

Física

transcrição das transparências
usadas na aula teórica

F. Salzedas



20 de Maio de 2020

Atenção: As transparências aqui transcritas servem de apoio à aula teórica. Como tal e por serem apenas um resumo, a sua consulta não dispensa a consulta da bibliografia principal da disciplina.

A versão mais recente está disponível em: <http://paginas.fe.up.pt/~fsal/Fisica/mieecFisica.htm>

Conteúdo

1	Apresentação e breve introdução à disciplina	1
1.1	Mecânica clássica	1
1.2	Unidades	2
1.3	Sistema Internacional de unidades	3
1.4	Análise dimensional nas equações	5
2	Revisões de álgebra vectorial	7
2.1	Propriedades gerais dos vectores	7
2.1.1	Vectores unitários	7
2.1.2	O sistema de coordenadas cartesianas	8
2.1.3	Co-senos directores	9
2.1.4	Operações com vectores	10
2.1.5	Produto escalar de dois vectores	10
2.1.6	Produto vectorial de dois vectores	11
2.1.7	Lei dos co-senos	12
2.1.8	Exemplo: Diâmetro da Lua	13
2.1.9	Exemplo: soma de vetores	14
2.1.10	Rotação de coordenadas	15
3	Quantidades cinemáticas	17
3.1	Quantidades cinemáticas	17
3.1.1	Vector posição de uma partícula	17
3.1.2	Vector deslocamento	18
3.1.3	Vector velocidade	18
4	Conceitos cinemáticos (cont.) e movimento curvilíneo	21
4.0.1	Vector aceleração	21
4.1	Movimento relativo	22
4.1.1	Exemplo:	23
5	Movimento curvilíneo	25
5.1	Movimento curvilíneo	25
5.1.1	O versor tangencial da velocidade	25
5.1.2	As componentes tangencial e normal da aceleração	26
5.1.3	Exemplo: a_n e a_t numa roldana	29

5.2	Movimento circular	31
5.2.1	Velocidade angular	31
5.2.2	Conceito de período e frequência no movimento circular uniforme	32
5.2.3	Aceleração angular	33
5.2.4	Exemplo: Orbita da ISS	34
5.2.5	Exemplo: v e a à superfície da Terra	35
6	Leis de Newton	37
6.1	As 3 leis de Newton	37
6.1.1	1ª lei e referenciais de inércia	37
6.1.2	2ª lei e conceito de massa	39
6.1.3	3ª lei, forças ocorrem sempre aos pares	40
6.2	As forças fundamentais	42
6.3	Forças de interacção à distância	42
6.3.1	O peso de um corpo	43
6.3.2	Movimento de projecteis	45
7	Forças de contacto e forças não inerciais	49
7.1	Forças de contacto	49
7.1.1	A força normal	49
7.1.2	A força de atrito	50
7.1.3	A força elástica	50
7.1.4	A força de tensão em fios e cabos	50
8	Atrito e Forças Fictícias	55
8.1	Atrito estático, cinético e de rolamento	55
8.1.1	Atrito estático	55
8.1.2	Atrito cinético	56
8.1.3	Atrito de rolamento	56
8.1.4	Medição experimental da força de atrito	56
8.2	Forças fictícias	58
8.3	Dinâmica do movimento circular	60
8.4	Condições para o equilíbrio estático duma partícula	64
9	Força elástica e movimento harmónico simples	65
9.1	Força elástica e movimento harmónico simples	65
10	Trabalho e energia	73
10.1	Trabalho de uma força	73
10.2	Potência	75
10.2.1	Exemplo: Potência do motor de um elevador	75
10.3	Energia cinética	76
10.3.1	Exemplo: Trabalho da força elástica	77
10.3.2	Trabalho de uma força constante em módulo, direcção e sentido	78

10.4	A energia potencial e as forças conservativas	79
10.4.1	Forças conservativas, independência da trajectória	80
10.5	Energia potencial gravítica e elástica	81
10.5.1	Obtenção da força conservativa a partir da energia po- tencial	82
10.6	Conservação da energia de uma partícula	83
11	Trabalho e energia, continuação	87
11.1	Exemplos de aplicação	87
11.1.1	Exemplo: altura mínima para descrever um <i>looping</i>	87
11.1.2	Exemplo: Voo dum projétil	89
11.1.3	Exemplo: Subida dum rampa	89
11.1.4	Exemplo: Força central	90
11.1.5	Exemplo: Conversão de energia pot. gravítica em elástica	92
11.2	Equilíbrio estável, instável e neutro	94
11.3	Trabalho e conservação da energia na presença de forças não conservativas	95
11.3.1	Exemplo: Trabalho da força de atrito	95
12	Momento angular de uma partícula	99
12.1	Definição de vetor momento angular	99
12.2	O momento da força ou torque	100
12.3	Relação entre momento angular e torque	101
13	Sistemas de Partículas	103
13.1	Mecânica de muitas partículas	103
13.2	O centro de forças paralelas	104
13.3	Centro de massa de uma distribuição contínua de massa	106
13.3.1	Exemplo: CM de uma distribuição discreta de massas	108
13.3.2	Exemplo: Centro de massa de um semi-aro homogéneo	109
13.3.3	Exemplo: Centro de massa de uma placa	110
14	As leis de Newton e o movimento do centro de massa	113
14.1	O movimento do centro de massa	113
14.2	As leis de Newton e o movimento do centro de massa	114
14.3	Lei da conservação do momento linear	114
14.4	Trabalho e energia cinética de um sistema de partículas	115
15	Colisões	119
15.1	Impulso de uma força	119
15.1.1	Exemplo: Força durante uma colisão automóvel	119
15.2	Colisões	122
15.2.1	Colisão elástica frontal	124
15.2.2	Exemplo: Catapulta gravitacional	126
15.2.3	Exemplo: Explosão de uma granada	127
15.2.4	Exemplo: Pêndulo balístico	128

16	Momento angular de um sistema de partículas	129
16.1	Momento angular de um sistema de partículas	129
16.2	Conservação do momento angular de um sistema de partículas	130
16.2.1	Exemplo 1: momento angular interno	131
16.2.2	Exemplo 2: momento angular no referencial CM e no laboratório	132
16.2.3	Exemplo 3: relação entre o torque e o momento angular interno no ref. CM	133
17	Corpos com massa variável	135
17.1	Movimento de corpos com massa variável	135
17.1.1	Movimento de um foguete	136
18	Dinâmica dum corpo rígido	141
18.1	Momento angular e velocidade angular num corpo rígido . . .	141
18.1.1	Exemplo: Momento e velocidade, angulares	143
18.2	Cálculo do momento de inércia	147
18.2.1	Exemplo: Momentos de inércia de uma haste cilíndrica	149
18.2.2	Exemplo: Momentos de inércia de um disco fino	150
19	Translação e rotação do corpo rígido	153
19.1	Translação e rotação	153
19.2	Equação do movimento para a rotação dum corpo rígido . . .	154
19.2.1	Condição de não deslizamento	154
19.2.2	Rolar sem escorregar	155
19.2.3	Exemplo: rotação pura 1	155
19.2.4	Exemplo: rotação pura 2	156
19.2.5	Exemplo: rotação e translação 1	157
19.2.6	Exemplo: rotação e translação 2	158
19.3	Conservação do momento angular	160
19.3.1	Giroscópio	160
19.3.2	Exemplo: conservação do momento angular	162
19.4	O binário	163
19.4.1	Exemplo: $\vec{\tau}_r$ e \vec{F}_r	164
19.5	Condições para o equilíbrio estático dum corpo rígido.	165
20	Trabalho e energia no corpo rígido	169
20.1	Energia cinética de rotação e de translação, sem deslizamento	169
20.1.1	Exemplo: rolamento de 3 corpos	171
20.2	Trabalho e potência na rotação	172
20.3	Trabalho e energia cinética na rotação	173
20.3.1	Exemplo: Conversão de energia cinética de translação em rotação	174
20.3.2	Exemplo: Potência de um motor	176
20.3.3	Exemplo: volante de inércia	177

21	Introdução ao estudo da Termodinâmica	181
21.1	Introdução ao estudo da Termodinâmica	181
21.2	Equilíbrio térmico e temperatura	181
21.3	Lei zero da termodinâmica	183
21.3.1	Escalas de temperatura	183
21.4	Termómetros de gás e escala absoluta de temperatura	184
21.5	Lei dos gases ideais	185
21.5.1	Definição de mol	186
21.5.2	Exemplo: volume dum mol dum gás ideal	187
21.5.3	Exemplo: compressão dum gás ideal	188
21.5.4	Exemplo: massa de 1 átomo de Hidrogénio	188
22	Física cinética e estatística	189
22.1	Dedução heurística da equação dum gás ideal	189
22.1.1	Colisão de s Com a Parede da Caixa	191
22.1.2	Pressão de s na Parede da Caixa	192
22.2	Conceito microscópico de pressão e temperatura	193
22.3	Graus de Liberdade de uma molécula	194
22.4	O teorema da equipartição	194
22.5	Equilíbrio Termodinâmico	194
22.5.1	Exemplo: massa de 1L de ar	195
22.5.2	Exemplo: Temperatura de um balão de ar quente	196
23	Alguns conceitos de física estatística	199
23.1	Distribuição do Módulo das Velocidades Moleculares	199
23.1.1	Exemplo: fracção de partículas em $[\frac{\bar{v}}{2}, \frac{3\bar{v}}{2}]$	200
23.2	Valor médio dum grandeza física	201
23.3	Três velocidades características de $P(v)$	202
23.3.1	A energia cinética média	205
23.3.2	Fluxo de colisões de moléculas	205
23.3.3	O livre percurso médio dum molécula de gás	205
23.4	Frequência média de colisão	206
24	Primeira lei da termodinâmica	209
24.1	Definição de calor	209
24.1.1	A caloria	210
24.1.2	A experiência de Joule	210
24.2	Primeira lei da termodinâmica	211
24.2.1	Energia interna	212
24.2.2	Diferenciais inexactos	212
24.3	Cálculo do trabalho num gás	212
24.3.1	Diagrama PV	214
24.3.2	Exemplo: ciclo termodinâmico	215

25	Capacidade calorífica e segunda lei da termodinâmica	219
25.1	Capacidade calorífica	219
25.1.1	Capacidade calorífica dos gases	219
25.1.2	Capacidade calorífica dum gás a volume constante . . .	220
25.1.3	Capacidade calorífica dum gás a pressão constante . . .	221
25.2	Processos adiabáticos	222
26	Segunda lei da termodinâmica	225
26.1	A 2ª lei da termodinâmica, enunciados de Kelvin e Clausius .	225
26.2	Máquinas térmicas	226
26.2.1	O ciclo de Otto	226
26.3	Refrigeradores	227
26.3.1	Exemplo: rendimento do ciclo de Otto	227
26.4	Máquina de Carnot	230
26.5	Escala de temperatura absoluta	232
27	Entropia	235
27.1	Introdução ao conceito de entropia	235
27.1.1	Varição infinitesimal de entropia	235
27.1.2	Varição finita de entropia	236
27.2	Entropia quando $T = 0$ ou terceira lei da termodinâmica . . .	236
27.3	Entropia num processo reversível	236
27.3.1	Entropia de um gás ideal num processo reversível . . .	237
27.4	Entropia num processo irreversível	239
27.4.1	Entropia numa expansão livre	239
27.5	A degradação de energia	241
28	Transferência de calor	243
28.1	Transferência de calor por convecção, radiação e condução . .	243
28.2	Lei de Fourier	243
28.3	Associações em série e em paralelo na condução de calor . . .	244
28.3.1	Exemplo: corrente térmica	245
28.3.2	Exemplo: corrente térmica em paralelo	246
28.4	Potência radiada - lei de Stefan	246
28.4.1	Exemplo: potência radiada por um ser humano	247
A	Constantes Físicas e Tabela Periódica	i
B	Dados úteis	iii
C	Momento de inércia de uma esfera	v
C.1	Cálculo do momento de inércia de uma esfera	v
D	Dedução de $P(v)$ feita por Maxwell	ix
D.1	Dedução de $P(v)$ feita por Maxwell	ix

E	Integrais Úteis	xv
E.1	Integrais Gaussianos	xv
E.2	Integrais Pseudo Gaussianos	xvi

Aula 1

Apresentação e breve introdução à disciplina

1.1 Mecânica clássica

O que é a mecânica clássica?

- O objetivo principal da mecânica é o estudo do *movimento dos corpos*.
- A teoria matemática base foi publicada em 1687 (à \approx 300 anos) por Newton.
- O adjetivo *clássica* significa que é baseada nas leis de Newton.
- Todos os outros ramos da física assentam na mecânica.

Outras formulações da mecânica clássica

- No Séc. 18 Lagrange reformulou a mecânica clássica.
- No Séc. 19 uma nova reformulação foi introduzida por Hamilton.
- Estas reformulações são conhecidas por *mecânica lagrangeana e mecânica hamiltoniana*.
- Ambas são mais abstractas do que a mecânica newtoniana, que nós vamos seguir.
- Contudo deram um contributo importante no desenvolvimento do formalismo da mecânica quântica.

Validade da mecânica clássica

- A mecânica clássica é uma teoria *incompleta*.
 - não é válida para corpos com velocidades perto da velocidade da luz, sendo substituída pela teoria da *relatividade restrita* de Einstein.
 - não é válida para dimensões menores ou iguais à escala atômica, sendo substituída pela *mecânica quântica*
 - não é válida para dimensões à escala cósmica, sendo substituída pela *relatividade geral*

1.2 Unidades

Medição

- A medição é um dos pilares de qualquer ciência exacta.
- Três quantidades fundamentais, em mecânica, são medidas
 - *Intervalos no tempo*: duração dum evento ou duma variação.
 - *Intervalos no espaço*: distâncias, comprimentos.
 - *Massa dos corpos*: caracteriza a inércia desses corpos.
- Todas as outras medições em mecânica podem ser reduzidas a combinações de medidas destas 3 quantidades.

Unidades

- A *medida* de qualquer quantidade envolve a *comparação* com algum valor unitário, definido com precisão, dessa mesma quantidade.
- E.g. para medir a distância entre dois pontos precisamos duma unidade padrão como o metro (m).
- *Medir* uma distância é o mesmo que *comparar* a distância com a unidade, determinando quantas vezes a unidade cabe na distância.
- E.g. se a distância for de 1.5 metros quer dizer que entre esses dois pontos cabe 1 metro mais meio metro.
- Se esta distância fosse medida em centímetros, então caberiam entre os mesmos dois pontos 150 centímetros.
- *É portanto essencial que quando se indica o valor duma medida se indique também a unidade usada.*
- Dizer que a distância entre dois pontos é 238 não nos diz nada sobre a distância, pois faltam as unidades em que foi medida (i.e. comparada).

1.3 Sistema Internacional de unidades

- Um pequeno número de *unidades fundamentais* é suficiente para exprimir todas as quantidades físicas.
- Quantidades como, velocidade, força, quantidade de movimento, trabalho, potência podem ser expressas em termos de três medidas fundamentais: *comprimento, tempo e massa*.
- A escolha de unidades padrão para estas quantidades fundamentais determina o *sistema de unidades*.
- O sistema universal na comunidade científica é o Sistema Internacional (SI) criado em 1960 na 11^a Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM) e adoptado em Portugal pelo Decreto-Lei n.º 427/83, de 7 de Dezembro de 1983.
- As unidades SI padrão são:
metro para medir *comprimento*
segundo para medir *tempo*
kilograma para medir *massa*
- Para consultar todas as definições das unidades SI ver:
<http://www1.bipm.org/en/si/>.
- A definição moderna do *metro* (*m*) é a *distância, no vazio, que a luz percorre em 1/(299 729 458) segundos*. Esta definição estabelece que a velocidade da luz no vazio é exactamente 299 729 458 m/s.
- A definição moderna de *segundo* (*s*) é a *duração de 9 192 631 770 períodos da radiação emitida por átomos de Césio 133 quando excitados entre dois níveis de energia específicos*.
- Em http://www.bipm.org/en/scientific/tai/time_server.html é mostrado o Tempo Universal Coordenado (do inglês UTC), também conhecido como tempo civil que é o fuso horário de referência a partir do qual se calculam todas as outras zonas horárias do mundo. O UTC baseado num padrão atómico é o sucessor do Tempo Médio de Greenwich (GMT) baseado num padrão celeste.
- Uma importante vantagem destas definições é que um laboratório bem equipado pode *fazer* os seus próprios, metro e segundo.
- O quilograma era a única unidade base do SI que era definida em termos de um artefacto material, ao contrário das outras unidades base definidas em termos de constantes físicas.

- O *kilograma (kg)* era igual à massa do *protótipo internacional*, aprovado em 1889 que consiste num cilindro com diâmetro e altura $\approx 39\text{mm}$ feito de uma liga de 90% de Platina e 10% de Irídio (ver Fig.).
- Com o passar dos anos a inevitável acumulação de impurezas introduz alterações ao valor da massa.
- Em novembro de 2018 o kg foi redefinido em termos das constantes de Planck, h e do número de Avogadro, N_A .
- O valor destas constantes foi fixado (após medido com grande precisão) permitindo determinar a massa.



$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

- Uma excelente apresentação destes procedimentos é dada em <https://www.nist.gov/si-redefinition/kilogram>
- Estas definições entraram em vigor a 20 de maio de 2019
- No estudo da termodinâmica usaremos a unidade de temperatura termodinâmica, o kelvin.
- Desde 2018 também o kelvin foi redefinido em função da constante de Boltzmann,

$$k_B = 1.380\,649 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

- Antes o kelvin (K), era definido como a fracção $1/273.16$ da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água.
- O ponto triplo duma substância é a temperatura e pressão às quais as 3 fases dessa substância (gás, líquido e sólido) coexistem em equilíbrio termodinâmico.
- Ponto triplo da água:
 - temperatura = 273.16 K (0.01 °C) e
 - pressão = 611.73 N/m² (cerca de 6 mili atmosferas).
- As três restantes unidades base do SI são a unidade de:
 - corrente eléctrica, o *ampére (A)*

- quantidade de uma substância, a *mole* (*mol*)
- intensidade luminosa, o *candela* (*cd*)
- No total, são 7 as *unidades base do SI*: m, s, kg, K, A, mol e cd.
- Desde de 2019 a definição de todas estas unidades é baseada em constantes da Natureza e não em padrões

1.4 Análise dimensional nas equações

- *Uma equação declara matematicamente que duas expressões são iguais.*

$$x = vt$$

- Essa igualdade também se aplica às unidades de cada expressão.
- Verificar que as unidades do lado direito de uma equação são as mesmas no lado esquerdo, é uma forma de testar a consistência da equação.
- Por exemplo suponhamos que para tentar calcular o tempo que a Lua demora a percorrer o seu diâmetro chegava à seguinte equação,

$$t = \frac{v_L}{D}. \tag{1.1}$$

- Analisando as dimensões de cada lado da equação rapidamente se conclui que *a equação anterior está errada* pois,

$$[\text{tempo}] = \frac{\frac{[\text{comprimento}]}{[\text{tempo}]}}{[\text{comprimento}]} = \frac{1}{[\text{tempo}]}, \tag{1.2}$$

- Portanto *uma equação que não passe no teste da análise dimensional está errada.*

Aula 2

Revisões de álgebra vectorial

2.1 Propriedades gerais dos vectores

Vectores?! Porquê?

Como exprimir matematicamente o conceito de força?

- Na Natureza uma grandeza escalar só requer um número para se definir completamente, e.g. temperatura, pressão, massa, volume, energia, etc.
- Outras grandezas requerem três números para se definirem completamente, e.g. peso, aceleração, velocidade, deslocamento, campo eléctrico, etc.
- Estas grandezas dizem-se vectoriais.
- *Um vector é um objecto matemático que tem 3 componentes (directão, sentido e módulo) e pode ser usado para representar 3 grandezas.*
- Possivelmente o uso de vectores teve um grande sucesso devido à possibilidade de os representar quer geometricamente quer algebricamente, sendo fácil a passagem duma representação para a outra.
- Um vector A , pode escrever-se algebricamente como, \vec{A} .
- Repare-se que esta *notação é muito compacta e apenas diz que A é um vector.*

2.1.1 Vectores unitários

- Um vector unitário, também chamado de *versor*, é um vector com *módulo igual à unidade.*
- Os versores denominam-se normalmente por letras minúsculas com um chapéu por cima, e.g. \hat{a} ,

$$|\hat{a}| = 1,$$

dividindo qualquer vector pelo seu módulo, obtém-se o seu versor:

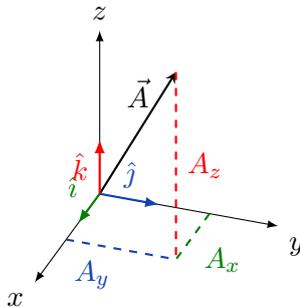
$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|},$$

ou seja qualquer vector fica completamente representado pelo seu módulo multiplicado pelo seu versor,

$$\vec{A} = |\vec{A}|\hat{a} = A\hat{a},$$

2.1.2 O sistema de coordenadas cartesianas

- Os vectores são independentes do sistema de coordenadas usado para os representar.
- Contudo a manipulação algébrica de vectores pode ser muito *simplificada* se o vector for representado num sistema de coordenadas apropriado.
- Para formar um sistema de coordenadas é necessário formar um conjunto *base* de vectores.
- Os vectores que formam essa base são linearmente independentes entre si, e a sua combinação permite escrever qualquer vector.



- O sistema de coordenadas *cartesianas* ou *rectangulares* tem como base os versores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} que são ortogonais entre si, indicando cada um respectivamente a direcção positiva dos eixos x , y e z .
- Nesta base podemos escrever um vector \vec{A} como,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k},$$

onde A_x , A_y e A_z , são as componentes do vector A .

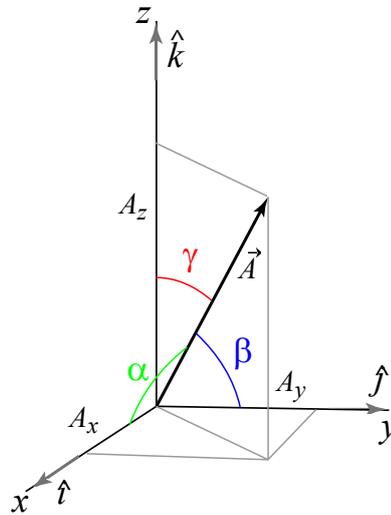
2.1.3 Co-senos directores

- Os co-senos directores são os co-senos dos ângulos entre um vector \vec{A} e os 3 eixos de coordenadas,

$$l = \cos \alpha$$

$$m = \cos \beta$$

$$n = \cos \gamma$$



- Os co-senos directores podem calcular-se a partir das componentes de \vec{A} ,

$$l = \cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \quad m = \cos \beta = \frac{A_y}{A}, \quad n = \cos \gamma = \frac{A_z}{A}$$

- Os co-senos directores não são independentes e obedecem a,

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

pois,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2} = 1.$$

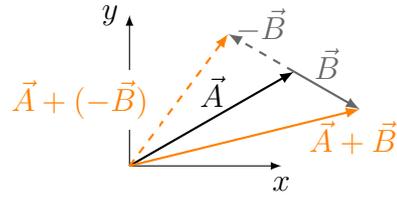
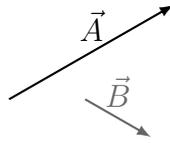
- Se \hat{a} é o vector unitário ao longo da direcção de \vec{A} então,

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x}{A} \hat{i} + \frac{A_y}{A} \hat{j} + \frac{A_z}{A} \hat{k} \\ &= \cos(\alpha) \hat{i} + \cos(\beta) \hat{j} + \cos(\gamma) \hat{k} \\ &= l \hat{i} + m \hat{j} + n \hat{k}. \end{aligned}$$

- Portanto,

$$\vec{A} = A \hat{a} = A \cos(\alpha) \hat{i} + A \cos(\beta) \hat{j} + A \cos(\gamma) \hat{k}.$$

2.1.4 Operações com vectores



- Geometricamente a adição de dois vectores é feita juntando a cauda de um com a cabeça do outro, formando assim 2 lados de um triângulo.
- O terceiro lado do triângulo é a soma dos vectores.
- Algebricamente, em coordenadas cartesianas, o vector soma é dado por,

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= (A_x + B_x) \hat{i} + \\ &\quad (A_y + B_y) \hat{j} + \\ &\quad (A_z + B_z) \hat{k}.\end{aligned}$$

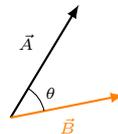
- A adição é comutativa,

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

- Verifica-se ainda que,

$$\begin{aligned}p\vec{A} &= \vec{A}p \\ p(\vec{A} + \vec{B}) &= (p\vec{A} + p\vec{B})\end{aligned}$$

2.1.5 Produto escalar de dois vectores



- O produto escalar, ou interno, de dois vectores é dado por,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo entre eles.

- Como $\cos(90^\circ) = 0$ o produto escalar de dois vectores perpendiculares entre si é zero.

- Em coordenadas cartesianas temos,

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= (A_x B_x) + (A_y B_y) + (A_z B_z),\end{aligned}$$

pois sendo os elementos da base ortogonais têm-se que:

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0\end{aligned}$$

- O produto escalar obedece ainda a,

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \vec{B} \cdot \vec{A} \\ p(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (p\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (p\vec{B}) \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}\end{aligned}$$

- Repare-se ainda que como o ângulo de um vector com ele próprio é zero, o produto escalar pode ser usado para determinar o módulo de um vector,

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2.$$

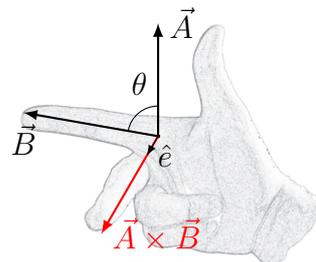
- A projecção dum vector \vec{A} ao longo duma linha de direcção segundo \hat{e} é,

$$\vec{A} \cdot \hat{e} = A \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo que o vector faz com a linha.

2.1.6 Produto vectorial de dois vectores

- O produto vectorial entre \vec{A} e \vec{B} é um vector perpendicular a ambos os vectores que tem um módulo igual á área do paralelogramo definido por \vec{A} e \vec{B} e o sentido o dado pela regra da mão direita (ver figura).



- O produto vectorial é normalmente indicado pelos símbolos \times ou \wedge ,

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin(\theta) \hat{e}, \quad (2.1)$$

- Como $\sin(0) = 0$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

- O produto vectorial não é comutativo,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

- O produto vectorial obedece ainda a,

$$p(\vec{A} \times \vec{B}) = (p\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (p\vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

- Em coordenadas cartesianas o produto vectorial pode-se calcular através do seguinte determinante,

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + \\ &\quad (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}. \end{aligned}$$

- Ou usando o produto directo entre as componentes tendo em atenção,

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k}, & \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i}, & \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j}, \\ \hat{i} \times \hat{k} &= -\hat{j}, & \hat{k} \times \hat{j} &= -\hat{i}, & \hat{j} \times \hat{i} &= -\hat{k}. \end{aligned}$$

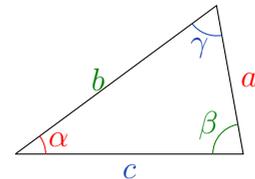
2.1.7 Lei dos co-senos

A lei dos co-senos relaciona os lados dum triângulo genérico com um dos seus ângulos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (2.2)$$

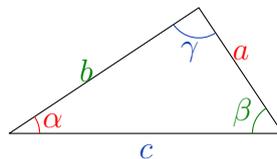
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \quad (2.3)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (2.4)$$



- Se $\gamma = \pi/2$ a lei dos co-senos reduz-se ao teorema de Pitágoras,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



- A lei dos co-senos é útil para calcular o terceiro lado dum triângulo quando dois lados e o ângulo que fazem entre si, são conhecidos
- Ou calcular os ângulos dum triângulo se todos os três lados são conhecidos.

2.1.8 Exemplo: Diâmetro da Lua

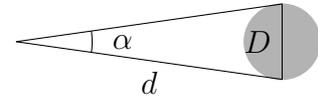
Exercício 1

Pretende-se medir o diâmetro da Lua, D , sabendo a distância da Terra à Lua, $d = 384 \times 10^6$ m e a abertura angular $\alpha = 9.15 \times 10^{-3}$ radianos.

- Use a lei dos cosenos para calcular o diâmetro da Lua.
- Como alternativa use a definição de radiano e compare os resultados.

(a) Podemos usar a lei dos cosenos na forma da Eq.2.2. Usando os dados do problema temos,

$$\begin{aligned} D^2 &= d^2 + d^2 - 2d^2 \cos \alpha \\ &= 2d^2 (1 - \cos \alpha) \\ D &= d\sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

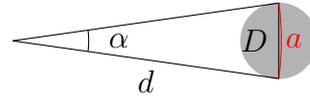


(b) Usando a definição de radiano, um ângulo plano α subtendido por um arco de comprimento a e raio d é,

$$\alpha = \frac{a}{d}. \quad (2.6)$$

Como a abertura angular da Lua é muito pequena, o diâmetro da Lua é aproximadamente igual ao arco de raio igual à distância da Terra à Lua. Assim a expressão anterior fica,

$$D = d\alpha. \quad (2.7)$$



- As equações 2.5 e 2.7 são diferentes, contudo se α é muito pequeno a Eq.2.5 reduz-se à Eq.2.7.
- Para ver que assim é, expande-se em série de Taylor o $\cos \alpha$ em torno de $\alpha = 0$ obtendo,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos 0 + \alpha \left. \frac{d \cos \alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2} \left. \frac{d^2 \cos \alpha}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} + \dots \\ &= 1 - \alpha \sin \alpha|_{\alpha=0} - \frac{\alpha^2}{2} \cos \alpha|_{\alpha=0} + \dots \\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots, \end{aligned} \quad (2.8)$$

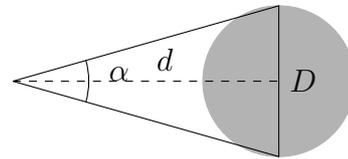
- Substituindo este resultado na Eq.2.5 temos,

$$\begin{aligned} D &= d\sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \\ &= d\sqrt{2\left(1 - 1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)} \\ &= d\alpha, \end{aligned} \tag{2.9}$$

que é precisamente a Eq.2.7

- Se α não for muito pequeno então a distância entre o observador e o objecto é o comprimento da perpendicular ao objecto até ao observador.
- Nesse caso a forma mais correcta de calcular o diâmetro do objecto é,

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} &= \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ D &= 2d \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

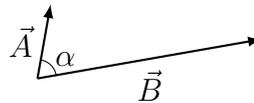


- Como não podia deixar de ser, a equação anterior também se reduz à Eq.2.7 quando α é muito pequeno, pois nesse caso $\tan(\alpha/2) \approx \alpha/2$.
- Assim o diâmetro da Lua são 3512 km ou usando só 3 algarismos significativos 3.51×10^6 m.

2.1.9 Exemplo: soma de vetores

Exercício 2

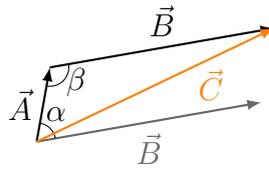
Dois vectores \vec{A} e \vec{B} são desenhados a partir de um mesmo ponto e $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.



Mostre que quando:

- $C^2 = A^2 + B^2$, o ângulo entre os vectores \vec{A} e \vec{B} é de 90° .
- $C^2 < A^2 + B^2$, o ângulo entre os vectores \vec{A} e \vec{B} é maior do que 90° .
- $C^2 > A^2 + B^2$, o ângulo entre os vectores \vec{A} e \vec{B} está compreendido entre 0° e 90° .

A soma geométrica de $\vec{A} + \vec{B}$ é



A lei dos cosenos diz que,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(\beta)$$

mas $\alpha + \beta = 180^\circ$ logo,

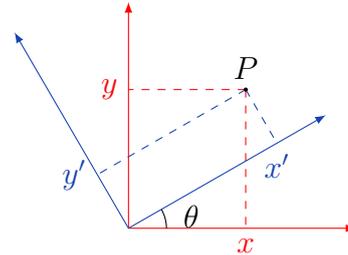
$$= A^2 + B^2 + 2AB \cos(\alpha)$$

Assim se (a) $\alpha = 90^\circ \Rightarrow C^2 = A^2 + B^2$ (b) $\alpha > 90^\circ \Rightarrow C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(\alpha)$ (c) $\alpha < 90^\circ \Rightarrow C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\alpha)$

2.1.10 Rotação de coordenadas

- Se um sistema de coordenadas cartesianas bidimensional sofrer uma rotação de um ângulo θ , no sentido anti-horário, em torno da origem, as novas coordenadas (x', y') relacionam-se com as antigas (x, y) por,

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$



- Se a rotação for no sentido horário, as novas coordenadas (x', y') relacionam-se com as antigas (x, y) por,

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta, \end{aligned}$$

note-se que este resultado pode ser deduzido do anterior, simplesmente fazendo $\theta = -\theta$.

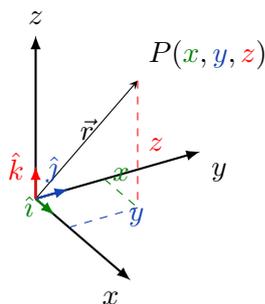
Aula 3

Quantidades cinemáticas

3.1 Quantidades cinemáticas

- Um dos objetivos principais da mecânica clássica é determinar a *evolução no tempo e no espaço dum sistema*.
- Consideremos, em primeiro lugar, sistemas cujo estudo se possa reduzir ao duma *partícula* que os representa.
- Com esta simplificação, um dos objectivos é ser capaz de prever a posição da partícula à medida que o tempo passa.
- Três quantidades cinemáticas são muito importantes:
 - a posição da partícula.
 - a velocidade da partícula.
 - a aceleração da partícula.

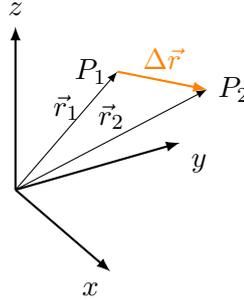
3.1.1 Vector posição de uma partícula



- O vector posição \vec{r} de uma partícula que está no ponto (x,y,z) é um vector que vai da origem do referencial ao ponto de coordenadas (x,y,z) ,

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}. \quad (3.1)$$

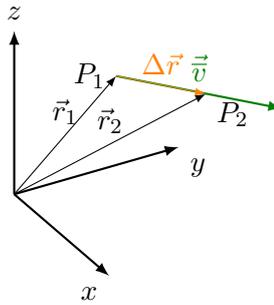
3.1.2 Vector deslocamento



- Se no instante t_1 a partícula está no ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e no instante t_2 a partícula está no ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ o vector deslocamento $\Delta\vec{r}$ entre estes dois pontos é dado por,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}.$$

3.1.3 Vector velocidade



- Dividindo o vector deslocamento pelo intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ obtemos o vector velocidade média,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\hat{i} + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\hat{j} + \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}\hat{k}.\end{aligned}$$

- \vec{v} é paralelo a $\Delta\vec{r}$.

Velocidade instantânea

- Definimos o vector velocidade instantânea como o limite quando Δt tende para zero do vector velocidade média,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_2 - y_1}{\Delta t}\hat{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z_2 - z_1}{\Delta t}\hat{k},\end{aligned}$$

usando a definição de derivada vem,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \\ &= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

- Note-se que anteriormente assumiu-se que as derivadas,

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0$$

pois o referencial considera-se parado no tempo.

- *Para que a derivada no tempo de um vector seja zero tanto o seu módulo, como a sua direcção e sentido devem ser constantes.*
- *Se qualquer um deles varia, o vector varia no tempo.*

Aula 4

Conceitos cinemáticos (cont.) e movimento curvilíneo

4.0.1 Vector aceleração

- O vector aceleração média, \vec{a} , duma partícula é definido pela razão,

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

- O vector aceleração instantânea, \vec{a} , é o limite da razão $\Delta \vec{v}/\Delta t$ quando Δt tende para zero

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (4.2)$$

desta definição resulta que o vector aceleração instantânea é a derivada do vector velocidade em ordem ao tempo.

- Usando a definição de vector velocidade instantânea (eq.3.2) podemos escrever o vector aceleração instantânea como,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

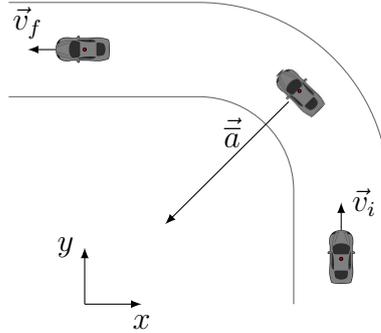
ou relacionando com a posição,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\frac{d\vec{r}}{dt}}{dt} \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

- Repare-se que pode haver aceleração sem haver variação do módulo da velocidade duma partícula. Basta que por exemplo varie a direcção da velocidade.

Exemplo: \vec{a} dum automóvel numa curva**Exercício 3**

Como ilustração considere-se um automóvel que circula a 30km/h em direcção a Norte e, em 3 s, vira para Oeste, mantendo a velocidade de 30km/h. Qual a aceleração média do automóvel?

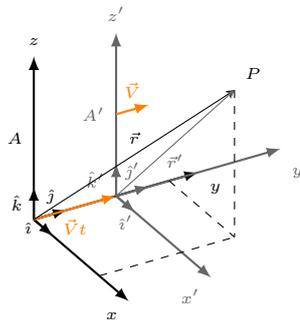


Se considerarmos um referencial em que o eixo Y aponta para Norte e X para Este, da definição de \vec{a} vem,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \\ &= \frac{-30\text{km/h } \hat{i} - 30\text{km/h } \hat{j}}{3\text{s}} = -2.8(\hat{i} + \hat{j}) \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

4.1 Movimento relativo

Posição relativa



- Consideremos um referencial A' que se desloca com velocidade *constante* \vec{V} relativamente a outro referencial A .
- Então classicamente, a posição duma partícula P relativamente a A é,

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, \quad (4.5)$$

Vector velocidade relativa

- Derivando em ordem ao tempo a expressão anterior vem,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d(\vec{V}t)}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

- Ou seja um observador no referencial A vê a partícula P a mover-se com velocidade \vec{v} .
- Mas um observador no referencial A' vê a partícula P a mover-se com velocidade menor \vec{v}' ,

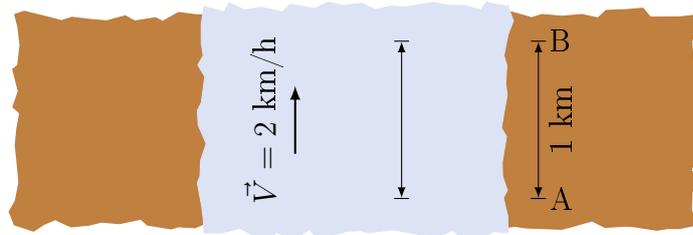
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

4.1.1 Exemplo:

Exemplo: velocidade relativa

Exercício 4

Dois locais A e B, distantes 1 km, estão situados na mesma margem de um canal rectilíneo. Uma pessoa vai de A a B e volta a A num barco, com uma velocidade de 4 km/h relativa à água. Outra pessoa caminha ao longo da margem, também de A a B e volta a A, com velocidade de 4 km/h. Considerando que a água flui pelo canal a 2 km/h, calcular o tempo que cada pessoa leva para fazer o trajecto completo.



Pessoa no barco
Viagem de ida,

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V}$$

o movimento é unidimensional podemos omitir a notação vetorial

$$v_i = 4 + 2 = 6 \text{ km/h}$$

Viagem de volta,

$$v_v = -4 + 2 = -2\text{km/h}$$

Tempo total de viagem,

$$\begin{aligned}t &= \frac{\Delta x_i}{v_i} + \frac{\Delta x_v}{v_v} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}\text{h} = 40\text{min}\end{aligned}$$

Pessoa em terra

Tempo total de viagem,

$$\begin{aligned}t &= \frac{\Delta x_i}{v_i} + \frac{\Delta x_v}{v_v} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}\text{h} = 30\text{min}\end{aligned}$$

Aula 5

Movimento curvilíneo

5.1 Movimento curvilíneo

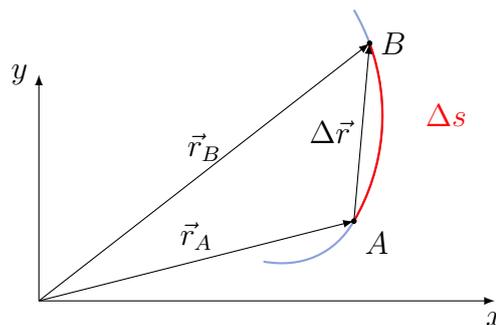
5.1.1 O vetor tangencial da velocidade

- Definimos o vector velocidade instantânea como o limite quando Δt tende para zero da razão entre o vector deslocamento e Δt ,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

onde o deslocamento $\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ é o deslocamento entre dois pontos A e B da trajectória da partícula.

- Quando a partícula vai de A a B o deslocamento Δs ao longo da curva é dado pelo comprimento do arco AB.



- Se multiplicarmos e dividirmos a expressão anterior pelo comprimento do arco $\Delta s = \text{arco AB}$ obtemos,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right),$$

- O módulo de $\Delta \vec{r}$ é aproximadamente igual a Δs quanto mais próximo de A estiver B.

- A razão entre estas duas quantidades tende para um vector unitário tangente à trajectória.
- Portanto podemos escrever,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \hat{u}_t,$$

e recordando a definição de derivada,

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{u}_t$$

- O outro limite fica,

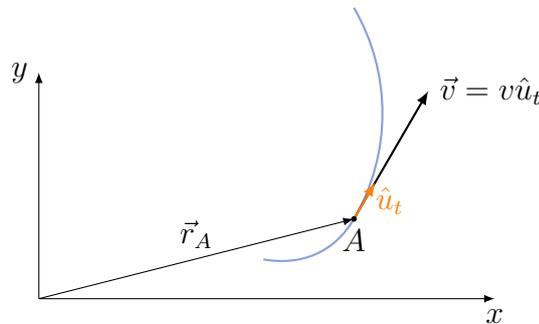
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v, \quad (5.1)$$

que é nada mais nada menos do que o módulo da velocidade instantânea.

