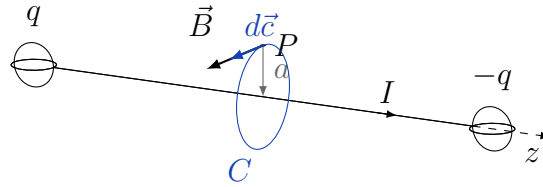


- Fazendo a mudança de variável $z = a \tan \theta$ conclui-se rapidamente que

$$\int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z}{a^2 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

- Assim o campo magnético em P é dado por,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{d}{\sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}}} \hat{\phi} \quad (22.7)$$



- Pela lei de Ampère o campo em P é,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

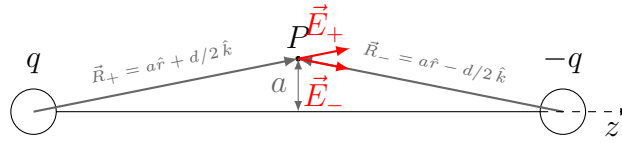
logo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\phi} \quad (22.8)$$

- O campo calculado pela lei de Ampère (Eq. 22.8) não coincide com o calculado pela lei de Biot-Savart (Eq. 22.7)
- Tal deve-se à lei de Ampère não ser válida quando a corrente eléctrica varia rapidamente no tempo
- Neste caso deve usar-se a lei de Ampère-Maxwell para calcular o campo,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$$

onde \vec{E} é calculado no disco limitado por C



- O campo eléctrico no ponto P é a soma do campo \vec{E}_+ criado pela esfera com carga positiva com o \vec{E}_- da esfera com carga negativa,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{R}_+}{R^3} - \frac{\vec{R}_-}{R^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{\left(\frac{d^2}{4} + a^2\right)^{3/2}} \hat{k}\end{aligned}$$

- Então o fluxo de \vec{E} sobre o disco limitado por C é,

$$\begin{aligned}\int \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{\left(\frac{d^2}{4} + r^2\right)^{3/2}} \hat{k} \cdot \hat{k} r dr d\phi \\ &= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r dr d\phi}{\left(\frac{d^2}{4} + r^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{qd}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{\left(\frac{d^2}{4} + r^2\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

usando a mudança de variável $u = r^2 + \frac{d^2}{4}$ o integral em r vem

$$= \frac{qd}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + r^2}} \right]_0^a = \frac{qd}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2}} + \frac{2}{d} \right]$$

- Inserindo o valor do fluxo de \vec{E} na lei de Ampère-Maxwell obtemos,

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} &= \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \\ &= \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{qd}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2}} + \frac{2}{d} \right] \right)\end{aligned}$$

a única variável no tempo é a carga q que decresce ($dq/dt = -I$) logo,

$$\begin{aligned}B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(1 + \frac{d}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2}} - 1 \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{d}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2}}\end{aligned}$$

- Usando a lei de Ampère-Maxwell obtivemos o mesmo resultado da lei de Biot-Savart (Eq.22.7),

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{d}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2}} \hat{\phi}$$

22.2 Ondas electromagnéticas

- Maxwell sabia que as equações que descreviam a dinâmica dos fluidos tinham soluções ondulatórias que descreviam o movimento de ondas nos fluidos
- Decidiu então investigar se as *suas* 4 equações também tinham soluções ondulatórias
- *Assim sendo existiriam então um tipo completamente novo de ondas, a que ele chamou mais tarde de ondas electromagnéticas*
- Começou pela tarefa mais simples de investigar a existência de *ondas electromagnéticas que se propagassem no vazio*, numa região sem cargas nem correntes
- Na forma diferencial as equações de Maxwell nessa região ficam,

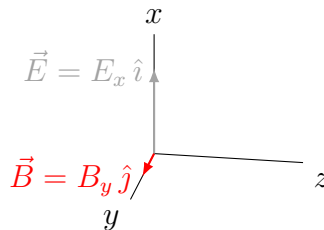
$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (22.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (22.10)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (22.11)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (22.12)$$

chama-se a atenção para a simetria entre campos eléctricos e magnéticos destas equações para o vazio.



- Verifiquemos se estas equações admitem como solução um campo \vec{E} e \vec{B} perpendiculares um ao outro, tais que \vec{E} só tem componente segundo o eixo x e \vec{B} só tem componente segundo o eixo y ou seja,

$$\vec{E} = E_x \hat{i} \quad \text{portanto} \quad E_y = E_z = 0 \quad (22.13)$$

$$\vec{B} = B_y \hat{j} \quad \text{portanto} \quad B_x = B_z = 0 \quad (22.14)$$

- Usando a divergência e o rotacional em coordenadas cartesianas vem,

(a) Para a divergência de \vec{E} ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot E_x \hat{i} &= 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (22.15)$$

(b) Para a divergência de \vec{B} ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot B_y \hat{j} &= 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (22.16)$$

(c) Para o rotacional de \vec{E} ,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k} = - \frac{\partial}{\partial t} (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &\frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{j} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \hat{k} = - \frac{\partial B_y}{\partial t} \hat{j} \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (22.17)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (22.18)$$

(d) Para o rotacional de \vec{B} ,

$$- \frac{\partial B_y}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{k} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{i}$$

logo,

$$- \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (22.19)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \quad (22.20)$$

- Podemos então concluir rapidamente de (22.15), (22.16), (22.18) e (22.20) que E_x e B_y não dependem nem de x nem de y

- Por outro lado derivando (22.17) em ordem ao tempo e (22.19) em ordem a z vem,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial^2 t} \quad \wedge \quad -\frac{\partial^2 B_y}{\partial^2 z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t},$$

combinando os resultados obtemos,

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial^2 z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial^2 t} \quad (22.21)$$