- Assim podemos escrever a velocidade como,

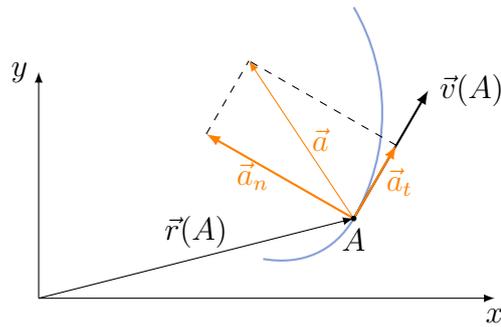
$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t = v \hat{u}_t, \quad (5.2)$$

esta expressão indica que o vector velocidade é tangente à trajectória.



5.1.2 As componentes tangencial e normal da aceleração

- Sem perda de generalidade consideremos uma partícula que descreve uma trajectória curva plana.
- No instante t a partícula está em A com velocidade \vec{v} e aceleração \vec{a} .
- Visto que o vector \vec{a} aponta para a concavidade da trajectória pode-se decompor em duas componentes, uma *tangencial* à trajectória e a outra *normal* à trajectória.

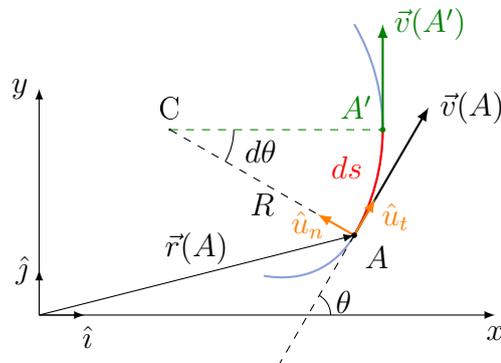


- Quando uma partícula se move o módulo da velocidade pode variar e essa variação está relacionada com a aceleração tangencial.
- As variações na direção da velocidade estão relacionadas com a aceleração normal.
- Da expressão da velocidade deduzida atrás (ver eq. 5.2) podemos escrever a aceleração como,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \hat{u}_t). \quad (5.3)$$

- Usando a regra da cadeia temos,

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_t + v \frac{d\hat{u}_t}{dt}.$$



- Para obtermos o valor da derivada $d\hat{u}_t/dt$ vamos decompor o versor \hat{u}_t nas componentes x e y,

$$\hat{u}_t = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta.$$

- Derivando ambos os membros desta igualdade em ordem ao tempo temos,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}_t}{dt} &= \frac{d\hat{i}}{dt} \cos \theta + \hat{i} \frac{d \cos \theta}{dt} \\ &+ \frac{d\hat{j}}{dt} \sin \theta + \hat{j} \frac{d \sin \theta}{dt}, \end{aligned}$$

recordando que os versores \hat{i} e \hat{j} não variam no tempo (estão fixos) a expressão anterior simplifica-se para,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_t}{dt} &= -\hat{i}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + \hat{j}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \\ &= (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}\quad (5.4)$$

- Decompondo também o versor \hat{u}_n (que é perpendicular a \hat{u}_t) obtemos,

$$\begin{aligned}\hat{u}_n &= \hat{i}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{j}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta,\end{aligned}\quad (5.5)$$

comparando esta expressão (eq.5.5) com a eq. 5.4 vemos que,

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \hat{u}_n\frac{d\theta}{dt},$$

ou seja, mostramos que $d\hat{u}_t/dt$ é normal à trajectória.

- Agora,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\theta}{ds},$$

onde $ds = AA'$ é o pequeno arco percorrido pela partícula no intervalo de tempo dt .

- As normais à curva em A e A' interceptam-se no ponto C , denominado *centro de curvatura*.
- O raio de curvatura R é definido como a distância $R = CA$, assim da definição de radiano podemos escrever,

$$ds = R d\theta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R},$$

então,

$$\frac{d\theta}{dt} = v\frac{d\theta}{ds} = \frac{v}{R},$$

- Assim já podemos escrever $d\hat{u}_t/dt$ que fica,

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \hat{u}_n\frac{d\theta}{dt} = \hat{u}_n\frac{v}{R}.\quad (5.6)$$

- Podemos finalmente escrever a aceleração em termos das suas componentes normal e tangencial,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\hat{u}_n\end{aligned}\quad (5.7)$$

- A componente tangencial da aceleração é,

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (5.8)$$

- A componente normal da aceleração é,

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (5.9)$$

- O módulo da aceleração em termos destas componentes vem,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}} \quad (5.10)$$

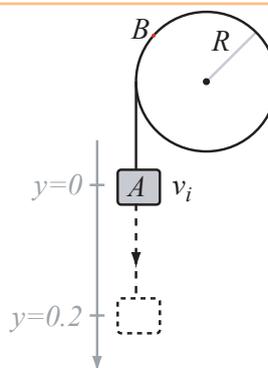
- Se o *módulo da velocidade* permanecer *constante* o movimento curvilíneo é uniforme e $a_t = 0$.
- Por outro lado se a *direcção da velocidade* permanecer *constante*, então $R = \infty$ e o movimento é rectilíneo, logo $a_n = 0$.

5.1.3 Exemplo: a_n e a_t numa roldana

Exercício 5

Um corpo está suspenso por uma corda numa roldana, com massa desprezável e é deixado cair com uma velocidade inicial de $v_i = 0.04$ m/s. Passados 2 s o corpo desceu $\Delta y = 20$ cm. Sabendo que a roldana tem um raio de $R = 10$ cm, quais são as acelerações tangencial, a_t e normal, a_n de qualquer ponto da periferia da roldana em qualquer instante?

Nota: o corpo A cai com uma aceleração constante.



- Com veremos mais à frente, devido à interacção com a roldana o corpo A cai com uma aceleração a constante.
- Se o corpo demora 2 s a descer 20 cm podemos encontrar a aceleração a do corpo usando a Eq.5.3,

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

- A queda do corpo A é um movimento a uma dimensão como tal podemos omitir a notação vectorial.

Integrando a equação anterior obtemos a velocidade,

$$a_A = \frac{dv}{dt} \quad \xrightarrow{\int dt} \quad \int_0^t a_A dt = \int_{v_i}^v dv$$

$$v = v_i + a_A t, \quad (5.11)$$

e integrando a velocidade obtemos a posição do corpo para cada instante t ,

$$v = \frac{dy}{dt} \quad \xrightarrow{\int dt} \quad \int_0^t v dt = \int_0^y dy$$

$$y = v_i t + \frac{a_A}{2} t^2, \quad (5.12)$$

Usando a condição $y(2) = 0.2$ m da Eq.5.12 obtemos a aceleração,

$$a_A = 2 \frac{y_f - v_i t_f}{t_f^2}$$

$$= 2 \frac{0.2 - 0.04 \times 2}{2^2}$$

$$= 0.06 \text{ m/s}^2.$$

Então substituindo a_A na Eq.5.11 temos a velocidade do corpo A ,

$$v = v_i + a_A t$$

$$v = 0.04 + 0.06 t \text{ m/s} \quad (5.13)$$

Como o corpo A está ligado por uma corda à roldana a velocidade Eq.5.13 é também a velocidade de qualquer ponto, B na periferia da roldana logo,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0.06 \text{ m/s}^2$$

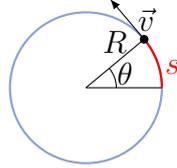
$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$= \frac{(0.04 + 0.06 t)^2}{0.1}$$

$$= (16 + 48t + 36t^2) \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

5.2 Movimento circular

5.2.1 Velocidade angular



- Consideremos o caso *especial de movimento curvilíneo* em que a *trajetória* da partícula é uma *circunferência* de raio R .
- A este movimento chamamos movimento circular.
- Neste caso a velocidade \vec{v} é tangente à circunferência e da eq. 5.1 o seu módulo é igual a,

$$v = \frac{ds}{dt},$$

onde s é o arco da circunferência percorrido pela partícula.

- Recordando novamente a definição de radiano, vemos que $s = R\theta$ e assim v pode-se exprimir da seguinte forma,

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{d(R\theta)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}, \end{aligned}$$

pois o raio da circunferência, R , é constante.

- Chamamos *velocidade angular*, ω , à grandeza,

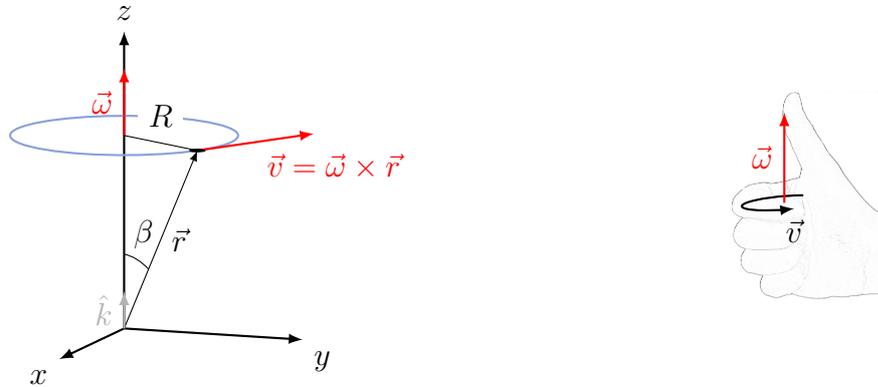
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

- As unidades da velocidade angular são o radiano por segundo (rad s^{-1}) ou simplesmente (s^{-1}).
- Então em termos de ω o módulo da velocidade fica,

$$v = \omega R. \tag{5.14}$$

- A velocidade angular também é um vector.

- A sua direção é perpendicular ao círculo descrito pela trajetória e o sentido é o do polegar da mão direita fechada, quando os outros dedos seguem o sentido da velocidade (ver figura).



- Podemos ver na figura que $R = r \sin \beta$ e que $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \hat{k}$ assim,

$$v = \omega R = \omega r \sin \beta,$$

que é o módulo do vector,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

5.2.2 Conceito de período e frequência no movimento circular uniforme

- Se ω é constante o movimento é periódico e a partícula passa em cada ponto a intervalos regulares de tempo.
- O período T é o tempo necessário para dar uma volta completa. Mede-se em unidades de segundo (s).
- A frequência f é o número de voltas por unidade de tempo. Mede-se em unidades de (s^{-1}) ou hertz (Hz).
- Então se no intervalo de tempo Δt a partícula dá N voltas, temos que $T = \Delta t/N$ e $f = N/\Delta t$ logo,

$$f = \frac{1}{T}.$$

- Integrando a equação,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \omega dt = d\theta,$$

como $\omega = \text{constante}$ vem,

$$\int_0^{\theta} d\theta = \omega \int_0^t dt$$

$$\theta = \omega t.$$

- Para uma volta completa da partícula em torno da circunferência, $t = T$ e $\theta = 2\pi$ então,

$$2\pi = \omega T \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

5.2.3 Aceleração angular

- Se o módulo da velocidade angular ω varia no tempo então podemos definir a aceleração angular como,

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

- No movimento circular (no plano) a direcção de ω é constante logo o módulo da aceleração angular é dado por,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\omega}{dt} \\ &= \frac{d^2\theta}{dt^2}. \end{aligned}$$

- Podemos exprimir as componentes normal e tangencial da aceleração em termos da velocidade e aceleração angulares.
- Recordando que $v = \omega R$ a aceleração normal fica,

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

- E a aceleração tangencial vem,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha. \quad (5.15)$$

- Para concluir vejamos qual a relação entre o vector aceleração \vec{a} e o vector aceleração angular $\vec{\alpha}$.
- Recordando que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, da definição de aceleração vem,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} \\ &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}, \end{aligned}$$

como $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ vem,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &\text{ou de forma equivalente} \\ \vec{a} &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

5.2.4 Exemplo: Órbita da ISS

Exercício 6

Considere que a estação espacial internacional (ISS) descreve uma órbita circular a uma altitude de $h_{ISS} = 420$ km. Determine a sua velocidade, o tempo que demora a descrever uma volta à Terra e quantas voltas dá por dia. Leve em conta a variação da aceleração da gravidade com a altura, dada por $g = GM_T/R^2$, onde a massa da Terra é $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m³/s²kg e o raio da Terra são 6370 km.



A aceleração da gravidade na órbita da ISS é,

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h_{ISS})^2} = 8.65 \text{ m/s}^2,$$

que é também a sua aceleração centrípeta. Logo a velocidade da ISS é dada por,

$$\begin{aligned} g &= \frac{v^2}{R} \\ v &= \sqrt{Rg} \\ &= \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h_{ISS}}} \\ &= \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \cdot 5.98 \times 10^{24}}{(6370 + 420) \times 10^3}} \\ &= 27592 \text{ km/h} \end{aligned}$$

- O comprimento da sua órbita é aproximadamente igual a $2\pi R$, logo o

tempo, T que demora a descrever uma órbita é,

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$= 5566.4 \text{ s} \approx 93 \text{ min} = 1 \text{ h } 33 \text{ min}$$

- Num dia a ISS dá cerca de 15.5 voltas à Terra.
- A ISS passa várias vezes por cima das nossas cabeças.
- À noite num céu sem nuvens, pode ver-se facilmente a olho nu.
- *Para ver onde está a ISS em tempo real:*

http://www.esa.int/esaHS/ESAI2X0VMOC_iss_0.html.

- *Para ver quando a ISS passa por cima do Porto:*

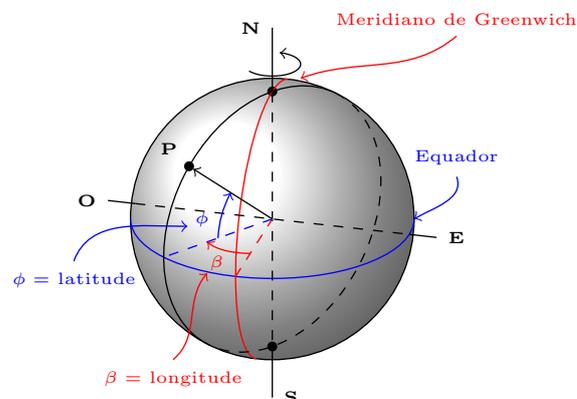
<http://www.heavens-above.com/PassSummary.aspx?satid=25544&lat=41.150&lng=-8.617&loc=Porto&alt=109&tz=PWT>

5.2.5 Exemplo: v e a à superfície da Terra

Exercício 7

A Terra gira uniformemente em torno de seu eixo com velocidade angular $\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Encontrar, em função, da latitude, os módulos da velocidade e da aceleração de um ponto na superfície da Terra. Quais os valores de v e de a na cidade do Porto que está a $\phi = 41^\circ \text{ N}$ de latitude?

Nota: usar o raio da Terra, $R_T = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$.



Assumindo a Terra como uma esfera, a velocidade v de um ponto P na superfície da Terra à latitude ϕ é dada por (ver figura),

$$\begin{aligned} v &= \omega R \\ &= \omega R_T \cos \phi, \end{aligned}$$

e a aceleração (normal) é dada por,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= \omega v \hat{u}_n \\ a &= \omega v \\ &= \omega^2 R_T \cos \phi, \end{aligned}$$

substituindo os valores numéricos obtemos,

$$\begin{aligned} v &= 1682 \cos \phi \text{ km/h} \\ a &= 0.034 \cos \phi \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

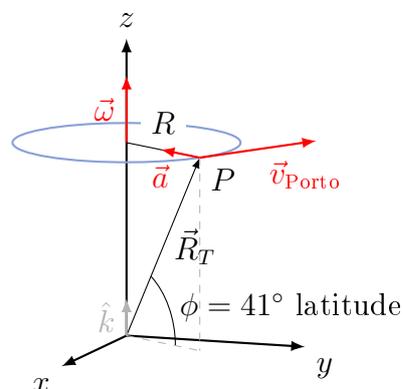
Para a latitude do Porto obtemos,

$$\begin{aligned} v_{Porto} &= 1269.4 \text{ km/h} \\ a_{Porto} &= 0.03 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Esta é a velocidade com que, no Porto, giramos em torno do eixo de rotação da Terra, quando estamos sentados na sala de aula.

Exercício 8

Assumindo uma órbita circular de raio, $R_{TS} = 1.4961.496 \times 10^{11}$ m, calcular a velocidade de translação da Terra em torno do Sol e a aceleração normal a_n associada, a distância percorrida pela Terra num mês e ângulo descrito no mesmo período de tempo.



Aula 6

Leis de Newton

6.1 As 3 leis de Newton

- As três leis de Newton, são a base da mecânica clássica que permite estudar quer o movimento dos objectos comuns do nosso dia-a-dia, quer o movimento dos astros como, planetas, etc.
- Estas leis foram enunciadas por Newton em 1687 no livro *Principia*, escrito em latin cujo título completo se pode traduzir para *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*.
- No Googlebooks podemos encontrar o livro integral em <http://books.google.com/books?id=WqaGuP1HqE0C&printsec=titlepage>.
- Na página 15 e 16 estão enunciadas as 3 leis.

A primeira lei também chamada *a lei da inércia* afirma:

Qualquer corpo continua no seu estado de repouso, ou de movimento rectilíneo uniforme, a não ser que seja obrigado a mudar esse estado devido à acção de forças aplicadas.

- Os projecteis mantêm os seus movimentos, enquanto não forem retardados pela resistência do ar, ou puxados para baixo pela força da gravidade. Um pião, cujas partes são continuamente desviadas do seu movimento rectilíneo uniforme devido às forças de coesão entre as partes, não perde o seu estado de rotação, a não ser pelo efeito retardador do ar. Os corpos mais volumosos como os planetas e os cometas, por encontrarem menor resistência nos seus espaços mais livres, mantêm os seus movimentos, tanto progressivo como circular, por períodos mais longos de tempo.

6.1.1 1ª lei e referenciais de inércia

- Anteriormente a Galileu pensava-se que era sempre necessário uma força para manter um corpo em movimento com velocidade constante.

- Galileu foi o primeiro a concluir que as *forças de atrito são as responsáveis pela desaceleração dos corpos*.
- Livres de atrito, os corpos *mantém a sua velocidade*. Galileu chamou a esta propriedade da matéria, a *inércia*.
- A 1ª lei de Newton, a que se chama também lei da inércia, foi na realidade descoberta por Galileu.
- *Um referencial onde é válida a lei da inércia diz-se um referencial inercial*.
- Qualquer referencial que se mova com velocidade constante ou esteja parado, relativamente a um outro referencial inercial é também um referencial inercial.
- *As leis de Newton só são válidas em referenciais inerciais*.
- Num referencial acelerado, como por exemplo um referencial em rotação, as leis de Newton não se verificam. Tal referencial diz-se não-inercial.
- Portanto a lei da inércia permite determinar se um dado referencial é ou não inercial. *Como?*
- Um referencial fixo na superfície da Terra não é inercial, devido por exemplo, ao movimento de rotação da Terra.
- Como já foi calculado (ver Sec.95, pág.35) a aceleração à superfície da Terra devido à sua rotação é muito reduzida da ordem das centésimas de m/s^2 . Deste modo em certas aplicações podemos considerar a *Terra um referencial aproximadamente inercial*.

A segunda lei também chamada *a lei da aceleração* afirma:

A variação do momento linear é proporcional à força motriz aplicada, e dá-se na direcção da recta segundo a qual actua essa força.

- Numa forma matemática moderna a segunda lei exprime-se,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (6.1)$$

onde $\vec{p} = m\vec{v}$ é o *momento linear* da partícula, também chamado por vezes a quantidade de movimento da partícula.

- Se a *massa* da partícula for *constante* a expressão anterior reduz-se a uma forma mais conhecida,

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}. \quad (6.2)$$

- Caso mais do que uma força seja aplicada à partícula então considera-se que \vec{F} representa a soma vectorial de todas as forças,

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (6.3)$$

6.1.2 2ª lei e conceito de massa

- Todos nós temos um conceito empírico de força. Tal acontece porque a física apenas definiu objectivamente um conceito que já existia.
- Esta definição é dada pelas 1ª e 2ª leis de Newton das quais podemos concluir que uma *força* é uma influência externa, que actuado num corpo com massa constante o acelera (relativamente a um referencial de inércia).
- Caso uma só força actue num corpo, a direcção e sentido dessa força são os mesmos da aceleração que provoca.
- O módulo da força é o produto da massa de inércia do corpo, pelo módulo da sua aceleração.
- No sistema internacional *a unidade de força é o newton (N)*.
- Um newton é igual a 1 kg vezes 1 m/s², ou seja (N)=(kg m s⁻²).
- A *massa* (quando constante) é uma propriedade intrínseca dum corpo que mede a sua resistência à aceleração.
- Podemos determinar quantitativamente a razão entre duas massas *A* e *B*, aplicando a mesma força \vec{F} a cada uma e medindo as respectivas acelerações.
- Assim, se \vec{F} provoca uma aceleração a_A na massa m_A e uma aceleração a_B na massa m_B temos que,

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A}. \quad (6.4)$$

- Se a mesma força é aplicada a duas massas diferentes, a maior vai acelerar menos.
- *A massa de inércia é uma propriedade intrínseca do objecto que não depende da sua localização.*
- *A massa de inércia não depende da direcção ou sentido em que a força é aplicada.*

A terceira lei também chamada *a lei da acção-reacção* afirma:

A toda a acção sempre se opõe uma reacção igual: ou, as acções mútuas de dois corpos são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.

- Por outras palavras, se o corpo A exerce uma força \vec{F}_{AB} no corpo B então o corpo B exerce em A uma força $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.



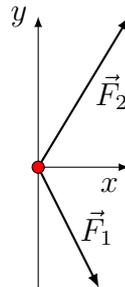
6.1.3 3ª lei, forças ocorrem sempre aos pares

- A 3ª lei de Newton afirma que qualquer força gera outra força que lhe é igual em módulo mas oposta no sentido, i.e. se o corpo A exerce uma força \vec{F}_{AB} no corpo B então o corpo B exerce em A uma força $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.
- Estas forças surgem simultaneamente e são aplicadas em pontos diferentes. \vec{F}_{AB} é aplicada no corpo B e \vec{F}_{BA} no corpo A .
- Como tal estas forças nunca se cancelam.

\vec{r} e \vec{v} duma partícula sujeita a duas forças

Exercício 9

Uma partícula de massa 5 kg é sujeita simultaneamente a duas forças $\vec{F}_1 = 2\hat{i} - 4\hat{j}$ (N) e $\vec{F}_2 = 3\hat{i} + 5\hat{j}$ (N). Se a partícula inicia o movimento em $t = 0$ s, partindo da origem em repouso encontrar o seu vector posição, \vec{r} e o seu vector velocidade, \vec{v} para $t = 2$ s.



- Para encontrar $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ necessitamos de saber qual a aceleração \vec{a} da partícula.
- Como já conhecemos a massa, m , da partícula calculando a força total que actua na partícula podemos encontrar \vec{a} .

- A força total que actua na partícula é,

$$\begin{aligned}\vec{F}_T &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ &= F_{T_x} \hat{i} + F_{T_y} \hat{j} \\ &= (2 + 3) \hat{i} + (5 - 4) \hat{j} \\ &= 5 \hat{i} + \hat{j} \text{ N},\end{aligned}$$

- Da 2a lei de Newton, a sua aceleração devido a esta força é,

$$\begin{aligned}\vec{F}_T &= m \vec{a} \\ \vec{a} &= \frac{\vec{F}_T}{m} \\ &= \frac{F_{T_x}}{m} \hat{i} + \frac{F_{T_y}}{m} \hat{j} \\ &= \hat{i} + \frac{1}{5} \hat{j} \text{ m/s}^2.\end{aligned}$$

- O vector aceleração é constante. Podemos integrar no tempo as componentes da aceleração para obter as componentes da velocidade,

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \quad \int dt \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v_x = a_x t \\ v_y = a_y t \end{cases},$$

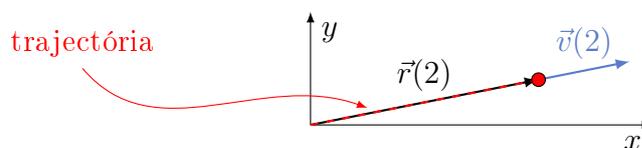
- integrando as componentes do vector velocidade obtemos as componentes do vector posição,

$$\begin{cases} v_x = \frac{dr_x}{dt} \\ v_y = \frac{dr_y}{dt} \end{cases} \quad \int dt \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r_x = a_x \frac{t^2}{2} \\ r_y = a_y \frac{t^2}{2} \end{cases}.$$

\vec{r} e \vec{v} duma partícula sujeita a duas forças

- Então a posição e velocidade da partícula para $t = 2$ são dadas por,

$$\begin{aligned}\vec{r}(2) &= 2 a_x \hat{i} + 2 a_y \hat{j} = 2 \hat{i} + \frac{2}{5} \hat{j} \text{ m} \\ \vec{v}(2) &= 2 a_x \hat{i} + 2 a_y \hat{j} = 2 \hat{i} + \frac{2}{5} \hat{j} \text{ m/s}\end{aligned}$$



6.2 As forças fundamentais

- Todas as forças observadas na Natureza podem ser explicadas em termos de 4 forças fundamentais:
 - A força gravitacional.
 - A força electromagnética.
 - A força fraca.
 - A força forte.
- As duas últimas forças são forças nucleares, i.e. só se manifestam no núcleo dos átomos.
- O modelo padrão descreve a força fraca e a electromagnética como uma só força, chamada a força *electrofraca*.
- À escala macroscópica as forças que observamos são a gravitacional e a electromagnética, razão que levou a que fossem estas as primeiras forças a ser identificadas.

6.3 Forças de interacção à distância

- As forças fundamentais actuam entre partículas que estão separadas no espaço.
- Ou seja a interacção efectua-se à distância.
- Por exemplo, *o Sol interage gravitacionalmente com a Terra*, i.e. o Sol atrai a Terra e a Terra atrai o Sol, *sem que nenhum “toque” no outro*.
- Para ultrapassar este problema filosófico foi criada a noção de *campo de forças*.
- Assim *o Sol cria à sua volta um campo de força gravitacional* e a Terra cria também o seu campo de força.
- O campo que o Sol cria interage com a Terra e por sua vez o campo que a Terra cria interage com o Sol.
- O mesmo acontece entre quaisquer duas massas, como por exemplo nós e a Terra.

6.3.1 O peso de um corpo

- Se deixarmos cair um corpo *perto da superfície da Terra* este acelera em direcção à Terra.
- Desprezando a resistência do ar verifica-se que todos *os corpos adquirem a mesma aceleração \vec{g}* , chamada a aceleração da gravidade.
- A força que causa esta aceleração é a *força da gravidade no corpo e chama-se peso \vec{P}* .
- Se a massa do corpo for m , da 2ª lei de Newton obtemos que o peso é dado por,

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

- Como \vec{g} é o mesmo para todos os objectos num dado local, o peso dum corpo tem de ser proporcional à sua massa.
- \vec{g} é a força gravítica por unidade de massa, exercida pela Terra num dado corpo e é chamada o campo gravitacional da Terra.
- Perto da superfície da Terra g tem o valor,

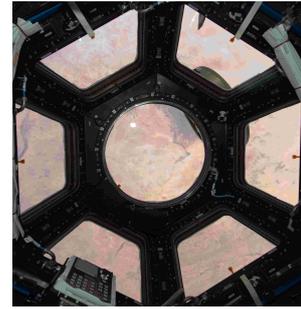
$$g = 9.81\text{N/kg} = 9.81\text{m/s}^2 \quad (6.5)$$

- O valor de g varia com a posição.
- Logo *o peso não é uma propriedade intrínseca dum corpo ao contrário da sua massa m* .
- Num local muito afastado da Terra o peso dum corpo é substancialmente inferior ao seu valor na superfície da Terra pois g é bastante inferior.
- Medições muito precisas de g são usadas para procurar jazidas minerais no subsolo.

Exemplo: Propulsão dum astronauta

Exercício 10

Um astronauta que abria as janelas no exterior da Cupola (cúpula) da ISS partiu o cordão que o ligava ao satélite e ficou em repouso no espaço. Ligando o sistema de propulsão, que lhe aplica uma força F sempre constante, verifica que após 3 s se deslocou 9 m. Qual o valor da intensidade da força F se a massa do astronauta (incluindo equipamento) for de 300 kg?



- A aceleração do astronauta é constante, pois a sua massa é constante bem como a força que lhe é aplicada.
- Integrando no tempo a aceleração podemos encontrar a velocidade do astronauta e obter o deslocamento integrando a velocidade.
- Sendo o movimento do astronauta a 1 dimensão, podemos omitir a notação vectorial ficando,

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \xrightarrow{\int dt} \quad \int_0^t a dt = \int_0^v dv$$

assim a velocidade no instante t é,

$$v(t) = at,$$

- Integrando a velocidade obtemos a posição do astronauta para cada instante t ,

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \xrightarrow{\int dt} \quad \int_0^t v dt = \int_0^x dx \Leftrightarrow$$

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2.$$

- Obtemos o valor da aceleração usando a condição $x(3) = 9$ m,

$$a = 2 \frac{x(3)}{3^2} = 2 \text{ m/s}^2.$$

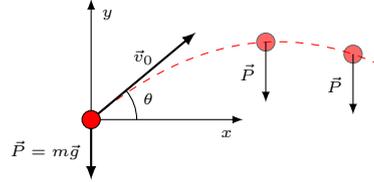
- Finalmente a força aplicada pelo sistema de propulsão é,

$$F = ma = 600 \text{ N}.$$

6.3.2 Movimento de projecteis

- Consideremos um projectil inicialmente em (x_0, y_0) e que é lançado desta posição com velocidade inicial v_0 fazendo um ângulo θ com a horizontal.
- A sua velocidade inicial é,

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j} \\ &= v_0 \cos \theta \hat{i} + v_0 \sin \theta \hat{j}\end{aligned}$$



- Desprezando a interacção com o ar, a única força que actua no projectil é o peso \vec{P} (a força gravítica).
- Da 2a lei de Newton vem que a aceleração do projectil é apenas a aceleração da gravidade,

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m \vec{a} \\ \vec{a} &= -g \hat{j},\end{aligned}$$

- Este é um movimento com aceleração constante.
- Neste referencial as componentes da aceleração são,

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \quad (6.6)$$

- Integrando no tempo obtemos a equação para as componentes da velocidade,

$$\begin{cases} \int_0^t a_x dt = \int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x \\ \int_0^t a_y dt = \int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}, \quad (6.7)$$

repare-se que *as componentes da velocidade são independentes entre si*, logo o movimento na horizontal é independente do movimento na vertical.

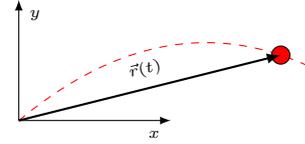
- Integrando a velocidade no tempo, obtemos a posição do projectil em qualquer instante,

$$\begin{cases} \int_0^t v_x dt = \int_{x_0}^x dx \\ \int_0^t v_y dt = \int_{y_0}^y dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - g \frac{t^2}{2} \end{cases},$$

- Substituindo os valores da velocidade inicial temos,

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos(\theta)t$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - g\frac{t^2}{2}$$



- O vector posição do projectil é,

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j}$$

- Podemos obter a equação da trajetória $y(x)$ eliminando o tempo nas equações anteriores.
- Para simplificar seja, $x_0 = y_0 = 0$ então,

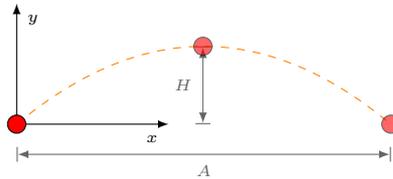
$$x(t) = v_{0x}t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v_{0x}},$$

substituindo em $y(t)$ vem,

$$y(x) = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2,$$

ou,

$$y(x) = \tan(\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2. \quad (6.8)$$



- Se as alturas final e inicial são idênticas, o alcance do projectil é dado por,

$$A = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g},$$

PORQUÊ?

- A altura máxima atingida pelo projectil é,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g},$$

PORQUÊ?

- O tempo total de voo é dado por,

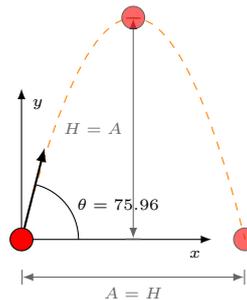
$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \theta$$

PORQUÊ?

- Como a razão entre a altura máxima e o alcance máximo do projectil é:

$$\frac{H}{A} = \frac{\tan \theta}{4}$$

para $\theta = \arctan(4) = 75.96$ o alcance é igual à altura máxima.

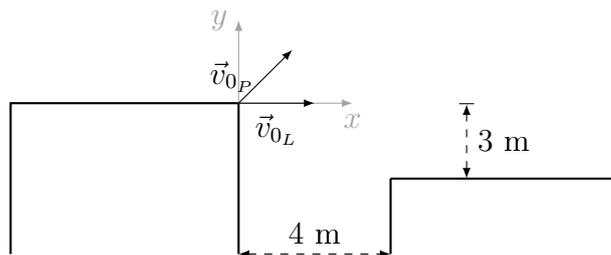


Exemplo:

Exercício 11

Um polícia persegue um ladrão num terraço. A dada altura o terraço acaba e o próximo está a uma distância de 4 m e 3 m, mais baixo. O ladrão salta com uma inclinação inicial de 0° (projecta-se na horizontal) e o polícia salta com uma inclinação de 45° . O módulo da velocidade inicial dos dois é de 5 m/s.

Qual deles passa? E por quanto?



Usando a Eq.6.8 temos de determinar qual o valor de x_f para o qual $y_f = -3$,

$$y_f = \tan(\theta)x_f - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x_f^2. \quad (6.9)$$

Para $\theta = 0$ obtém-se,

$$y_f = -\frac{g}{2v_0^2}x_f^2$$
$$x_f = \sqrt{-\frac{2y_f v_0^2}{g}}$$
$$= 3.9 \text{ m}$$

Para $\theta = \pi/4$ obtém-se,

$$y_f = x_f - \frac{g}{v_0^2}x_f^2$$
$$y_f v_0^2 = v_0^2 x_f - g x_f^2$$
$$-75 = 25 x_f - 9.8 x_f^2$$
$$x_f = 4.3 \text{ m}$$

Aula 7

Forças de contacto e forças não inerciais

7.1 Forças de contacto

- Objectos em "contacto directo" podem exercer forças um no outro.
- À escala atómica, aparentemente a força electromagnética tem um grande papel na origem destas forças de contacto, através da interacção eléctrica entre as moléculas dos dois objectos.
- Há contudo também *propriedades quânticas que impedem que os átomos se sobreponham uns com os outros* (princípio de exclusão de Pauli).
- A força normal, a força de atrito e a força elástica são forças de contacto, na mecânica clássica.

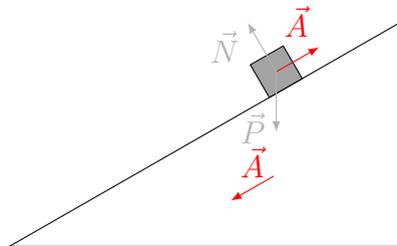
7.1.1 A força normal

- Dois objectos que estão em contacto directo um com o outro exercem entre si uma força *normal à superfície de contacto*.
- Consideremos por exemplo um bloco com massa M em cima duma mesa. O bloco exerce uma força na mesa que é igual ao seu peso.
- Da 3ª lei de Newton concluímos que a mesa exerce uma força igual e de sentido oposto no bloco, que é normal à superfície de contacto entre o bloco e a mesa e que impede o bloco de acelerar sobe a acção do seu peso.



7.1.2 A força de atrito

- Dois objectos que estão em contacto directo um com o outro podem também *exercer entre si uma força tangente à superfície de contacto*.
- *A componente tangente da força de contacto é chamada a força de atrito.*



7.1.3 A força elástica

- Determinou-se experimentalmente que quando uma mola é comprimida ou distendida de uma *pequena* quantidade Δx a força que a mola exerce é dada por,

$$F_x = -k\Delta x, \quad (7.1)$$

onde k é a constante elástica da mola que mede a sua rigidez.

- O sinal negativo na Eq. 7.1 indica que a *força elástica é oposta ao deslocamento da mola Δx* , i.e. é sempre contrária à força exercida na mola.
- A Eq. 7.1 é conhecida como a lei de Hooke.

7.1.4 A força de tensão em fios e cabos

- Se puxarmos uma corda presa, esta estica-se e puxa-nos em sentido contrário com uma força igual.
- É como se a corda se comportasse como uma mola distendida, com uma constante elástica tão elevada que a deflexão da mola é desprezável.

- A tensão actuante numa corda é igual ao módulo da força que um segmento da corda exerce sobre o segmento vizinho.
- A tensão pode variar ao longo da corda, e.g. numa corda suspensa no tecto a tensão no topo da corda é superior à tensão no fundo da corda, pois um segmento do topo da corda tem de suportar quase todo o peso da corda.
- Consideremos numa corda um segmento que tem massa Δm e que está sujeito a uma tensão T_e do lado esquerdo e a outra tensão T_d do lado direito.
- Da 2ª lei de Newton vem,

$$T_d - T_e = \Delta m a.$$



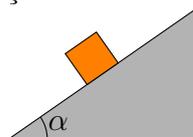
- Caso a massa do segmento seja tão pequena que possa ser desprezada, obtemos que $T_d = T_e$.
- Nesta disciplina vamos desprezar a massa das cordas, *assim podemos considerar que a tensão é a mesma ao longo de toda a corda.*
- Quando dois corpos em repouso estão ligados por uma corda tensa não deformável as forças que exercem entre si devem ser iguais e de sentidos opostos (3ª lei de Newton).
- Quando dois corpos em movimento rectilíneo estão ligados por uma corda tensa não deformável as componentes da aceleração paralelas à corda são idênticas para ambos os corpos.

Exemplo: aceleração num plano inclinado

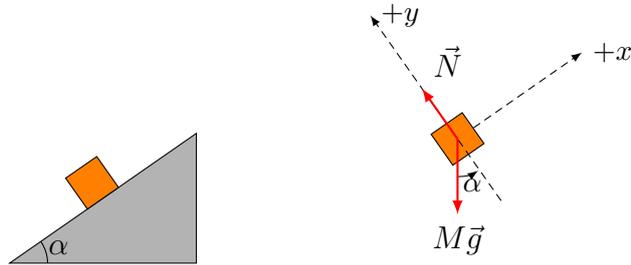
Exercício 12

Um bloco de massa M desliza, sem atrito, num plano inclinado dum ângulo α .

Qual é o módulo da aceleração do bloco?



- Construindo o diagrama de corpo livre (do bloco), representamos apenas as forças que actuam neste,



- As forças que actuam no bloco são a normal \vec{N} e o peso $\vec{P} = M\vec{g}$ e da 2ª lei de Newton vem,

$$\vec{P} + \vec{N} = M\vec{a}.$$

- Decompondo os vectores nas suas componentes x e y temos,

$$\begin{cases} x & -Mg \sin \alpha & = & Ma \\ y & N - Mg \cos \alpha & = & 0 \end{cases}$$

logo o módulo da aceleração é,

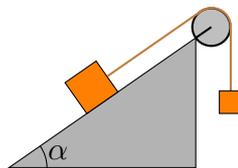
$$a = -g \sin \alpha$$

Exemplo: aceleração num plano inclinado II

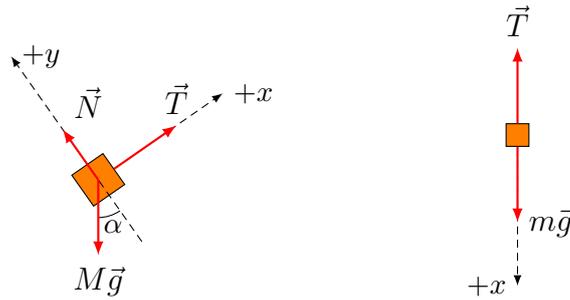
Exercício 13

Considere agora que ao bloco de massa M que desliza, sem atrito, num plano inclinado dum ângulo α é preso um outro bloco de massa m através dum fio que passa por uma polia, de massa desprezável e sem atrito (ver figura).

Qual é o módulo da aceleração dos blocos?



- Construindo o diagrama de corpo livre dos blocos, representamos apenas as forças que actuam nestes,



- As forças que actuam no bloco de massa M são a normal \vec{N} , a tensão do fio \vec{T} e o peso $\vec{P} = M\vec{g}$ então da 2ª lei de Newton vem,

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = M\vec{a}.$$

- Decompondo os vectores nas suas componentes x e y temos,

$$\begin{cases} x & T - Mg \sin \alpha = Ma \\ y & N - Mg \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

- Para o bloco de massa m temos,

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T} &= m\vec{a} \\ mg - T &= ma \\ T &= m(g - a) \end{aligned}$$

- Substituindo o valor de T na Eq. 7.2 vem,

$$m(g - a) - Mg \sin \alpha = Ma$$

logo o módulo da aceleração é,

$$a = \frac{m - M \sin \alpha}{m + M} g$$

Aula 8

Atrito e Forças Fictícias

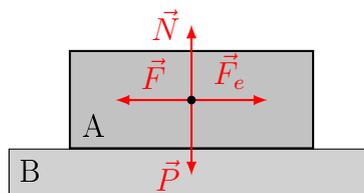
8.1 Atrito estático, cinético e de rolamento

8.1.1 Atrito estático

- Como mencionado antes a força de atrito é uma força tangente à superfície de contacto entre dois corpos que se tocam, por exemplo o corpo A e o corpo B .
- *O atrito é um fenómeno complexo* que tem origem nas interacções moleculares entre as moléculas que constituem as respectivas superfícies de cada corpo.
- Quando se aplica a um dos corpos, e.g. A , uma força \vec{F} tangente à superfície de contacto esse corpo pode não se mover relativamente ao corpo B .
- Se tal acontecer, as ligações moleculares entre os dois corpos estão a conseguir gerar uma *força de atrito estático*, \vec{F}_e que se opõem e equilibra a força externa exercida em A .
- A intensidade de tal força de atrito estático, que se opõem à força aplicada, pode variar desde valores próximos de zero, até um valor $\vec{F}_{e,max}$, dependendo da intensidade da força aplicada.
- A experiência mostra que $F_{e,max}$ é independente da área de contacto e é *proporcional ao módulo da força normal exercida por uma superfície na outra*,

$$F_{e,max} = \mu_e N,$$

onde a constante μ_e é o coeficiente de atrito estático que depende da natureza das superfícies em contacto.