- De forma análoga derivando (22.17) em ordem a z e (22.19) em ordem a t obteríamos,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 t} \quad (22.22)$$

- Podemos verificar rapidamente que as funções,

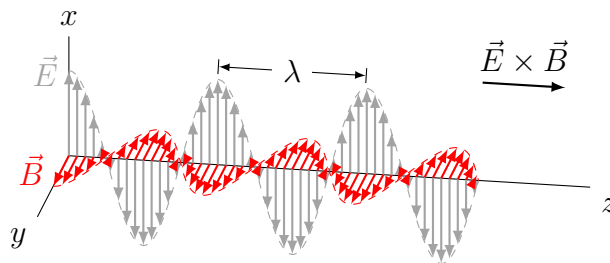
$$\begin{aligned} B_y &= B_0 \cos \left[2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - ft \right) \right] \\ E_x &= E_0 \cos \left[2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - ft \right) \right] \end{aligned} \quad (22.23)$$

são soluções das equações (22.21) e (22.22) respectivamente e que tanto o campo E como o campo B são duas ondas que se propagam ao longo do eixo dos Z

- A onda propaga-se com velocidade

$$\begin{aligned} c &= \lambda f \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \end{aligned} \quad (22.24)$$

onde f é a frequência da onda que se mede em hertz (Hz) e λ é o comprimento de onda que se mede em metros e representa a distância entre dois máximos consecutivos da onda (ver figura)



onda electromagnética, linearmente polarizada segundo o eixo x , num instante de tempo t

- Usando as Eq. 22.17 e 22.23 podemos também verificar facilmente que,

$$E_0 = cB_0$$

donde se concluí que os campos \vec{E} e \vec{B} são interdependentes,

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c} \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \frac{\hat{u}}{c} \times \vec{E},$$

onde $\hat{u} = \hat{k}$ no caso particular das soluções Eq. 22.23 com uma onda que se propaga no sentido de \hat{k} . No caso genérico \hat{u} indica o sentido de propagação da onda.

- Para evitar estar sempre a escrever o factor 2π que surge nas eqs. (22.23) é costume definir a frequência angular $\omega = 2\pi f$ que se mede em rads por segundo (rad s^{-1}) e o número de onda $k = 2\pi/\lambda$ que se mede em (m^{-1})
- As funções do tipo (22.23) podem assim escrever-se numa forma mais compacta,

$$B_y = B_0 \cos(kz - \omega t), \quad E_x = E_0 \cos(kz - \omega t),$$

repare-se que de (22.24) se conclui facilmente que,

$$c = \lambda f = \frac{\omega}{k} \quad (22.25)$$

- Algumas propriedades das ondas electromagnéticas (EM)
 1. O campo magnético oscila em fase com o campo eléctrico
 2. O campo magnético é sempre perpendicular ao campo eléctrico e ambos os campos são perpendiculares à direcção de propagação da onda que é dada pela direcção do vector $\vec{E} \times \vec{B}$
 3. Numa onda que se propaga segundo Z, o campo \vec{E} pode oscilar em qualquer direcção no plano XY
 4. A direcção em que \vec{E} oscila é denominada a polarização da onda
 5. Se a direcção de \vec{E} não varia então a polarização diz-se linear
 6. Se a direcção de \vec{E} gira em redor da direcção de propagação a polarização diz-se circular
 7. Estando um observador de frente para a onda, a polarização circular é negativa se \vec{E} gira no sentido horário e positiva se gira no sentido oposto Assim as equações (22.13) e (22.23) representam uma onda que se propaga segundo Z e está linearmente polarizada segundo a direcção X

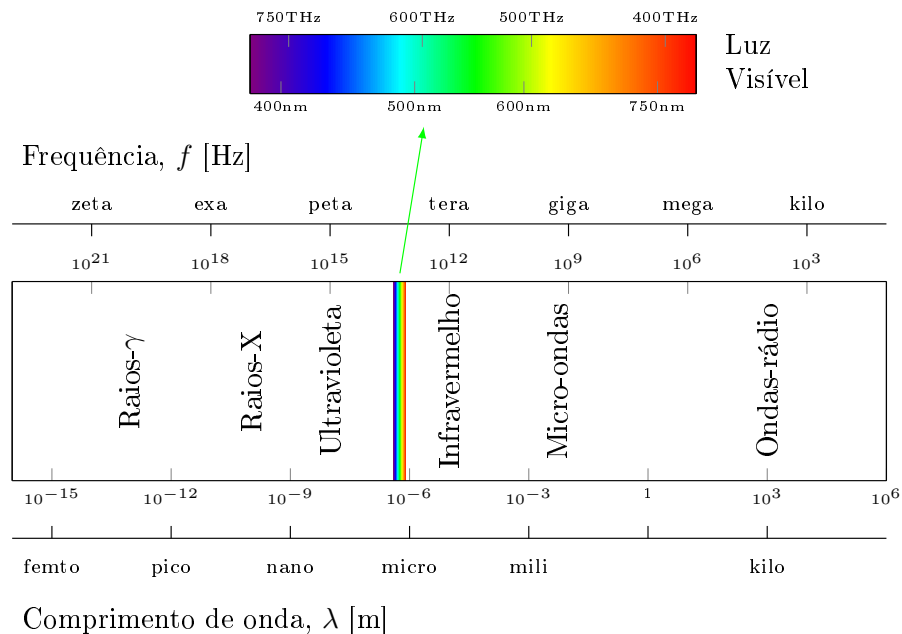
8. A amplitude máxima dos campos eléctrico e magnético estão relacionadas via, $E_0 = cB_0$

9. Não existem limites para a frequência ou o comprimento das ondas EM, contudo a velocidade com que se propagam é fixa e igual a,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

10. As ondas electromagnéticas não necessitam de nenhum meio para se propagarem, podem assim propagar-se no vazio

- Chama-se a atenção que *a corrente de deslocamento tem um papel crucial na propagação das ondas EM*
- Sem ela não é possível o ciclo em que a variação de B gera E e a variação de E gera B
- Influenciado pelos estudos de Fizeau e Foucault que mediram a velocidade da luz, Maxwell lançou a hipótese de que *a luz é uma onda electromagnética*
- Concluiu ainda que *existem outras ondas electromagnéticas com frequências muito diferentes da luz visível*
- Não há nenhum limite para o comprimento de onda ou a frequência das ondas electromagnéticas.
- O espectro conhecido estende-se continuamente desde as ondas extremamente longas de rádio até aos extremamente curtos (e altamente energéticos) raios gama da radiação cósmica.



22.3 Energia em ondas electromagnéticas

- Vimos que a densidade de energia armazenada num campo electromagnético é dada pela equação 18.13,

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (22.26)$$

- Como numa onda EM $E = cB$ e $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, a densidade de energia pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} \\ &= \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \\ &= \epsilon_0 E^2 \end{aligned}$$

- De modo análogo,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\epsilon_0 c^2 B^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{B^2}{\mu_0} \end{aligned}$$

- Ou seja metade da energia é transportada pelo campo eléctrico e a outra metade pelo campo magnético
- A potência por unidade de área (perpendicular à direcção de propagação) transportada por uma onda electromagnética que viaja na direcção do eixo Z, costuma indicar-se pela letra S .
- Num intervalo de tempo dt a onda percorre uma distância cdt
- Uma secção com área A na frente de onda (portanto perpendicular a Z) varre um volume elementar $dV = Acdt$ que contém uma energia,

$$dU = udV = \epsilon_0 E^2 Acdt$$

- Então da definição de S ,

$$S = \frac{dU}{Adt} = \frac{\epsilon_0 E^2 Acdt}{Adt},$$

logo

$$S = \epsilon_0 E^2 c \quad (22.27)$$

usando o facto de que $E = cB$ podemos escrever,

$$S = \epsilon_0 c E c B = \epsilon_0 c^2 E B = \frac{EB}{\mu_0} \quad (22.28)$$

que é a potência instantânea por unidade de área transportada por uma onda EM.

- A potência máxima é dada por,

$$S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}, \quad (22.29)$$

onde E_0 e B_0 são respectivamente as amplitudes máximas de E e B .

- A potência média (chamada a intensidade da onda) é dada por,

$$\bar{S} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} = \frac{c B^2}{2\mu_0} \quad (22.30)$$

- S é o módulo do chamado vetor de Poynting,

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (22.31)$$

que indica o sentido de propagação da energia, logo o sentido de propagação da onda eletromagnética.

- O teorema de Poynting faz a dedução formal de \vec{S} . Repare-se que do fluxo de \vec{S} se obtém a potência eletromagnética nessa superfície.

Apêndice A

Alfabeto Grego

Alfabeto Grego			Equivalência em Português
<i>A</i>	α	Alfa	A
<i>B</i>	β	Beta	B
Γ	γ	Gama	G
Δ	δ	Delta	D
<i>E</i>	ϵ	Épsilon	Ê
<i>Z</i>	ζ	Zeta	DZ
<i>H</i>	η	Eta	Ê
Θ	θ	Teta	TH
<i>I</i>	ι	Iota	I
<i>K</i>	κ	Capa	C
Λ	λ	Lambda	L
<i>M</i>	μ	Miu	M
<i>N</i>	ν	Niu	N
Ξ	ξ	Csi	CS
<i>O</i>	o	Omicron	Ô
Π	π	Pi	P
<i>P</i>	ρ	Ró	R
Σ	σ	Sigma	S
<i>T</i>	τ	Tau	T
Υ	υ	Ypsilon	U
Φ	ϕ	Fi	F
<i>X</i>	χ	Qui	Q
Ψ	ψ	Psi	PS
Ω	ω	Ómega	Ô

Apêndice B

Revisões de álgebra vectorial

B.1 Propriedades gerais dos vectores

Vectorios?! Porquê?

Como exprimir matematicamente o conceito de força?

- Na Natureza uma grandeza escalar só requer um número para se definir completamente, e.g. temperatura, pressão, massa, volume, energia, etc.
- Outras grandezas requerem três números para se definirem completamente, e.g. peso, aceleração, velocidade, deslocamento, campo eléctrico, etc.
- Estas grandezas dizem-se vectoriais.
- *Um vector é um objecto matemático que tem 3 componentes (directão, sentido e módulo) e pode ser usado para representar 3 grandezas.*
- Possivelmente o uso de vectores teve um grande sucesso devido à possibilidade de os representar quer geometricamente quer algebricamente, sendo fácil a passagem duma representação para a outra.
- Um vector A , pode escrever-se algebricamente como, \vec{A} .
- Repare-se que esta *notação é muito compacta e apenas diz que A é um vector.*

B.1.1 Vectores unitários

- Um vector unitário, também chamado de *versor*, é um vector com *módulo igual à unidade*.
- Os versores denominam-se normalmente por letras minúsculas com um chapéu por cima, e.g. \hat{a} ,

$$|\hat{a}| = 1,$$

dividindo qualquer vector pelo seu módulo, obtém-se o seu versor:

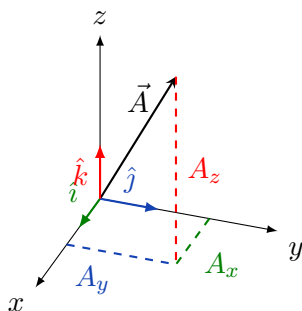
$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|},$$

ou seja qualquer vector fica completamente representado pelo seu módulo multiplicado pelo seu versor,

$$\vec{A} = |\vec{A}|\hat{a} = A\hat{a},$$

B.1.2 O sistema de coordenadas cartesianas

- Os vectores são independentes do sistema de coordenadas usado para os representar.
- Contudo a manipulação algébrica de vectores pode ser muito *simplificada* se o vector for representado num sistema de coordenadas apropriado.
- Para formar um sistema de coordenadas é necessário formar um conjunto *base* de vectores.
- Os vectores que formam essa base são linearmente independentes entre si, e a sua combinação permite escrever qualquer vector.