8.1.2 Atrito cinético

- Se o corpo A for empurrado com força suficiente vai deslizar sobre o corpo B .
- Neste caso formam-se e rompem-se continuamente novas ligações moleculares resultando uma *força de atrito cinético* \vec{F}_c .
- Para manter A a deslizar sobre B com velocidade constante é necessário exercer uma força com o mesmo módulo e sentido oposto ao da força de atrito cinético.
- A experiência mostra que F_c é também proporcional ao módulo da força normal exercida por uma superfície na outra,

$$F_c = \mu_c N,$$

onde a constante μ_c é o coeficiente de atrito cinético que depende da natureza das superfícies em contacto.

- Experimentalmente verifica-se que $\mu_c < \mu_e$

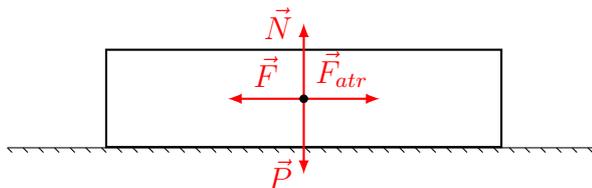
8.1.3 Atrito de rolamento

- Quando um corpo A rola sem deslizar sobre uma superfície plana, a zona de contacto nunca é apenas um ponto (matemático).
- Existe sempre uma deformação na zona de contacto do corpo A exercendo-se aí uma *força de atrito de rolamento* \vec{F}_r .
- Para manter A a rolar sobre a superfície com velocidade constante é necessário exercer uma força com o mesmo módulo e sentido oposto ao da força de atrito de rolamento.
- A experiência mostra que F_r é também proporcional ao módulo da força normal exercida por uma superfície na outra,

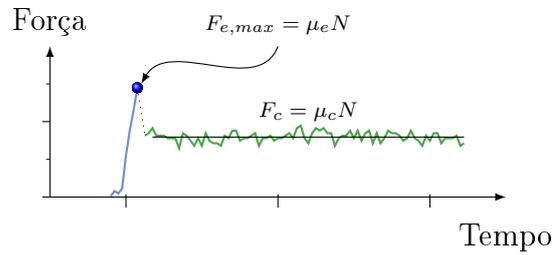
$$F_r = \mu_r N,$$

onde a constante μ_r é o coeficiente de atrito de rolamento que depende da natureza das superfícies em contacto.

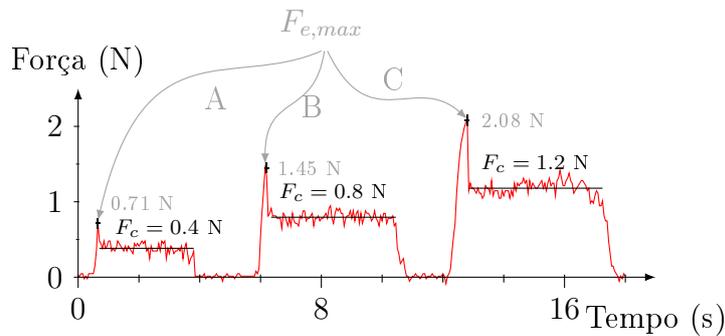
8.1.4 Medição experimental da força de atrito



- Um bloco de madeira é puxado com velocidade constante sobre uma superfície de madeira.

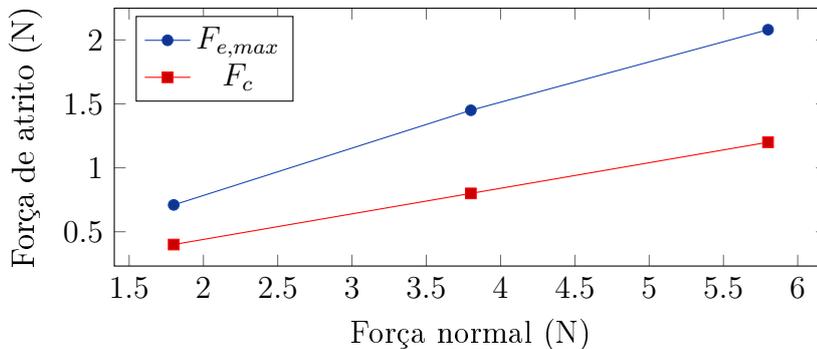


- Aumentando o peso do bloco de madeira aumentamos a força normal N .
- As medidas mostram claramente que a força de atrito estático máxima é *proporcional* à força normal.
- O mesmo se verifica para a força de atrito cinético.



- Os valores na tabela e o gráfico em baixo ilustram a relação de proporcionalidade.

	Normal	$\mu_e = F_{e,max}/N$	$\mu_c = F_c/N$
Experiência A	1.8 N	$\frac{0.71}{1.8} = 0.39$	$\frac{0.4}{1.8} = 0.22$
Experiência B	3.8 N	$\frac{1.45}{3.8} = 0.38$	$\frac{0.8}{3.8} = 0.21$
Experiência C	5.8 N	$\frac{2.08}{5.8} = 0.36$	$\frac{1.2}{5.8} = 0.21$



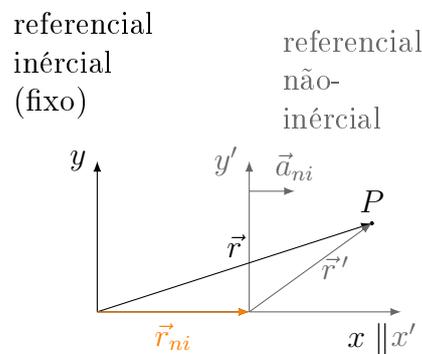
8.2 Forças fictícias

Referencial não inercial

- Consideremos um referencial que se move com *aceleração constante* relativamente a um outro referencial fixo.
- As posições duma partícula P em cada referencial relacionam-se por,

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{ni}$$

onde \vec{r}_{ni} é o vector posição do referencial não-inercial relativamente ao referencial fixo.



- Derivando em ordem ao tempo obtemos a relação entre as velocidades,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{ni}$$

- Derivando novamente obtemos a relação entre as acelerações,

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{ni}$$

- Considerando a partícula com massa m constante a 2ª lei de Newton diz que,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

ou em função de \vec{a}'

$$\vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{a}_{ni}$$

- A forma da 2ª lei de Newton é recuperada escrevendo,

$$\vec{F} - m\vec{a}_{ni} = m\vec{a}'$$

- A força $m\vec{a}_{ni}$ não é originada de forma idêntica a \vec{F} .
- Estas *forças chamam-se fictícias* por resultarem apenas da aceleração do referencial onde são medidas.

Exemplo: medir a aceleração com um telemóvel**Exercício 14**

Durante a aceleração dum avião na pista para levantar voo, uma jovem decide usar um telemóvel com massa m , para medir a aceleração do avião. Ao suspender o telemóvel livremente pelo fio do auricular, repara que durante a aceleração do avião o fio faz um ângulo de θ com a vertical.

Qual é a aceleração do avião e o valor da tensão no fio?

Resolva o problema de duas maneiras:

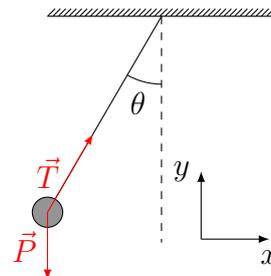
1^o considerando um referencial inercial onde é válida a 2a lei de Newton,

2^a considerando um referencial não inercial (acelerado) em repouso relativamente ao avião.

- Consideremos um referencial inercial que, e.g. está fixo na pista.
- As forças que actuam na massa m são a tensão no fio \vec{T} e o peso \vec{P} .
- No instante em que m fica em equilíbrio suspenso a θ com a vertical, a soma de todas as forças que nela actuam tem de ser nula obtendo,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}.$$



- No referencial cartesiano indicado na figura, podemos decompor a equação anterior nas suas componentes x e y ,

$$\begin{cases} x & \left\{ \begin{array}{l} T \sin \theta = m a \\ T \cos \theta = P \end{array} \right. & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} m a = P \tan \theta \\ T = \frac{P}{\cos \theta} \end{array} \right. \end{cases}$$

assim,

$$\begin{cases} T = \frac{m g}{\cos \theta} \\ a = g \tan \theta \end{cases}$$

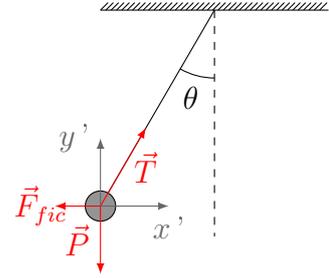
- Consideremos agora um referencial não inercial que, e.g. está preso à massa m .
- As forças que actuam em m são a tensão no fio \vec{T} e o peso \vec{P} .
- Contudo a jovem necessita de evocar uma *força fictícia*, \vec{F}_{fic} para explicar porque a massa m faz um ângulo de θ com a vertical, quando em equilíbrio.

- A inclusão desta força fictícia na soma de todas as forças que actuam em m permite usar a 2ª lei de Newton,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}'$$

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{fic} = 0,$$

pois m está em repouso no referencial dentro do avião



- Decompondo a equação anterior nas suas componentes x e y usando o referencial indicado na figura,

$$\begin{cases} x & T \sin \theta = F_{fic} \\ y & T \cos \theta = P \end{cases}$$

- As forças fictícias são proporcionais à massa do corpo,

$$\begin{cases} F_{fic} = m a_{ni} = P \tan \theta \\ T = \frac{P}{\cos \theta} \end{cases}$$

assim obtemos,

$$\begin{cases} T = \frac{mg}{\cos \theta} \\ a_{ni} = g \tan \theta \end{cases}$$

- *Sem a inclusão da força fictícia a 2ª Lei de Newton não explica, no referencial não-inercial, porque a massa m em repouso faz um ângulo com a vertical.*

8.3 Dinâmica do movimento circular

- Na secção 66, pag.26 definimos as componentes da aceleração tangencial \vec{a}_t (eq. 5.8) e normal \vec{a}_n (eq. 5.9) usadas no estudo do movimento curvilíneo.
- Usando a 2ª lei de Newton podemos rapidamente definir as componentes da força, tangencial F_t e normal F_n ,

$$\vec{F} = F_t \hat{u}_t + F_n \hat{u}_n$$

onde

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt} \quad (8.1)$$

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R}, \quad (8.2)$$

sendo R o raio de curvatura da trajetória.

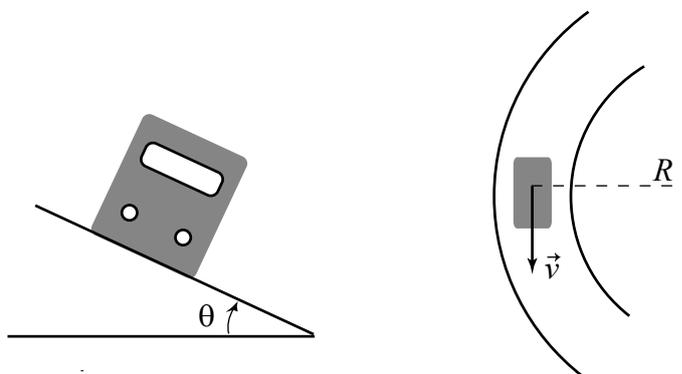
- A força normal aponta sempre para o centro de curvatura da trajetória.
- A força tangencial é responsável pela variação do módulo da velocidade.
- Se a força tangencial é zero, não há aceleração tangencial e o movimento é uniforme.
- Se a força normal é zero, não há aceleração normal e o movimento é retilíneo.
- No caso particular do movimento circular, vimos (eq. 5.14) que $v = \omega R$ então podemos escrever a força normal, também denominada força centrípeta como,

$$F_n = m\omega^2 R$$

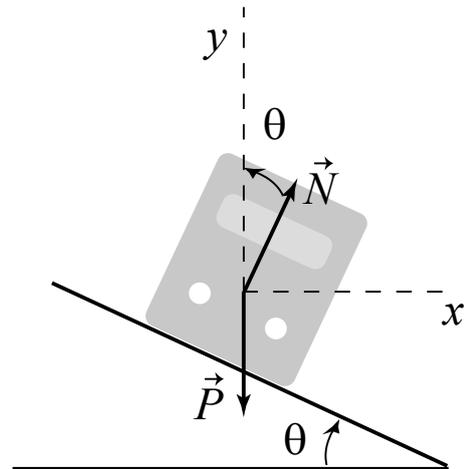
Exemplo: Relevê

Exercício 15

As vias ferroviárias e rodoviárias são inclinadas nas curvas de modo a produzir uma força centrípeta. Obter o ângulo de inclinação θ em função da velocidade v do veículo na curva, desprezando o atrito.



- Em primeiro lugar identificam-se as forças que actuam *só* no veículo (ver figura).
- Em seguida escolhe-se um referencial onde se projectarão todas as forças.



- Da segunda lei de Newton vem,

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}_n$$

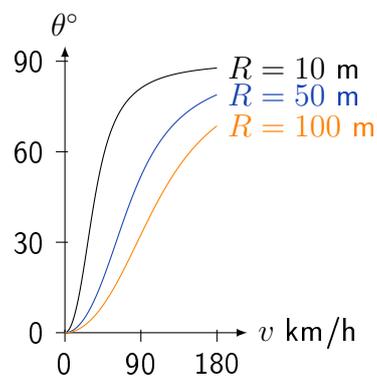
- Decompondo esta equação nas componentes x e y vem,

$$\begin{cases} x & \left\{ \begin{array}{l} N \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \\ N \cos \theta = P \end{array} \right. & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} P \tan \theta = m \frac{v^2}{R} \\ N = \frac{P}{\cos \theta} \end{array} \right. , \end{cases}$$

- Assim temos,

$$\theta = \arctan \left(\frac{v^2}{gR} \right).$$

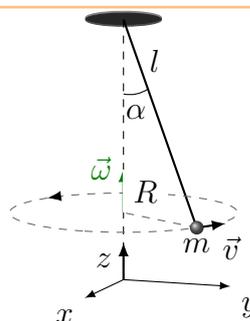
- Para um determinado θ , quanto maior é o raio da curva R , maior é a velocidade permitida ao veículo, sem que este deslize para fora da curva.



Exemplo: Pêndulo cônico**Exercício 16**

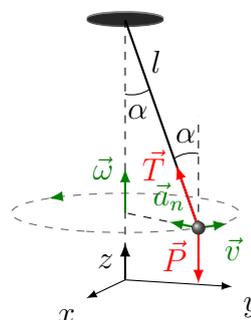
Um fio de comprimento l , ligado a um ponto fixo, tem numa extremidade uma massa m que gira em torno da vertical com velocidade angular ω constante.

Encontre o ângulo α que a corda faz com a vertical.



- As forças que actuam na massa m estão assinaladas em vermelho (ver figura) e as velocidades e acelerações a verde
- Usaremos o referencial inercial indicado.
- Da segunda lei de Newton vem,

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}_n$$



Projetando as forças no referencial inercial indicado obtemos

$$\begin{cases} x & -T \sin \alpha \cos \phi = -ma_n \cos \phi \\ y & -T \sin \alpha \sin \phi = -ma_n \sin \phi \\ z & T \cos \alpha - P = 0 \end{cases}$$

onde ϕ é o ângulo que \vec{a}_n faz com o eixo x .

A 1ª e 2ª Eq. são equivalentes logo,

$$\begin{cases} x & T \sin \alpha = ma_n \\ z & T \cos \alpha = P \end{cases}$$

Dividindo a Eq. em z pela Eq. em x e recordando que $a_n = \omega^2 R$ obtemos,

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{mg}{m\omega^2 R}$$

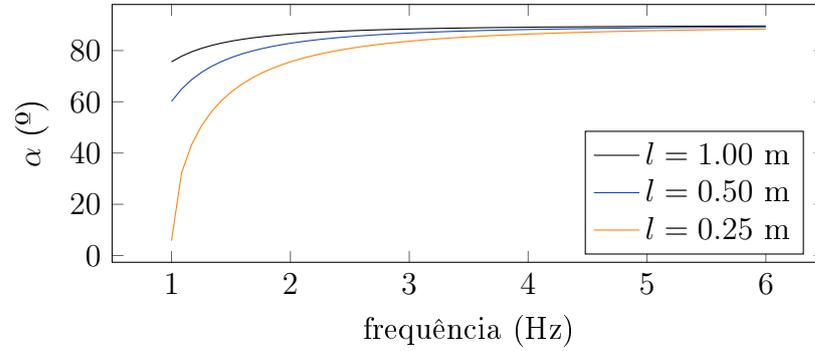
onde $R = l \sin \alpha$ é o raio da trajetória circular descrita pela massa m logo,

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{g}{\omega^2 l \sin \alpha}$$

Simplificando a expressão anterior o ângulo α procurado é,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right).$$

A figura ilustra o comportamento de α com ω para alguns valores de l ,



8.4 Condições para o equilíbrio estático numa partícula

- Uma partícula está em equilíbrio estático se a soma vectorial de todas as forças que actuam sobre ela é zero,

$$\sum_i \vec{F}_i = 0.$$

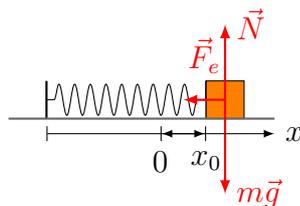
- Por exemplo se sobre uma partícula actuam 3 forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 para garantir que a partícula está em equilíbrio basta garantir que,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0.$$

Aula 9

Força elástica e movimento harmónico simples

9.1 Força elástica e movimento harmónico simples



- Consideremos uma massa m presa a uma mola que se pode deslocar na horizontal.
- Afastando a massa uma distância x_0 do ponto de equilíbrio e largando-a do repouso, qual será a sua posição no instante t ?
- A força normal cancela o peso.
- Apenas a força elástica atua na massa e na direção do movimento, logo de acordo com a 2ª lei de Newton temos,

$$F_e = ma$$
$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

que é uma equação diferencial linear de 2ª ordem

- Começemos por transformar a equação diferencial de 2^a ordem em duas de 1^a ordem,

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{dx}{dt} \\ -kx = m \frac{dv}{dt} \end{cases} \quad (9.1)$$

- Multipliquemos os dois lados da equação inferior por $2v$ ficando,

$$-2v \frac{k}{m} x = 2v \frac{dv}{dt}$$

o lado direito é a derivada de v^2 logo,

$$-2v \frac{k}{m} x = \frac{dv^2}{dt}$$

e substituindo $v = dx/dt$ no lado esquerdo fica,

$$\frac{-2k}{m} x \frac{dx}{dt} = \frac{dv^2}{dt}$$

- Multiplicando ambos os lados por dt temos uma equação com as variáveis separadas,

$$\frac{-2k}{m} x dx = dv^2$$

- Integrando ambos os membros vem,

$$\begin{aligned} \frac{-2k}{m} \int x dx &= \int dv^2 \\ \frac{-k}{m} x^2 &= v^2 + C \end{aligned}$$

onde C é uma constante de integração

- Quando abordarmos a conservação da energia vamos encontrar uma equação muito semelhante à anterior,

$$\frac{m}{2} v^2 + \frac{kx^2}{2} = \text{constante}$$

- Substituindo o valor obtido para a velocidade na equação 9.1 vem,

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ \sqrt{C - \frac{k}{m} x^2} &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

- Integrando esta equação podemos obter a posição $x(t)$ da massa para qualquer instante t .
- Separemos as variáveis,

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{C - \frac{k}{m}x^2}}$$

integrando ambos os membros vem,

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{C - \frac{k}{m}x^2}} \quad (9.2)$$

- O integral da esquerda é fácil.
- O integral da direita pode-se simplificar mudando de variável.
- Rearranjemos o integral da direita,

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{D - x^2}}$$

- e usemos a seguinte substituição,

$$x = \sqrt{D} \cos \theta$$

- Diferenciando temos,

$$dx = -\sqrt{D} \sin \theta d\theta$$

- Substituindo no integral vem,

$$-\sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{\sqrt{D} \sin \theta d\theta}{\sqrt{D - D \cos^2 \theta}}$$

- Vemos agora que o integral também se reduz a uma forma simples,

$$\begin{aligned} &= -\sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \\ &= -\sqrt{\frac{m}{k}} \theta + \alpha \end{aligned}$$

onde α é uma constante de integração

- Como,

$$x = \sqrt{D} \cos \theta$$

invertendo temos,

$$\theta = \arccos(\sqrt{D}x)$$

- Exprimindo o resultado em função da variável x vem,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{C - \frac{k}{m}x^2}} &= -\sqrt{\frac{m}{k}}\theta + \alpha \\ &= -\sqrt{\frac{m}{k}}\arccos(\sqrt{D}x) + \alpha \end{aligned}$$

- Podemos voltar agora à equação 9.2,

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{C - \frac{k}{m}x^2}}$$

integrando,

$$t = -\sqrt{\frac{m}{k}}\arccos(\sqrt{D}x) + \alpha$$

invertendo para obter $x(t)$ vem,

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{D} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) \\ &= x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) \end{aligned}$$

- Note-se que $\sqrt{\frac{k}{m}}$ tem as dimensões de radianos por segundo portanto, usando a frequência angular ω podemos escrever,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

onde T é o período da oscilação e f a sua frequência

- Assim $x(t)$ fica,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

- Derivando podemos obter $v(t)$ e $a(t)$,

$$v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$a(t) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x(t)$$

- Repare-se que a equação da aceleração é a equação com que iniciámos o cálculo,

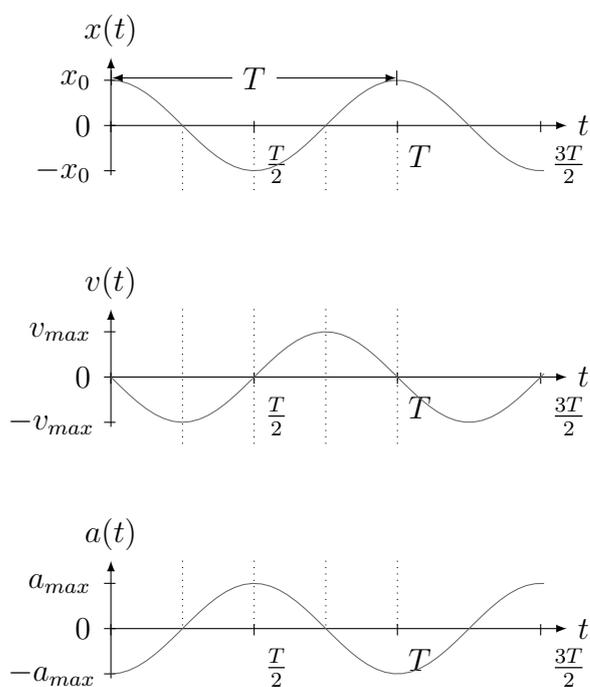
$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

como $\omega = \sqrt{k/m}$ vem,

$$a(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

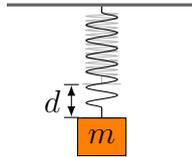
$$ma(t) = -kx(t)$$

- As três figuras seguintes ilustram $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.



Exemplo: Frequência de oscilação duma mola**Exercício 17**

Uma massa m suspensa de uma mola, vertical, com constante elástica k estica a mola de uma distância d . Se a mola for depois esticada e deixada a oscilar qual vai ser a frequência de oscilação, f da massa m ?



Em equilíbrio as forças que actuam na massa m são o peso e a força elástica,

$$kd = mg$$

$$k = \frac{mg}{d}$$

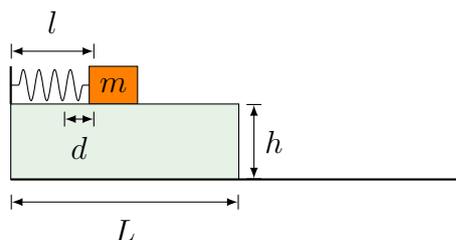
Vimos antes que a frequência de oscilação é dada por,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{d}}$$

Exemplo: Força elástica**Exercício 18**

Consideremos uma massa m , que se pode deslocar na horizontal sem atrito, encostada a uma mola com comprimento l e constante elástica k . Comprimindo a massa contra a mola duma distância d do ponto de equilíbrio e largando-a do repouso, qual será a distância à base da mola, alcançada pela massa m , considerando que esta ultrapassa o degrau de altura h indicado na figura? Quanto tempo demorou a massa a atingir a base do degrau?



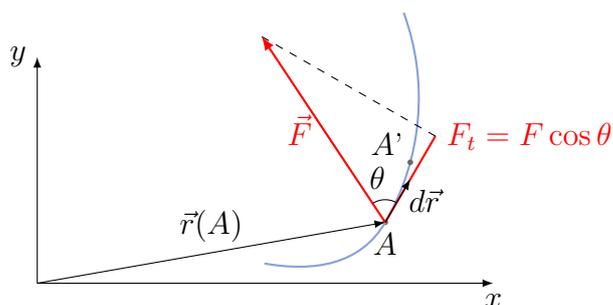
Sol: $\vec{r}(t_f) = \left(L + \omega d \sqrt{\frac{2h}{g}}\right) \hat{i}$, com $t_f = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{L-l}{d\omega} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Aula 10

Trabalho e energia

10.1 Trabalho de uma força

- Consideremos uma força F que faz mover uma partícula ao longo de uma curva C , como indica a figura



- Num intervalo de tempo muito curto a partícula desloca-se $d\vec{r}$ do ponto A para o ponto A' .
- O trabalho realizado pela força \vec{F} durante este pequeno deslocamento $d\vec{r}$ é definido pelo produto escalar,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (10.1)$$

- Indicando o módulo de $d\vec{r}$ por dr (a distância percorrida entre A e A') podemos escrever o trabalho elementar como,

$$dW = F dr \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo entre a direcção da força \vec{F} e o deslocamento $d\vec{r}$.

- Repare-se que $F \cos \theta = F_t$, i.e. é a componente tangencial da força \vec{F} .

- Assim podemos escrever *noutra forma equivalente* às duas anteriores que o trabalho é igual ao produto do deslocamento pela componente da força na direcção do deslocamento,

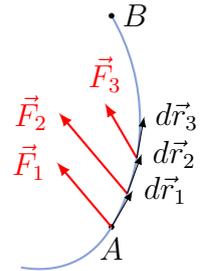
$$dW = F_t dr \quad (10.2)$$

- Da definição de trabalho resulta que *forças perpendiculares ao deslocamento não realizam trabalho*.
 - Para calcular o trabalho entre dois pontos A e B mais afastados, dividimos o percurso entre estes pontos em vários segmentos dr_i e somamos os vários produtos entre $F_{t_i} dr_i$,

$$\begin{aligned} W &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \\ &\quad \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}_3 + \dots \\ &= F_{t_1} dr_1 + F_{t_2} dr_2 + \\ &\quad F_{t_3} dr_3 + \dots, \end{aligned}$$

ou seja,

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_t dr \quad (10.3)$$



- Repare-se que se a *força for constante* ao longo de uma *trajectória recta* de comprimento L o trabalho é dado por,

$$W = \int_0^L \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \int_0^L dr = FL,$$

ou seja, apenas neste caso muito simples o trabalho é igual ao módulo da força vezes a distância.

- No caso geral em que a força tem componentes segundo X, Y e Z o trabalho é,

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ &= \int_{A_x}^{B_x} F_x dx + \int_{A_y}^{B_y} F_y dy + \int_{A_z}^{B_z} F_z dz. \end{aligned}$$

- *NOTA: o trabalho é um escalar.*
- A unidade de trabalho no SI é o joule (J).
- Portanto o trabalho mede-se em unidades de energia.

10.2 Potência

- Em engenharia é muitas vezes conveniente conhecer com que rapidez o trabalho é feito.
- A *potência instantânea* é definida por,

$$P = \frac{dW}{dt}, \quad (10.4)$$

ou seja a potência é o trabalho realizado por unidade de tempo num intervalo muito pequeno de tempo dt .

- A unidade de potência é o watt (W) que é 1 J por 1 s, (W=J/s).
- Recordando a Eq. 10.1,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- E substituindo na definição de potência vem,

$$\begin{aligned} P &= \frac{dW}{dt} \\ &= \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v}, \end{aligned}$$

que é o produto escalar entre a força e a velocidade da partícula.

- A potência média quando se realizou um trabalho W num intervalo de tempo Δt é,

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t},$$

10.2.1 Exemplo: Potência do motor de um elevador

Exercício 19

No edifício B da FEUP cada elevador pode levar no máximo 8 adultos com 78Kg cada. Se o elevador demorar 45 s a subir os 3 pisos, calcule a potência mínima que o motor terá que desenvolver. Considere uma distância entre pisos de 3 m e que a caixa do elevador pesa 100Kg.

Calcule a energia gasta a subir com o elevador cheio e só com uma pessoa.

Se o custo do kWh for de 0.14 euros qual o valor mínimo de cada subida com o elevador cheio?

- Subindo a velocidade constante (aceleração nula) o motor tem de fazer uma força igual ao peso das pessoas mais da caixa do elevador.
- Com o elevador cheio o peso total é:

$$\begin{aligned}F_{tot} &= (8 \times 78 + 100) \times 9.81 \\ &= 7102.4 \text{ N}\end{aligned}$$

- A velocidade de subida é,

$$v = \frac{9}{45} = 0.2 \text{ m/s}$$

- Então a potência mínima será,

$$\begin{aligned}P_{min} &= F_{tot} \times v \\ &= 1420.5 \text{ W}\end{aligned}$$

- A energia gasta a subir com o elevador cheio é,

$$\begin{aligned}W_{cheio} &= P \Delta t \\ &= 1420.5 \times 45 = 63922 \text{ J}\end{aligned}$$

- Com o elevador só com uma pessoa é,

$$\begin{aligned}W_{1p} &= 178 \times 9.81 \times 9 \\ &= 15715.6 \text{ J}\end{aligned}$$

- $1 \text{ KWh} = 1000 \times 3600 \text{ J}$

- O custo mínimo de cada subida com elevador cheio é,

$$63922 \times \frac{0.14}{3.6 \times 10^6} = 0.002 \text{ euros}$$

10.3 Energia cinética

- Recordando a força tangencial (eq. 8.1) $F_t = m \frac{dv}{dt}$ podemos escrever,

$$\begin{aligned}F_t dr &= m \frac{dv}{dt} dr \\ &= m dv \frac{dr}{dt}\end{aligned}$$

como $v = dr/dt$ vem,

$$= mv dv,$$

- Usando este resultado podemos escrever o trabalho realizado por uma força \vec{F} que actua numa partícula de massa m , entre A e B como,

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B F_t dr \\ &= \int_{v_A}^{v_B} mv dv \\ &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2, \end{aligned}$$

onde v_A e v_B é respectivamente a velocidade da partícula em A e B .

- Este resultado é independente da forma de \vec{F} e da trajectória seguida pela partícula
- *O trabalho é sempre igual à variação da quantidade $mv^2/2$ entre o fim e o início da trajectória.*
- A esta quantidade chama-se a energia cinética da partícula E_c ,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{ou} \quad E_c = \frac{p^2}{2m} \quad (10.5)$$

onde $p = mv$ é o momento linear da partícula.

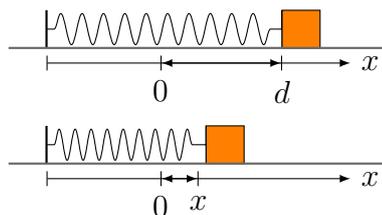
- Resumindo podemos dizer que, *o trabalho realizado sobre uma partícula pela força resultante é igual à variação da energia cinética dessa partícula,*

$$W = E_{cB} - E_{cA} = \Delta E_c \quad (10.6)$$

10.3.1 Exemplo: Trabalho da força elástica

Exercício 20

Uma mola na horizontal, com constante de elasticidade k , está presa a uma parede e na outra extremidade tem presa uma massa m . Deslocando a massa m uma distância d do ponto de equilíbrio da mola e soltando-a, calcule a sua velocidade quando ela se encontra a uma distância x do ponto de equilíbrio da mola.



- Recordando que $W = \Delta E_c$, calculemos primeiro o trabalho realizado pela força elástica entre d e o ponto x ,

$$\begin{aligned} W &= \int_d^x \vec{F}_e \cdot d\vec{x} \\ &= \int_d^x -k\vec{x} \cdot d\vec{x}, \end{aligned}$$

como $\vec{x} = x \hat{i}$ e $d\vec{x} = dx \hat{i}$ vem que,

$$\begin{aligned} W &= \int_d^x -kx \hat{i} \cdot dx \hat{i} = \int_d^x -kx dx \\ &= \frac{k}{2} (d^2 - x^2), \end{aligned}$$

- Então,

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_c \\ &= E_c(x) - E_c(d) \\ \frac{k}{2} (d^2 - x^2) &= \frac{1}{2}mv(x)^2 - \frac{1}{2}mv(d)^2, \end{aligned}$$

como $v(d) = 0$ obtemos,

$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(d^2 - x^2)}.$$

- Repare-se que a velocidade tem o valor máximo para $x = 0$, que é o ponto de equilíbrio da mola e que à medida que se afasta de $x = 0$ a velocidade diminui até zero, quando está em $x = d$.

10.3.2 Trabalho de uma força constante em módulo, direcção e sentido

- Calculemos o trabalho realizado para mover entre A e B uma partícula de massa m sob a acção de uma força \vec{F} que é constante em módulo, direcção e sentido,

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A).$$

- Conclui-se que neste caso, o trabalho é independente da trajectória que a partícula segue quando vai do ponto A para o ponto B , i.e. *se a força \vec{F} é constante em módulo, direcção e sentido o trabalho só depende do cálculo de $\vec{F} \cdot \vec{r}$ no fim e no início da trajectória.*
- Uma aplicação, muito importante, deste resultado é quando *a força em questão é o peso da partícula.*
- Já vimos anteriormente que na superfície da Terra podemos considerar o peso como uma força constante em módulo, direcção e sentido.
- Considerando por exemplo o movimento duma partícula entre os pontos

$$\vec{r}_A = x_A \hat{i} + y_A \hat{j}$$

e

$$\vec{r}_B = x_B \hat{i} + y_B \hat{j},$$

sendo o peso da partícula dado por

$$\vec{P} = -mg \hat{j}.$$

- O trabalho realizado sobre a partícula entre estes dois pontos é,

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{r} \\ &= \vec{P} \cdot \int_A^B d\vec{r} \\ &= \vec{P} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \\ &= -mg \hat{j} \cdot (x_B \hat{i} + y_B \hat{j} - x_A \hat{i} - y_A \hat{j}) \\ &= -mg(y_B - y_A) \\ &= mgy_A - mgy_B. \end{aligned} \tag{10.7}$$

- Repare-se que *neste caso o trabalho só depende da diferença de altura entre os dois pontos A e B .*

10.4 A energia potencial e as forças conservativas

- A situação ilustrada anteriormente é um exemplo de uma grande e importante classe de forças chamadas, forças conservativas.

- Uma força é conservativa quando o trabalho que ela realiza sobre uma partícula é independente da trajetória que a partícula segue, e apenas depende do valor que a quantidade E_p tem nos pontos final e inicial da trajetória.
- A quantidade E_p é chamada *energia potencial da partícula* e é função das coordenadas da partícula $E_p(x, y, z)$.
- Logo se \vec{F} é conservativa,

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B} \quad (10.8)$$

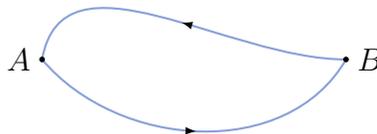
- Resumindo:
 - $W = \Delta E_c$ é sempre verdade para qualquer força.
 - mas,
 - $W = -\Delta E_p$ só é verdade se a força for conservativa.

10.4.1 Forças conservativas, independência da trajetória

- Na eq. 10.8 mostrámos que o trabalho realizado por certo tipo de forças é

$$W = -\Delta E_p$$

- Ou seja só depende do valor que a energia potencial E_p tem no fim e no início da trajetória e não depende da trajetória em si.
- Outra forma de mostrar esta independência da trajetória é considerando um percurso fechado, i.e. a partícula vai da A a B e depois regressa a A .



- Neste caso, da eq. 10.8, o trabalho total é,

$$W = \int_A^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,A} = 0 \quad (10.9)$$

O que significa que ao longo de parte da trajectória o trabalho é *positivo* e ao longo da outra parte o trabalho é *negativo* mas com o mesmo valor absoluto.

- A eq. 10.9 é outra forma de dizer que *as forças conservativas não realizam trabalho ao longo duma trajectória fechada* e pode ser adoptada como *definição de força conservativa*.

10.5 Energia potencial gravítica e elástica

Energia potencial gravítica

- Já vimos anteriormente (eq. 10.7) que o trabalho realizado pelo peso de uma partícula quando esta vai de A a B é dado por,

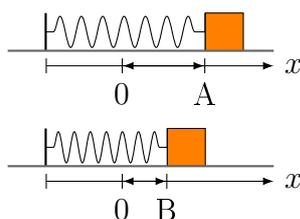
$$W = mgy_A - mgy_B.$$

- Ou seja a energia potencial gravítica para uma partícula que está à altura y é

$$E_p = mgy$$

Energia potencial elástica

- Calculemos de forma análoga a energia potencial elástica duma mola, considerando uma partícula de massa m que está sujeita à força elástica duma mola com constante de elasticidade k .
- Consideremos que o movimento se dá ao longo do eixo X e que a partícula vai do ponto A para o ponto B .



- Neste caso temos que $\vec{F} = -kx \hat{i}$ e $d\vec{r} = dx \hat{i}$ então,

$$\begin{aligned}
 W &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_A^B -kx \hat{i} \cdot dx \hat{i} = -k \int_A^B x dx \\
 &= -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2) \\
 &= \frac{kx_A^2}{2} - \frac{kx_B^2}{2}
 \end{aligned} \tag{10.10}$$

novamente o trabalho é função dum quantidade que depende apenas dos pontos, iniciais e finais da trajectória.

- Essa quantidade é a *energia potencial elástica* associada à força da mola, quando a mola está a uma distância x do seu ponto de equilíbrio,

$$E_p = \frac{kx^2}{2} \tag{10.11}$$

10.5.1 Obtenção da força conservativa a partir da energia potencial

- Para uma trajectória entre dois pontos quaisquer A e B vimos que o trabalho realizado por uma força conservativa é dado por

$$W = -\Delta E_p$$

- Se os pontos A e B estão muito próximos, a uma distância infinitesimal um do outro, o trabalho elementar realizado é,

$$dW = -dE_p \tag{10.12}$$

- Esta equação é equivalente à eq. 10.1 que diz que $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ou à eq. 10.2 que diz $dW = F_t dr$ ou seja o trabalho num deslocamento elementar dr é o produto da componente tangencial da força pelo deslocamento.
- Então da eq. 10.12 e da eq. 10.2 vem que,

$$F_t dr = -dE_p$$

logo podemos também escrever que,

$$F_t = -\frac{dE_p}{dr}$$

ou seja podemos obter a *componente tangencial da força conservativa através da derivada da energia potencial ao longo da tangente*.

- No caso do movimento unidimensional é fácil exemplificar a situação anterior, pois neste caso $F = F_t$.
- Por exemplo para uma partícula que se move ao longo do eixo X sob a acção de uma força F_x vem,

$$F_x dx = - dE_p$$

logo

$$F_x = - \frac{dE_p}{dx} \quad (10.13)$$

- Consideremos o caso duma partícula sujeita a uma força elástica.
- Como vimos atrás (eq. 10.11) a energia potencial elástica é dada por,

$$E_p = \frac{kx^2}{2},$$

então aplicando a eq. 10.13 vem,

$$\begin{aligned} F &= - \frac{dE_p}{dx} \\ &= - \frac{d}{dx} \left(\frac{kx^2}{2} \right) \\ &= - kx, \end{aligned}$$

que é precisamente o valor da força elástica.

10.6 Conservação da energia de uma partícula

Energia mecânica

- Quando a força que actua numa partícula é conservativa vimos que

$$W = -\Delta E_p$$

- Também mostrámos que para qualquer tipo de força

$$W = \Delta E_c$$

- Combinando as duas relações temos,

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= -\Delta E_p \\ E_{c,B} - E_{c,A} &= E_{p,A} - E_{p,B} \\ E_{c,B} + E_{p,B} &= E_{c,A} + E_{p,A} \end{aligned}$$

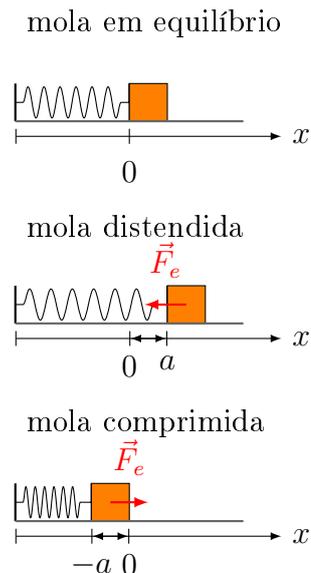
a quantidade $E_T = E_c + E_p$ é chamada a *energia mecânica total* da partícula E_T .