- O sistema de coordenadas *cartesianas* ou *rectangulares* tem como base os versores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} que são ortogonais entre si, indicando cada um respectivamente a direcção positiva dos eixos x , y e z .
- Nesta base podemos escrever um vector \vec{A} como,

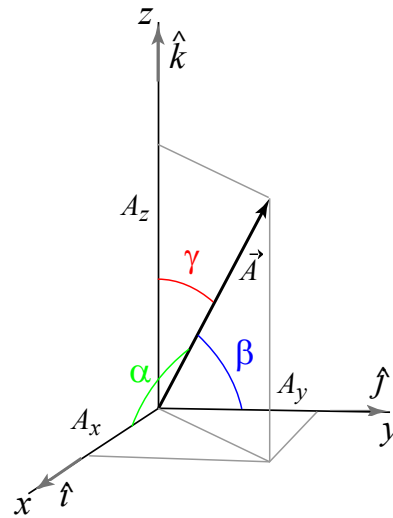
$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k},$$

onde A_x , A_y e A_z , são as componentes do vector A .

B.1.3 Co-senos directores

- Os co-senos directores são os co-senos dos ângulos entre um vector \vec{A} e os 3 eixos de coordenadas,

$$\begin{aligned} l &= \cos \alpha \\ m &= \cos \beta \\ n &= \cos \gamma \end{aligned}$$



- Os co-senos directores podem calcular-se a partir das componentes de \vec{A} ,

$$l = \cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \quad m = \cos \beta = \frac{A_y}{A}, \quad n = \cos \gamma = \frac{A_z}{A}$$

- Os co-senos directores não são independentes e obedecem a,

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

pois,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2} = 1.$$

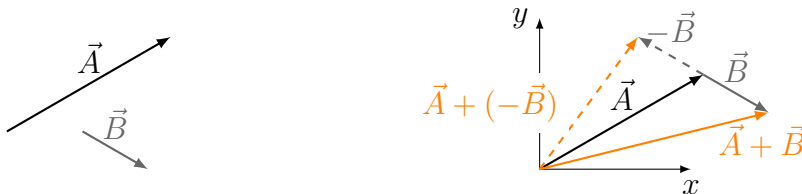
- Se \hat{a} é o vector unitário ao longo da direcção de \vec{A} então,

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x}{A} \hat{i} + \frac{A_y}{A} \hat{j} + \frac{A_z}{A} \hat{k} \\ &= \cos(\alpha) \hat{i} + \cos(\beta) \hat{j} + \cos(\gamma) \hat{k} \\ &= l \hat{i} + m \hat{j} + n \hat{k}. \end{aligned}$$

- Portanto,

$$\vec{A} = A\hat{a} = A \cos(\alpha) \hat{i} + A \cos(\beta) \hat{j} + A \cos(\gamma) \hat{k}.$$

B.1.4 Operações com vectores



- Geometricamente a adição de dois vectores é feita juntando a cauda de um com a cabeça do outro, formando assim 2 lados de um triângulo.
- O terceiro lado do triângulo é a soma dos vectores.
- Algebricamente, em coordenadas cartesianas, o vector soma é dado por,

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= (A_x + B_x) \hat{i} + \\ &\quad (A_y + B_y) \hat{j} + \\ &\quad (A_z + B_z) \hat{k}.\end{aligned}$$

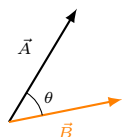
- A adição é comutativa,

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

- Verifica-se ainda que,

$$\begin{aligned}p\vec{A} &= \vec{A}p \\ p(\vec{A} + \vec{B}) &= (p\vec{A} + p\vec{B})\end{aligned}$$

B.1.5 Produto escalar de dois vectores



- O produto escalar, ou interno, de dois vectores é dado por,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo entre eles.

- Como $\cos(90^\circ) = 0$ o produto escalar de dois vectores perpendiculares entre si é zero.

- Em coordenadas cartesianas temos,

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= (A_x B_x) + (A_y B_y) + (A_z B_z),\end{aligned}$$

pois sendo os elementos da base ortogonais têm-se que:

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0\end{aligned}$$

- O produto escalar obedece ainda a,

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \vec{B} \cdot \vec{A} \\ p(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (p\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (p\vec{B}) \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}\end{aligned}$$

- Repare-se ainda que como o ângulo de um vector com ele próprio é zero, o produto escalar pode ser usado para determinar o módulo de um vector,

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2.$$

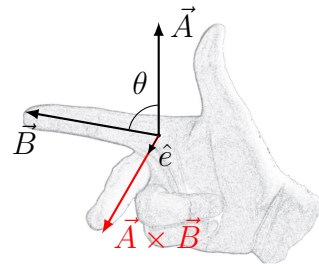
- A projecção dum vector \vec{A} ao longo duma linha de direcção segundo \hat{e} é,

$$\vec{A} \cdot \hat{e} = A \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo que o vector faz com a linha.

B.1.6 Produto vectorial de dois vectores

- O produto vectorial entre \vec{A} e \vec{B} é um vector perpendicular a ambos os vectores que tem um módulo igual á área do paralelogramo definido por \vec{A} e \vec{B} e o sentido o dado pela regra da mão direita (ver figura).



- O produto vectorial é normalmente indicado pelos símbolos \times ou \wedge ,

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin(\theta) \hat{e}, \tag{B.1}$$

- Como $\sin(0) = 0$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

- O produto vectorial não é comutativo,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

- O produto vectorial obedece ainda a,

$$\begin{aligned} p(\vec{A} \times \vec{B}) &= (p\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (p\vec{B}) \\ \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \\ (\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} &= \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C} \end{aligned}$$

- Em coordenadas cartesianas o produto vectorial pode-se calcular através do seguinte determinante,

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + \\ &\quad (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}. \end{aligned}$$

- Ou usando o produto directo entre as componentes tendo em atenção,

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k}, & \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i}, & \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j}, \\ \hat{i} \times \hat{k} &= -\hat{j}, & \hat{k} \times \hat{j} &= -\hat{i}, & \hat{j} \times \hat{i} &= -\hat{k}. \end{aligned}$$

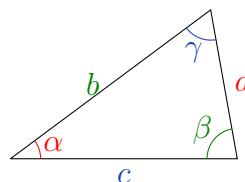
B.1.7 Lei dos co-senos

A lei dos co-senos relaciona os lados dum triângulo genérico com um dos seus ângulos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{B.2})$$

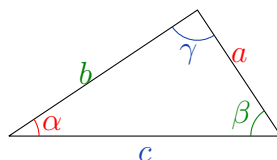
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \quad (\text{B.3})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (\text{B.4})$$



- Se $\gamma = \pi/2$ a lei dos co-senos reduz-se ao teorema de Pitágoras,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



- A lei dos co-senos é útil para calcular o terceiro lado dum triângulo quando dois lados e o ângulo que fazem entre si, são conhecidos
- Ou calcular os ângulos dum triângulo se todos os três lados são conhecidos.

B.1.8 Exemplo: Diâmetro da Lua

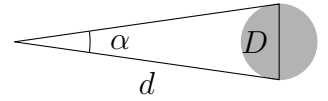
Exercício 65

Pretende-se medir o diâmetro da Lua, D , sabendo a distância da Terra à Lua, $d = 384 \times 10^6$ m e a abertura angular $\alpha = 9.15 \times 10^{-3}$ radianos.

- Use a lei dos cosenos para calcular o diâmetro da Lua.
- Como alternativa use a definição de radiano e compare os resultados.

(a) Podemos usar a lei dos cosenos na forma da Eq.B.2. Usando os dados do problema temos,

$$\begin{aligned} D^2 &= d^2 + d^2 - 2d^2 \cos \alpha \\ &= 2d^2 (1 - \cos \alpha) \\ D &= d\sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

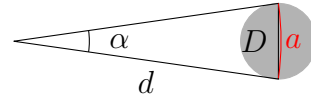


(b) Usando a definição de radiano, um ângulo plano α subtendido por um arco de comprimento a e raio d é,

$$\alpha = \frac{a}{d}. \quad (\text{B.6})$$

Como a abertura angular da Lua é muito pequena, o diâmetro da Lua é aproximadamente igual ao arco de raio igual à distância da Terra à Lua. Assim a expressão anterior fica,

$$D = d\alpha. \quad (\text{B.7})$$



- As equações B.5 e B.7 são diferentes, contudo se α é muito pequeno a Eq.B.5 reduz-se à Eq.B.7.
- Para ver que assim é, expande-se em série de Taylor o $\cos \alpha$ em torno de $\alpha = 0$ obtendo,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos 0 + \alpha \left. \frac{d \cos \alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2} \left. \frac{d^2 \cos \alpha}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} + \dots \\ &= 1 - \alpha \sin \alpha|_{\alpha=0} - \frac{\alpha^2}{2} \cos \alpha|_{\alpha=0} + \dots \\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

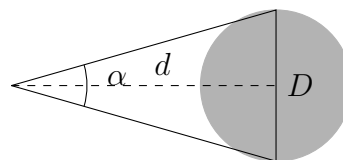
- Substituindo este resultado na Eq.B.5 temos,

$$\begin{aligned}
 D &= d\sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \\
 &= d\sqrt{2\left(1 - 1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)} \\
 &= d\alpha,
 \end{aligned}
 \tag{B.9}$$

que é precisamente a Eq.B.7

- Se α não for muito pequeno então a distância entre o observador e o objecto é o comprimento da perpendicular ao objecto até ao observador.
- Nesse caso a forma mais correcta de calcular o diâmetro do objecto é,

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{2} &= \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
 D &= 2d \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)
 \end{aligned}$$

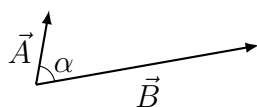


- Como não podia deixar de ser, a equação anterior também se reduz à Eq.B.7 quando α é muito pequeno, pois nesse caso $\tan(\alpha/2) \approx \alpha/2$.
- Assim o diâmetro da Lua são 3512 km ou usando só 3 algarismos significativos 3.51×10^6 m.

B.1.9 Exemplo: soma de vetores

Exercício 66

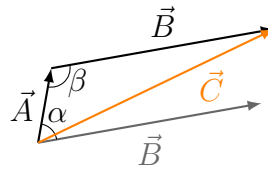
Dois vectores \vec{A} e \vec{B} são desenhados a partir de um mesmo ponto e $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.