- A relação anterior apenas mostra que a energia mecânica total das forças conservativas é constante ou seja,

$$E_T = E_c + E_p = \text{constante} \quad (10.14)$$

- *Havendo conservação da energia mecânica durante um movimento implica que a energia da partícula é transferida da forma cinética para potencial e vice versa, de modo que a soma das duas permanece constante.*

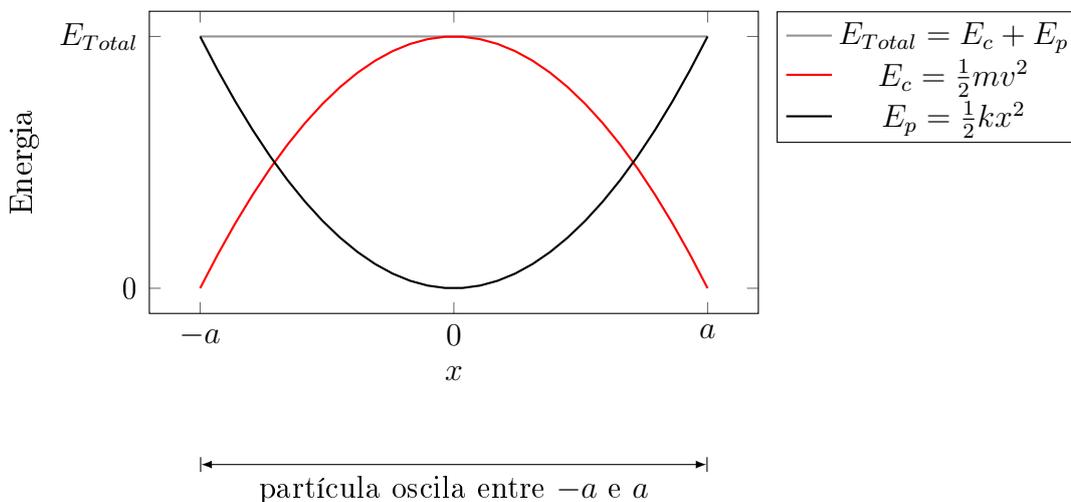
- Vejamos como exemplo o caso da força elástica, que já mostrámos antes ser uma força conservativa, considerando um sistema constituído por uma massa m presa a uma mola (de massa desprezável) com constante elástica k .
- Quando a mola está em equilíbrio a massa está em $x = 0$.
- Inicialmente a massa é largada em repouso de $x = a$.
- Quanto tempo demora a massa a deslocar-se até $x = -a$?



- A energia mecânica total da massa m será constante e igual à sua energia cinética mais a energia potencial,

$$E_{Total} = E_c + E_p$$

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$



- Podemos então escrever,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}ka^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ v^2 &= \frac{k}{m}(a^2 - x^2) \\ v &= \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}\end{aligned}$$

- Sendo $v = dx/dt$ temos,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)} \\ dt &= \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}}\end{aligned}$$

- Como o lado direito só depende de x e o lado esquerdo só depende de t podemos integrar ambos os membros ficando,

$$\begin{aligned}\int_0^t dt &= \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}} \\ &= \left[\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) \right]_{-a}^a \\ t &= \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.\end{aligned}$$

- $\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ é o tempo que a massa demora a ir de $x = a$ até $x = -a$.
- Para voltar novamente a $x = a$ demora outro tanto.
- Neste caso a massa m executará oscilações em torno de $x = 0$ com período $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.
- *Durante cada oscilação a massa m troca continuamente energia cinética com energia potencial de modo a manter a energia total constante.*

Aula 11

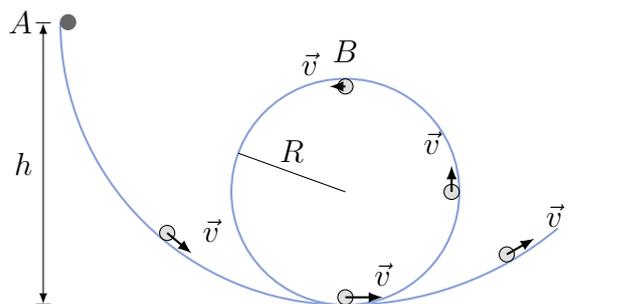
Trabalho e energia, continuação

11.1 Exemplos de aplicação

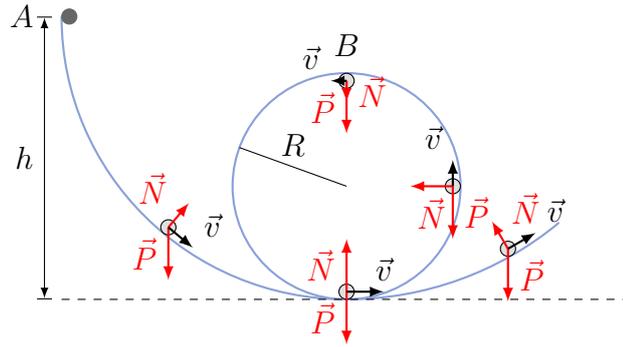
11.1.1 Exemplo: altura mínima para descrever um *looping*

Exercício 21

Determine a altura mínima da qual deve partir a bola, em repouso, para fazer o *looping* (ver figura), supondo que a bola desliza sem rolar e sem atrito.



A partícula completa o looping se, ao atingir o ponto B , ainda estiver em contacto com a superfície, o que implica que nesse ponto a reacção normal $\vec{N} \neq 0$.



A conservação da energia mecânica da partícula entre, a sua posição inicial A e a posição B impõe que,

$$\begin{aligned} E_T(A) &= E_T(B) \\ E_c(A) + E_p(A) &= E_c(B) + E_p(B) \\ E_p(A) &= E_c(B) + E_p(B) \end{aligned}$$

pois como a partícula parte do repouso, $E_c(A) = 0$.

Assim vem,

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv_B^2 + mg2R \\ h &= \frac{1}{2g}v_B^2 + 2R. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Por outro lado no ponto B , a 2ª lei de Newton implica que,

$$N + P = m \frac{v_B^2}{R}.$$

A velocidade limite mínima que a partícula pode ter em B para completar o looping ocorre quando $N = 0$.

Assim podemos encontrar v_B ,

$$v_B^2 = gR,$$

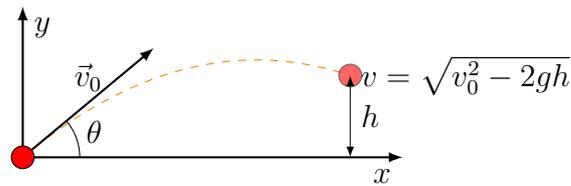
e substituindo na Eq.11.1 obtemos o valor de h pretendido,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2g}v_B^2 + 2R \\ &= \frac{1}{2g}gR + 2R \\ &= \frac{5R}{2}. \end{aligned}$$

11.1.2 Exemplo: Voo dum projétil

Exercício 22

Um projétil é lançado com uma velocidade inicial \vec{v}_0 que faz um ângulo θ com a horizontal. Desprezando o atrito use a conservação da energia mecânica e mostre que o módulo da velocidade v do projétil quando este se encontra a uma altura h qualquer acima do solo é independente de θ .



A conservação da energia mecânica do projétil entre, a sua posição inicial e a posição quando está a uma altura y impõe que,

$$\begin{aligned} E_{T0} &= E_{Th} \\ E_{c0} &= E_{ch} + E_{ph} \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mgh, \end{aligned}$$

eliminando a massa m e rearranjando os termos vem,

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 - 2gh \\ v &= \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \end{aligned}$$

11.1.3 Exemplo: Subida numa rampa

Exercício 23

Um bloco, de massa m , sobe com velocidade inicial \vec{v}_0 uma rampa inclinada de um ângulo θ com a horizontal. O atrito entre o bloco e a rampa é desprezável. Usando a conservação da energia mecânica mostre que a altura máxima h , atingida pelo bloco é independente de θ .



A conservação da energia mecânica do bloco entre, a sua posição inicial e a posição quando está a uma altura y impõe que,

$$E_{T0} = E_{T_y}$$

$$E_{c0} + E_{p0} = E_{c_y} + E_{p_y}.$$

O bloco atinge a altura máxima quando a sua velocidade é zero logo $E_{c_y} = 0$ obtendo,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 = mgy$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g},$$

onde $h = (y - y_0)$.

11.1.4 Exemplo:Força central

Exercício 24

Uma força no plano XY é expressa por $\vec{F} = -\frac{b}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j})$, onde b é uma constante positiva e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Mostre que o módulo da força varia com o inverso do quadrado da distância à origem e que o seu sentido aponta, radialmente, para a origem.

(b) Se $b = 3 \text{ Nm}^2$, determine o trabalho realizado por essa força sobre uma partícula que se move ao longo de uma trajectória em linha recta entre uma posição inicial $x = 2 \text{ m}$, $y = 0 \text{ m}$ e uma posição final $x = 5 \text{ m}$, $y = 0 \text{ m}$.

(c) Determine o trabalho realizado por essa força sobre uma partícula que se move uma vez em torno de um círculo de raio $r = 7 \text{ m}$ centrado na origem.

(d) Sendo essa a única força actuante sobre a partícula, qual é a velocidade da partícula quando ela se move ao longo dessa trajectória circular? Admita que a massa da partícula seja $m = 2 \text{ kg}$.

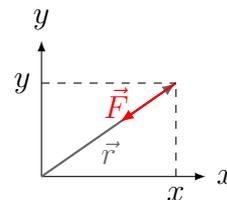
(e) Mostre que essa força é conservativa.

(a) Usando o vector posição de um ponto de coordenadas (x, y) , $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ podemos escrever a força como,

$$\vec{F} = -\frac{b}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j})$$

$$= -\frac{b}{r^3}\vec{r}$$

$$= -\frac{b}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$



mas $\vec{r}/r = \hat{r}$ i.e. é o versor do vetor posição \vec{r} . Assim temos,

$$\vec{F} = -\frac{b}{r^2}\hat{r},$$

logo o módulo da força é b/r^2 , a direção é a do versor \hat{r} e o sentido é o contrário ao versor devido ao sinal $-$, i.e a força aponta para a origem do referencial.

(b) Recordando a Eq.10.3 (definição de trabalho de uma força \vec{F}) temos,



Da definição de trabalho de uma força \vec{F} temos,

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

fazendo $d\vec{l} = dx \hat{i}$ obtemos,

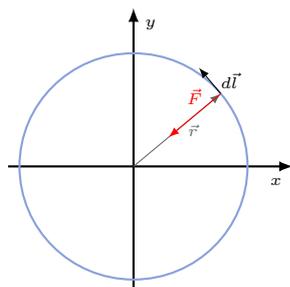
$$\begin{aligned} &= \int_A^B -\frac{b}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x \hat{i} + y \hat{j}) \cdot dx \hat{i} \\ &= - \int_{x_A}^{x_B} \frac{b}{(x^2 + y^2)^{3/2}} x dx \hat{i} \cdot \hat{i}, \end{aligned}$$

como $x_A = 2$, $x_B = 5$, $y = 0$ e $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$ vem,

$$= -b \int_2^5 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{9}{10} \text{ J}$$

(c) Neste caso sendo $d\vec{l}$ tangente à trajetória circular e sendo a força radial, conclui-se que $d\vec{l}$ é perpendicular a \vec{F} .

- Logo $\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ e o trabalho é nulo.
- *Como se mostra este resultado algebricamente?*



(d) Se a partícula descreve uma trajetória circular com velocidade constante, a força centrípeta é igual ao módulo da força F ,

$$\begin{aligned}\frac{b}{r^2} &= m \frac{v^2}{r} \\ v^2 &= \frac{b}{mr} \\ v &= 0.46 \text{ m/s}.\end{aligned}$$

(e) Vimos na b) que o trabalho da força F num deslocamento segundo x é,

$$W = \frac{b}{r}$$

Tomando um deslocamento numa direção arbitrária,

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}$$

sendo $\hat{\theta}$ perpendicular a \hat{r} , o trabalho fica,

$$\begin{aligned}W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \int \frac{-b}{r^2} \hat{r} \cdot (dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta})\end{aligned}$$

como $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$ e $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$ vem,

$$W = \int \frac{-b}{r^2} dr = \frac{b}{r}$$

o mesmo resultado obtido antes, logo o trabalho só depende da posição.

A força \vec{F} é conservativa.

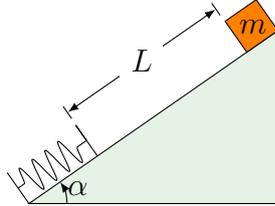
A energia potencial associada a esta força é $E_p = \frac{b}{r}$.

A força eletrostática e a força gravítica têm a mesma estrutura de \vec{F} , logo são forças centrais.

11.1.5 Exemplo: Conversão de energia pot. gravítica em elástica

Exercício 25

Um corpo de massa m é largado do topo dum plano inclinado que faz um ângulo α com a horizontal. A posição inicial do corpo está a uma distância L duma mola de constante elástica k . Usando a conservação da energia mecânica calcule a deflexão máxima, d que a mola sofre quando o corpo a atinge. Despreze as perdas por atrito.



A conservação da energia mecânica do corpo entre, a sua posição inicial e a posição final quando comprime a mola de uma deflexão máxima d impõe que,

$$E_{T_i} = E_{T_f}$$

$$E_{p \text{ grav. } i} + E_{p \text{ elast. } i} + E_{c_i} = E_{p \text{ grav. } f} + E_{p \text{ elast. } f} + E_{c_f}$$

Nos instantes t_i e t_f o corpo está em repouso logo,

$$E_{c_i} = E_{c_f} = 0$$

repare-se que também se verifica que,

$$E_{p \text{ elast. } i} = 0$$

Podemos também escolher,

$$E_{p \text{ grav. } f} = 0$$

Restam então os termos,

$$E_{p \text{ grav. } i} = E_{p \text{ elast. } f}$$

$$mgh = k \frac{d^2}{2}$$

A altura relativa à máxima compressão da mola é $h = (L + d) \sin \alpha$ logo,

$$mg(L + d) \sin \alpha = k \frac{d^2}{2}$$

$$d^2 - 2d \frac{mg}{k} \sin \alpha - 2 \frac{mgL}{k} \sin \alpha = 0$$

$$d = \frac{mg}{k} \left[\sin \alpha + \sqrt{\sin \alpha \left(1 + \frac{2kL}{mg} \right)} \right]$$

Para $\alpha = 0$ o corpo não se move logo $d = 0$.

Para $\alpha = 90$ o corpo cai na vertical e,

$$d = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right)$$

11.2 Equilíbrio estável, instável e neutro

- Recordemos que,

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

- A força aponta no sentido em que a energia potencial decresce.
- Uma partícula sujeita apenas a forças conservativas está em equilíbrio se,

$$F_x(x) = 0 \quad \text{quando} \quad \begin{cases} E_p(x) = \text{constante} \\ \frac{dE_p(x)}{dx} = 0 \end{cases}$$

- Podemos distinguir 3 tipos de equilíbrio:

equilíbrio neutro

Se $E_p = \text{constante}$ numa região do espaço então nessa região a partícula está em *equilíbrio neutro*

equilíbrio instável

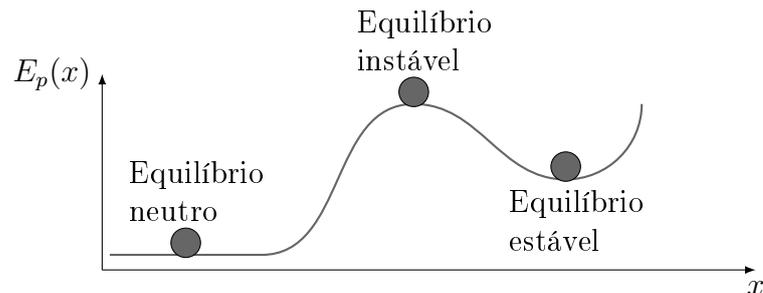
Num máximo da energia potencial

$$\frac{dE_p(x)}{dx} = 0 \wedge \frac{d^2E_p(x)}{dx^2} < 0$$

equilíbrio estável

Num mínimo da energia potencial

$$\frac{dE_p(x)}{dx} = 0 \wedge \frac{d^2E_p(x)}{dx^2} > 0$$



11.3 Trabalho e conservação da energia na presença de forças não conservativas

- Se numa partícula actuarem forças conservativas e não conservativas o trabalho total W é a soma do trabalho realizado pelas forças conservativas $-\Delta E_p$ com o trabalho realizado pelas forças não conservativas W' ,

$$W = -\Delta E_p + W'$$

como o trabalho total é sempre igual à variação da energia cinética temos,

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= -\Delta E_p + W' \\ E_{c,B} + E_{p,B} - E_{c,A} - E_{p,A} &= W' \end{aligned}$$

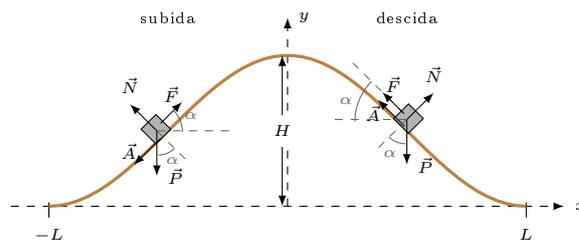
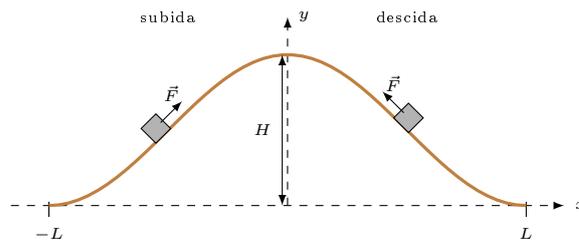
- Neste caso a quantidade $E_c + E_p$ não permanece constante e não é a energia total da partícula.

11.3.1 Exemplo: Trabalho da força de atrito

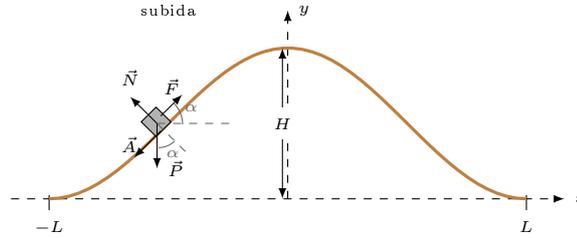
Exercício 26

Um corpo de massa m foi lentamente puxado por uma força \vec{F} , primeiro por um monte acima e depois para baixo. Durante todo o percurso, feito a velocidade constante, a força \vec{F} manteve-se sempre paralela ao deslocamento.

Considerando que o coeficiente de atrito é μ_c , o comprimento da base do monte é $2L$ e a altura é H , calcule o trabalho realizado pela força \vec{F} .



- Na figura estão representadas as forças que actuam no corpo durante a subida e a descida.
- A força \vec{F} é tangente ao caminho.
- O ângulo que a tangente faz com a horizontal é α .



- Da 2ª lei de Newton o módulo da força \vec{F} é dado por,

$$\begin{aligned} F &= P \sin \alpha + A \\ &= P \sin \alpha + \mu_c N \end{aligned}$$

como $N = P \cos \alpha$ vem,

$$= P (\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha)$$

- O trabalho elementar realizado pela força \vec{F} é,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

como $\vec{F} \parallel d\vec{r}$ então,

$$\begin{aligned} &= F dr \\ &= P (\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha) dr \end{aligned}$$

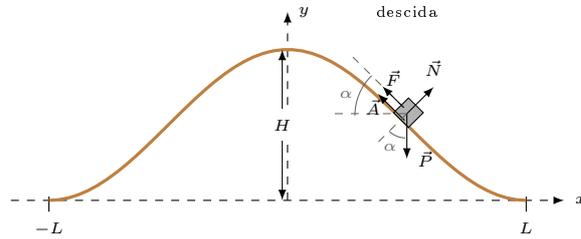
- Note-se que $dr \sin \alpha = dy$ e que $dr \cos \alpha = dx$ assim,

$$dW = P dy + P \mu_c dx$$

- Então o trabalho total realizado na subida é,

$$\begin{aligned} W_{subida} &= \int_0^H P dy + \int_{-L}^0 P \mu_c dx \\ &= PH + P \mu_c L \end{aligned}$$

- Repare-se que $PH = mgH$ é a variação da energia potencial gravítica entre a base e o topo do monte.



- Da 2ª lei de Newton o módulo da força \vec{F} durante a descida é dado por,

$$\begin{aligned} F &= P \sin \alpha - A \\ &= P \sin \alpha - \mu_c N \end{aligned}$$

como $N = P \cos \alpha$ vem,

$$= P (\sin \alpha - \mu_c \cos \alpha)$$

- O trabalho elementar realizado pela força \vec{F} na descida é,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

como \vec{F} e $d\vec{r}$ são antiparalelos então,

$$\begin{aligned} &= -F dr \\ &= -P (\sin \alpha - \mu_c \cos \alpha) dr \end{aligned}$$

- Note-se que $dr \sin \alpha = -dy$ e que $dr \cos \alpha = dx$ assim,

$$dW = P dy + P \mu_c dx$$

- Então o trabalho realizado na descida pela força \vec{F} é,

$$\begin{aligned} W_{descida} &= \int_H^0 P dy + \int_0^L P \mu_c dx \\ &= -PH + P \mu_c L \end{aligned}$$

- Repare-se que $-PH = -mgH$ é a variação da energia potencial gravítica entre o topo e a base do monte.

- Somando o trabalho total realizado (subida + descida) vem,

$$\begin{aligned}W_{subida} + W_{descida} &= PH + P\mu_c L - PH + P\mu_c L \\ &= 2\mu_c PL\end{aligned}$$

- O trabalho total realizado pela força \vec{F} é apenas igual ao trabalho da força de atrito.

Aula 12

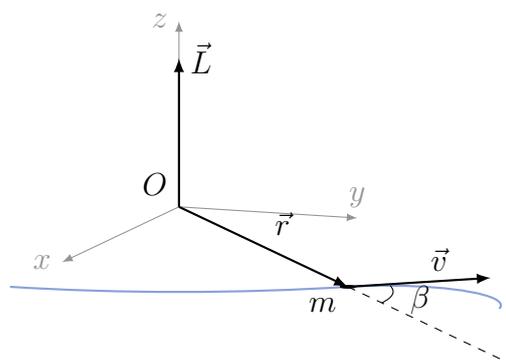
Momento angular de uma partícula

12.1 Definição de vetor momento angular

- Como vimos antes uma quantidade física crucial na 2ª lei de Newton é a quantidade de movimento de uma partícula, também chamada de *momento linear*, $\vec{p} = m\vec{v}$.
- Quando uma partícula roda em torno de um eixo podemos definir uma outra quantidade física igualmente importante em mecânica, o *momento angular*, \vec{L} .

- O *momento angular* em relação ao ponto O , de uma partícula de massa m que se move com velocidade \vec{v} é definido como,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= \vec{r} \times m\vec{v} \\ &= rmv \sin \beta \hat{k}\end{aligned}$$

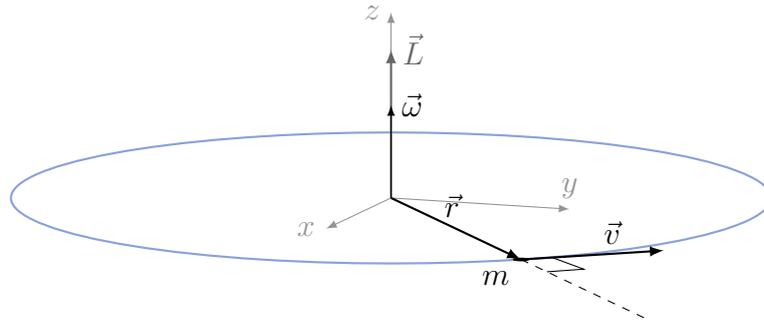


onde \vec{r} é o vetor posição da partícula relativamente a O e $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momento linear da partícula que faz um ângulo β com \vec{r} .

- Da definição de produto vectorial (ver Eq. 2.1) resulta que \vec{L} é *perpendicular ao plano definido por \vec{r} e \vec{v}* .
- *Quando o movimento da partícula se mantém sempre no mesmo plano, a direcção de \vec{L} é constante.*

- Se a trajetória da partícula é um círculo, então $\vec{r} \perp \vec{v}$ e da Eq. 5.14 vem,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= rmv \hat{k} \\ &= rm\omega r \hat{k} \\ &= mr^2\omega \hat{k}\end{aligned}\tag{12.1}$$



- Neste caso $\vec{\omega}$ tem a mesma direcção de \vec{L} ,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= mr^2\vec{\omega} \\ &= I\vec{\omega}.\end{aligned}$$

$I = mr^2$ é o *momento de inércia* da partícula relativamente ao eixo em torno do qual roda

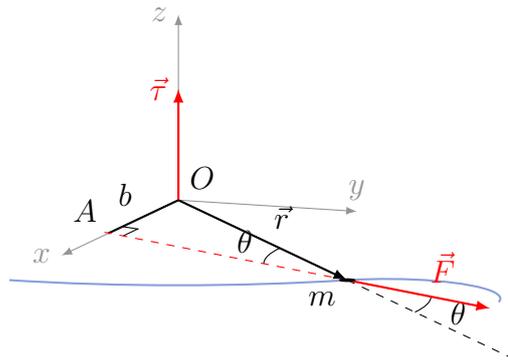
- A massa de inércia m caracteriza a dificuldade que uma partícula oferece à mudança do seu movimento de translação
- O *momento de inércia* I caracteriza a dificuldade que uma partícula oferece à mudança do seu movimento de rotação.

12.2 O momento da força ou torque

- Quando uma partícula sob a acção de uma força \vec{F} roda em torno de um ponto O é conveniente definir uma grandeza física chamada o *momento* *duma força* $\vec{\tau}$ ou *torque* como,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

sendo \vec{r} o vetor posição da partícula (onde a força \vec{F} é aplicada) relativamente ao ponto O .



- Recordando a definição de produto vectorial vem,

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= rF \sin \theta \hat{k}.\end{aligned}$$

- Notando que $b = r \sin \theta$ podemos ainda escrever o torque em função de b como,

$$\vec{\tau} = bF\hat{e}.$$

- *O torque da força não varia quando esta se desloca ao longo da sua linha de acção, pois b mantém-se constante.*
- A b chama-se o braço da força.

12.3 Relação entre momento angular e torque

- Calculemos a derivada do momento angular em relação ao tempo,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt},\end{aligned}$$

mas $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ e $\vec{p} = m\vec{v}$, i.e. $\vec{v} \parallel \vec{p}$ logo $\vec{v} \times \vec{p} = 0$, então

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

- Usando a 2ª lei de Newton ($\vec{F} = d\vec{p}/dt$) obtemos,

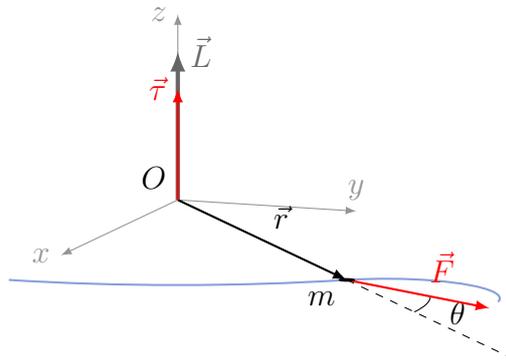
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

- Ao termo do lado direito chamamos o momento da força ou torque da força $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ relativamente à origem O .

- Obtemos assim a relação entre o momento angular e o torque da força,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}. \quad (12.2)$$

- Concluindo *o torque da força aplicada a uma partícula é igual à variação no tempo do momento angular dessa partícula.*
- Esta equação é tão importante para a rotação como a 2ª lei de Newton para a translação.



- Chama-se à atenção que tanto \vec{L} como $\vec{\tau}$ têm de ser calculados relativamente ao mesmo ponto para que a Eq. 12.2 seja válida.

Aula 13

Sistemas de Partículas

13.1 Mecânica de muitas partículas

- Até aqui estudámos a dinâmica de uma partícula, aplicando a 2ª lei de Newton apenas a uma partícula.
- Em seguida estudaremos a dinâmica de muitas partículas.
- O problema da aplicação da 2ª lei de Newton a um número arbitrário de partículas não tem solução analítica para sistemas com mais de 3 partículas.
- Assim o estudo irá focar-se na definição de alguns conceitos e propriedades gerais úteis como o centro de massa, leis de conservação do momento linear, momento angular, energia.
- Estudaremos também a dinâmica de um sistema de muitas partículas especial, o corpo rígido.

Forças internas e externas ao sistema

- No estudo de sistemas de partículas é importante distinguir as fronteiras do sistema: quais as partículas que estão no sistema e quais as que estão fora.
- Desta forma poderemos separar as forças que actuam numa partícula em duas classes: as forças internas, \vec{F}_{int} ao sistema das externas, \vec{F}_{ext} ao sistema.
- A dinâmica de uma partícula i do sistema será dada por,

$$\vec{F}_{int,i} + \vec{F}_{ext,i} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

A equação do sistema

- A força total que actua no sistema com N partículas é,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{int,i} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext,i} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

- Pela 3ª lei de Newton $\sum_{i=1}^N \vec{F}_{int,i} = 0$.
- Como a soma de derivadas é igual à derivada da soma, $\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\sum_i \vec{p}_i}{dt}$.
- Repare-se que $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ é o momento linear total do sistema.
- Denominaremos também a força externa Total do sistema por $\vec{F}_{ext_T} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext,i}$.

A equação do sistema

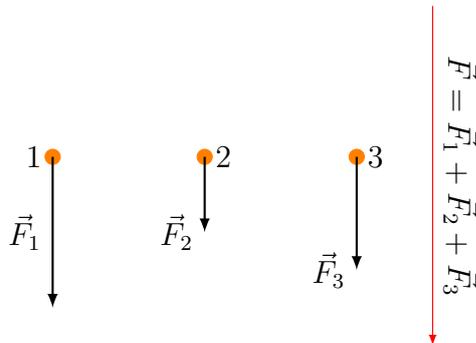
- Podemos escrever a força total que actua no sistema como,

$$\vec{F}_{ext_T} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

- Concluimos que a dinâmica do sistema é apenas ditada pela força externa total que actua no sistema.
- Notar que \vec{F}_{ext} pode ser qualquer força.

13.2 O centro de forças paralelas

- Consideremos um sistema de várias forças \vec{F}_i , todas, paralelas ao vector unitário \hat{e} tais que, $\vec{F}_i = F_i \hat{e}$.



- A soma vectorial de todas estas forças é,

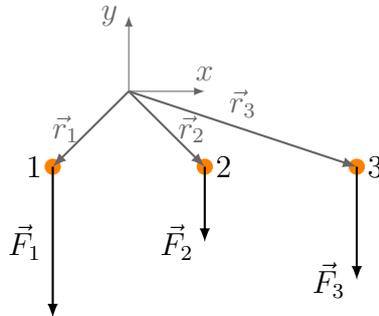
$$\vec{F} = \sum_i F_i \hat{e} = \hat{e} \left(\sum_i F_i \right),$$

i.e. a força resultante \vec{F} também é paralela a \hat{e} .

- O vector soma dos torques é,

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \hat{e} F_i = \left(\sum_i \vec{r}_i F_i \right) \times \hat{e},$$

que é perpendicular a \hat{e} e consequentemente também perpendicular a \vec{F} .



- Podemos agora perguntar qual será a posição r_c na qual podemos aplicar \vec{F} para obter $\vec{\tau}$?

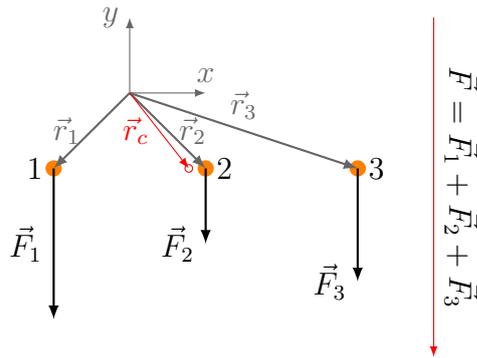
$$\begin{aligned} \vec{r}_c \times \vec{F} &= \vec{\tau} \\ \vec{r}_c \times \hat{e} \left(\sum_i F_i \right) &= \left(\sum_i \vec{r}_i F_i \right) \times \hat{e} \end{aligned}$$

reordenando o lado esquerdo obtemos

$$\left[\vec{r}_c \left(\sum_i F_i \right) \right] \times \hat{e} = \left(\sum_i \vec{r}_i F_i \right) \times \hat{e},$$

esta equação é satisfeita se $\vec{r}_c (\sum_i F_i) = \sum_i \vec{r}_i F_i$ ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{\sum_i \vec{r}_i F_i}{\sum_i F_i} \\ &= \frac{\vec{r}_1 F_1 + \vec{r}_2 F_2 + \vec{r}_3 F_3 + \dots}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots} \end{aligned}$$



- O ponto definido por \vec{r}_c é o chamado centro de forças paralelas.
- Consideremos um corpo que é constituído por i partículas cada uma com peso $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$.
- Se o corpo não é enorme, então os vectores \vec{P}_i são forças paralelas e podemos calcular \vec{r}_c como,

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i g}{\sum_i m_i g} \quad (13.1)$$

$$= \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i}, \quad (13.2)$$

a primeira destas equações define o **centro de gravidade** de um corpo enquanto a segunda define o *centro de massa* desse mesmo corpo.

- Exceptuando corpos muito grandes (tão grandes que g teria de variar ao longo do corpo) o centro de massa coincide com o seu centro de gravidade.

13.3 Centro de massa de uma distribuição contínua de massa

- Assim o centro de massa dum número finito de i partículas, cada uma com massa m_i é,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i} \\ &= \frac{\sum_i x_i m_i \hat{i}}{M} + \frac{\sum_i y_i m_i \hat{j}}{M} + \frac{\sum_i z_i m_i \hat{k}}{M}, \end{aligned} \quad (13.3)$$

onde $M = \sum_i m_i$ é a massa total.

- Consideremos um sistema com um número muito elevado de partículas, tendo cada partícula uma massa muito pequena dm .

- Se podermos considerar que todas as partículas formam *um corpo contínuo* então o seu centro de massa é calculado usando,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

- Se a massa do corpo estiver distribuída num volume V , cada ponto tem uma densidade volúmica de massa $\rho = dm/dV$.
- Ou seja a massa de um volume elementar é $dm = \rho dV$.
- Então o centro de massa deste corpo é,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} \\ &= \frac{\int \vec{r} \rho dV}{M} \\ &= \frac{\int x \rho dV}{M} \hat{i} + \frac{\int y \rho dV}{M} \hat{j} + \frac{\int z \rho dV}{M} \hat{k}, \end{aligned} \quad (13.4)$$

onde $M = \int dm = \int \rho dV$ é a massa total.

- Se o corpo for homogéneo, ρ é constante e nesse caso a equação anterior fica mais simples,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int x dV}{V} \hat{i} + \frac{\int y dV}{V} \hat{j} + \frac{\int z dV}{V} \hat{k},$$

onde $V = \int dV$.

- Se a massa estiver distribuída por uma superfície de espessura desprezável então um elemento de massa dm que ocupa uma área dS tem uma densidade superficial

$$\sigma = \frac{dm}{dS}$$

- O vetor posição do Centro de Massa é dado por,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} \sigma dS}{M}.$$

- Se a massa estiver distribuída por um fio de comprimento L e de espessura desprezável então um elemento de massa dm que ocupa um comprimento elementar dl tem uma densidade linear de massa

$$\lambda = \frac{dm}{dl}$$

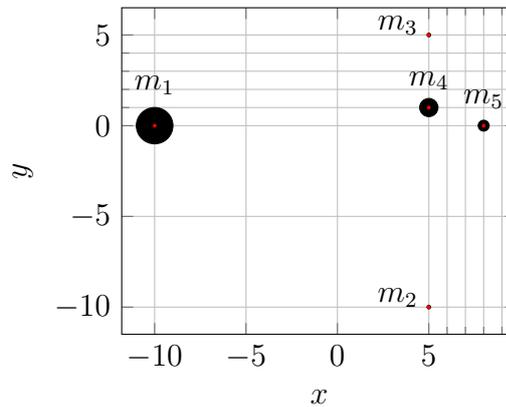
- O vetor posição do Centro de Massa é dado por,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} \lambda dl}{M}.$$

13.3.1 Exemplo: CM de uma distribuição discreta de massas

Exercício 27

Calcule a posição do centro de massa do sistema constituído pelas seguintes 5 massas pontuais, $m_1 = 100$ kg, $m_2 = 10$ kg, $m_3 = 10$ kg, $m_4 = 50$ kg, $m_5 = 40$ kg. As massas encontram-se localizadas nos pontos com coordenadas (em metros) $x_1 = -10, y_1 = 0, x_2 = 5, y_2 = -10, x_3 = 5, y_3 = 5, x_4 = 5, y_4 = 1, x_5 = 8, y_5 = 0$.

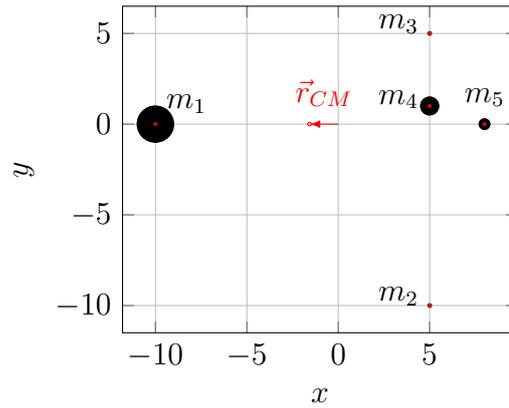


Da definição de \vec{r}_{CM} vem,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^5 \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^5 m_i} \\ &= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4 + x_5 m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \hat{i} + \\ &\quad \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + y_4 m_4 + y_5 m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \hat{j} \end{aligned}$$

a componente y é nula logo,

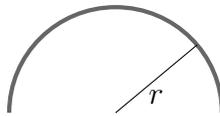
$$\vec{r}_{CM} = \frac{-330 \hat{i}}{210} = -1.57 \hat{i}$$



13.3.2 Exemplo: Centro de massa de um semi-aro homogéneo

Exercício 28

Calcule a posição do centro de massa dum semi-aro de raio r , fino e homogéneo.



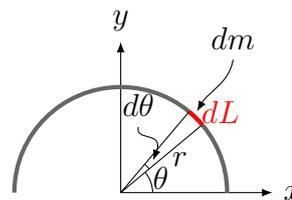
Para um sólido homogéneo a posição do centro de massa é dada por,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}.$$

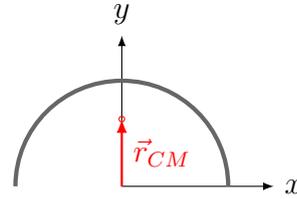
Sendo o aro fino e homogéneo, consideramos que a massa do aro se encontra distribuída uniformemente ao longo do seu comprimento L .

Então podemos definir a densidade linear de massa $\lambda = dm/dL$ que é uma constante.

Logo $dm = \lambda dL$ e como $dL = r d\theta$ e $\vec{r} = r(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$ vem,



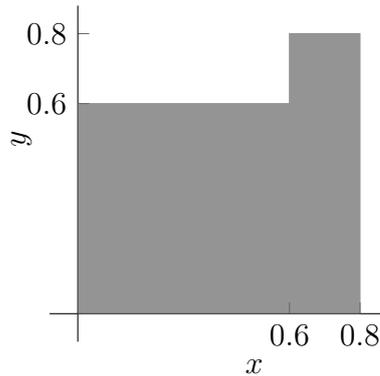
$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{CM} &= \frac{\int \vec{r} \lambda dL}{\int \lambda dL} \\
 &= \frac{\lambda r^2 \int_0^\pi (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) d\theta}{\lambda r \int_0^\pi d\theta} \\
 &= \frac{r \left[\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j} \right]_0^\pi}{\pi} \\
 &= \frac{2r \hat{j}}{\pi}
 \end{aligned}$$



13.3.3 Exemplo: Centro de massa de uma placa

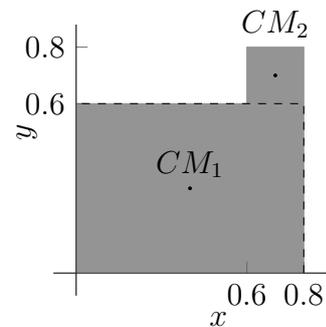
Exercício 29

Calcule a posição do centro de massa da placa homogênea indicada na figura.



Vamos resolver este problema de três modos distintos mas totalmente equivalentes entre si.

O 1º consiste em considerar duas placas retangulares e após calcular o CM de cada uma (relativamente ao mesmo referencial) calcular o CM da placa inicial combinando os resultados obtidos para as placas em separado.



Assim usando o facto que a massa da placa M se encontrar distribuída uniformemente ao longo da sua área A definimos a densidade superficial de massa $\sigma = M/A = \text{constante}$.

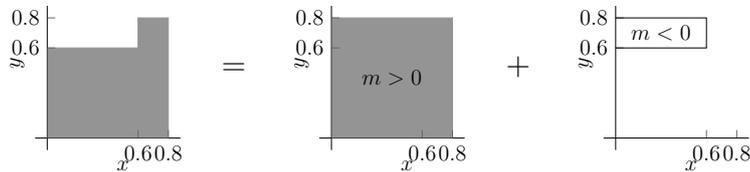
Da definição de \vec{r}_{CM} vem,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^2 \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} \\ &= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \hat{i} + \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} \hat{j} \\ &= \frac{1}{\sigma A_1 + \sigma A_2} \left[(x_1 \sigma A_1 + x_2 \sigma A_2) \hat{i} + (y_1 \sigma A_1 + y_2 \sigma A_2) \hat{j} \right],\end{aligned}$$

o factor comum σ cancela-se e o resultado é,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CM} &= \frac{1}{A_1 + A_2} \left[(x_1 A_1 + x_2 A_2) \hat{i} + (y_1 A_1 + y_2 A_2) \hat{j} \right] \\ &= \frac{1}{0.52} (.22 \hat{i} + 0.172 \hat{j}) \\ &= 0.42 \hat{i} + 0.33 \hat{j},\end{aligned}$$

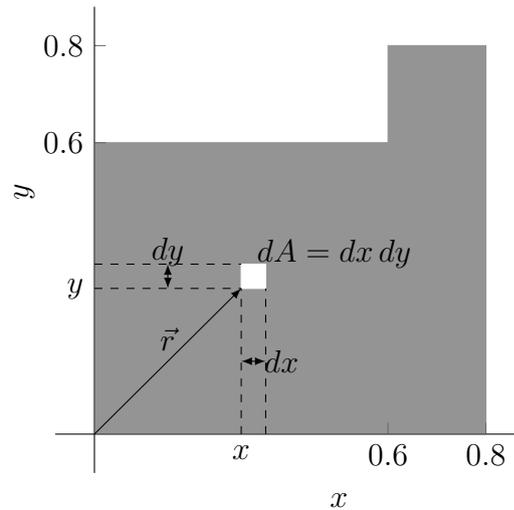
O 2º modo de resolução consiste em considerar duas placas rectangulares, uma com massa positiva e outra com massa negativa.



Então vem,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^2 \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} \\ &= \frac{x_1 m_1 - x_2 m_2}{m_1 - m_2} \hat{i} + \frac{y_1 m_1 - y_2 m_2}{m_1 - m_2} \hat{j} \\ &= \frac{1}{\sigma A_1 - \sigma A_2} \left[(x_1 \sigma A_1 - x_2 \sigma A_2) \hat{i} + (y_1 \sigma A_1 - y_2 \sigma A_2) \hat{j} \right] \\ &= \frac{1}{0.52} (.22 \hat{i} + 0.172 \hat{j}) \\ &= 0.42 \hat{i} + 0.33 \hat{j},\end{aligned}$$

Finalmente no 3º modo de resolução vamos usar a forma integral de \vec{r}_{CM} .



Reescrevendo $\sigma = dm/dA$ então $dm = \sigma dA$ e como $dA = dx dy$ e $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$ vem,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{\int \vec{r} \sigma dA}{\int \sigma dA} \\ &= \frac{\sigma \iint (x \hat{i} + y \hat{j}) dx dy}{\sigma \iint dx dy} \\ &= \frac{1}{\int dx \int dy} \left[\iint x dx dy \hat{i} + \iint y dx dy \hat{j} \right], \end{aligned}$$

o integral no denominador é simplesmente a área da placa, 0.52 m^2

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{1}{0.52} \left[\left(\int_0^{0.8} x dx \int_0^{0.6} dy + \int_{0.6}^{0.8} x dx \int_{0.6}^{0.8} dy \right) \hat{i} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^{0.8} dx \int_0^{0.6} y dy + \int_{0.6}^{0.8} dx \int_{0.6}^{0.8} y dy \right) \hat{j} \right] \\ &= \frac{1}{0.52} \left[\left(\frac{0.8^2}{2} 0.6 + \left(\frac{0.8^2}{2} - \frac{0.6^2}{2} \right) 0.2 \right) \hat{i} \right. \\ &\quad \left. + \left(0.8 \frac{0.6^2}{2} + 0.2 \left(\frac{0.8^2}{2} - \frac{0.6^2}{2} \right) \right) \hat{j} \right] \\ &= 0.42 \hat{i} + 0.33 \hat{j}, \end{aligned}$$

Aula 14

As leis de Newton e o movimento do centro de massa

14.1 O movimento do centro de massa

- Derivando em ordem ao tempo a Eq. 13.3 obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{M} \right) \\ \vec{v}_{CM} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \\ &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i\end{aligned}\tag{14.1}$$

onde \vec{v}_{CM} é a *velocidade do centro de massa*.

- Repare-se que $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ é o momento da partícula i .
- Então podemos escrever também,

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{p}_i\tag{14.2}$$

- Derivando \vec{v}_{CM} em ordem ao tempo obtemos a *aceleração do centro de massa* \vec{a}_{CM} ,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i \right) \\ \vec{a}_{CM} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \\ &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i\end{aligned}\tag{14.3}$$

14.2 As leis de Newton e o movimento do centro de massa

- Da 2ª lei de Newton a quantidade $m_i \vec{a}_i$ é a resultante de todas as forças que actuam na partícula i , i.e. $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$.
- Assim $\sum_i \vec{F}_i$ é a força resultante que actua no sistema.
- Mostrámos antes que esta força é a resultante das *forças externas* ao sistema, $\vec{F}_{ext,i}$, porque da 3ª lei de Newton a resultante das forças internas ao sistema anula-se.
- Logo,

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}, \quad (14.4)$$

ou seja, o *centro de massa* do sistema *move-se como uma partícula* de massa $M = \sum_i m_i$ e aceleração \vec{a}_{CM} sujeito à força resultante de todas as forças externas $\vec{F}_{ext,i}$.

- *A importância deste resultado é enorme*, pois permite-nos estudar o movimento dum sistema com muitas partículas sem termos de nos preocupar com as forças entre elas.
- *Apenas necessitamos de conhecer a resultante das forças externas e estudar o movimento como se toda a massa do sistema estivesse concentrada no CM.*
- Por exemplo, lançando uma granada ao ar o seu voo será o de um projectil que descreve uma parábola.
- No caso de a granada explodir no ar, o seu centro de massa continua a mover-se seguindo a mesma parábola, apesar dos fragmentos voarem em direcções diversas.

14.3 Lei da conservação do momento linear

- Vimos antes que,

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{p}_i \quad (14.5)$$

então podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 \sum_i \vec{F}_{ext,i} &= M \vec{a}_{CM} \\
 &= M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} \\
 &= M \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_i \vec{p}_i \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \right) \\
 &= \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}
 \end{aligned}$$

- Designando o momento linear total do sistema por $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ podemos concluir que,

$$\sum_i \vec{F}_{ext,i} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

- Concluimos então que *se a resultante das forças externas é nula, o momento linear do sistema permanece constante.*

14.4 Trabalho e energia cinética de um sistema de partículas

- Consideremos *um sistema composto por duas partículas* de massa m_1 e m_2

- As partículas estão sujeitas às forças

- externas \vec{F}_1 e \vec{F}_2
- e internas \vec{F}_{12} e \vec{F}_{21}

- A equação do movimento de cada partícula é,

$$\begin{aligned}
 m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} \\
 m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_2 + \vec{F}_{21},
 \end{aligned}$$

onde pela 3ª lei de Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

- Num pequeníssimo intervalo de tempo dt cada partícula se desloca de $d\vec{r}_1$ e $d\vec{r}_2$.

- Multipliquemos escalarmente as equações do movimento pelos deslocamentos respectivos,

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 \\ m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 &= \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 \end{aligned}$$

- Somando as equações obtemos,

$$m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) \quad (14.6)$$

- Mas

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = v dv$$

e,

$$d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = d\vec{r}_{12}.$$

- Usando estes dois resultados a Eq. 14.6 pode ser simplificada ficando,

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \\ &\quad \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) \\ m_1 v_1 dv_1 + m_2 v_2 dv_2 &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \\ &\quad \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12}, \end{aligned}$$

- Integrando esta equação desde um instante inicial t_i até um instante final t_f vem,

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_{v_{1i}}^{v_{1f}} m_1 v_1 dv_1 + \int_{v_{2i}}^{v_{2f}} m_2 v_2 dv_2}_{\text{I}} \\ &= \underbrace{\int_{r_{1i}}^{r_{1f}} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_{r_{2i}}^{r_{2f}} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{r_i}^{r_f} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12}}_{\text{III}}, \end{aligned} \quad (14.7)$$

- O termo **I** representa simplesmente a variação da energia cinética pois,

$$\begin{aligned}
 & \int_{v_{1,i}}^{v_{1,f}} m_1 v_1 dv_1 + \int_{v_{2,i}}^{v_{2,f}} m_2 v_2 dv_2 \\
 &= \left(\frac{m_1 v_{1,f}^2}{2} - \frac{m_1 v_{1,i}^2}{2} \right) + \left(\frac{m_2 v_{2,f}^2}{2} - \frac{m_2 v_{2,i}^2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{m_1 v_{1,f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2,f}^2}{2} \right) - \left(\frac{m_1 v_{1,i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2,i}^2}{2} \right) \\
 &= E_{c,f} - E_{c,i} \\
 &= \Delta E_c
 \end{aligned}$$

- O termo **II** representa o trabalho total W_{ext} executado pelas forças externas entre t_i e t_f .
- O último termo **III** representa o trabalho total W_{int} executado pelas forças internas entre t_i e t_f .
- Usando estes resultados podemos escrever a Eq. 14.7 como,

$$\Delta E_c = W_{ext} + W_{int}, \quad (14.8)$$

ou seja, *a variação da energia cinética de um sistema de partículas é igual ao trabalho realizado sobre o sistema, pelas forças externas e internas.*

- Este resultado é válido para um sistema com qualquer número de partículas.

Aula 15

Colisões

15.1 Impulso de uma força

- Define-se o *impulso* \vec{I} de uma força como,

$$\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$$

- Da 2ª lei de Newton temos,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

integrando vem

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p}$$
$$\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

15.1.1 Exemplo: Força durante uma colisão automóvel

Exercício 30

Um carro que se desloca a 50 km/h, numa estrada horizontal, sofre uma colisão frontal com uma parede. Estime a força exercida pelo cinto de segurança num passageiro, com uma massa de 75 kg, durante a colisão nas seguintes situações:

- a) a frente do carro deforma-se 10 cm durante a colisão.
 - b) a frente do carro deforma-se 1 m durante a colisão.
 - c) as condições das alíneas a) e b) mas o carro desce por uma estrada que faz um ângulo de 30° com a horizontal.
-

- A única força que actua no passageiro com resultante não nula é a força horizontal exercida pelo cinto de segurança \vec{F}_c .
- O impulso aplicado ao passageiro pelo cinto de segurança é

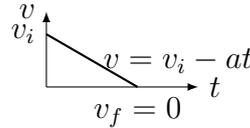
$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_c dt = \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i) = \vec{I}$$

- Não conhecemos com detalhe a força \vec{F}_c mas podemos estimar o seu valor médio

$$\bar{F}_c = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} F_c dt$$

- O problema desenrola-se todo em uma dimensão assim não é necessária notação vetorial.
- Assumindo uma aceleração constante durante a colisão, a velocidade média é

$$\bar{v} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} v dt = \frac{v_i}{2}$$



por outro lado em função da deformação do carro Δx ,

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

logo o tempo de colisão Δt é

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\bar{v}}$$

a)

- Consideremos então que a frente do carro se deforma $\Delta x = .1$ m
- nestas condições o tempo de colisão é

$$\Delta t = \frac{.1}{\frac{25}{3.6}} = 0.0144 \text{ s}$$

- O impulso é igual ao momento linear antes da colisão

$$\begin{aligned} I &= mv \\ &= 75 \frac{50}{3.6} = 1041.67 \text{ Ns} \end{aligned}$$

- Assim a força média exercida pelo cinto de segurança é

$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{1047.67}{0.0144} = 72337.96 \text{ N}$$

- Repare-se que esta força corresponde a uma desaceleração média $\bar{a} = 72337.96/75 = 964.5 \text{ m/s}^2$ que é por sua vez 98.6 vezes superior à aceleração gravítica
- Ou seja o passageiro sofre uma aceleração equivalente a um *aumento do seu peso de 98.6 vezes*

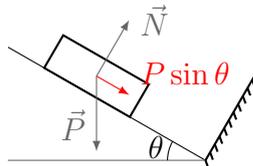
b)

- Consideremos agora que a frente do carro se deforma $\Delta x = 1 \text{ m}$
- nestas condições o tempo de colisão é 10x maior

$$\Delta t = \frac{1}{\frac{25}{3.6}} = 0.144 \text{ s}$$

- O impulso é o mesmo $I = 1041.67 \text{ Ns}$
- Assim a força média exercida pelo cinto de segurança é 10x menor $\bar{F} = 7233.796 \text{ N}$
- *O passageiro sofre uma aceleração 9.86 g*

c)



- Consideremos finalmente o caso em que o carro desce por uma estrada inclinada.
- Neste caso uma parte do seu peso ($P \sin \theta$) também actua durante a colisão
- O impulso aplicado ao passageiro é

$$\int_{t_i}^{t_f} (F_c - P \sin 30) dt = I$$

$$\int_{t_i}^{t_f} F_c dt - P \sin 30 \Delta t = I$$

- Com $\Delta t = 0.0144$ s impulso devido ao peso é

$$I_p = 75 \frac{9.81}{2} \Delta t = 5.3 \text{ Ns}$$

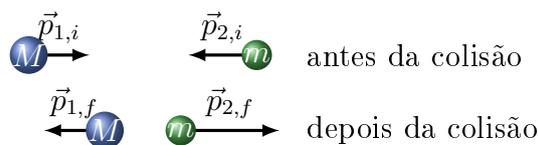
e com $\Delta t = 0.144$ s é $I_p = 53 \text{ Ns}$

- Em ambos os casos o seu valor é insignificante comparado com o impulso da colisão $I = 1041.67 \text{ Ns}$
- *Na breve duração da colisão a contribuição da força gravítica para alterar o momento linear do passageiro é desprezável*
- *A força de contacto gerada durante a colisão é muitíssimo superior ao peso*

15.2 Colisões

- Dizemos que há uma *colisão* quando *duas partículas se aproximam e a interação entre elas altera os seus movimentos, dando-se uma troca de momento linear e de energia.*
- Numa colisão não é necessário existir *contacto físico* como numa colisão entre duas bolas de bilhar.
- Por exemplo quando um cometa passa perto da Terra e é deflectido da sua trajectória inicial, podemos dizer que houve uma colisão.
- Consideremos uma colisão entre duas partículas onde são conhecidos os momentos lineares antes ($\vec{p}_{1,i}$ e $\vec{p}_{2,i}$) e depois da colisão ($\vec{p}_{1,f}$ e $\vec{p}_{2,f}$).
- Na infinitesimal duração da colisão o impulso das forças externas é desprezável (ver problema anterior).
- Neste sentido podemos considerar que o *momento linear é conservado* ou seja,

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}. \quad (15.1)$$



- Seja E_{p12} a energia potencial interna do sistema.

- Devido a rearranjos internos das partículas durante a colisão, o valor inicial de E_{p12} pode diferir do final.
- Contudo a energia total conserva-se se não actuarem forças externas assim vem,

$$E_{c,i} + E_{p12,i} = E_{c,f} + E_{p12,f},$$

onde,

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ &= \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \end{aligned}$$

- A variação da energia cinética ou da energia potencial interna permite-nos catalogar diferentes tipos de colisões.
- Para tal, considere-se a quantidade Q defenida por,

$$Q = E_{c,f} - E_{c,i} = E_{p12,i} - E_{p12,f}.$$

que é a variação da energia cinética

- Se $Q = 0$ a variação da energia cinética é zero e a colisão é chamada *elástica*.
- Se $Q \neq 0$ a colisão é *inelástica*. Há dois tipos de colisões inelásticas
 - Se $Q < 0$ a colisão inelástica diz-se *endoenergética*. Neste caso há uma diminuição da energia cinética e um correspondente aumento da energia potencial interna.
 - Se $Q > 0$ a colisão inelástica diz-se *exoenergética*. Neste caso há um aumento da energia cinética devido a um correspondente decréscimo da energia potencial interna.
- Usando a quantidade Q podemos escrever a equação da conservação da energia como,

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= Q \\ \frac{p_{1,f}^2}{2m_{1,f}} + \frac{p_{2,f}^2}{2m_{2,f}} &= \frac{p_{1,i}^2}{2m_{1,i}} + \frac{p_{2,i}^2}{2m_{2,i}} + Q. \end{aligned} \quad (15.2)$$

- Verificando-se a conservação da energia juntamente com a conservação do momento linear as equações 15.2 e 15.1 são suficientes para resolver por completo a dinâmica duma colisão,

$$\begin{cases} \frac{p_{1,f}^2}{2m_{1,f}} + \frac{p_{2,f}^2}{2m_{2,f}} = \frac{p_{1,i}^2}{2m_{1,i}} + \frac{p_{2,i}^2}{2m_{2,i}} + Q & \text{energia} \\ \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} = \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} & \text{momento linear} \end{cases}$$

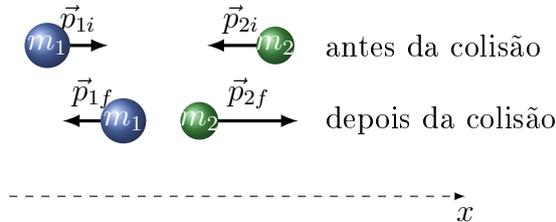
- Uma outra quantidade também usada no estudo das colisões é o *coeficiente de restituição* e definido por,

$$e = \frac{|v_{2,f} - v_{1,f}|}{|v_{2,i} - v_{1,i}|}$$

- Este coeficiente é uma medida da elasticidade duma colisão.
- Se a colisão é *elástica* $e = 1$ e se é *totalmente inelástica*, caso em que as partículas ficam juntas após a colisão, então $e = 0$.
- Em todos os outros casos $0 < e < 1$.

15.2.1 Colisão elástica frontal

- Consideremos uma colisão elástica frontal, sem ocorrência de forças externas



- Sendo a colisão elástica a energia cinética é conservada logo $Q = 0$
- O momento linear também é conservado assim podemos escrever,

$$\begin{cases} \frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2} & \text{energia} \\ m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} & \text{momento linear} \end{cases}$$

- Consideremos que a colisão se dá ao longo do eixo x ,

$$\begin{cases} m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2) & \text{energia} \\ m_1 v_{1i} \hat{i} + m_2 v_{2i} \hat{i} = m_1 v_{1f} \hat{i} + m_2 v_{2f} \hat{i} & \text{momento linear} \end{cases}$$

- Podemos omitir \hat{i} na Eq. do momento linear,

$$\begin{cases} m_1 (v_{1i} - v_{1f}) (v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) (v_{2f} + v_{2i}) & \text{energia} \\ m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) & \text{momento linear} \end{cases}$$

- Dividindo a Eq. da energia pela do momento linear obtemos,

$$\begin{aligned} (v_{1i} + v_{1f}) &= (v_{2f} + v_{2i}) \Leftrightarrow \\ (v_{1i} - v_{2i}) &= -(v_{1f} - v_{2f}) \end{aligned} \quad (15.3)$$

a velocidade relativa entre as partículas troca o sentido

- Usando este resultado e a Eq. do momento linear podemos escrever as velocidades finais em função das velocidades iniciais para uma colisão elástica frontal,

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{cases}$$

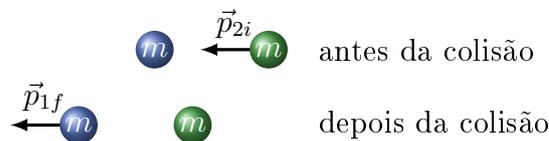
- Vejamos alguns casos particulares

- $m_1 = m_2 = m$:

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases}$$

- Logo partículas com massas iguais trocam de velocidade numa colisão elástica frontal

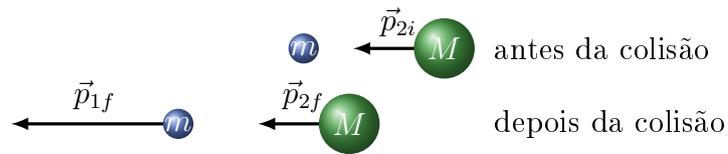
- A figura seguinte ilustra o caso em que $m_1 = m_2 = m$ e $v_{1i} = 0$



- Se $m_2 \gg m_1$:

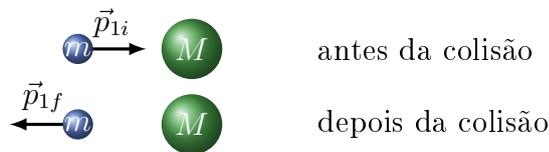
$$\begin{cases} v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \\ v_{2f} \approx \frac{2m_1}{m_2} v_{1i} + v_{2i} \end{cases}$$

- A figura seguinte ilustra o caso em que $m_2 \gg m_1$ e $v_{1i} = 0$ i.e. a partícula mais leve está parada



- A figura seguinte ilustra o caso em que $m_2 \gg m_1$ e $v_{2i} = 0$ i.e. a partícula mais pesada está parada

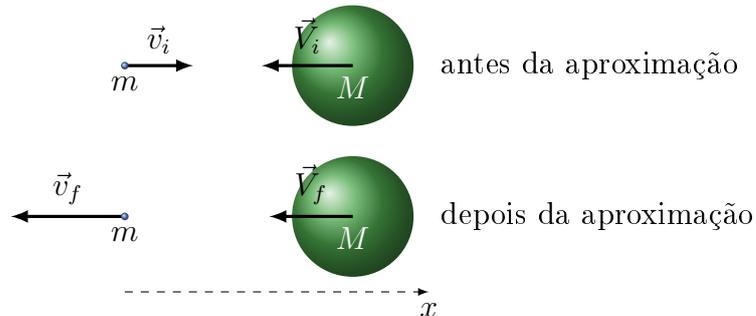
$$\begin{cases} v_{1f} \approx -v_{1i} \\ v_{2f} \approx 0 \end{cases}$$



15.2.2 Exemplo: Catapulta gravitacional

Exercício 31

Para acelerar uma nave espacial sem usar combustível pode usar-se a gravidade dum planeta com o qual a nave se cruze. Considere o caso particular de uma aproximação frontal da nave ao planeta e calcule a velocidade final com que a nave se afasta do planeta em função das velocidades iniciais da nave, v_i e do planeta, V_i .



Este caso é análogo ao visto anteriormente numa colisão elástica frontal entre massas díspares

Se $m_2 = M \gg m_1 = m$:

$$\begin{cases} v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \\ v_{2f} \approx \frac{2m}{M}v_{1i} + v_{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_f \approx -v_i + 2V_i \\ V_f \approx V_i \end{cases}$$

Note-se que considerámos $V_i < 0$ logo a nave inverte a trajetória 180° e sofre um aumento da sua velocidade de 2 vezes a velocidade do planeta.

15.2.3 Exemplo: Explosão de uma granada

Exercício 32

Uma granada em repouso no referencial de laboratório, explode em dois fragmentos com massas m_1 e m_2 , respectivamente. Determine a energia dos fragmentos em termos de Q .

A conservação do momento linear implica que o momento inicial seja igual ao momento final,

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} = 0,$$

logo

$$p_{1f} = -p_{2f}.$$

Por outro lado temos que,

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= Q \\ \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2} &= Q \\ \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} &= Q, \end{aligned}$$

pois a $E_{ci} = 0$.

Então usando a conservação do momento linear vem,

$$\begin{aligned} \frac{p_{1f}^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) &= Q \\ \frac{p_{1f}^2}{2m_1} \frac{m_1 + m_2}{m_2} &= Q \\ E_{c1f} &= Q \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

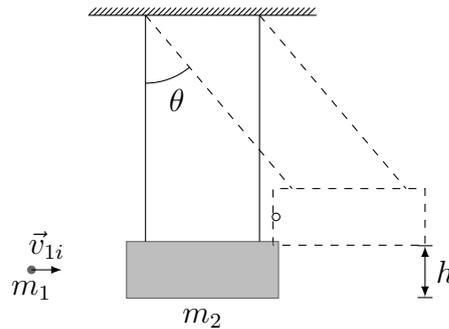
De modo análogo se conclui que

$$E_{c2f} = Q \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

15.2.4 Exemplo: Pêndulo balístico

Exercício 33

Uma bala de massa m_1 é disparada contra um alvo pendurado de massa m_2 . A bala fica incrustada no alvo e este sobe uma altura h imediatamente após o impacto, ficando depois a oscilar. Qual é o módulo da velocidade inicial da bala?



A conservação do momento linear implica que,

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_f.$$

Aplicando a conservação da energia mecânica após a colisão vem,

$$(m_1 + m_2) \frac{v_f^2}{2} = (m_1 + m_2) gh$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

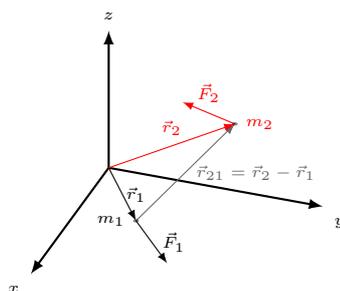
Combinando os dois resultados obtemos a resposta procurada,

$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}.$$

Aula 16

Momento angular de um sistema de partículas

16.1 Momento angular de um sistema de partículas



- Consideremos em primeiro lugar apenas duas partículas 1 e 2 nas quais actuam duas forças externas \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .
- Consideremos também que as partículas interagem entre si com as forças \vec{F}_{12} e \vec{F}_{21} .
- Então o torque total das forças que actuam em cada partícula é,

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12},$$

e para a partícula 2 vem,

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21},$$

- Sendo $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ o torque total sobre as partículas é,

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{21}.$$

- O vector $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{r}_{21}$ tem a direcção da recta que une as partículas.

- Se por hipótese \vec{F}_{21} também tem a mesma direcção então os vectores \vec{r}_{21} e \vec{F}_{21} são paralelos logo $\vec{r}_{21} \times \vec{F}_{21} = 0$.
- Sendo o torque total produzido pelas forças internas nulo, resta só o torque total das forças externas. Assim vem,

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{\tau}_{1,ext} + \vec{\tau}_{2,ext}.$$

- Assume-se que as forças internas são iguais e opostas e *atuam ao longo da linha que une as partículas*.
- Esta é a chamada formulação forte da 3^a lei de Newton.
- Este resultado pode ser generalizado para um número qualquer de partículas,

$$\frac{d \sum_i \vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{i,ext} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{L}_T}{dt} = \vec{\tau}_{extT}, \quad (16.1)$$

ou seja a derivada no tempo do momento angular total dum sistema de partículas, relativamente a um ponto arbitrário, é igual ao torque total, relativamente ao mesmo ponto, de todas as forças externas que agem sobre o sistema.

16.2 Conservação do momento angular de um sistema de partículas

- Se não há forças externas ou se a soma dos torques é nula então,

$$\frac{d\vec{L}_T}{dt} = \frac{d(\sum_i \vec{L}_i)}{dt} = 0.$$

- Integrando obtemos,

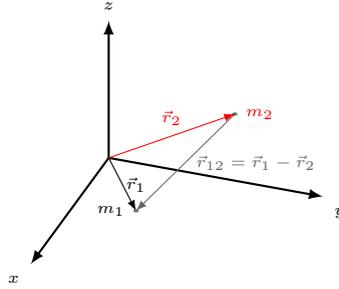
$$\vec{L}_T = \sum_i \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots = \text{constante}.$$

- Esta é a lei da conservação do momento angular que diz, **o momento angular total de um sistema isolado, ou de um sistema com momento total das forças igual a zero, é constante em módulo direcção e sentido**.
- Até à data esta lei nunca foi violada na natureza, portanto apesar da hipótese que foi feita para obtermos a lei da conservação do momento angular, esta lei parece ser de validade universal.
- Assim se as forças internas gerarem uma variação de \vec{L} então o resto do sistema deve experimentar uma variação de \vec{L} igual e oposta para manter o momento angular total conservado.

16.2.1 Exemplo 1: momento angular interno

Exercício 34

Calcule o momento angular de duas partículas relativamente ao seu centro de massa, CM .



- Seja \vec{r}_{12} o vector posição da partícula 1 relativamente à partícula 2. A posição do CM relativamente ao referencial de laboratório é (ver Eq. 13.2),

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

- Então o vector posição de cada partícula relativamente ao CM , \vec{r}'_i vem,

$$\begin{aligned}\vec{r}'_1 &= \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = \frac{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \vec{r}_{12}}{m_1 + m_2} \\ \vec{r}'_2 &= \vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} = \frac{m_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 \vec{r}_{12}}{m_1 + m_2}\end{aligned}$$

- Derivando estas expressões em ordem ao tempo obtemos as velocidades das partículas no CM ,

$$\begin{aligned}\vec{v}'_1 &= \frac{d\vec{r}'_1}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \frac{m_2 \vec{v}_{12}}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}'_2 &= \frac{d\vec{r}'_2}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = -\frac{m_1 \vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}.\end{aligned}$$

- Então o momento angular relativamente ao CM vem,

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_{CM} &= m_1 \vec{r}'_1 \times \vec{v}'_1 + m_2 \vec{r}'_2 \times \vec{v}'_2 \\
 &= m_1 \frac{m_2 \vec{r}_{12}}{m_{tot}} \times \frac{m_2 \vec{v}_{12}}{m_{tot}} + m_2 \left(-\frac{m_1 \vec{r}_{12}}{m_{tot}} \right) \times \left(-\frac{m_1 \vec{v}_{12}}{m_{tot}} \right) \\
 &= (m_1 + m_2) \frac{m_1 m_2}{m_{tot}^2} \vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12} \\
 &= \frac{m_1 m_2}{m_{tot}} \vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12} \\
 &= \vec{r}_{12} \times \mu \vec{v}_{12},
 \end{aligned}$$

onde $\mu = (m_1 m_2) / m_{tot}$ é a chamada massa reduzida do sistema de duas partículas e $m_{tot} = m_1 + m_2$.

- Ou seja o momento angular do sistema relativamente ao CM é o mesmo que o de uma partícula com momento linear $\mu \vec{v}_{12}$ e vector posição \vec{r}_{12} .
- O \vec{L}_{CM} só depende do movimento relativo das duas partículas.
- Se tivermos um sistema com muitas partículas, geralmente chama-se a \vec{L}_{CM} o momento angular interno do sistema.
- Este momento angular interno é uma propriedade intrínseca do sistema e não depende do observador.

16.2.2 Exemplo 2: momento angular no referencial CM e no laboratório

Exercício 35

Qual a relação entre o momento angular de um sistema de partículas relativo ao CM e o momento angular relativo ao referencial do laboratório?

- Por simplicidade analisemos o caso de um sistema com duas partículas.
- O momento angular relativamente ao laboratório é dado por,

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2.$$

- Como vimos no exemplo anterior

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_1 &= \vec{r}'_1 + \vec{r}_{CM} & \text{e} & \quad \vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_{CM} \\
 \vec{r}_2 &= \vec{r}'_2 + \vec{r}_{CM} & \text{e} & \quad \vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{v}_{CM}
 \end{aligned}$$

- Usando estas relações o momento angular vem,

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 \\
&= (\vec{r}'_1 + \vec{r}_{CM}) \times m_1 (\vec{v}'_1 + \vec{v}_{CM}) \\
&\quad + (\vec{r}'_2 + \vec{r}_{CM}) \times m_2 (\vec{v}'_2 + \vec{v}_{CM}) \\
&= (\vec{r}'_1 \times m_1 \vec{v}'_1) + (\vec{r}'_1 \times m_1 \vec{v}_{CM}) + (\vec{r}_{CM} \times m_1 \vec{v}'_1) \\
&\quad + (\vec{r}_{CM} \times m_1 \vec{v}_{CM}) + (\vec{r}'_2 \times m_2 \vec{v}'_2) + (\vec{r}'_2 \times m_2 \vec{v}_{CM}) \\
&\quad + (\vec{r}_{CM} \times m_2 \vec{v}'_2) + (\vec{r}_{CM} \times m_2 \vec{v}_{CM}) \\
&= \underbrace{(\vec{r}'_1 \times m_1 \vec{v}'_1) + (\vec{r}'_2 \times m_2 \vec{v}'_2)}_{\vec{L}_{CM}} + \underbrace{(m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2)}_{=0} \times \vec{v}_{CM} \\
&\quad + \vec{r}_{CM} \times \underbrace{(m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2)}_{=0} + (m_{tot}) (\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}),
\end{aligned}$$

- Então o momento angular relativo ao laboratório é dado por,

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times m_{tot} \vec{v}_{CM}.$$

- Concluimos então que *o momento angular relativo ao referencial laboratório pode ser separado no momento angular interno do sistema L_{CM} mais o momento angular externo relativo ao laboratório como se toda a massa do sistema estivesse concentrada no CM.*
- Este resultado é válido para um sistema com muitas partículas.

16.2.3 Exemplo 3: relação entre o torque e o momento angular interno no ref. CM

Exercício 36

Qual a relação entre o torque total das forças externas relativamente ao referencial centro de massa, $\vec{\tau}_{CM}$, e o momento angular interno de um sistema de partículas, \vec{L}_{CM} ?

- Por simplicidade analisemos mais uma vez o caso de um sistema com duas partículas sujeitas às forças externas \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .

- Neste caso o torque total externo é,

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau}_{ext} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 \\
 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\
 &= (\vec{r}'_1 + \vec{r}_{CM}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}'_2 + \vec{r}_{CM}) \times \vec{F}_2 \\
 &= \underbrace{\vec{r}'_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}'_2 \times \vec{F}_2}_{\vec{\tau}_{CM}} + \vec{r}_{CM} \times \underbrace{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)}_{\vec{F}_{ext}},
 \end{aligned}$$

portanto,

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{ext}.$$

- Do exemplo anterior temos,

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times m_{tot} \vec{v}_{CM}.$$

- Derivando em ordem ao tempo esta expressão vem,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \frac{d}{dt} (\vec{r}_{CM} \times m_{tot} \vec{v}_{CM}) \\
 &= \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times m_{tot} \vec{v}_{CM}}_{=0 \text{ pois } d\vec{r}_{CM}/dt = \vec{v}_{CM}} + \vec{r}_{CM} \times \underbrace{m_{tot} \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}}_{\vec{F}_{ext} \text{ ver Eq.14.4}} \\
 &= \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{ext}
 \end{aligned}$$

- Então como da Eq. 16.1 vem,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext},$$

concluimos que,

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}. \quad (16.2)$$

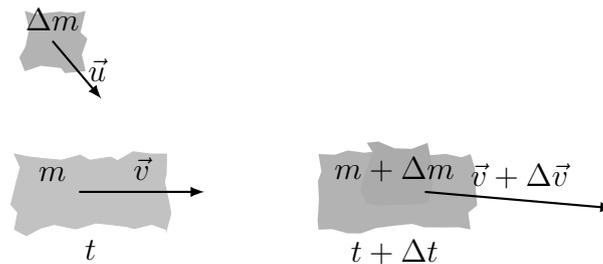
- Esta equação é válida para o CM mesmo que ele não esteja em repouso num referencial inercial, enquanto que a Eq. 16.1 só é válida quando \vec{L} e $\vec{\tau}$ são calculados relativamente a um ponto fixo num referencial inercial.
- A equação 16.2 é válida para um sistema com qualquer número de partículas.

Aula 17

Corpos com massa variável

17.1 Movimento de corpos com massa variável

- Consideremos um corpo com massa m movendo-se com velocidade \vec{v} que ganha um acréscimo de massa Δm com velocidade \vec{u} no instante t .



- Como varia a quantidade de movimento deste sistema?
- No instante t a quantidade de movimento total é,

$$\vec{p}(t) = m\vec{v} + \Delta m\vec{u}$$

- No instante $t + \Delta t$ a quantidade de movimento total é,

$$\vec{p}(t + \Delta t) = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v})$$

- A variação da quantidade de movimento é assim,

$$\begin{aligned}\Delta \vec{p} &= \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t) \\ &= (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) - m\vec{v} - \Delta m\vec{u}\end{aligned}$$

desprezando o termo $\Delta m\Delta \vec{v}$ obtemos

$$= m\Delta \vec{v} + (\vec{v} - \vec{u})\Delta m$$

- A variação da quantidade de movimento por unidade de tempo é dada por,

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} + (\vec{v} - \vec{u}) \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

no limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ vem,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u}) \frac{dm}{dt}$$

- Usando a 2ª lei da mecânica sabemos que a força externa resultante que actua no sistema é,

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

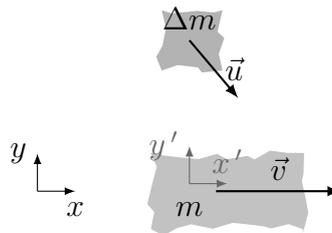
ou

$$\vec{F}_{ext} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u}) \frac{dm}{dt}$$

- As velocidades \vec{v} e \vec{u} são medias num referencial fixo de inércia.
- Por vezes é conveniente escrever a 2ª lei da mecânica para corpos de massa variável usando a velocidade relativa entre a massa dm e m ,

$$\vec{F}_{ext} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}' \frac{dm}{dt}$$

- Onde usamos o resultado conhecido $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$.

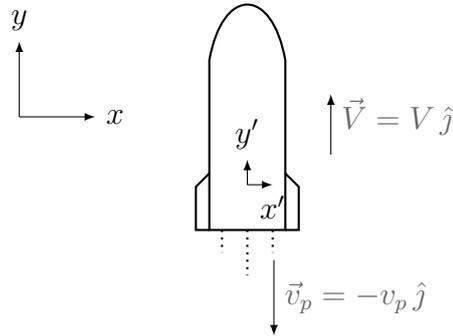


17.1.1 Movimento de um foguete

- Um foguete movimenta-se expelindo o propelente, em direcção oposta ao seu movimento.
- O propelente é produzido por exemplo pela queima de combustível, logo a massa M do foguete varia ao longo do seu movimento.
- Pela 2ª lei de Newton a força resultante que actua no foguete é

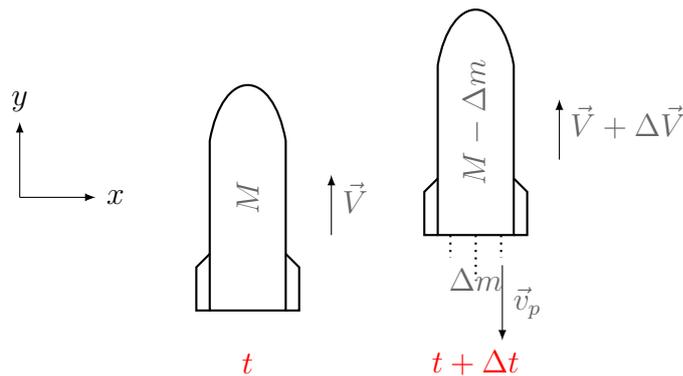
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

- Vamos encontrar a variação do momento linear do foguete $\Delta\vec{p}$.



- Seja \vec{V} a velocidade do foguete e \vec{v}_p a velocidade do propelente, relativas a um referencial inercial
- A velocidade do propelente relativamente ao foguete será então,

$$\vec{v}'_p = \vec{v}_p - \vec{V} \Leftrightarrow -v'_p \hat{j} = -(v_p + V) \hat{j}$$



- Se num instante t a massa do foguete (combustível incluído) é M , num instante seguinte $t + \Delta t$ a massa do foguete varia de Δm e a sua velocidade varia de ΔV
- No instante t o momento linear do sistema é

$$\vec{p}(t) = M\vec{V} = MV \hat{j}$$

- E no instante $t + \Delta t$ é,

$$\begin{aligned} \vec{p}(t + \Delta t) &= \underbrace{(M - \Delta m)(V + \Delta V)}_{\text{foguete}} \hat{j} + \underbrace{\Delta m(-v_p)}_{\text{propelente}} \hat{j} \\ &= [MV + M\Delta V - (v_p + V)\Delta m] \hat{j} \\ &= [MV + M\Delta V - v'_p \Delta m] \hat{j}, \end{aligned}$$

onde foi desprezado o termo $\Delta m \Delta v$ de segunda ordem, por ser muito pequeno.

- A variação do momento linear no intervalo de tempo Δt é,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} &= \frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} \\ &= \left[M \frac{\Delta V}{\Delta t} - v'_p \frac{\Delta m}{\Delta t} \right] \hat{j}\end{aligned}$$

- No limite $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{v}'_p \frac{dm}{dt},$$

como $dm/dt = -dM/dt$ vem

$$= M \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{v}'_p \frac{dM}{dt}$$

- Se no foguete actua uma força externa \vec{F} então da 2ª lei de Newton temos que,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= M \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{v}'_p \frac{dM}{dt},\end{aligned}$$

- Esta poderia-se chamar a equação do foguete.
- Para a resolver é necessário fazer *algumas considerações*: admitindo que v'_p é constante, desprezando a resistência do ar e a variação da força gravítica com a altitude (logo $\vec{F} = M\vec{g}$) temos,

$$-g = \frac{dV}{dt} + \frac{v'_p}{M} \frac{dM}{dt}$$

- Podemos integrar no tempo esta equação entre 0 e t , ficando,

$$\begin{aligned}- \int_0^t g dt &= \int_{V_0}^V dV + \int_{M_0}^M \frac{v'_p}{M} dM \\ -gt &= V - V_0 + v'_p \ln \left(\frac{M}{M_0} \right) \\ V &= V_0 + v'_p \ln \left(\frac{M_0}{M} \right) - gt\end{aligned}$$

- Em geral $V_0 = 0$ e gt é pequeno.

- Por exemplo se a massa inicial do foguete é $M_0 = 2.7 \times 10^6$ kg e a final após queima total do combustível $M = 2.5 \times 10^6$ kg, passados $t = 155$ s, sendo o propelente expelido à taxa de 1290 kg/s.
- Se $v'_p = 55000$ m/s a velocidade máxima desse estágio do foguete será,

$$\begin{aligned} V &= 55000 \ln\left(\frac{2.7}{2.5}\right) - 9.8 * 155 \\ &= 2713.8 \text{ m/s} \approx 9770 \text{ km/h} \end{aligned}$$

- *Quanto mais rápido for o propelente expelido (i.e. maior for dM/dt) maior é a velocidade final do foguete, pois menor será a contribuição do termo gravítico*

Aula 18

Dinâmica dum corpo rígido

18.1 Momento angular e velocidade angular num corpo rígido

- Num corpo rígido todas as partículas têm posições relativas entre si, fixas.
- Se um corpo rígido roda em torno de um eixo todas as partículas têm a mesma velocidade angular $\vec{\omega}$.
- O momento angular \vec{L}_i duma partícula i deste corpo é,

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

onde \vec{r}_i é o vector posição e \vec{v}_i a velocidade da partícula relativamente a um referencial com origem no eixo de rotação.