Mostre que quando:

- $C^2 = A^2 + B^2$, o ângulo entre os vectores \vec{A} e \vec{B} é de 90° .
- $C^2 < A^2 + B^2$, o ângulo entre os vectores \vec{A} e \vec{B} é maior do que 90° .
- $C^2 > A^2 + B^2$, o ângulo entre os vectores \vec{A} e \vec{B} está compreendido entre 0° e 90° .

A soma geométrica de $\vec{A} + \vec{B}$ é



A lei dos cosenos diz que,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(\beta)$$

mas $\alpha + \beta = 180^\circ$ logo,

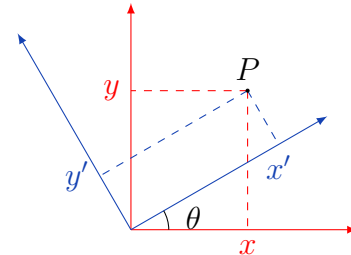
$$= A^2 + B^2 + 2AB \cos(\alpha)$$

Assim se (a) $\alpha = 90^\circ \Rightarrow C^2 = A^2 + B^2$ (b) $\alpha > 90^\circ \Rightarrow C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(\alpha)$ (c) $\alpha < 90^\circ \Rightarrow C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\alpha)$

B.1.10 Rotação de coordenadas

- Se um sistema de coordenadas cartesianas bidimensional sofrer uma rotação de um ângulo θ , no sentido anti-horário, em torno da origem, as novas coordenadas (x',y') relacionam-se com as antigas (x,y) por,

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$



- Se a rotação for no sentido horário, as novas coordenadas (x',y') relacionam-se com as antigas (x,y) por,

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta, \end{aligned}$$

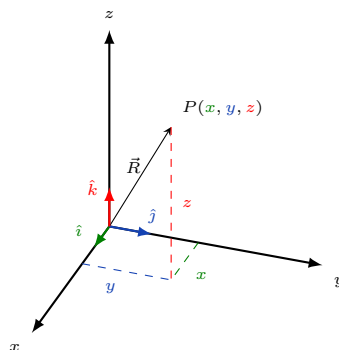
note-se que este resultado pode ser deduzido do anterior, simplesmente fazendo $\theta = -\theta$.

Apêndice C

Sistemas de coordenadas

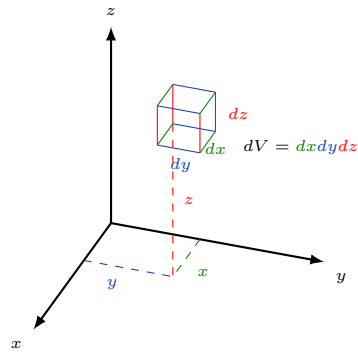
- Porque não usamos sempre o mesmo sistema de coordenadas?
- Em princípio podemos resolver qualquer problema em coordenadas cartesianas
- Contudo a resolução de muitos problemas seria formidavelmente complexa
- Tirando partido de simetrias os cálculos simplificam-se substancialmente

C.1 Coordenadas Cartesianas (Revisão)



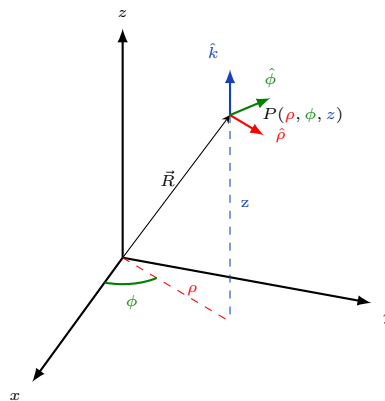
- O ponto P , tem coordenadas $P(x, y, z)$
- O vector posição do ponto P é $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Elemento de volume em coordenadas cartesianas

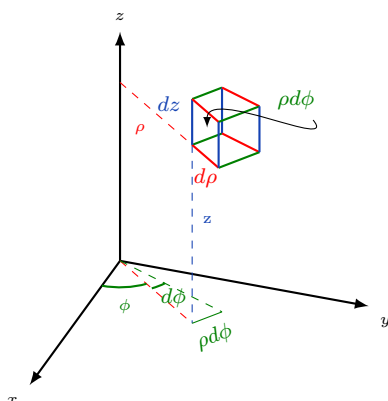


- Elemento de volume: $dV = dx dy dz$
- Elemento de comprimento: $d\vec{R} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$
- Elementos de superfície: $dS_{xy} = dx dy$, $dS_{xz} = dx dz$, $dS_{yz} = dy dz$

C.2 Coordenadas Cilíndricas

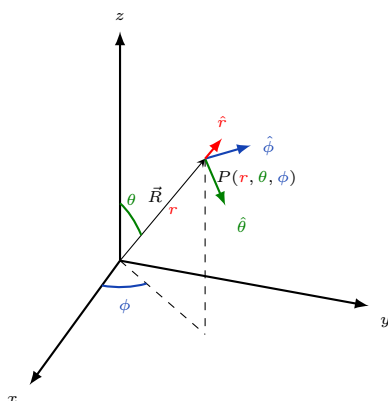


- O ponto P, tem coordenadas $P(\rho, \phi, z)$
- O vector posição do ponto P é $\vec{R} = \rho \hat{\rho} + z \hat{k}$
- O valor de ϕ está incluído na direcção de $\hat{\rho}$

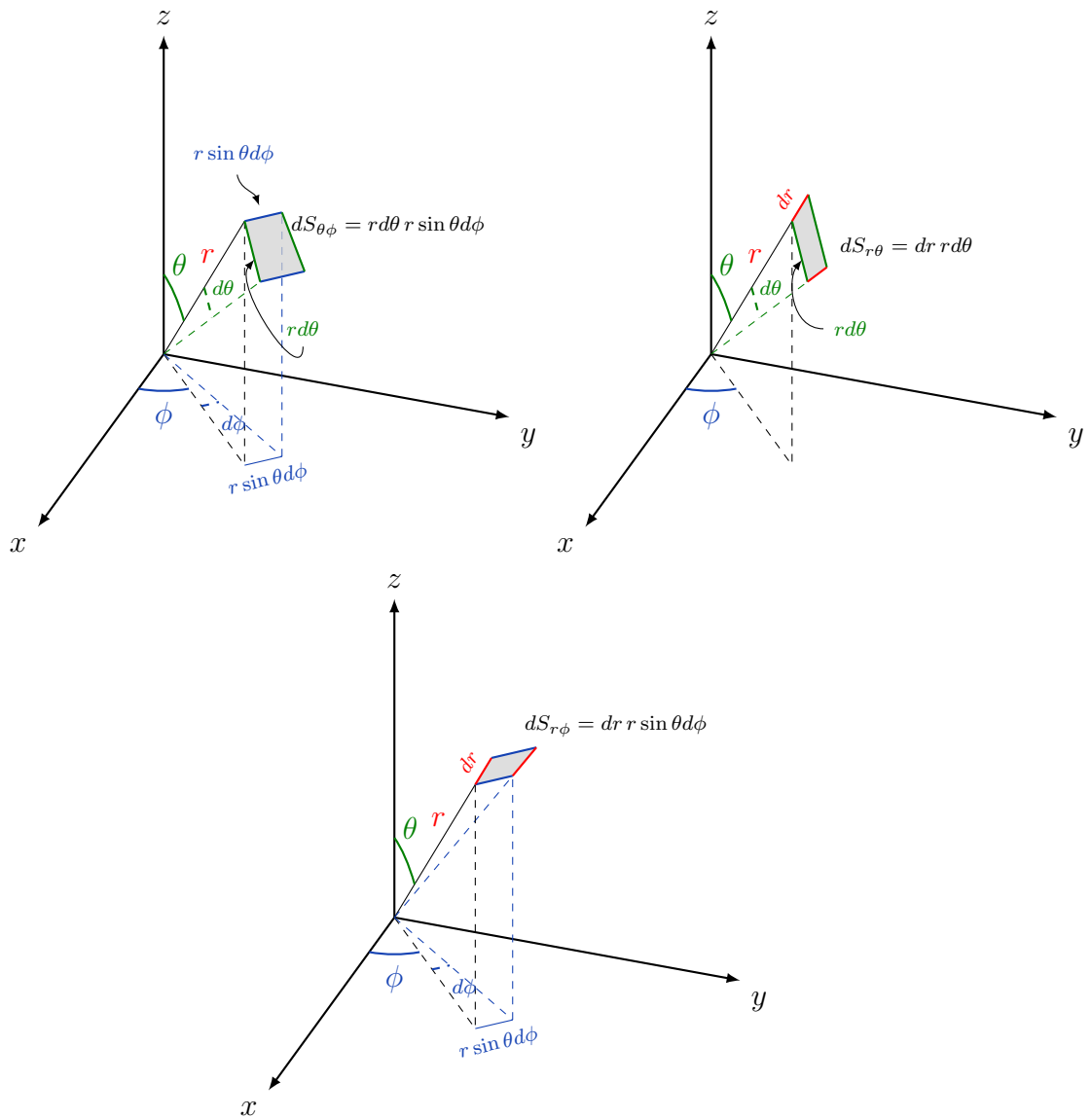


- O elemento de volume é $dV = \rho d\rho d\phi dz$
- O elemento de comprimento é $d\vec{R} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{k}$
- Elementos de superfície: $dS_{\rho z} = dzd\rho$, $dS_{\rho\phi} = d\rho\rho d\phi$, $dS_{z\phi} = dz\rho d\phi$

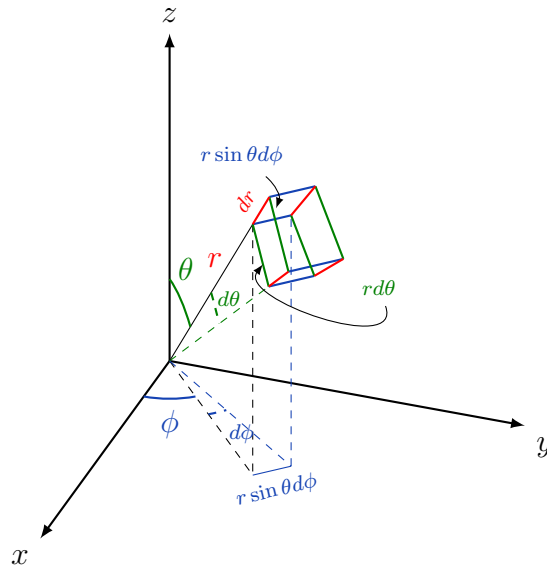
C.3 Coordenadas Esféricas



- O ponto P, tem coordenadas $P(r, \theta, \phi)$
- O vector posição do ponto P é $\vec{R} = r\hat{r}$
- O valor de θ e ϕ está incluído na orientação de \hat{r}



- Elementos de superficie: $dS_{\theta\phi} = rd\theta r \sin\theta d\phi$, $dS_{r\theta} = dr rd\theta$ e $dS_{r\phi} = dr r \sin\theta d\phi$



- O elemento de volume é $dV = dr r \sin \theta d\phi r d\theta = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$
- O elemento de comprimento é $d\vec{R} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r \sin \theta d\phi\hat{\phi}$

C.4 Relação entre Coordenadas Cartesianas, Cilíndricas e Esféricas

		Para		
		Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
De	Cartesianas	—	$x = \rho \cos \phi$ $y = \rho \sin \phi$ $z = z$	$x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$
	Cilíndricas	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = z$	—	$\rho = r \sin \theta$ $\phi = \phi$ $z = r \cos \theta$
	Esféricas	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$ $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)$ $\phi = \phi$	—