- Sabemos também que a velocidade desta partícula está relacionada com a velocidade angular por, $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$.
- Substituindo, o momento angular da partícula i vem,

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

- O producto triplo de vectores é dado por,

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

- Então o momento angular da partícula i fica,

$$\vec{L}_i = m_i (\vec{\omega} r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i)$$

- O momento angular total do corpo é a soma de todos os momentos angulares de cada partícula do corpo,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \vec{L}_4 + \dots \\ &= \sum_i m_i (\vec{\omega} r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i)\end{aligned}\quad (18.1)$$

- Como $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ e $\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$, por exemplo a componente z do momento angular é,

$$L_z = \sum_i [m_i (\omega_z r_i^2 - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) z_i)]$$

repare-se que ω é igual para todas as partículas

$$\begin{aligned}&= - \underbrace{\sum_i m_i z_i x_i}_{\text{producto de inércia}} \omega_x - \underbrace{\sum_i m_i z_i y_i}_{\text{producto de inércia}} \omega_y \\ &\quad + \underbrace{\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)}_{\text{momento de inércia}} \omega_z \\ &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z\end{aligned}$$

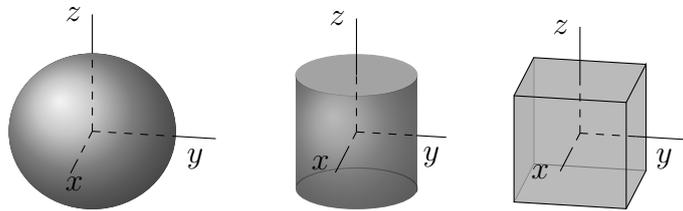
- Note-se que os productos de inércia podem ser > 0 ou < 0 , mas o momento de inércia é sempre > 0
- De modo semelhante podíamos escrever as outras componentes de \vec{L} concluindo que,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{I} \vec{\omega},\end{aligned}\quad (18.2)$$

onde \mathcal{I} é uma matriz (chamado o tensor de inércia) que roda o vector $\vec{\omega}$ para a direcção do vector \vec{L} .

- \vec{L} pode ser paralelo a $\vec{\omega}$?
- Sim. Qualquer corpo tem sempre pelo menos 3 eixos de rotação perpendiculares entre si nos quais $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.
- Estes eixos chamam-se os *eixos principais de inércia*, X_0 , Y_0 e Z_0 .

- Os momentos de inércia relativos a estes eixos são chamados *momentos principais de inércia*, I_x , I_y e I_z .
- Mas em geral o momento angular de um sólido \vec{L} não é paralelo ao eixo de rotação, logo também não é paralelo a $\vec{\omega}$.
- Chama-se a atenção para esta diferença com o movimento de translação, onde o momento linear de um corpo \vec{p}_{CM} é sempre paralelo à velocidade de translação do corpo \vec{v}_{CM} .
- Quando o corpo tem alguns eixos de simetria os eixos principais coincidem com alguns dos eixos de simetria.



- Quando um corpo *gira em torno de um eixo principal de inércia*, \vec{L} e $\vec{\omega}$ são paralelos e neste caso podemos escrever a relação vectorial,

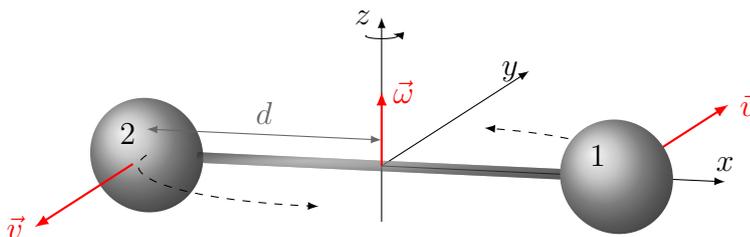
$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (18.3)$$

onde o momento de inércia relativo ao eixo principal em torno do qual o corpo está a rodar, I , é um escalar.

18.1.1 Exemplo: Momento e velocidade, angulares

Exercício 37

Considere duas esferas de massa m ligadas por uma haste de massa desprezável e comprimento $2d$. As esferas giram em torno do eixo z com velocidade \vec{v} no plano xy . Calcule o momento angular do corpo rígido e compare a sua direcção com a da velocidade angular do mesmo.



A velocidade angular é um vector que aponta segundo o eixo z ,

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

O momento angular total do corpo é a soma dos momentos angulares de cada massa,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2\end{aligned}$$

Sendo ϕ o ângulo que a cada instante a haste faz com o eixo x o vector posição da massa 1 é,

$$\vec{r}_1 = d(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j})$$

e a velocidade da mesma massa é,

$$\vec{v}_1 = v(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j})$$

logo o momento angular desta massa é,

$$\vec{L}_1 = mvd(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \hat{k} = mvd \hat{k}$$

Como $\vec{L}_2 = \vec{L}_1$ o momento total é,

$$\vec{L} = 2mvd \hat{k}$$

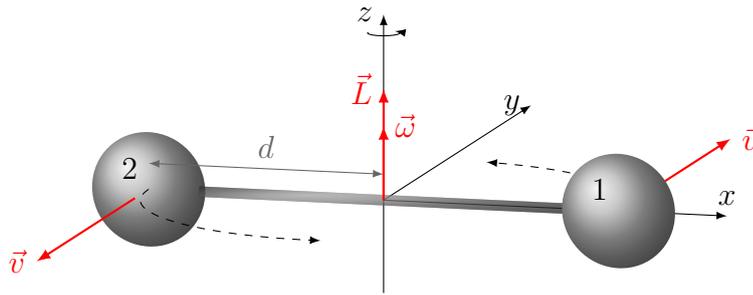
usando o facto que $v = \omega d$,

$$= 2md^2 \omega \hat{k}.$$

É assim claro que \vec{L} é paralelo a $\vec{\omega}$ e podemos escrever finalmente,

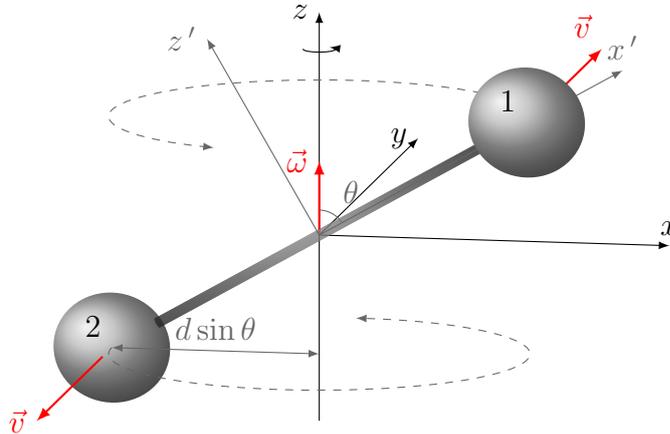
$$\vec{L} = I_{zz} \vec{\omega}$$

onde $I_{zz} = 2md^2$ é o momento de inércia do corpo em torno do eixo z .



Exercício 38

Considere o mesmo corpo do problema anterior mas em que a haste faz um ângulo θ com o eixo z . As esferas giram em torno do eixo z com velocidade \vec{v} paralela ao plano xy . Calcule o momento angular do corpo rígido e compare a sua direção com a da velocidade angular do mesmo.



Tal como no problema anterior a velocidade angular é um vector que aponta segundo o eixo z ,

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

De igual modo o momento angular total do corpo é a soma dos momentos angulares de cada massa,

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 \end{aligned}$$

O vector \vec{r}_1 neste caso faz um ângulo θ com o eixo z ,

$$\vec{r}_1 = d \sin \theta (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) + d \cos \theta \hat{k}$$

18.2 Cálculo do momento de inércia

- Para um conjunto discreto de partículas o cálculo do momento de inércia é directo a partir de,

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

onde r_i é a distância a que a massa m_i está do eixo de rotação.

- Para um corpo contínuo usamos a expressão,

$$I = \int r^2 dm \quad (18.4)$$

onde r é a distância a que a massa dm está do eixo de rotação.

- Conhecendo a densidade de massa em cada ponto do corpo podemos exprimir dm , consoante o corpo rígido se possa considerar:

- Unidimensional: $dm = \lambda dL$.
- Bidimensional: $dm = \sigma dA$.
- Tridimensional: $dm = \rho dV$.

- Sendo

$\lambda = dm/dL$ a densidade linear de massa,

$\sigma = dm/dA$ a densidade superficial de massa e

$\rho = dm/dV$ a densidade volúmica de massa.

- Por exemplo, se conhecermos a densidade volúmica de massa $\rho(x, y, z)$ em cada ponto de coordenadas (x, y, z) do corpo rígido o seu momento de inércia vem,

$$I = \int r^2 \rho(x, y, z) dV,$$

caso o corpo seja homogéneo ρ é constante e nesse caso I é igual a ρ vezes um factor geométrico,

$$I = \rho \int r^2 dV.$$

Momentos de inércia relativos a dois eixos paralelos

- Podemos relacionar de forma simples, os momentos de inércia relativos a dois eixos paralelos.
- Se Z é um eixo arbitrário, afastado dum distância d dum eixo paralelo que passa pelo centro de massa do corpo Z_{CM} então,

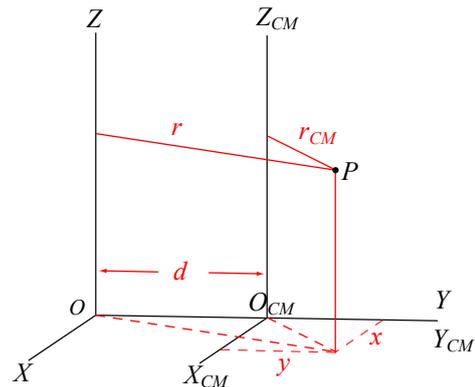
$$I = I_{CM} + Md^2,$$

onde I e I_{CM} são os momentos de inércia relativos aos eixos Z e Z_{CM} e M é a massa total do corpo.

- Esta relação é chamada o teorema de Steiner e para a provar escolhemos os eixos de tal forma que o referencial X_{CM}, Y_{CM}, Z_{CM} tem a sua origem no CM do corpo e Y_{CM} pertence ao plano que passa por Z e Z_{CM} e coincide com Y (ver figura).

Momentos de inércia relativos a dois eixos paralelos

- Consideremos um ponto P qualquer do corpo rígido, que está à distância r_{CM} do eixo Z_{CM} .



- Então verifica-se,

$$r_{CM}^2 = x^2 + y^2,$$

e

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + (y + d)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2yd + d^2 \\ &= r_{CM}^2 + 2yd + d^2 \end{aligned}$$

- Logo o momento de inércia relativo a Z é,

$$\begin{aligned} I &= \sum mr^2 = \sum m(r_{CM}^2 + 2yd + d^2) \\ &= \sum mr_{CM}^2 + 2d(\sum my) + d^2 \sum m \end{aligned}$$

- O 1º termo é o momento de inércia relativo ao CM e o último termo é a massa total $M = \sum m$ então,

$$I = I_{CM} + 2d(\sum my) + Md^2.$$

- De acordo com a Eq. 13.4 $y_{CM} = \sum my/M$, mas nesta demonstração assumi-se que $y_{CM} = 0$ logo o 2º termo é zero e a equação anterior reduz-se ao teorema de Steiner, que fica assim demonstrado.

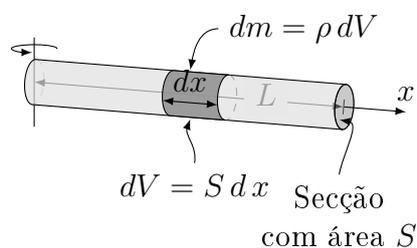
18.2.1 Exemplo: Momentos de inércia de uma haste cilíndrica

Exercício 39

Calcule o momento de inércia de uma haste cilíndrica fina e homogênea com densidade ρ , comprimento L e secção S , relativamente a um eixo perpendicular à haste e passando por (a) uma extremidade, (b) pelo meio da haste.

- (a) Da definição de momento de inércia para um corpo com densidade volumétrica de massa $\rho = dm/dV = \text{constante}$ vem,

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \int r^2 \rho dV, \end{aligned}$$



onde dV é um volume elementar, tão pequeno quanto se queira.

Da figura temos $dV = S dx$ assim,

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \rho S dx \\ &= \rho S \int_0^L x^2 dx \\ &= \rho S \frac{L^3}{3}, \end{aligned}$$

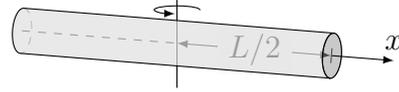
como $\rho SL = M$ vem,

$$I = \frac{ML^2}{3}$$

(b) Neste caso o eixo passa pelo centro de massa.

Alterando os limites de integração de forma apropriada vem,

$$\begin{aligned} I_{CM} &= 2\rho S \int_0^{L/2} x^2 dx \\ &= 2\rho S \frac{L^3}{24} \\ &= \frac{ML^2}{12}. \end{aligned}$$



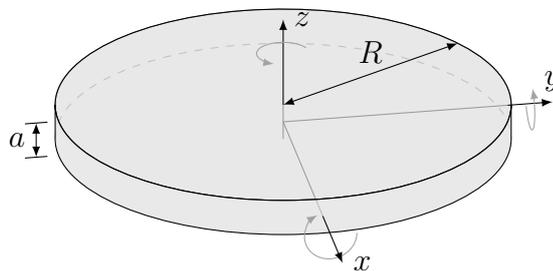
Pelo teorema de Steiner obtêm-se um resultado idêntico,

$$\begin{aligned} I &= I_{CM} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M \\ I_{CM} &= \frac{ML^2}{3} - \frac{L^2}{4} M \\ &= \frac{ML^2}{12}. \end{aligned}$$

18.2.2 Exemplo: Momentos de inércia de um disco fino

Exercício 40

Calcule o momento de inércia de um disco homogêneo fino de altura a , densidade ρ e raio R , relativamente a um eixo perpendicular ao disco e passando pelo (a) seu centro, (b) e um eixo coincidente com um diâmetro.

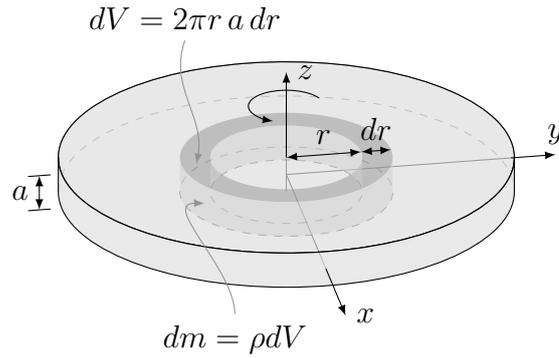


(a) Da definição de momento de inércia para um corpo com densidade volumétrica de massa $\rho = dm/dV = \text{constante}$ vem,

$$I = \int r^2 dm$$

$$= \int r^2 \rho dV.$$

O volume elementar de um pequeno anel de espessura dr , altura a e raio r é $dV = 2\pi r a dr$ então,



$$I_z = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r a dr$$

$$= \rho 2\pi a \int_0^R r^3 dr$$

$$= 2\pi \rho a \frac{R^4}{4},$$

como $\rho \pi R^2 a = M$ vem,

$$I_z = \frac{MR^2}{2}$$

(b) Por razões de simetria concluímos que $I_x = I_y$.

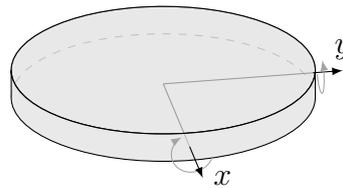
Reescrevendo I_z vem,

$$I_z = \int r^2 dm$$

$$= \int (x^2 + y^2) dm$$

$$= I_y + I_x$$

$$= 2I_x.$$



Note-se que x é a distância de dm ao eixo de rotação Y e y é a distância de dm ao eixo de rotação X . Então I_x é dado por,

$$I_x = \frac{MR^2}{4}.$$

Aula 19

Translação e rotação do corpo rígido

19.1 Translação e rotação

- Um corpo rígido é um caso especial dum sistema composto por várias partículas, em que as distâncias entre estas permanecem constantes durante o movimento do corpo, i.e. um corpo rígido conserva a forma durante o movimento.
- Podemos distinguir entre dois tipos de movimento de um corpo rígido:
 - *Translação*, quando todas as partículas descrevem trajectórias paralelas entre elas tais que, as linhas que unem dois pontos do corpo ao longo do seu movimento permanecem sempre paralelas.
 - *Rotação*, em torno de um eixo, quando todas as partículas descrevem trajectórias circulares em torno de uma recta chamada o eixo de rotação.
- *O movimento mais geral dum corpo rígido pode ser sempre decomposto numa rotação e numa translação.*
- Vimos que a Eq.14.4 descreve o movimento de um sistema de partículas, como se a massa total fosse a de uma partícula com a posição igual à do CM do sistema e sujeita à resultante de todas as forças externas aplicadas ao corpo,

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}$$

- A dinâmica deste movimento é análoga à dinâmica do movimento de uma partícula.
- De seguida iniciaremos o estudo do *movimento de rotação de um corpo rígido em torno dum eixo que passa por um ponto fixo num referencial inercial ou pelo CM do corpo.*

19.2 Equação do movimento para a rotação dum corpo rígido

- Já vimos anteriormente (Eq. 16.1) como se relacionam \vec{L} e $\vec{\tau}$ para um sistema de partículas. Esta relação continua válida para um corpo rígido que é também um sistema de partículas que estão fixas umas relativamente às outras,

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- Se o corpo apenas roda em torno de um dos seus eixos principais é válida a relação $\vec{L} = I\vec{\omega}$ e a equação anterior fica,

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{ext} &= \frac{dI\vec{\omega}}{dt} \\ &= I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \\ &= I\vec{\alpha},\end{aligned}\tag{19.1}$$

onde I é o momento de inércia relativo ao eixo principal em torno do qual o corpo está a rodar e $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ é a aceleração angular do corpo.

- Quando o torque externo é zero, um corpo rígido roda em torno de um *eixo principal* com velocidade angular constante.
- *Neste caso em corpos não rígidos (ou articulados) I varia, mas o produto $I\omega$ permanece constante.*
- Esta é a razão porque uma bailarina roda mais depressa quando encolhe os braços e mais devagar quando afasta os braços.
- Se o eixo de rotação não tem um ponto fixo num referencial inercial, não podemos usar a Eq. 19.1, mas podemos usar a Eq. 16.2,

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}.$$

19.2.1 Condição de não deslizamento

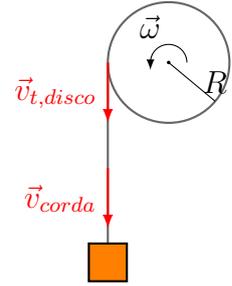
- Existem muitas situações físicas nas quais uma corda se encontra enrolada em torno de um disco, ou roldana.
- *Se a corda não escorrega, a sua velocidade linear deve ser igual à velocidade tangencial da periferia da roldana ou disco.*

- Podemos assim definir a *condição de não deslizamento dum disco de*

$$v_{corda} = v_{t,disco} = R\omega, \quad (19.2)$$

raio R como, derivando obtem-se a aceleração,

$$a_{corda} = a_{t,disco} = R\alpha, \quad (19.3)$$



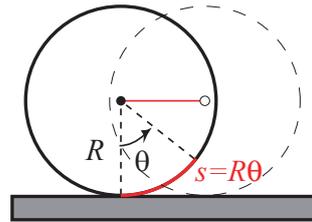
19.2.2 Rolar sem escorregar

- Considere-se um disco de raio R que rola sem escorregar numa superfície plana.
- Ao rodar de um ângulo θ o ponto de contacto entre o disco e a superfície, desloca-se uma distância $s = R\theta$.
- O CM também se deslocará de s pois situa-se na vertical do ponto de contacto. Assim,

$$\begin{aligned} v_{CM} &= \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{dR\theta}{dt} = R\omega, \end{aligned}$$

e derivando temos para a aceleração,

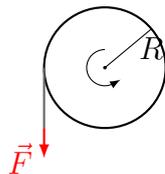
$$a_{CM} = R\alpha,$$



19.2.3 Exemplo: rotação pura 1

Exercício 41

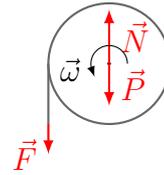
Considere um disco de raio R e massa M que gira livremente em torno de um eixo horizontal fixo que atravessa o seu centro. Puxando, com uma força F , um fio que está enrolado no disco, determine a sua aceleração angular α e a sua velocidade angular ω no instante t .



As únicas forças que actuam no disco são a força \vec{F} , a reacção normal \vec{N} do eixo de rotação e o peso \vec{P} .

O torque resultante relativamente ao centro de massa é apenas o devido à força \vec{F} , pois \vec{P} e \vec{N} são aplicadas no CM. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{\tau}_i &= I\vec{\alpha} \\ \vec{r}_F \times \vec{F} &= I\vec{\alpha} \\ \Rightarrow RF &= \frac{MR^2}{2}\alpha \end{aligned}$$



logo,

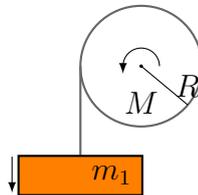
$$\alpha = \frac{2F}{MR}.$$

Como $\alpha = d\omega/dt$, integrando no tempo obtemos $\omega = \alpha t$.

19.2.4 Exemplo: rotação pura 2

Exercício 42

Considere um disco de raio R e massa M que gira livremente em torno de um eixo horizontal fixo que atravessa o seu centro. Um fio que está enrolado no disco, tem pendurada uma massa m_1 . Determine a aceleração angular α do disco.



As forças que actuam em m_1 são a tensão \vec{T} e o peso \vec{P}_1 .

Aplicando a 2ª lei de Newton ao movimento de m_1 obtemos a tensão no fio,

$$T - m_1g = -m_1a,$$

e usando a condição de não escorregamento
 $a = R\alpha,$

$$T = m_1(g - R\alpha).$$

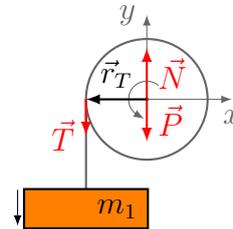
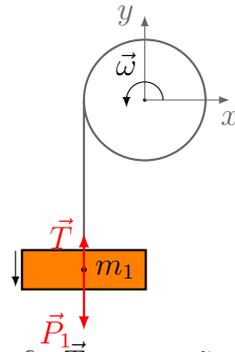
As únicas forças que actuam no disco são a tensão do fio \vec{T} , a reacção normal \vec{N} do eixo de rotação e o peso \vec{P} .

O torque resultante relativamente ao centro de massa é apenas o devido à força \vec{T} , pois \vec{P} e \vec{N} são aplicadas no CM assim,

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{\tau}_i &= I\vec{\alpha} \\ \vec{r}_T \times \vec{T} &= I\vec{\alpha} \\ \Rightarrow RT &= \frac{MR^2}{2}\alpha \end{aligned}$$

Substituindo T pelo valor anteriormente obtido vem,

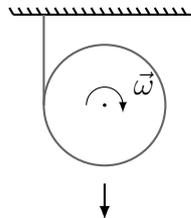
$$\begin{aligned} m_1(g - R\alpha) &= \frac{MR}{2}\alpha \\ \alpha &= \frac{m_1g}{R(m_1 + \frac{M}{2})}. \end{aligned}$$



19.2.5 Exemplo: rotação e translação 1

Exercício 43

Considere um fio enrolado num disco de raio R e massa M . Como mostra a figura, a extremidade do fio está presa a uma superfície. Largando o disco, o fio desenrola-se obrigando o disco a rolar em torno do seu centro. Determine a aceleração angular do disco e a aceleração do seu CM.



As únicas forças que actuam no disco são a tensão no fio \vec{T} e o peso \vec{P} .

Aplicando a 2ª lei de Newton ao movimento de translação do disco de massa M obtemos a tensão no fio,

$$T - Mg = -Ma_{CM},$$

e usando a condição de não escorregamento $a_{CM} = R\alpha$,

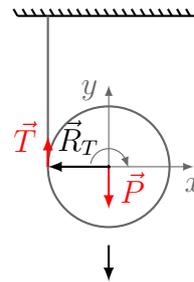
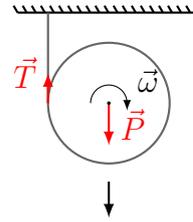
$$T = M(g - R\alpha).$$

O torque resultante relativamente ao centro de massa é dado por,

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{\tau}_i &= I\vec{\alpha} \\ \vec{R}_T \times \vec{T} &= I\vec{\alpha} \\ \Rightarrow RT &= \frac{MR^2}{2}\alpha \end{aligned}$$

Substituindo T pelo valor anteriormente obtido vem,

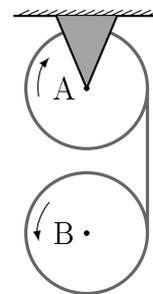
$$\begin{aligned} M(g - R\alpha) &= \frac{MR}{2}\alpha \\ \alpha &= \frac{2g}{3R}. \end{aligned}$$



19.2.6 Exemplo: rotação e translação 2

Exercício 44

Considere dois cilindros A e B com massas e raios idênticos m e R . O cilindro A apenas pode rodar, sem atrito, em torno do eixo z que passa pelo seu centro, fixo a um suporte (ver figura). Em torno deste cilindro está enrolado um cabo que também se enrola no cilindro B, com centro de massa livre. O cilindro B cai na vertical e o cabo desenrola-se sem escorregar pelos cilindros. Encontre a aceleração do centro de massa do cilindro B e a tensão no cabo.



O cilindro A apenas tem movimento de rotação.

O torque resultante relativo ao seu centro é apenas o da tensão no cabo,

$$R\hat{i} \times (-T\hat{j}) = -I\alpha\hat{k}$$

o módulo da tensão é então dado por,

$$T = \frac{I\alpha}{R}$$

O cilindro B tem movimento de rotação em torno do centro de massa e translação deste.

O torque resultante relativo ao seu centro é apenas o da tensão no cabo,

$$R\hat{i}' \times (T'\hat{j}') = I\alpha'\hat{k}'$$

o módulo da tensão é então dado por,

$$T' = \frac{I\alpha'}{R}$$

Como o cabo tem massa desprezável $T = T'$ logo $\alpha = \alpha'$

Num determinado intervalo de tempo dt ambos os cilindros descrevem o mesmo arco ds . Assim a velocidade do centro de massa do cilindro B no referencial fixo é

$$\begin{aligned} v &= 2\frac{ds}{dt} \\ &= 2R\omega \end{aligned}$$

e a aceleração é

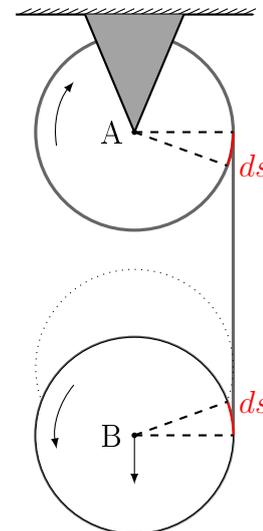
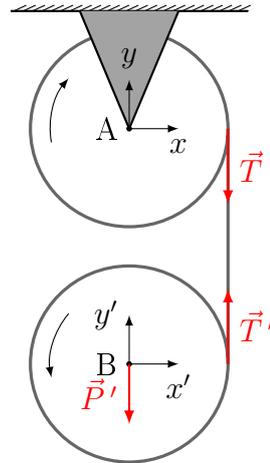
$$a = 2R\alpha.$$

Considerando o movimento de translação do centro de massa do cilindro B a força resultante é,

$$T - P = -ma.$$

Substituindo a tensão $T = I\alpha/R$ obtemos,

$$\frac{I\alpha}{R} + ma = mg$$



e como $\alpha = a/2R$ e $I = mR^2/2$, a aceleração do centro de massa do disco B é,

$$a = \frac{4}{5}g.$$

E finalmente obtemos a tensão no cabo,

$$T = \frac{mg}{5}.$$

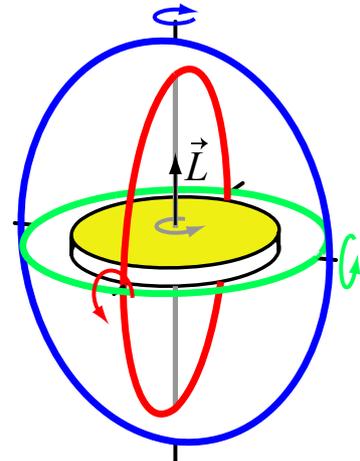
19.3 Conservação do momento angular

19.3.1 Giroscópio

- Um giroscópio demonstra muito bem a conservação do momento angular i.e.,

- Se $d\vec{L}/dt = 0$ logo $\vec{L} = \text{constante}$.
- Se a rotação é em torno de um eixo principal então $\vec{L} = I\vec{\omega}$ logo $\vec{\omega} = \text{constante}$.

- Um giroscópio consiste num disco em rotação em torno de um eixo principal e este eixo está preso a um conjunto de apoios que permitem que o disco rode livremente em qualquer direcção do espaço (ver figura).



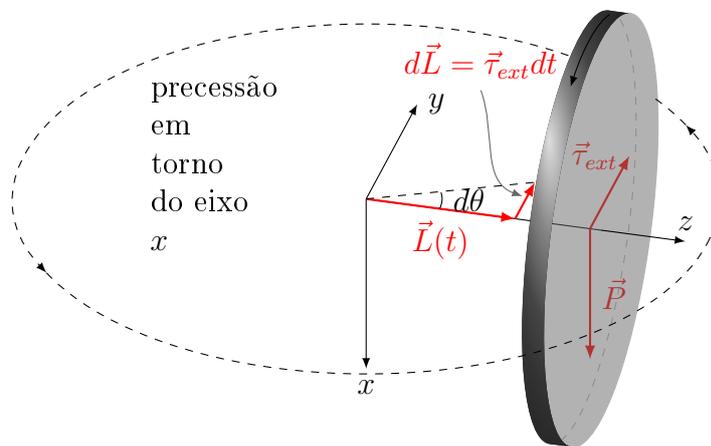
- Se deslocarmos o giroscópio, o seu eixo de rotação mantém-se sempre na mesma direcção.
- Por exemplo, se alinharmos o eixo de rotação segundo a direcção Este-Oeste e esperarmos 6 horas (1/4 do dia) verificamos que o eixo de rotação do giroscópio se alinhou com a vertical. *Porquê?*

Movimento de precessão

- Quando o torque total das forças externas que actuam no giroscópio não é nulo então num intervalo de tempo dt o momento angular tem uma pequena variação na direcção de $\vec{\tau}_{ext}$,

$$d\vec{L} = \vec{\tau}_{ext} dt.$$

- Se $\vec{\tau}_{ext}$ for perpendicular a \vec{L} então $d\vec{L}$ também vai ser perpendicular a \vec{L} e o momento angular varia em direcção mas mantém o módulo constante, i.e. a direcção do eixo de rotação varia mantendo-se L constante.
- Este *movimento do eixo de rotação em torno de um eixo fixo*, devido a um torque externo, é chamado *precessão*



- Podemos determinar a velocidade angular de precessão ω_p para um pequeno instante dt ,

$$dL = \tau_{ext} dt$$

como,

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{dL}{L} \\ &= \frac{\tau_{ext} dt}{L} \end{aligned}$$

a velocidade angular de precessão é dada por,

$$\omega_p = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\tau_{ext}}{L} = \frac{\tau_{ext}}{I_{z_0} \omega_{z_0}}.$$

- Este resultado é válido quando $\omega_{z_0} \gg \omega_p$.

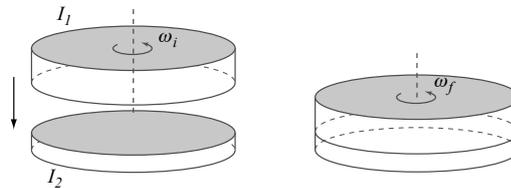
Precessão da Terra

- A Terra é um giroscópio gigante e por não ser uma esfera perfeita, a interação com o Sol e a Lua gera um torque total não nulo, que produz um movimento de precessão da Terra.
- O período de precessão da Terra é cerca de 26000 anos.
- Esta é a razão porque a estrela polar, a estrela que é interseçada a norte pelo eixo de rotação marcando o pólo norte na esfera celeste, não é sempre a mesma estrela.

19.3.2 Exemplo: conservação do momento angular

Exercício 45

Um disco que gira com ω_i em torno de um eixo principal sem atrito tem um momento de inércia I_1 relativamente a esse eixo. Este disco cai sobre um outro disco, inicialmente em repouso. Os dois discos ficam a rodar em torno do mesmo eixo. Considerando I_2 o momento de inércia do segundo disco relativamente ao eixo de rotação, calcule a velocidade angular ω_f com que ficam a rodar os dois discos devido ao atrito existente entre eles.



Não havendo torque externo, o momento angular conserva-se,

$$L_i = L_f$$

$$I_1 \omega_i = (I_1 + I_2) \omega_f,$$

então a velocidade angular final vem,

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega_i.$$

Como vimos anteriormente o momento de inércia para o eixo de rotação em causa é $I = MR^2/2$ logo o resultado final pode ainda ser expresso por,

$$\omega_f = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \omega_i,$$

onde M_1 e M_2 são as massas do disco 1 e 2 respectivamente e se assumiu que o raio dos discos é igual.

19.4 O binário

- Como vimos quando as forças que actuam num corpo não estão aplicadas num mesmo ponto desse corpo podemos distinguir dois efeitos: **translação e rotação**.

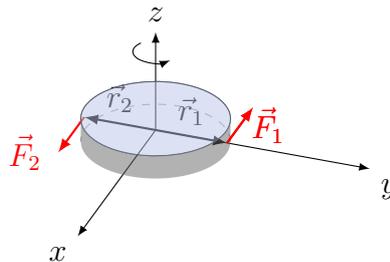
- A translação do corpo é determinada pela força resultante,

$$\vec{F}_r = \sum_i \vec{F}_i.$$

- A rotação do corpo é determinada pelo torque resultante,

$$\vec{\tau}_r = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

- Poderíamos concluir que para simplificar a acção de todas as forças que actuam no corpo, basta aplicar \vec{F}_r num ponto, tal que produza um torque $\vec{\tau}_r$.
- Contudo o torque de \vec{F}_r será sempre um vector perpendicular a \vec{F}_r e nem sempre \vec{F}_r e $\vec{\tau}_r$ são vectores perpendiculares.
- Ou seja, *em geral o efeito dum grupo de forças que actua sobre um corpo rígido não pode ser reduzido ao efeito duma única força resultante \vec{F}_r* .
- Um exemplo simples é o binário, que consiste em duas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 com módulo igual mas sentido oposto, que actuam sobre duas direcções paralelas.



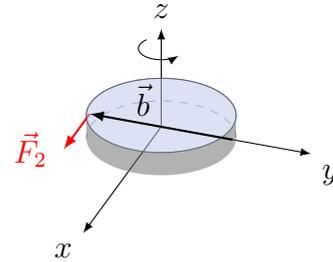
- Neste caso a soma total das forças é zero (sentidos opostos, i.e. $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$),

$$\begin{aligned} \vec{F}_r &= \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i \\ &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \end{aligned}$$

- O que mostra que o binário não gera movimento de translação.

- Por outro lado o torque total é,

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_r &= \sum_{i=1}^2 \vec{\tau}_i \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{b} \times \vec{F}_2,\end{aligned}$$



onde $\vec{b} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ é o chamado braço do binário.

- Note-se que \vec{b} é independente da origem O , logo o torque do binário também é independente da origem O .
- Então no caso geral, podemos substituir um sistema de forças por uma só força e um binário.
- A força é \vec{F}_r , a força resultante de todas as forças e é aplicada na origem relativamente à qual é calculado o vector soma de todos os torques $\vec{\tau}_r$ para que esta produza apenas translação, sem rotação.
- A rotação é gerada por um binário equivalente a $\vec{\tau}_r$.

19.4.1 Exemplo: $\vec{\tau}_r$ e \vec{F}_r

Exercício 46

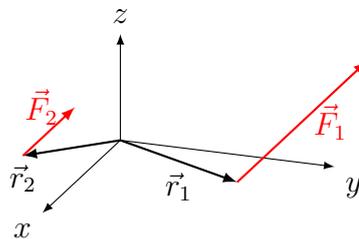
A um corpo são aplicadas as duas forças indicadas na figura,

$$\vec{F}_1 = -5\hat{i} \text{ N e } \vec{F}_2 = -2\hat{i} \text{ N}$$

com os seguintes pontos aplicação,

$$\vec{r}_1 = (\hat{i} + 2\hat{j}) \text{ m e } \vec{r}_2 = (\hat{i} - \hat{j}) \text{ m}.$$

Encontre a força resultante \vec{F}_r e o torque resultante $\vec{\tau}_r$.

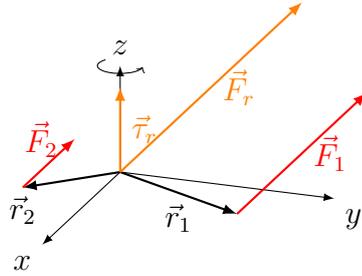


A força resultante é a soma de todas as forças,

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ &= -5\hat{i} - 2\hat{i} = -7\hat{i} \text{ N}\end{aligned}$$

O torque resultante é a soma de todos os torques,

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_r &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= (\hat{i} + 2\hat{j}) \times (-5\hat{i}) + (\hat{i} - \hat{j}) \times (-2\hat{i}) \\ &= 10\hat{k} - 2\hat{k} = 8\hat{k} \text{ Nm}\end{aligned}$$



19.5 Condições para o equilíbrio estático dum corpo rígido.

- Para garantir o equilíbrio estático de um corpo rígido é necessário considerar o equilíbrio relativo tanto à translação como à rotação assim é necessário garantir que,

I Equilíbrio de translação: *A soma (vectorial) de todas as forças que actuam no corpo tem de ser zero,*

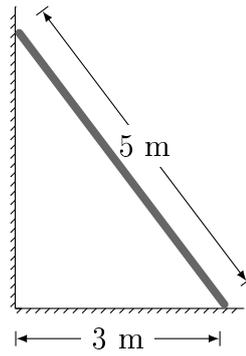
$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \quad (19.4)$$

II Equilíbrio de rotação: *A soma (vectorial) de todos os torques, que actuam no corpo, relativos a qualquer ponto tem de ser zero,*

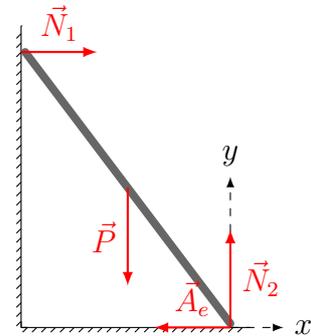
$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0. \quad (19.5)$$

Exercício 47

Uma escada de 5 m que pesa 60 N, com massa uniformemente distribuída, está apoiada numa parede vertical sem atrito. A base da escada está a 3 m da parede. Qual o coeficiente de atrito estático μ_e mínimo entre a base da escada e o chão, necessário para que ela não escorregue?



- As forças que actuam *apenas na escada* estão indicadas na figura.
- Devido ao cálculo de torques é necessário *identificar claramente a origem do referencial* usado para descrever todos os vectores.



NOTA: Vectores não dependem do referencial, mas podem ter mais componentes num referencial do que noutro.

- Impondo as condições de equilíbrio estático (Eq.19.4 e Eq.19.5) vem,

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{A}_e + \vec{P} = 0 \quad (19.6)$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_1 \times \vec{N}_1 + \vec{r}_p \times \vec{P} = 0, \quad (19.7)$$

- além destas 3 equações temos ainda uma outra

$$A_e = \mu_e N_2. \quad (19.8)$$

- Expandindo a Eq.19.6 vem,

$$(N_1 - A_e)\hat{i} + (N_2 - P)\hat{j} = 0,$$

- Usando a Eq.19.8 obtemos para as componentes x e y ,

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \begin{cases} (N_1 - A_e) = 0 \\ (N_2 - P) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} N_1 = \mu_e N_2 \\ N_2 = P \end{cases}. \quad (19.9)$$

- Por outro lado da Eq.19.7 (torques) vem,

$$\begin{aligned}0 &= (-3\hat{i} + 4\hat{j}) \times N_1\hat{i} + (-1.5\hat{i} + 2\hat{j}) \times (-60)\hat{j} \\0 &= -4N_1\hat{k} + 90\hat{k} \\N_1 &= \frac{90}{4},\end{aligned}$$

substituindo N_1 na Eq.19.9 obtemos finalmente o coeficiente de atrito estático,

$$\begin{aligned}\mu_e &= \frac{N_1}{N_2} \\&= \frac{\frac{90}{4}}{60} = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Aula 20

Trabalho e energia no corpo rígido

20.1 Energia cinética de rotação e de translação, sem deslizamento

- A energia cinética de um sistema de partículas é a soma da energia cinética de cada partícula,

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- Por simplicidade analisemos o caso de um sistema com duas partículas.
- As velocidades \vec{v}_i no laboratório estão relacionadas com as velocidades \vec{v}'_i referencial CM por,

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}'_1 + \vec{v}_{CM} \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}'_2 + \vec{v}_{CM}\end{aligned}$$

onde \vec{v}_{CM} é a velocidade do referencial CM no laboratório

- Então a energia cinética no laboratório é,

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (v'_1 + \vec{v}_{CM})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2 + \vec{v}_{CM})^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}^2 \\ &\quad + (m_1 v'_1 + m_2 v'_2) \vec{v}_{CM}\end{aligned}$$

o último termo é a velocidade do CM no ref. CM que é zero, assim,

$$E_c = E_{cCM} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2$$

- Num corpo rígido em rotação todas as partículas tem a mesma velocidade angular ω , contudo a *velocidade de cada partícula em torno do eixo de rotação depende de r_i , a sua distância ao eixo, $v_i = \omega r_i$* . Assim,

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2,$$

então a *energia cinética de rotação dum corpo rígido* é dada por

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

- Consideremos agora o caso em que um corpo rígido, de massa M , gira em torno de um eixo que passa pelo seu CM e simultaneamente tem movimento de translação relativamente a um observador.
- Como vimos anteriormente, a energia cinética dum sistema de partículas num referencial inercial é,

$$E_c = E_{c,CM} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2.$$

- Num corpo rígido, $M v_{CM}^2 / 2$ é a energia cinética de translação.
- Como o *único movimento que um corpo rígido pode ter relativamente ao CM é o de rotação*

$$E_{c,CM} = I_{CM} \omega^2 / 2$$

onde I_{CM} é o momento de inércia relativo a um eixo de rotação que passa pelo CM.

- Assim a energia cinética do corpo num referencial inercial é,

$$E_c = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2.$$

- Como *as distâncias entre as partículas dum corpo rígido não variam a sua energia potencial interna também não varia*, assim relembrando a Eq. 14.8 a variação da energia cinética reduz-se a,

$$\Delta E_c = W_{ext},$$

pois $W_{int} = 0$.

- Se as forças externas que actuam num corpo são conservativas podemos escrever (ver Eq. 10.8)

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= -\Delta E_p, \\ E_{c,i} + E_{p,i} &= E_{c,f} + E_{p,f} = \text{constante}. \end{aligned}$$

- Neste caso podemos definir uma energia total do corpo rígido, ou energia mecânica como,

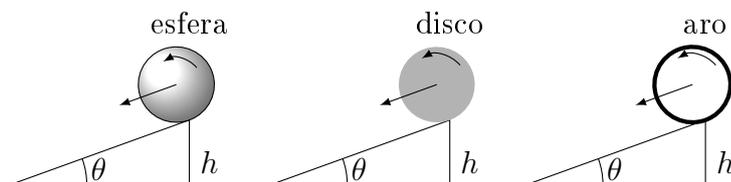
$$E = E_c + E_p$$

$$= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_p$$

20.1.1 Exemplo: rolamento de 3 corpos

Exercício 48

Uma esfera ($I_{CM} = M2R^2/5$), um disco ($I_{CM} = MR^2/2$) e um aro ($I_{CM} = MR^2$), com o mesmo raio e massa, rolam descendo por um plano inclinado. Todos partem em repouso de uma altura h . Determine a velocidade de cada corpo quando chegam à base do plano. Analise os casos de rolamento com e sem deslizamento.



A energia mecânica do sólido é igual à soma da energia cinética de rotação, de translação e à energia potencial,

$$E_T = E_C + E_P$$

$$= \frac{I_{CM} \omega^2}{2} + \frac{M v^2}{2} + Mgh.$$

No caso em que o corpo rola sem escorregar, no ponto de contacto com o solo existe uma força de atrito estático que não realiza trabalho.

Podemos assim aplicar a conservação da energia mecânica obtendo,

$$E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf}$$

$$Mgh = \frac{I_{CM} \omega_f^2}{2} + \frac{M v_f^2}{2}$$

$$2Mgh = \frac{I_{CM} v_f^2}{R^2} + M v_f^2$$

$$2gh = \left(\frac{I_{CM}}{MR^2} + 1 \right) v_f^2$$

$$v_{fr} = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{I_{CM}}{MR^2} + 1}},$$

que é a velocidade com que o corpo chega à base, rolando sem deslizar.

A velocidade é independente do raio R e da massa M .

Se houver deslizamento, vamos supor que o atrito cinético é desprezável.

Podemos assim aplicar a conservação da energia mecânica obtendo,

$$\begin{aligned} E_{Ci} + E_{Pi} &= E_{Cf} + E_{Pf} \\ Mgh &= \frac{Mv_f^2}{2} \\ v_{fd} &= \sqrt{2gh}. \end{aligned}$$

Então para a esfera temos,

$$v_{resfera} = \sqrt{\frac{10gh}{7}},$$

para o disco vem,

$$v_{rdisco} = \sqrt{\frac{4gh}{3}},$$

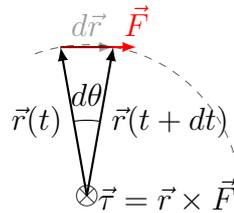
e finalmente para o aro,

$$v_{rao} = \sqrt{gh}.$$

Portanto $v_d > v_{resfera} > v_{rdisco} > v_{rao}$.

Ou seja, a velocidade de deslizamento é igual para todos os sólidos e é maior do que qualquer velocidade de rolamento, sendo a esfera a que tem maior velocidade de rolamento devido a ter o menor momento de inércia relativo ao CM.

20.2 Trabalho e potência na rotação



- O trabalho realizado por uma força \vec{F} que actua num corpo e o faz girar de um ângulo $d\theta$ é dado por,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

como $dr = r d\theta$ e $\vec{F} \parallel d\vec{r}$ vem,

$$= F r d\theta$$

- Repare-se que Fr é o módulo de $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ logo,

$$dW = \tau d\theta$$

- Para um deslocamento angular finito o trabalho é dado por,

$$W = \int_0^\theta \tau d\theta$$

- A potência é a variação do trabalho com o tempo,

$$\begin{aligned} P &= \frac{dW}{dt} \\ &= \tau \frac{d\theta}{dt} \\ &= \tau \omega \end{aligned}$$

20.3 Trabalho e energia cinética na rotação

- Um corpo sólido tem energia cinética de translação e de rotação.
- Como vimos antes o seu movimento pode se decompor na translação do seu centro de massa onde a força resultante \vec{F} é aplicada e na rotação em torno do seu centro de massa devido ao torque resultante τ .
- Vamos mostrar que o trabalho realizado pela força \vec{F} e o torque τ numa deslocação entre A e B é igual à variação da energia cinética total.
- Começemos pelo trabalho realizado pela força \vec{F} numa translação do CM entre A e B :

$$\begin{aligned} W_{trans} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_{CM} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} \cdot d\vec{r}_{CM} \\ &= m \int_{v_{CM}(A)}^{v_{CM}(B)} v_{CM} dv_{CM} \\ &= \frac{mv_{CM}^2(B)}{2} - \frac{mv_{CM}^2(A)}{2} \\ &= \Delta E_{ctrans} \end{aligned}$$

- O trabalho realizado pelo torque $\vec{\tau}$ na rotação em torno do CM entre θ_A e θ_B é,

$$\begin{aligned} W_{rot} &= \int_{\theta_A}^{\theta_B} \tau d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} I_0 \frac{d\omega}{dt} d\theta \\ &= I_0 \int_{\omega(A)}^{\omega(B)} \omega d\omega \\ &= \frac{I_0 \omega^2(B)}{2} - \frac{I_0 \omega^2(A)}{2} \\ &= \Delta E_{crot} \end{aligned}$$

- O trabalho total é a soma dos trabalhos na translação mais na rotação,

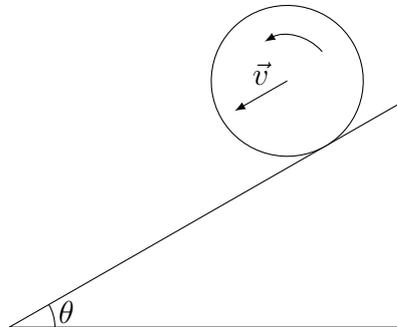
$$\begin{aligned} W &= W_{trans} + W_{rot} = \Delta E_{ctrans} + \Delta E_{crot} \\ &= \Delta E_c \end{aligned}$$

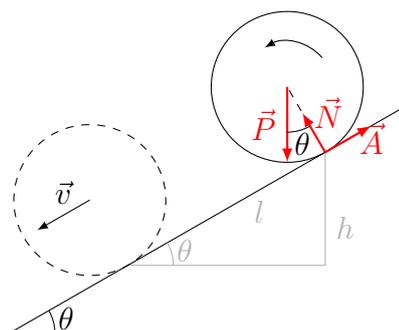
onde $E_c = \frac{mv_{CM}^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2}$ é a energia cinética total.

20.3.1 Exemplo: Conversão de energia cinética de translação em rotação

Exercício 49

Calcule o trabalho total realizado pela força e torque resultantes, que actuam num cilindro que desce um plano inclinado rolando sem escorregar. O cilindro com raio R e massa m tem velocidade inicial nula.





- Começamos por calcular o trabalho realizado na translação do centro de massa numa distância l .
- Na direcção do movimento a força resultante é $F = P \sin \theta - A$.
- O trabalho na translação é,

$$\begin{aligned} W_{trans} &= \int_0^l \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_0^l (P \sin \theta - A) dl \\ &= Pl \sin \theta - Al \end{aligned}$$

como $l \sin \theta = h$

$$= Ph - Al$$

- No movimento de rotação em torno do CM, apenas a força de atrito estático \vec{A} tem um torque não nulo relativamente ao CM.
- Sendo o torque resultante $\tau = RA$ o trabalho na rotação é dado por,

$$\begin{aligned} W_{rot} &= \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \\ &= \int_0^{\theta} RA d\theta \\ &= RA\theta \end{aligned}$$

como o cilindro rola sem escorregar $R\theta = l \log$

$$= Al$$

- O trabalho total é então dado por,

$$W = W_{trans} + W_{rot} = Ph - Al + Al = Ph$$

- Conclui-se que a força de atrito estático, no rolamento sem rescorregamento, não realiza trabalho útil.
- O trabalho de \vec{A} na translação é exactamente igual e de sinal oposto ao trabalho de \vec{A} na rotação.
- *A força de atrito converte energia cinética de translação em energia cinética de rotação.*
- Como $W = \Delta E_c$ conclui-se ainda que,

$$Ph = \frac{mv_{CM}^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}$$

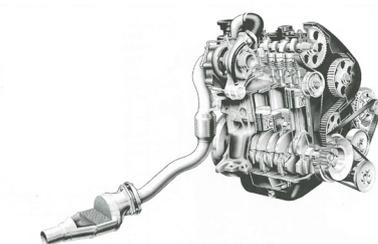
onde v_{CM} é a velocidade do centro de massa, I_0 é o momento de inércia relativamente ao CM e ω a velocidade angular em torno do CM.

- Ou seja a variação da energia cinética do cilindro é igual à sua variação de energia potencial gravítica, uma vez que a força de atrito não realiza trabalho.

20.3.2 Exemplo: Potência de um motor

Exercício 50

Calcule a potência de um motor diesel dum automóvel quando ás 1900 rpm exerce o torque máximo de 250 Nm na cambota.



A velocidade angular da cambota é

$$\begin{aligned}\omega &= 1900 \frac{2\pi}{60} \\ &= 198.97 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Multiplicando este valor pelo torque máximo obtemos a potência máxima às 1900 rpm,

$$\begin{aligned} P &= 250 \times 198.99 = 49741.88 \text{ W} \\ &\approx 50 \text{ kW} \\ &= 67.6 \text{ cv} \end{aligned}$$

20.3.3 Exemplo: volante de inércia

Exercício 51

Um volante de inércia armazena energia sob a forma de energia cinética de rotação. Considere os seguintes casos de volantes de inércia e calcule a energia armazenada em cada um:

a) A roda de uma bicicleta, com diâmetro 700 mm e massa $m = 1$ kg quando se desloca a 10 km/h.

b) A mesma roda quando se desloca a 20 km/h.

c) Um cilindro de aço de raio $R = 1.5$ m e altura $A = 0.5$ m que roda a 2300 rpm. Considere aço com densidade $\rho = 7.85$ g/cm³.

d) A Terra. Considere-a como uma esfera de raio $R = 6371$ km, e massa $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg.

a)

- Temos de calcular a energia cinética de rotação nas condições dadas.
- Se a bicicleta se desloca a 10 km/h então a sua velocidade angular é,

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v}{R} \\ &= \frac{\frac{10}{3.6}}{0.35} = 7.9 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

- Considerando que a massa da roda está toda a uma distância R do eixo de rotação, o seu momento de inércia é,

$$\begin{aligned} I &= \int R^2 dm = R^2 \int dm \\ &= R^2 M = 0.12 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

- Então a energia armazenada é,

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{I\omega^2}{2} \\ &= \frac{MR^2\omega^2}{2} = 3.9 \text{ J} \end{aligned}$$

b)

- Se a bicicleta se desloca a 20 km/h então a sua velocidade angular é,

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v}{R} \\ &= \frac{\frac{20}{3.6}}{0.35} = 15.87 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

- Logo a energia armazenada aumenta $4\times$ para,

$$E_c = \frac{I\omega^2}{2} = 15.4 \text{ J}$$

- Note-se que na aproximação aqui usada, a energia armazenada na roda, não depende do raio da roda mas apenas da sua massa e velocidade tangencial,

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{I\omega^2}{2} \\ &= \frac{MR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} \\ &= \frac{Mv^2}{2}\end{aligned}$$

c)

- Se o cilindro de aço roda a 2300 rpm então a sua velocidade angular é,

$$\omega = 2300 \frac{2\pi}{60} = 240.9 \text{ rad/s}$$

- Usando o momento de inércia antes calculado obtemos a energia armazenada,

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{I\omega^2}{2} \\ &= \frac{MR^2\omega^2}{4}\end{aligned}$$

como $M = \rho V$ e $V = \pi R^2 A$ vem,

$$\begin{aligned}&= \frac{\rho\pi R^2 AR^2\omega^2}{4} \\ &= 3758815.7 \approx 3.8 \text{ MJ} \approx 1 \text{ kWh}\end{aligned}$$

d)

- A velocidade angular da Terra é,

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

- Considerando a Terra como uma esfera o momento de inércia é dado por,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5}MR^2 \text{ (ver cálculo no apêndice)} \\ &= 9.69 \times 10^{37} \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

- A energia de rotação armazenada na Terra é assim dada por,

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{I\omega^2}{2} \\ &= \frac{MR^2\omega^2}{5} \\ &= 2.56 \times 10^{29} \text{ J} \end{aligned}$$

Aula 21

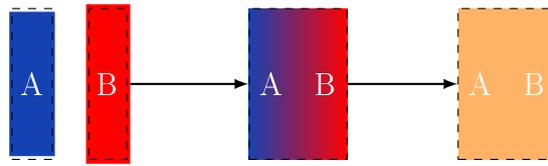
Introdução ao estudo da Termodinâmica

21.1 Introdução ao estudo da Termodinâmica

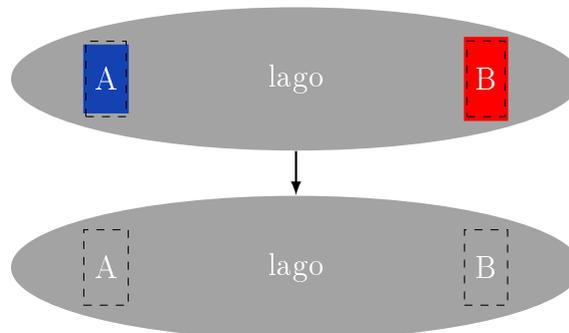
- A termodinâmica é uma ciência experimental, baseada num pequeno número de princípios que são generalizações feitas a partir da experiência.
- A termodinâmica estuda propriedades macroscópicas da matéria.

21.2 Equilíbrio térmico e temperatura

- Para aquecer um objecto colocamos o mesmo em contacto com outro mais quente.
- Para arrefecer um objecto colocamos o mesmo em contacto com outro mais frio.
- Deste tipo de experiências simples desenvolveu-se o conceito físico de temperatura.
- Quando se aquece ou arrefece um objecto algumas das suas propriedades físicas variam.
- A maioria dos sólidos e líquidos expandem-se quando aquecidos. Um gás também.
- *A uma propriedade física que varia com a temperatura chamamos propriedade termométrica*, portanto uma variação desta propriedade física dum objecto indica uma variação na sua temperatura.
- Suponhamos que colocamos uma barra de cobre fria A em contacto com uma barra de cobre quente B .



- A barra **A** por estar mais fria está ligeiramente contraída.
- A barra **B** por estar mais quente expandiu-se ligeiramente.
- Colocando as duas barras em contacto tal que **A** aqueça e **B** arrefeça, dizemos que as barras estão em *contacto térmico*.
- A barra **B** vai agora contrair-se e a **A** expandir-se, até que passado algum tempo as duas barras têm o mesmo tamanho e este permanece constante.
- Diz-se que as barras estão em *equilíbrio térmico* uma com a outra.
- Consideremos uma outra experiência com as mesmas barras **A** (fria) e **B** (quente).
- Desta vez as barras são mergulhadas num grande lago, muito afastadas uma da outra.



- A barra **A** aquece até ficar à temperatura do lago, enquanto **B** arrefece até ficar à temperatura do lago.
- *O lago é tão grande que não se nota a variação de temperatura causada pelas duas barras.*
- Cada barra está em equilíbrio térmico com o lago.
- Se colocar as duas barras em contacto térmico, verifica-se também que as duas barras estão em equilíbrio térmico entre si.

21.3 Lei zero da termodinâmica

- Podemos então enunciar a

lei zero da termodinâmica

Se dois corpos estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo, então também estão em equilíbrio térmico entre si.

- Esta lei permite definir uma escala de temperatura.

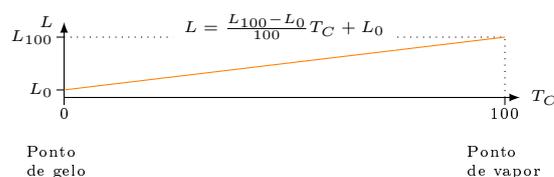
21.3.1 Escalas de temperatura

- Qualquer propriedade termométrica permite estabelecer uma escala de temperatura.
- No conhecido termómetro de mercúrio, é usada a expansão/contractão do mercúrio num tubo de vidro para determinar as variações de temperatura.
- A escala é calibrada marcando no vidro o comprimento da coluna de mercúrio quando o termómetro é posto em *contacto térmico com gelo à pressão de uma atmosfera*.
- A este ponto chama-se a temperatura do *ponto de gelo*.
- Em seguida o termómetro é posto em *contacto térmico com água a ferver também à pressão de uma atmosfera*. A este ponto chama-se a temperatura do *ponto de vapor*.



- A escala Celsius foi definida atribuindo o valor zero ao ponto de gelo e o valor 100 ao ponto de vapor.
- Dividindo a distância entre estas duas marcas em cem partes iguais, obtém-se o grau Celsius.
- Assim a temperatura em graus Celsius, T_C correspondente ao comprimento $L(T)$ da coluna de mercúrio obtém-se de,

$$T_C = \frac{L(T) - L(0)}{L(100) - L(0)} 100 \quad [^{\circ}\text{C}]$$

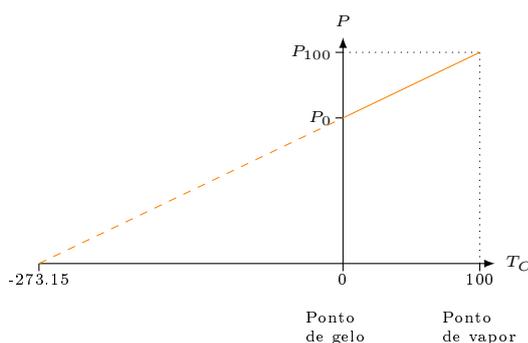


21.4 Termómetros de gás e escala absoluta de temperatura

- Quando diferentes tipos de termómetros são calibrados no ponto de gelo e de vapor, por definição, todos medem correctamente a temperatura destes dois pontos. Contudo *para temperaturas intermédias há ligeiras discrepâncias*.
- As discrepâncias aumentam consideravelmente para valores de temperatura $< 0^\circ\text{C}$ ou $> 100^\circ\text{C}$.
- *Existe contudo um tipo de termómetro onde tais discrepâncias são insignificantes*.
- São os termómetros de gás a volume constante.
- Num termómetro de gás a *propriedade termométrica usada é a pressão do gás a volume constante*.
- Usando um procedimento análogo ao anterior determina-se a pressão do ponto de gelo P_0 e a pressão do ponto de vapor P_{100} .
- A temperatura em graus Celsius correspondente à pressão $P(T_C)$ é encontrada por,

$$T_C = \frac{P(T_C) - P(0)}{P(100) - P(0)} 100 \quad [^\circ\text{C}]$$

- Esta equação mostra que a *pressão do gás varia linearmente com a temperatura*.



- Extrapolando o valor da temperatura, quando a pressão é zero, verifica-se que todos os termómetros de gás a baixa pressão convergem para o valor de -273.15°C , independentemente do gás usado.
- Extrapolando T_C para $P = 0$ verifica-se que todos os termómetros de gás a baixa pressão convergem para $T_C = -273.15^\circ\text{C}$, independentemente do gás usado.

- -273.15°C é a temperatura do zero absoluto de temperatura.
- A escala absoluta de temperatura chama-se escala Kelvin (K) que se relaciona com a escala Celsius por,

$$T = T_C + 273.15,$$

onde T é a temperatura em kelvin e T_C é a temperatura em graus celsius.

- Um ponto de referência muito mais estável do que o do gelo e/ou o do vapor é o ponto triplo da água.
- No ponto triplo da água as três fases da água (sólida, líquida e gasosa) coexistem em equilíbrio entre si, ou seja é possível ter gelo, água líquida e vapor de água juntos se a temperatura for de 0.01°C e a pressão for de 0.0060263 atmosferas.
- A escala de temperatura do gás ideal é assim definida de modo a que a temperatura do ponto triplo seja de 273.16 kelvin (K).
- A temperatura, T de qualquer outro estado do gás é definida como sendo proporcional à pressão, P num termómetro de gás a volume constante,

$$T = \frac{273.16}{P_3}P,$$

onde P_3 é a pressão do termómetro quando é imerso num banho de água-gelo-vapor no seu ponto triplo.

- O valor de P_3 depende da quantidade de gás dentro do termómetro.

21.5 Lei dos gases ideais

- Verifica-se experimentalmente que se um gás for comprimido mantendo a sua temperatura constante, a pressão aumenta.
- Verifica-se experimentalmente que em boa aproximação, à temperatura constante o produto,

$$PV = \text{constante},$$

esta é a lei de Boyle.

- Um resultado mais geral foi descoberto também experimentalmente concluiu que,

$$PV = k_BNT, \tag{21.1}$$

P é a pressão do gás (Pa),

V é o volume que o gás ocupa (m^3),

N é o número de moléculas do gás,

$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ (J/K) é a constante de Boltzmann,

T é a temperatura absoluta (K).

- A equação anterior é *válida para gases pouco densos* e é chamada a lei dos gases ideais.

21.5.1 Definição de mol

- Qualquer volume de dimensões normais, mesmo que muito pequenas, contém um número de moléculas excepcionalmente elevado.
- Desta forma não é prático usar o número de moléculas nos cálculos efectuados.
- Uma forma de contornar esta incomodidade é agrupar as moléculas e contar apenas os grupos de moléculas.
- Quando o número de moléculas num grupo é igual ao *número de átomos que estão em 12g de ^{12}C dizíamos que esse grupo tem uma mol de moléculas*.
- Uma mol são 6.022×10^{23} partículas.
- A este número também se chama o número de Avogadro N_A , que este ano (2019) foi redefinido para o valor exato,

$$N_A = 6.02214076 \times 10^{23} \text{ partículas por mol}$$

- Na realidade Loschmidt foi o primeiro a calcular este número.
- Contar as moléculas em mol é semelhante a contar ovos às dúzias.
- Uma dúzia é apenas um grupo de ovos com 12 ovos, uma mol é um grupo de partículas com N_A partículas.
- Assim se um gás tem N moléculas, podemos exprimir esse mesmo número de moléculas em z mol com,

$$z = \frac{N}{N_A}$$

- Usando moles a equação dos gases ideais fica,

$$PV = zN_A k_B T,$$

como N_A e k_B são constantes é comum usar a constante dos gases ideais $R = N_A k_B = 8.314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$,

$$PV = zRT$$

- A equação do gás ideal é também conhecida como a equação de estado dum gás ideal, pois ela relaciona as variáveis P , V e T que descrevem o estado macroscópico dum gás em equilíbrio
- No sistema internacional:
 - A *pressão*, sendo uma *força por unidade de área*, mede-se em pascal (Pa), $1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$, (uma atmosfera $1\text{atm} = 101325 \text{ Pa} \approx 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$).
 - O volume mede-se em m^3 no SI, (um metro cúbico contém 1000 litros).

21.5.2 Exemplo: volume duma mol dum gás ideal

Exercício 52

Qual o volume ocupado por 1 mol dum gás ideal à temperatura de 0°C e pressão de 1 atm?

Uma mol de partículas são 6.022×10^{23} partículas, que é igual a N_A . Usando a equação dos gases ideais, Eq.21.1 vem,

$$\begin{aligned} PV &= Nk_B T \\ V &= \frac{N_A k_B T}{P} \\ &= \frac{RT}{P}, \end{aligned}$$

substituindo os valores de $T = 273.15 \text{ K}$ e $P = 1.01 \times 10^5$ obtemos o volume procurado,

$$V = 0.0225 \text{ m}^3 = 22.5 \text{ L}.$$

21.5.3 Exemplo: compressão dum gás ideal

Exercício 53

Um gás à temperatura de 30° C e 1 atm ocupa um volume de 2L. Qual a nova pressão, quando o gás é aquecido a 60° C e comprimido a 1.5 L de volume.

Usando a equação dos gases ideais, Eq.21.1 vem para o estado inicial,

$$P_i V_i = N_i k_B T_i$$
$$N_i = \frac{P_i V_i}{k_B T_i}.$$

Como o número de partículas é constante $N_i = N_f$ então para o estado final obtemos,

$$P_f V_f = N_i k_B T_f$$
$$P_f = \frac{P_i V_i}{k_B T_i} \frac{k_B T_f}{V_f}$$
$$= P_i \frac{V_i}{T_i} \frac{T_f}{V_f},$$

substituindo os valores de T e de V obtemos a pressão procurada,

$$P = 1.48 \times 10^5 \text{ Pa} = 1.47 \text{ atm.}$$

21.5.4 Exemplo: massa de 1 átomo de Hidrogénio

Exercício 54

A massa molar do Hidrogénio é 1.008 g/mol. Qual a massa de 1 átomo de Hidrogénio?

A massa de 1 átomo de Hidrogénio = $\frac{1.008}{6.022 \times 10^{23}} = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g} = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Aula 22

Física cinética e estatística

22.1 Dedução heurística da equação dum gás ideal

- A equação dum gás ideal foi experimentalmente validada para gases muito rarefeitos.

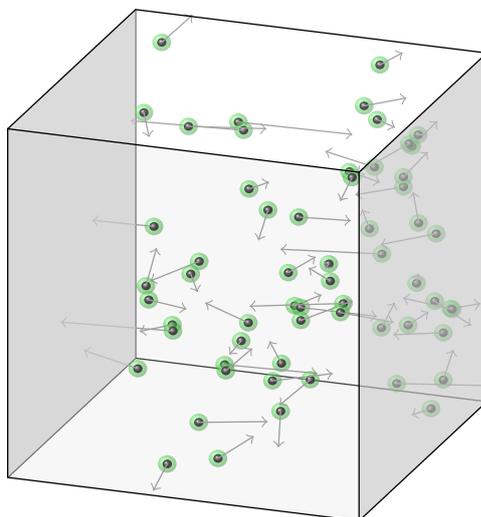
- A sua simplicidade contrasta com a grande multiplicidade de propriedades dos gases que ela consegue explicar.

- O modelo do gás ideal, trata um gás como um conjunto de moléculas que têm *energia cinética muito superior à energia potencial de interação* entre elas resultando num sistema onde as partículas se mantêm afastadas umas das outras.

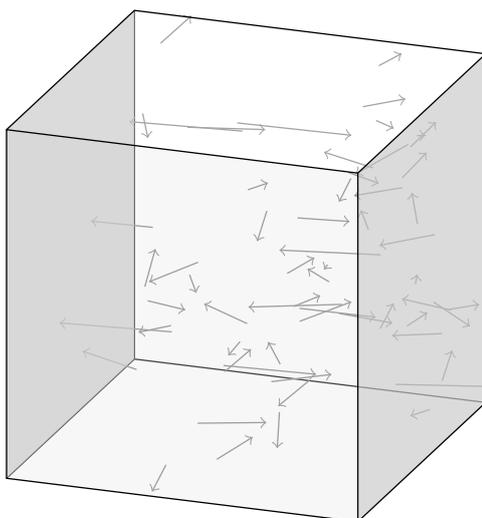
- Pressupostos na dedução da equação dum gás ideal:

Assume-se que as moléculas:	Despreza-se:
se comportam como massas pontuais, i.e. com volume zero	o volume das moléculas é pequeno mas finito
não interagem entre si, excepto instantaneamente quando colidem	a interacção entre as moléculas
colidem elasticamente entre si e com a parede	quase nada; boa aproximação, excepto na condução de electricidade num gás
estão em equilíbrio termodinâmico	nada

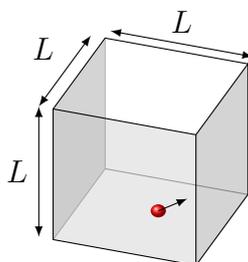
- Esboço do movimento das moléculas num gás *real*.
- As esferas escuras representam as moléculas
- Na região esverdeada, sem carga, a interacção eléctrica é suficiente para mudar a trajectória das moléculas que nela entrem.



- Esboço do movimento das moléculas num gás *ideal*.
- As moléculas são pontuais e não interagem umas com as outras.
- Os diferentes vectores indicam a diversidade de velocidades.



- Consideremos uma caixa de volume $V = L^3$ com N moléculas todas iguais e com massa m .
- Consideremos ainda uma molécula em particular a que chamaremos **s** cuja velocidade v_s é igual à velocidade média \bar{v} de todas as moléculas.
- Tem momento linear $\vec{p}_s = m\vec{v}_s$.
- A sua energia cinética é $E_{c_s} = \frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}m(v_{sx}^2 + v_{sy}^2 + v_{sz}^2)$.



22.1.1 Colisão de **s** Com a Parede da Caixa

- Numa colisão elástica de **s** com a parede $v_{sx} = -v'_{sx}$.
- Usando a conservação do momento linear,

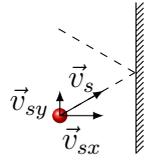
$$\vec{p}_{total} = \vec{p}'_{total}$$

$$m\vec{v}_s + \vec{p}_{parede} = m\vec{v}'_s + \vec{p}'_{parede}$$

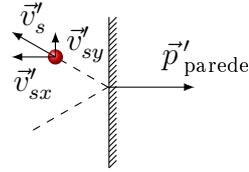
- Como $\vec{p}'_{parede} = 0$ vem,

$$\vec{p}'_{parede} = m\vec{v}_s - m\vec{v}'_s$$

Antes da colisão



Após a colisão



- Considerando esta colisão como ideal v_{sy} e v_{sz} não são alteradas
- Então o momento transferido para a parede é:

$$\begin{aligned}\vec{p}'_{parede} &= mv_{sx} \hat{i} - mv'_{sx} \hat{i} \\ &= 2mv_{sx} \hat{i} \\ &= \Delta p_{sx} \hat{i}\end{aligned}$$

22.1.2 Pressão de **s** na Parede da Caixa

- Depois da colisão **s** dirige-se para o interior da caixa, colide com outra(s) parede(s) e eventualmente voltará a colidir com a mesma parede
- Em média **s** regressa à mesma parede passado um intervalo,

$$\Delta t = 2 \frac{L}{v_{sx}}$$

- Então a taxa à qual **s** transfere momento para a parede é dada aproximadamente por:

$$\frac{\Delta p_{sx}}{\Delta t} = \frac{2mv_{sx}}{2 \frac{L}{v_{sx}}} = \frac{mv_{sx}^2}{L}$$

- Relembrando a 2ª lei de Newton a expressão anterior é simplesmente igual à força que **s** exerce na parede:

$$F_s = \frac{\Delta p_{sx}}{\Delta t} = \frac{mv_{sx}^2}{L}$$

- Por definição a pressão que **s** exerce na parede é apenas a força exercida por unidade de área, i.e.:

$$P_s = \frac{F_s}{Área} = \frac{\frac{mv_{sx}^2}{L}}{L^2} = \frac{mv_{sx}^2}{V}$$

- Em função da energia cinética segundo x :

$$P_s = \frac{mv_{sx}^2}{V} = \frac{2E_{c_{sx}}}{V} \quad (22.1)$$

22.2 Conceito microscópico de pressão e temperatura

- Como à partida nenhuma direcção é preferencial o valor médio de v_s^2 não varia com a direcção, logo verifica-se

$$\frac{1}{2}mv_{sx}^2 = \frac{1}{2}mv_{sy}^2 = \frac{1}{2}mv_{sz}^2$$

- Assim a energia cinética total de s vem,

$$E_{c_s} = \frac{1}{2}mv_{sx}^2 + \frac{1}{2}mv_{sy}^2 + \frac{1}{2}mv_{sz}^2 = 3E_{c_{sx}}$$

ou

$$E_{c_{sx}} = \frac{1}{3}E_{c_s}$$

- Substituindo este resultado na Eq. 22.1 para P_s vem,

$$\begin{aligned} P_s &= 2 \frac{E_{c_{sx}}}{V} \\ &= \frac{2}{3} \frac{E_{c_s}}{V} \end{aligned}$$

- Como na caixa de volume V há N moléculas a pressão total será,

$$P = NP_s = N \frac{2}{3} \frac{E_{c_s}}{V}$$

logo,

$$PV = N \frac{2}{3} E_{c_s}$$

- Comparando esta expressão com a equação dos gases ideais (Eq. 21.1),

$$PV = N \frac{2}{3} E_{c_s}$$

obtemos,

$$E_{c_s} = 3 \frac{1}{2} k_B T \quad (22.2)$$

- *Microscopicamente a temperatura absoluta de um gás de moléculas ideais é uma medida da energia cinética média de translação por partícula.*

22.3 Graus de Liberdade de uma molécula

- Acabámos de mostrar que *num gás ideal cada molécula tem energia cinética média de translação igual a $3k_B T/2$.*
- Uma molécula tem 3 graus de liberdade de translação independentes, i.e. pode mover-se segundo o eixo X , ou segundo Y , ou segundo Z .
- *A cada grau de liberdade está associada uma energia térmica de $\frac{1}{2}k_B T$.*
- Este conceito de grau de liberdade pode generalizar-se.
- O grau de liberdade duma molécula refere-se à forma do movimento que ela *pode fazer* ou ao modo como ela *pode receber energia*.
- Uma molécula monoatômica tem 3 graus de liberdade de translação
- Uma molécula diatômica tem 3 graus de liberdade de translação, mais 2 graus de liberdade de rotação e pode ter também graus de liberdade de vibração.
- Uma molécula triatômica tem 3 graus de liberdade de translação, mais 3 graus de liberdade de rotação e pode ter também graus de liberdade de vibração.
- Em geral *quanto mais complexa é uma molécula mais graus de liberdade possui.*

22.4 O teorema da equipartição

- *Um dos princípios fundamentais da mecânica estatística diz que em média a energia é repartida igualmente por todos os graus de liberdade acessíveis.*
- Implícito neste mecanismo está a existência de um mecanismo de acoplamento entre os graus de liberdade, e.g. uma molécula que viaja pelo espaço não desacelera espontaneamente e começa a rodar.
- É necessária uma interação, i.e. troca de energia, com outra molécula ou simplesmente com um campo, para se dar a transferência de energia entre os graus de liberdade acessíveis.

22.5 Equilíbrio Termodinâmico

- Convém enfatizar um pressuposto essencial nas deduções anteriores.
- As definições de temperatura e pressão de um gás *só fazem sentido* se o gás está em equilíbrio termodinâmico.

- Por equilíbrio entende-se que T e P representam efectivamente a energia e a densidade de energia *média* por grau de liberdade, ou seja, uma grande parte das partículas do gás têm essa energia.
- As restantes partículas podem ter energias muito diferentes (tanto maiores como menores) mas o seu reduzido número não lhes permite influenciar as propriedades macroscópicas de todo o gás.
- Este conceito de equilíbrio é "dinâmico", i.e. não têm que ser sempre as mesmas partículas a ter a mesma energia, *o número de partículas semelhantes a s é que se deve manter estável.*

22.5.1 Exemplo: massa de 1L de ar

Exercício 55

O ar é constituído principalmente por Azoto (N_2) 78.1% e Oxigénio (O_2) 20.1%. Os restantes 1.8% são constituídos por diversos gases como o Árgon, o Dióxido de Carbono e uma parte variável de H_2O . Tratando o ar como um gás ideal e sabendo que a massa molar do N_2 é 28.014 g/mol e do O_2 é 31.998 g/mol:

(a) estime qual a massa de 1L de ar à pressão de 1 atm e temperatura de 20° C.

(b) Qual o volume ocupado por uma massa de ar de 70 kg para os mesmos valores de P e T?

a) Usando a equação dos gases ideais calculamos o número de moles para os valores de P, V e T dados,

$$\begin{aligned}
 PV &= zRT \\
 z &= \frac{PV}{RT} \\
 &= \frac{1.01 \times 10^5 \times 10^{-3}}{8.314 \times 293.15} \\
 &= 0.041 \text{ mol.}
 \end{aligned}$$

Então a massa de 1 L de ar é dada por,

$$\begin{aligned}
 M_{1L} &= z(0.781 \times 28.1 + 0.201 \times 31.998) \\
 &= 1.17 \text{ g.}
 \end{aligned}$$

b) O processo é inverso ao anterior. Determinemos primeiro quantas moles há em 70 Kg de ar,

$$\begin{aligned}
 z_{70Kg} &= \frac{70 \times 10^3}{28.3} \\
 &= 2472.6 \text{ mol,}
 \end{aligned}$$

então o volume ocupado por estas moles é,

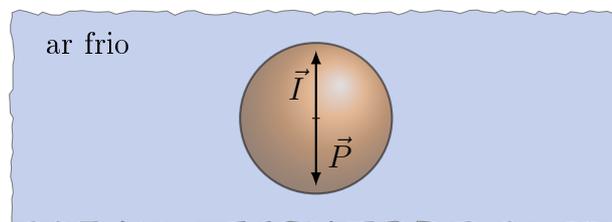
$$\begin{aligned} PV &= zRT \\ V &= \frac{z_{70K}RT}{P} \\ &= 59.7 \text{ m}^3 \\ &= 59.7 \times 10^3 \text{ L.} \end{aligned}$$

22.5.2 Exemplo: Temperatura de um balão de ar quente

Exercício 56

Pretende-se construir um balão de ar quente para lançar na noite de São João. Todo o material tem uma massa de $m_b = 60 \text{ g}$ e envolve um volume de ar de 120 litros. Supondo que à hora a que é lançado o balão o ar está a $T_f = 17^\circ \text{ C}$ e $P = 1 \text{ atm}$ ($= 101325 \text{ Pa}$), qual deve ser a temperatura mínima do ar no interior do balão para que este suba?

Nota: A força de impulsão a que está sujeito o balão de ar quente é igual ao peso de ar frio deslocado pelo balão.



As forças que actuam no balão, são a impulsão I e o peso P então da 2ª lei da dinâmica o balão flutua quando,

$$\begin{aligned} I - P &= 0 \\ m_{ar_f}g - (m_b + m_{ar_q})g &= 0 \end{aligned} \tag{22.3}$$

onde m_{ar_q} é a massa do ar quente dentro do balão e m_b a massa do balão (estrutura).

A massa do ar é dada por,

$$m_{ar} = \rho V$$

onde a densidade de massa ρ é a massa por unidade de volume,

$$\rho = \frac{M_{ar}z}{V},$$

sendo $M_{ar} = (0.781 \times 28.1 + 0.201 \times 31.998) = 28.38$ g/mol a massa molar do ar, já antes calculada.

Da equação dos gases ideais vem,

$$\begin{aligned}\rho &= M_{ar} \frac{P}{RT} \\ &= 3.413 \frac{P}{T}\end{aligned}$$

Voltando à equação do balão (Eq.22.3),

$$\begin{aligned}m_{ar_f} g - (m_b + m_{ar_q}) g &= 0 \\ \rho_{ar_f} V - m_b - \rho_{ar_q} V &= 0 \\ \left(M_{ar} \frac{P}{RT_f} - M_{ar} \frac{P}{RT_q} \right) V &= m_b \\ T_q &= \frac{1}{\frac{1}{T_f} - \frac{m_b}{\frac{M_{ar} P}{R} V}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{290.15} - \frac{60}{\frac{28.38 \times 101325}{8.314} 120 \times 10^{-3}}} \\ &= 499.8 \text{ K} = 226.7^\circ \text{C}\end{aligned}$$

Esta é a temperatura mínima do ar no interior do balão, para a qual o balão flutua. Qualquer valor mais elevado, provoca a subida do balão.