C.5 Conversão entre versores de coordenadas Cartesianas, Cilíndricas e Esféricas

		Para		
		Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
De	Cartesianas	—	$\hat{i} = \cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}$ $\hat{j} = \sin \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi}$ $\hat{k} = \hat{k}$	$\hat{i} = \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi}$ $\hat{j} = \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$ $\hat{k} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$
	Cilíndricas	$\hat{\rho} = \frac{x \hat{i} + y \hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\hat{\phi} = \frac{-y \hat{i} + x \hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\hat{k} = \hat{k}$	—	$\hat{\rho} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}$ $\hat{\phi} = \hat{\phi}$ $\hat{k} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$
	Esféricas	$\hat{r} = \frac{x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $\hat{\theta} = \frac{(x \hat{i} + y \hat{j}) z - (x^2 + y^2) \hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}}$ $\hat{\phi} = \frac{-y \hat{i} + x \hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\hat{r} = \frac{\rho \hat{\rho} + z \hat{k}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ $\hat{\theta} = \frac{z \hat{\rho} - \rho \hat{k}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ $\hat{\phi} = \hat{\phi}$	—

Apêndice D

Equação de Neumann para a indutância mútua

- Usando o potencial vector podemos escrever,

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= \oint_2 \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \\ &= \oint_2 \left(\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{l}_1}{r} \right) \cdot d\vec{l}_2\end{aligned}$$

onde r é a distância de $d\vec{l}_1$ a $d\vec{l}_2$

$$\begin{aligned}&= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} \\ &= M_{21} I_1\end{aligned}$$

- A indutância mútua é então (*equação de Neumann*),

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$$

Apêndice E

Comparação das equações válidas apenas para campos estáticos com as equações gerais

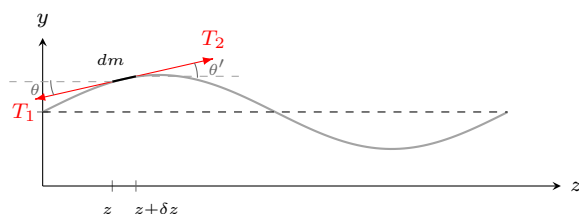
Válido para Campos Estáticos	Sempre Válido
$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$ <p>Lei de Coulomb (Pag. 8)</p>	$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ <p>Força de Lorentz (Pag. 163)</p> $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ <p>Lei de Gauss para \vec{E} (Pag. 59)</p>
$\nabla \times \vec{E} = 0$ <p>(Pag. 95)</p> $\vec{E} = -\nabla V$ <p>(Pag. 69)</p>	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ <p>Lei de Faraday-Lenz (Pag. 184)</p> $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ <p>(Pag. 209)</p>
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ <p>Lei de Ampère (Pag. 172)</p>	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ <p>Lei de Gauss para \vec{B} (Pag. 171)</p> $\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)$ <p>Lei de Ampère-Maxwell (Pag. 238)</p> $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ <p>(Pag. 201)</p>

Apêndice F

Equação de onda

- Pode-se criar uma onda numa corda esticada sob tensão T que está em equilíbrio ao longo do eixo z , aplicando-lhe uma força transversal.
- Vamos desprezar o peso da corda em comparação com a tensão e considerar que μ é a densidade linear de massa.
- Num bocado da corda muito pequeno com massa dm , localizado entre z e $z + \delta z$ a força total na horizontal é zero e para valores pequenos de θ e θ' ,

$$\begin{aligned}T_{1_z} &= T_1 \cos \theta \approx T \\T_{2_z} &= T_2 \cos \theta' \approx T\end{aligned}\tag{F.1}$$



- A força transversal resultante em dm é,

$$dF = T_2 \sin \theta' - T_1 \sin \theta$$

dividindo por T e usando a Eq.F.1,

$$\begin{aligned}\frac{dF}{T} &= \frac{T_2 \sin \theta'}{T_2 \cos \theta'} - \frac{T_1 \sin \theta}{T_1 \cos \theta} \\ &= \tan \theta' - \tan \theta\end{aligned}$$

como $\tan \theta$ é a derivada de y em z também se pode escrever,

$$= \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z+\delta z} - \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_z.$$

- Multiplicando e dividindo o lado direito por dz a expressão não se altera,

$$\frac{dF}{T} = \frac{\frac{\partial y}{\partial z}|_{z+\delta z} - \frac{\partial y}{\partial z}|_z}{dz} dz$$

$$dF = T \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz$$

- Da 2ª lei de Newton a força dF provoca a aceleração da massa elementar $dm = \mu dz$,

$$dF = dma$$

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz = \mu dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- A razão T/μ tem as dimensões do quadrado de uma velocidade,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- esta é a equação duma onda que se propaga na corda com velocidade v .
- Funções do tipo $y(z, t) = g(z - vt)$ são solução da equação de onda como se pode ver fazendo $h = z - vt$,

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial h} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = -v \frac{\partial g}{\partial h}$$

derivando novamente em ordem a z ,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial h^2} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial h^2}$$

e para o tempo t ,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right) = -v \frac{\partial^2 g}{\partial h^2} \frac{\partial h}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial h^2}$$

- Obtendo-se então a equação de onda,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial h^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

-
- Qualquer função diferenciável do tipo $g(z - vt)$ é solução da equação de onda como por exemplo a função sinusoidal,

$$y(z, t) = y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z - vt)\right).$$

- λ é o comprimento de onda
- y_0 é a amplitude máxima da onda
- $f = \frac{v}{\lambda}$ é a frequência da onda, i.e o número de oscilações por unidade de tempo