Aula 23

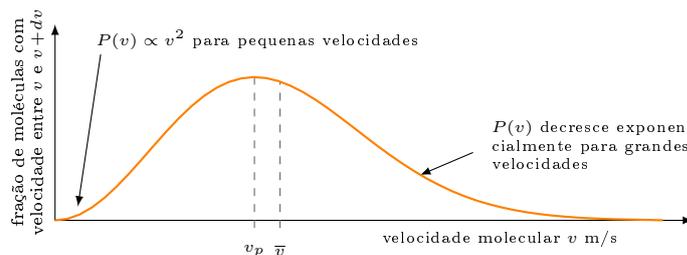
Alguns conceitos de física estatística

23.1 Distribuição do Módulo das Velocidades Moleculares

- Recordemos que nem todas as moléculas de um gás se movem com a mesma velocidade.
- Pode parecer impossível que se possa caracterizar a gama de velocidades das moléculas de um gás.
- Por estranho que pareça pode-se saber muito sobre estas velocidades se o gás estiver em equilíbrio à temperatura T .
- No Apêndice D mostra-se que num gás, à temperatura T , a probabilidade de uma molécula ter velocidade v é dada por,

$$P(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_p^3} e^{-\left(\frac{v}{v_p}\right)^2} dv$$

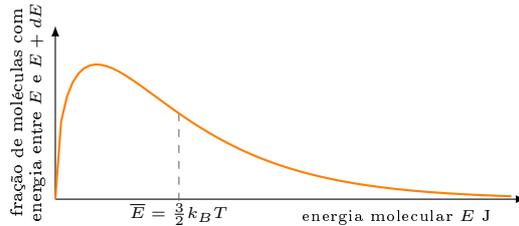
onde $v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$



- Usando $E = \frac{1}{2}mv^2$ podemos mostrar que probabilidade de encontrar uma molécula com energia E é dada por,

$$P(E)dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

$$= \text{constante} \times \sqrt{E} \times e^{-\left(\frac{E}{k_B T}\right)} dE$$

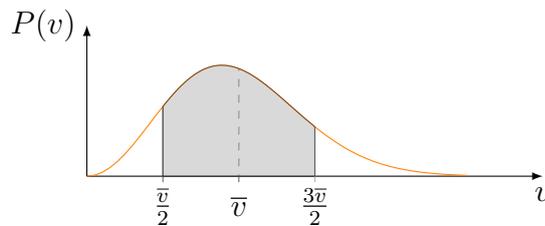


- Resumindo o valor de $P(v)dv$ é igual à fracção de partículas com módulo das suas velocidades no intervalo entre v e $v + dv$
- Do mesmo modo o valor de $P(E)dE$ é igual à fracção de partículas com energia no intervalo entre E e $E + dE$

23.1.1 Exemplo: fracção de partículas em $\left[\frac{\bar{v}}{2}, \frac{3\bar{v}}{2}\right]$

Exercício 57

Calculemos a fracção de partículas que têm velocidade compreendida entre $\bar{v} - \bar{v}/2$ e $\bar{v} + \bar{v}/2$, que corresponde à região sombreada na figura.



- O número de partícula com velocidades compreendidas entre $[0, +\infty]$ é N
- O número de partícula com velocidades compreendidas entre $[v, v + dv]$ é $\Delta N = NP(v)dv$
- Assim a fracção de partículas neste intervalo é

$$\frac{\Delta N}{N} = P(v)dv$$

- No intervalo $[\frac{\bar{v}}{2}, \frac{3\bar{v}}{2}]$ a fracção de partículas é

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &= \int_{\frac{\bar{v}}{2}}^{\frac{3\bar{v}}{2}} P(v) dv \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{\bar{v}}{2}}^{\frac{3\bar{v}}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \end{aligned}$$

- Mudando a variável de integração

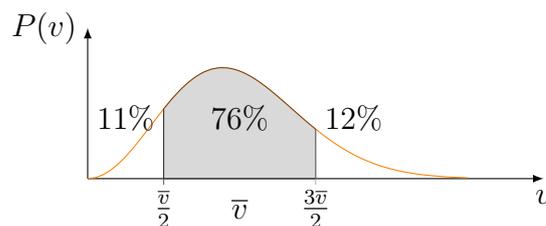
$$u = \frac{mv^2}{2k_B T} \Rightarrow dv = \sqrt{\frac{k_B T}{2mu}} du$$

obtemos uma forma mais simples para o integral.

- No intervalo $[\frac{\bar{v}}{2}, \frac{3\bar{v}}{2}]$ a fracção de partículas é

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{9}{\pi}} \frac{2k_B T}{m} u \sqrt{\frac{k_B T}{2mu}} e^{-u} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{9}{\pi}} \sqrt{u} e^{-u} du \\ &= 0.76 \end{aligned}$$

- Então no intervalo $[\frac{\bar{v}}{2}, \frac{3\bar{v}}{2}]$ estão 76% das partículas
- Esta é a razão porque a dedução simples da equação dos gases ideais feita anteriormente leva ao resultado correcto



23.2 Valor médio duma grandeza física

- Usando a função de distribuição, o valor médio de qualquer quantidade física $Q(v)$ que seja função da velocidade é dado por,

$$\bar{Q} = \int_0^{\infty} Q(v) P(v) dv \quad (23.1)$$

- Esta função não é nada mais nada menos do que uma média pesada onde a cada valor de $Q(v)$ é atribuído o peso $P(v)dv$.
- Somando cada um destes valores *pesados* de $Q(v)$ para todos os valores possíveis de v obtém-se o seu valor médio.

23.3 Três velocidades características de $P(v)$

- Vejamos como exemplo como calcular o valor de três velocidades que caracterizam a curva $P(v)$.
- Começemos por calcular a *média do quadrado da velocidade*, $\overline{v^2}$.

$$\begin{aligned}\overline{v^2} &= \int_0^{\infty} v^2 P(v) dv \\ &= \int_0^{\infty} v^2 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv\end{aligned}$$

- Fazendo $a = \frac{m}{2k_B T}$ e usando a Eq. E.3 vem,

$$\begin{aligned}\overline{v^2} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} a^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^4 e^{-av^2} dv \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} a^{\frac{3}{2}} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}} \\ &= \frac{3k_B T}{m}\end{aligned}$$

- Assim a raiz da média do quadrado da velocidade, também conhecida como a *velocidade quadrática média* é dada por,

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$$

- Uma outra quantidade muito comum é a velocidade média,

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \int_0^{\infty} v P(v) dv \\ &= \int_0^{\infty} v 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv\end{aligned}$$

- Fazendo $a = \frac{m}{2k_B T}$ e usando a Eq. E.3 vem,

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} a^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-av^2} dv \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} a^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2a^2} \\ \bar{v} &= \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}\end{aligned}\tag{23.2}$$

- Por último calculemos a *velocidade mais provável*, v_p .
- Para esta velocidade $P(v)$ é máximo então,

$$\begin{aligned}\frac{dP(v)}{dv} &= 0 \\ \frac{d}{dv} \left(4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \right) &= 0\end{aligned}$$

eliminando o termo constante e fazendo $a = \frac{m}{2k_B T}$ vem,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv} (v^2 e^{-av^2}) &= 0 \\ (2v e^{-av^2} - 2av^3 e^{-av^2}) &= 0 \\ 1 &= av^2 \\ v_p &= \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}\end{aligned}$$

- Usando v_p podemos escrever $P(v)$ numa forma mais compacta.

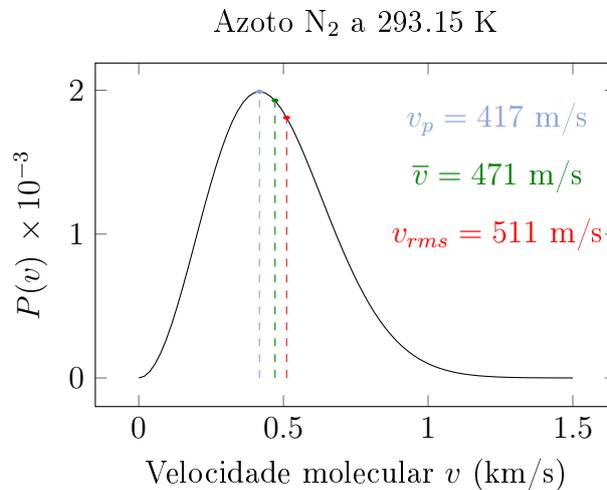
- Para tal usemos a mudança de variável $u = v/v_p \Rightarrow dv = v_p du$ então,

$$\begin{aligned} P(v)dv &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2k_B T}{m}}}\right)^3 v^2 e^{-\frac{v^2}{\frac{2k_B T}{m}}} dv \end{aligned}$$

recordando que $v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$ vem,

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_p^3} e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} dv \\ P(u)du &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du \end{aligned}$$

- A figura ilustra para o Azoto a 293.15 K, estas 3 velocidades, (\bar{v} , v_{rms} e v_p), todas com a mesma ordem de magnitude.



- Em geral as velocidades mais relevantes são as velocidades \bar{v} e $\sqrt{v^2}$, diferindo entre si cerca de 8% com $\bar{v} = 0.921\sqrt{v^2}$.
- A velocidade mais provável v_p marca o máximo da curva de distribuição de velocidades:

23.3.1 A energia cinética média

- A *energia cinética média* pode ser rapidamente calculada a partir da Eq. 23.1,

$$\begin{aligned}\bar{E}_c &= \int_0^{\infty} E_c(v)P(v)dv & (23.3) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{mv^2}{2}P(v)dv \\ &= \frac{m}{2} \int_0^{\infty} v^2P(v)dv\end{aligned}$$

já calculámos atrás este integral $\overline{v^2} = 3k_B T/m$ assim vem,

$$\bar{E}_c = \frac{3}{2}k_B T. \quad (23.4)$$

- Já tínhamos deduzido este resultado anteriormente (ver Eq. 22.2) no modelo muito simples da equação dos gases ideais.
- A equação 23.4 foi calculada por um processo muito mais sofisticado e robusto.

23.3.2 Fluxo de colisões de moléculas

- Usando a função de distribuição de Maxwell-Boltzmann podíamos mostrar que o número de moléculas no gás que cruzam uma unidade de área, por unidade de tempo, i.e. o fluxo de moléculas é dado por,

$$\begin{aligned}\text{fluxo} &= \frac{\text{Número de colisões por}}{\text{unidade de área por}} \\ &\quad \text{unidade de tempo} \\ &= \frac{1}{4}n\bar{v}\end{aligned}$$

onde n é o número densidade de moléculas.

23.3.3 O livre percurso médio numa molécula de gás

- As colisões entre as moléculas de um gás têm um papel importante no transporte de calor no próprio gás.

- A distância que as moléculas viajam entre colisões com outras moléculas é particularmente importante, verificando-se geralmente que moléculas lentas percorrem, entre colisões, distâncias menores que as moléculas rápidas.
- A distância média percorrida por uma molécula entre colisões denomina-se livre percurso médio, λ_{LPM} .
- Usando a função de distribuição de Maxwell-Boltzmann podíamos mostrar que,

$$\lambda_{LPM} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n a^2},$$

onde a é o diâmetro molecular.

23.4 Frequência média de colisão

- O tempo médio entre colisões é chamado tempo de colisão, τ .
- A frequência média de colisão, ν é o inverso do tempo médio de colisão,

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

que representa o número de colisões que em média ocorrem por segundo.

- Podemos exprimir também o livre percurso médio em função da velocidade média e do tempo de colisão,

$$\lambda = \bar{v}\tau$$

Exemplo: livre percurso médio

Exercício 58

Considere-se o Azoto, N_2 (o principal constituinte do ar) como um gás ideal à temperatura de $20^\circ C$ e à pressão de 1 atm. Usando o diâmetro molecular do Azoto, $a = 3 \times 10^{-10}$ m e massa molar $M_{N_2} = 28$ g/mol, calcular:

- o livre percurso médio $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi a^2}$ de uma molécula de N_2 ,
- o tempo de colisão $\tau = \frac{\lambda}{\bar{v}}$ e
- a distância média entre as moléculas, \bar{d} .

(a)

O livre percurso médio é $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi a^2}$.

Sabendo que $a = 3 \times 10^{-10}$ falta determinar n .

Da equação dos gases ideais,

$$\begin{aligned} PV &= Nk_B T \\ n &= \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T} \\ &= \frac{1.01 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23}(273.15 + 20)} \\ &= 2.5 \times 10^{25} \text{ moléculas/m}^3 \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2.5 \times 10^{25} \pi (3 \times 10^{-10})^2} \\ &= 1.0 \times 10^{-7} \text{ m} \approx 333a \end{aligned}$$

(b)

O tempo de colisão é $\tau = \frac{\lambda}{\bar{v}}$. Recordando que,

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

temos todos os dados excepto a massa m de uma molécula. Sabemos contudo que uma mol de moléculas tem 28 g, então a massa de 1 molécula é,

$$m_{N_2} = \frac{28 \times 10^{-3}}{N_A} = \frac{28 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}} = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

logo,

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \times 1.38 \times 10^{-23}(273.15 + 20)}{\pi 4.65 \times 10^{-26}}} = 470.82 \text{ m/s}$$

Assim o tempo de colisão vem,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\lambda}{\bar{v}} \\ &= \frac{1.0 \times 10^{-7}}{470.82} \\ &= 2.13 \times 10^{-10} \text{ s} \end{aligned}$$

a frequência de colisão é $1/\tau = 4.70 \times 10^9$ colisões por segundo.

Uma molécula de Azoto a 20 °C colide, com as outras, cerca de 5 mil milhões de vezes por segundo.

(c)

Se há N moléculas num volume V , então cada molécula tem à sua disposição um volume,

$$\mathcal{V} = \frac{V}{N} = \frac{1}{n} = 4.0 \times 10^{-26} \text{ m}^3.$$

Supondo que este volume \mathcal{V} tem a forma de uma esfera de raio r então,

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi r^3}{3}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{3\mathcal{V}}{4\pi}} = 2.12 \times 10^{-9} \text{ m}$$

logo a distância média entre duas moléculas é $\bar{d} = 2r = 4.24 \times 10^{-9} \text{ m} \approx 14a$.

Repare-se que,

$$\frac{\lambda}{\bar{d}} = \frac{1.0 \times 10^{-7}}{4.24 \times 10^{-9}} \approx 24$$

e que

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{1.0 \times 10^{-7}}{3 \times 10^{-10}} \approx 333$$

ou seja a distância média que uma molécula de N_2 percorre à pressão e temperatura dadas é ≈ 300 vezes superior ao seu diâmetro molecular e ≈ 20 vezes superior à distância média entre moléculas.

Aula 24

Primeira lei da termodinâmica

24.1 Definição de calor

- Até agora abordámos três formas de energia.
- O *trabalho* e como este se relaciona com a *energia cinética* e a *energia potencial*, outras duas formas de energia.
- Definimos energia cinética de translação e de rotação e energia potencial elástica e gravítica.
- Há muitas mais formas da energia se manifestar, como o *calor* que vamos agora introduzir.
- Consideremos dois corpos em contacto térmico, um com massa m_1 e à temperatura T_1 , o outro com massa m_2 e à temperatura T_2 , com $T_1 > T_2$.
- Atingido o equilíbrio térmico à temperatura T , tais que $T_1 > T > T_2$ dizemos que passou calor do corpo 1 para o corpo 2.
- *O calor é a energia que transita de um corpo para outro, devido a estarem a temperaturas diferentes.*
- O calor não se armazena num corpo.
- Tal como o trabalho, o calor é energia trocada entre dois corpos ou sistemas.
- A energia adicionada a um sistema sob a forma de calor é armazenada como energia potencial e/ou cinética das partículas que constituem o sistema.

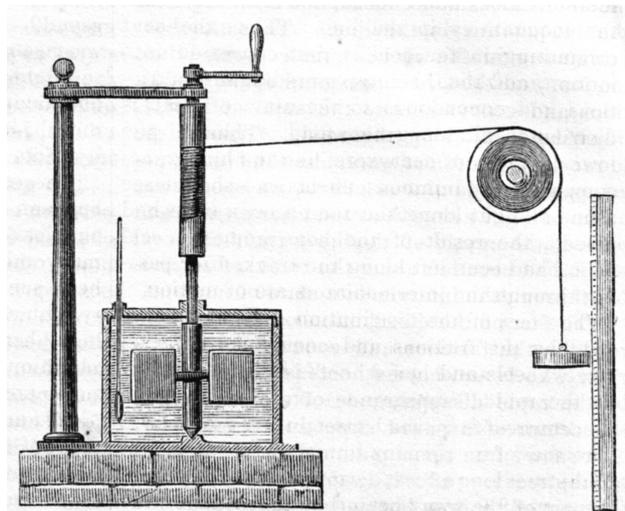
24.1.1 A caloria

- Sendo uma forma de energia o calor mede-se em unidades de joule (J).
- No passado, acreditava-se que o calor era uma substância própria medida em calorias.
- *Uma caloria define-se como o calor necessário para aumentar em 1°C a temperatura de 1 grama de água a 15°C .*
- Mais tarde conclui-se que a caloria é apenas uma outra unidade de energia, que em unidades SI equivale a,

$$1\text{cal} = 4.184\text{J}.$$

24.1.2 A experiência de Joule

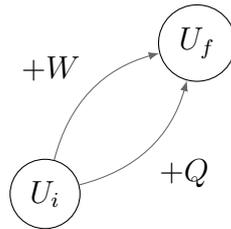
- Em 1845 Joule demonstrou como é possível converter trabalho mecânico em calor.
- A queda do peso, faz rodar umas pás mergulhadas em água, que está contida num recipiente termicamente isolado.



- A máquina de Joule converte energia potencial do peso em queda, em trabalho mecânico sobre a água.
- Medindo o aumento de temperatura da água conclui-se que são precisos 4.184 J para aumentar em 1°C a temperatura de 1 g de água.

24.2 Primeira lei da termodinâmica

- A 1ª Lei da Termodinâmica, essencialmente reafirma o princípio da conservação da energia definindo uma propriedade chamada a *energia interna* (U) dum sistema em termos do *calor* (Q) fornecido ao sistema e do *trabalho* (W) feito sobre o sistema.
- A 1ª Lei contabiliza a conversão de energia entre *trabalho* e *calor* entre dois estados do sistema em equilíbrio térmico.

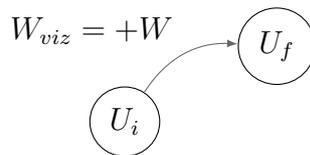


A 1ª Lei da Termodinâmica diz que:

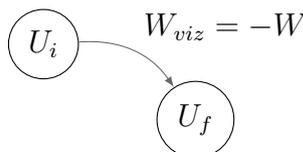
Varição da <i>energia interna</i> do sistema	=	<i>Calor</i> que entra no sistema	+	<i>Trabalho</i> realizado sobre o sistema pela vizinhança
--	---	---	---	---

$$\Delta U = \Delta Q_{ent} + \Delta W_{viz}$$

- Da perspectiva da mecânica estatística,
 - o *trabalho* é interpretado como sendo a energia associada ao movimento coerente das moléculas.
 - o *calor* é interpretado como sendo a energia associada ao movimento desordenado das moléculas.
- Notar que W_{viz} é definido como sendo o trabalho que a vizinhança exterior realiza sobre o sistema, i.e. energia que entra no sistema.



- Se o sistema realizar trabalho sobre o exterior então W_{viz} será negativo e energia sairá do sistema.



- Do mesmo modo ΔQ_{ent} positivo indica energia a entrar no sistema e vice-versa

24.2.1 Energia interna

- Um gás em equilíbrio à temperatura T tem por cada grau de liberdade dum molécula uma energia de $\frac{k_B T}{2}$.
- Se cada molécula tem p graus de liberdade e o gás tem N moléculas a energia interna do gás pode-se escrever,

$$U = Np \frac{k_B T}{2}.$$

- A energia interna de um gás com um número fixo de moléculas não varia se a sua temperatura permanecer constante.

24.2.2 Diferenciais inexactos

- Na forma diferencial podemos escrever a 1ª Lei da Termodinâmica como,

$$dU = dQ + dW. \quad (24.1)$$

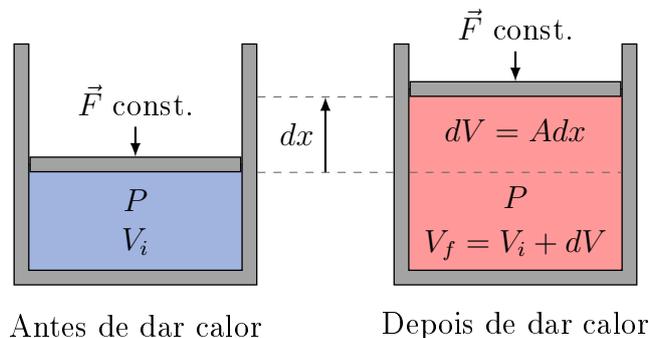
- Num ciclo fechado a variação da energia interna é nula e o calor total e o trabalho total dependem do processo seguido:

$$\oint dQ + \oint dW = 0$$

- dU é um diferencial exacto, dQ e dW são diferenciais inexactos.
- Para lembrar esta diferença por vezes usa-se a notação $\tilde{d}Q$, $\tilde{d}W$ ou $d'Q$, $d'W$.
- Feita a ressalva, manteremos o uso de dQ e dW .

24.3 Cálculo do trabalho num gás

- Calculemos o trabalho realizado pelo exterior sobre um gás que sofre uma expansão a pressão constante P (ver figura).



- Se o pistão tem uma área A e a pressão do gás é P então a intensidade da força total no pistão é,

$$F = PA$$

- Qual será o trabalho dW realizado pelo pistão se o gás forçar o pistão a deslocar-se de dx ?
- O trabalho realizado pelo pistão é o oposto do trabalho realizado pelo gás em expansão então,

$$\begin{aligned} dW_{viz} &= -Fdx \\ &= -PA dx \\ &= -PdV \end{aligned} \quad (24.2)$$

- Para uma expansão finita de ΔV o trabalho realizado será,

$$\Delta W_{viz} = - \int_V^{V+\Delta V} PdV, \quad (24.3)$$

em geral $P = P(V)$ varia numa expansão.

- Considerando o caso em que é fornecido calor ao gás para manter a pressão constante (*processo isobárico*) vem,

$$\begin{aligned} \Delta W_{viz} &= -P \int_V^{V+\Delta V} dV \\ &= -P\Delta V \end{aligned}$$

- Usando a equação dos gases ideais podemos reescrever $P\Delta V$ obtendo,

$$\Delta W_{viz} = -Nk_B\Delta T \quad (24.4)$$

obtendo-se a expressão final para o trabalho realizado pelo exterior sobre N partículas de gás que se expandem a pressão constante.

- Como varia o trabalho num processo *isotérmico*, onde apenas a *temperatura* é mantida constante?

- Usando a lei dos gases ideais e a Eq. 24.3 temos,

$$\begin{aligned}
 \Delta W_{viz} &= - \int_V^{V+\Delta V} P dV \\
 &= - \int_V^{V+\Delta V} \frac{Nk_B T}{V} dV \\
 &= - Nk_B T \int_V^{V+\Delta V} \frac{dV}{V} \\
 &= Nk_B T \ln \frac{V}{V + \Delta V} \\
 &= Nk_B T \ln \frac{V_i}{V_f}
 \end{aligned}$$

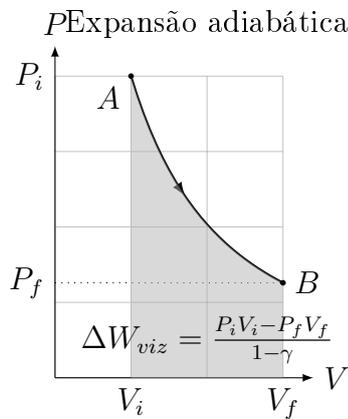
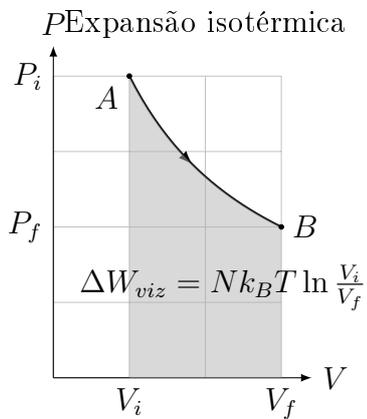
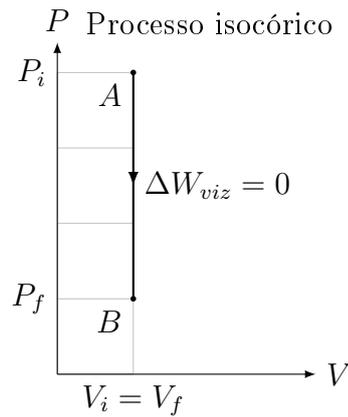
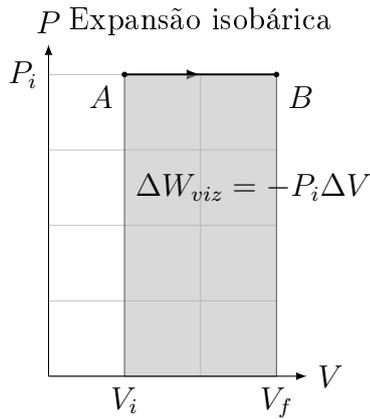
- Fornecendo calor a um gás a *volume constante*, não há expansão. O processo chama-se *isocórico*.
- Neste caso não há trabalho realizado e a 1ª Lei da Termodinâmica diz que,

$$\begin{aligned}
 \Delta Q &= \Delta U - 0 \\
 \Delta Q &= \Delta U
 \end{aligned}$$

- Ou seja toda a energia fornecida ao gás como calor é transferida totalmente para a energia média das moléculas, e como tal para a energia interna do gás, U .

24.3.1 Diagrama PV

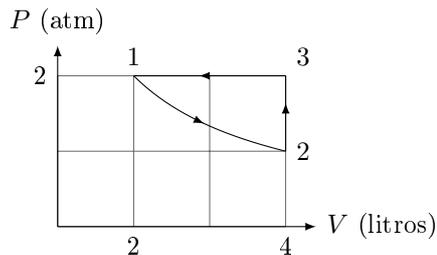
- Podemos representar a variação da pressão dum gás em função da variação do seu volume.
- Neste tipo de diagramas (chamados diagramas PV) a área por baixo da curva $P(V)$ é igual ao trabalho.



24.3.2 Exemplo: ciclo termodinâmico

Exercício 59

Duas moles dum gás ideal monoatômico estão inicialmente a uma pressão $P_1 = 2$ atm e ocupam um volume $V_1 = 2$ L. O gás sofre um processo cíclico, como indicado na figura. De 1 a 2 expande-se a temperatura constante até o volume duplicar. De 2 a 3 é aquecido a volume constante até a sua pressão voltar à pressão inicial. De 3 a 1 é comprimido a pressão constante até ao volume inicial. Qual o trabalho total realizado sobre o gás e o calor total recebido pelo gás?

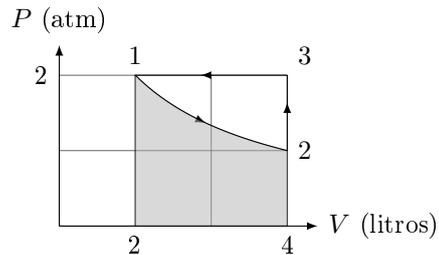


Como o processo do estado 1 para o 2 é isotérmico $\Delta U = 0$ assim da 1ª Lei da Termodinâmica vem,

$$\begin{aligned}\Delta Q_{ent} &= -\Delta W_{viz} \\ &= -\int_{V_1}^{V_2} -PdV \\ &= zRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \\ &= zRT \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= P_1 V_1 \ln 2 \\ &= 280 \text{ J},\end{aligned}$$

assim entre 1 e 2 entram para o sistema 280 J de calor e o sistema realiza sobre a vizinhança 280 J de trabalho. Ou seja neste processo a vizinhança realiza trabalho negativo ($Q_{12} = -W_{12} = 280 \text{ J}$).

Notar que o trabalho é a área debaixo da curva da isotérmica (região a sombreado).



O processo do estado 2 para o 3 é isocórico logo $\Delta W = 0$ assim da 1ª Lei da Termodinâmica vem,

$$\begin{aligned}\Delta Q_{ent} &= \Delta U \\ &= \frac{3}{2} zR \Delta T \\ &= 3R (T_3 - T_2) \\ &= 3R \left(\frac{P_1 2V_1}{2R} - \frac{P_2 2V_1}{2R} \right) \\ &= -3V_1 (P_2 - P_1),\end{aligned}$$

falta calcular P_2 . Notar que no processo isotérmico se tem,

$$P_1 V_1 = 2RT,$$

e

$$P_2 V_2 = 2RT,$$

logo

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1} = 2$$

$$P_2 = \frac{P_1}{2}.$$

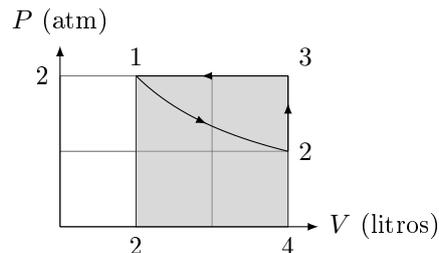
Ou seja entre 2 e 3 entram para o sistema 606 J de calor e o sistema não realiza trabalho sobre a vizinhança ($Q_{23} = 606 \text{ J}$, $W_{23} = 0 \text{ J}$).

Finalmente o processo do estado 3 para o 1 é isobárico $\Delta P = 0$ assim da 1ª Lei da Termodinâmica vem,

$$\begin{aligned} \Delta Q_{ent} &= \Delta U - \Delta W_{viz} \\ &= 3R\Delta T + \int_{V_3}^{V_1} P dV \\ &= 3R(T_1 - T_3) + P_1(V_1 - V_2) \\ &= 3R\left(\frac{P_1 V_1}{2R} - \frac{P_1 2V_1}{2R}\right) - P_1 V_1 \\ &= -3P_1 V_1 \frac{1}{2} - P_1 V_1 \\ &= -P_1 V_1 \frac{5}{2} \\ &= -1010 \text{ J}, \end{aligned}$$

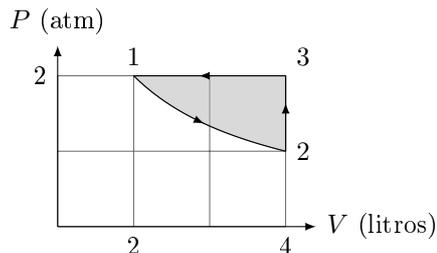
Assim entre 3 e 1 saem do sistema 1010 J de calor e a vizinhança realiza sobre o sistema 404 J de trabalho, ou seja neste processo o trabalho da vizinhança é positivo ($Q_{31} = -1010 \text{ J}$ e $W_{31} = 404 \text{ J}$).

Notar que o trabalho é a área debaixo da curva da isobárica (região a sombreado).



Portanto o trabalho total em jogo é

$$\Delta W_{viz} = W_{12} + W_{23} + W_{31} = 124 \text{ J}$$



e o calor total em jogo é

$$\Delta Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = -124 \text{ J.}$$

A soma do trabalho total com o calor total, de acordo com a 1ª lei da Termodinâmica.

Aula 25

Capacidade calorífica e segunda lei da termodinâmica

25.1 Capacidade calorífica

- A capacidade calorífica duma substância (ou sistema) é definida como,

$$\begin{aligned} C &= \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \\ &= \frac{dQ}{dT} \end{aligned} \quad (25.1)$$

onde ΔQ é a energia fornecida ao gás em forma de calor e ΔT é a variação de temperatura da substância, resultante desse acréscimo de energia.

- Esta designação de *capacidade* não é muito feliz pois pode levar a pensar que o calor é armazenado na substância o que não acontece como já vimos.

25.1.1 Capacidade calorífica dos gases

- No SI as unidades da capacidade calorífica são o JK^{-1} .
- O valor de capacidade calorífica depende do modo como o calor é fornecido ao sistema.
- Dois modos de fornecer calor ao sistema são a:
 - *pressão constante* onde o calor fornecido pode provocar a expansão do gás, denominando-se a capacidade calorífica assim medida por C_P .
 - *volume constante* onde o calor fornecido pode provocar um aumento da pressão do gás, denominando-se a capacidade calorífica assim medida por C_V .

- A capacidade calorífica de uma substância é também indicada por unidade de massa da substância, *capacidade calorífica específica*,

$$c' = \frac{C}{m} \quad (\text{J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}).$$

ou por mol, *capacidade calorífica molar*

$$c = \frac{C}{z} \quad (\text{J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}).$$

- A razão C_P/C_V chama-se γ ou seja,

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}. \quad (25.2)$$

25.1.2 Capacidade calorífica dum gás a volume constante

- Vamos calcular primeiramente C_V , a *capacidade calorífica a volume constante*.
- Recordando a 1ª lei da termodinâmica,

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W_{viz}$$

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta W_{viz}$$

onde recorde-se ΔQ é o calor fornecido ao gás e ΔW_{viz} é o trabalho realizado pela vizinhança sobre o gás.

- Se o calor for fornecido ao gás a *volume constante*, não há expansão, logo não há trabalho realizado,

$$\Delta Q_V = \Delta U,$$

o índice V foi usado para lembrar que o calor foi fornecido a volume constante.

- Ou seja toda a *energia fornecida ao gás como calor* é transferida totalmente para a *energia média das moléculas*, e como tal para a energia interna do gás, U .
- Da equação 25.1 tem-se que,

$$\Delta Q_V = C_V \Delta T.$$

- Igualando as duas últimas equações obtemos,

$$C_V = \frac{\Delta U}{\Delta T},$$

ou na forma diferencial,

$$C_V = \frac{dU}{dT} \quad (25.3)$$

sendo dU e dT diferenciais exactos esta relação é válida para qualquer processo.

25.1.3 Capacidade calorífica dum gás a pressão constante

- Para um processo a *pressão constante* obtemos da equação 25.1 que,

$$\Delta Q_P = C_P \Delta T.$$

- Aplicando a este processo a 1ª lei da termodinâmica vem,

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta Q_P + \Delta W_{viz} \\ C_P \Delta T &= \Delta U + P \Delta V \end{aligned}$$

- Ou na forma diferencial,

$$\begin{aligned} C_P dT &= dU + P dV \\ C_P &= \frac{dU}{dT} + P \frac{dV}{dT}, \end{aligned}$$

o 1º termo do lado direito é dado pela Eq. 25.3 e o 2º termo, usando a Eq. dos gases ideais 21.1, pode ser reescrito,

$$P dV = k_B N dT \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dT} = \frac{k_B N}{P},$$

onde considerámos $P = \text{constante}$.

- Assim C_P vem,

$$C_P = C_V + k_B N. \quad (25.4)$$

- Esta expressão pode ser escrita noutras formas equivalentes,

$$\begin{aligned} C_P &= C_V + zR \\ c_P &= c_V + R, \end{aligned}$$

onde z é o numero de moles e c a capacidade calorífica molar.

- Para um *gás ideal monoatômico*, U é a soma das energias cinéticas médias das suas moléculas, que têm *3 graus de liberdade*.
- Recebendo cada grau de liberdade a energia $k_B T/2$, vem para N moléculas

$$U = N 3 \frac{k_B T}{2}. \quad (25.5)$$

- Assim da Eq. 25.3 temos para um gás ideal monoatômico,

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}k_B N,$$

usando a Eq. 25.4 obtemos

$$\begin{aligned} C_P &= C_V + k_B N \\ &= \frac{5}{2}k_B N. \end{aligned}$$

- Para um *gás ideal com p graus de liberdade* podemos, de modo análogo ao anterior, mostrar rapidamente que,

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{p}{2}k_B N,$$

e

$$\begin{aligned} C_P &= C_V + k_B N \\ &= \left(\frac{p}{2} + 1\right) k_B N. \end{aligned}$$

- Neste caso a razão entre C_P e C_V fica,

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{C_P}{C_V} \\ &= 1 + \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

- *O conhecimento de C_V , C_P ou γ permite inferir o número de graus de liberdade, p , das moléculas do gás.*

25.2 Processos adiabáticos

- Um processo diz-se *adiabático* quando *não há trocas líquidas de calor*, ou quando o calor cedido pelo sistema é igual ao recebido de modo a que $\Delta Q = 0$.
- Assim segundo a primeira lei da termodinâmica temos para um processo adiabático,

$$\begin{aligned} dU &= dQ + dW_{viz} \\ &= dW_{viz} \end{aligned}$$

- Usando as equações 25.3 e 24.2 obtemos,

$$C_V dT = -P dV. \tag{25.6}$$

- Da equação dos gases ideais obtemos,

$$PdV = -VdP + Nk_B dT,$$

e assim vem que,

$$C_V dT = VdP - Nk_B dT$$

- Usando a Eq. 25.4 podemos escrever,

$$\begin{aligned} C_V dT &= VdP - (C_P - C_V)dT \\ C_P dT &= VdP \end{aligned} \quad (25.7)$$

- Dividindo a Eq. 25.7 pela Eq. 25.6 obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{C_P}{C_V} &= - \frac{VdP}{PdV} \\ \gamma &= - \frac{VdP}{PdV} \\ \gamma \frac{dV}{V} &= - \frac{dP}{P} \end{aligned}$$

onde foi usada a definição de γ (Eq. 25.2).

- Integrando a equação anterior entre um estado inicial 1 e um estado final 2 obtemos,

$$\begin{aligned} \gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} &= - \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} \\ \gamma \ln \frac{V_2}{V_1} &= - \ln \frac{P_2}{P_1} \\ \ln \left(\frac{P_2 V_2^\gamma}{P_1 V_1^\gamma} \right) &= 0, \end{aligned}$$

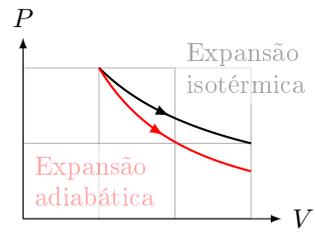
calculando a exponencial de cada membro vem,

$$\begin{aligned} \frac{P_2 V_2^\gamma}{P_1 V_1^\gamma} &= 1 \\ P_2 V_2^\gamma &= P_1 V_1^\gamma = \text{constante} \end{aligned}$$

- Concluimos então que num processo adiabático a pressão e o volume estão relacionados por,

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (25.8)$$

- A figura ilustra uma expansão adiabática e uma expansão isotérmica, para o mesmo estado inicial.
- *Para a mesma variação de volume a queda de pressão é superior no processo adiabático.*



Aula 26

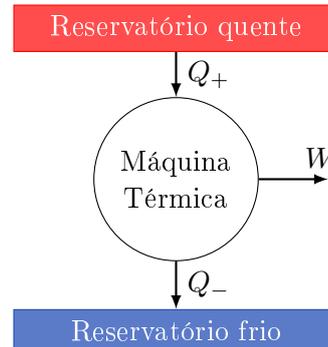
Segunda lei da termodinâmica

26.1 A 2ª lei da termodinâmica, enunciados de Kelvin e Clausius

- A 1ª lei da termodinâmica exprime a observação experimental da conservação da energia sempre que um sistema troca energia com o exterior.
- A 2ª lei da termodinâmica foi deduzida de experiências que pretendiam averiguar *que quantidade de energia térmica dum sistema pode ser convertida em trabalho.*
- O enunciado de Kelvin-Planck para a 2ª lei da termodinâmica diz: *É impossível um sistema que operando em ciclo remova energia térmica, Q , de um único reservatório a uma só temperatura e converta essa energia completamente em trabalho, W , sem que haja mudanças adicionais no sistema ou em suas vizinhanças.*
- Pode parecer que a expansão isotérmica dum gás ideal viola esta lei, pois o calor dado ao sistema é exactamente igual ao trabalho realizado pelo sistema.
- Contudo nesta expansão o estado final do gás não é igual ao inicial, i.e. o sistema não foi submetido a um ciclo.
- O enunciado de Clausius para a 2ª lei da termodinâmica diz: *É impossível que o único resultado dum sistema que opere em ciclo, seja a transferência de energia térmica, Q , de um corpo mais frio para um outro mais quente, sem realizar trabalho W sobre o sistema.*
- Por outras palavras, a energia não flui espontaneamente dum corpo frio para um corpo quente.

26.2 Máquinas térmicas

- Uma máquina térmica é um dispositivo cíclico que *converte calor em trabalho*.
- Em cada ciclo é recebido calor a uma temperatura mais alta, em seguida é realizado trabalho e depois libertado calor a uma temperatura mais baixa.
- As máquinas térmicas contêm uma *substância operante* que é sujeita ao ciclo, e.g. água numa máquina a vapor, vapor de gasolina num motor de combustão interna.
- *Num ciclo, a energia interna da substância operante não varia, pois o estado inicial é igual ao final.*
- Assim pela 1ª lei da termodinâmica o fluxo líquido de calor Q para a substância é igual ao trabalho W realizado pela máquina,



$$Q = W$$

- Se Q_+ e Q_- são os fluxos de calor, absorvido de um reservatório de energia a alta temperatura e libertado para um reservatório a baixa temperatura a variação de calor é,

$$Q = Q_+ - Q_-$$

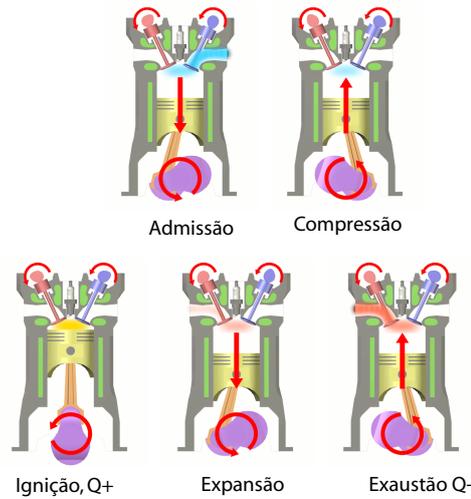
- O *rendimento* η duma máquina térmica é definido por,

$$\eta = \frac{W}{Q_+} = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} \quad (26.1)$$

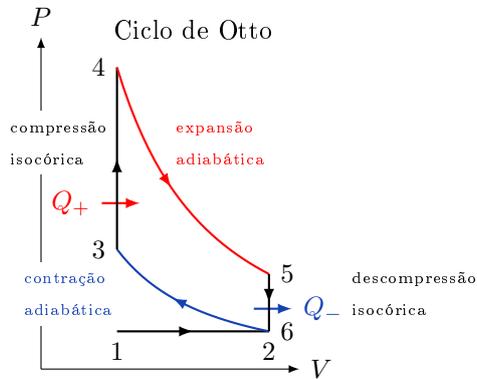
- O enunciado de Kelvin-Planck, expressa a constatação experimental de que nunca foi possível obter rendimentos de 100%.

26.2.1 O ciclo de Otto

- Uma máquina térmica muito comum, é o motor de combustão.
- O *ciclo de Otto*, descreve um *motor de combustão ideal* (onde não há por exemplo perdas por atrito).
- A figura seguinte ilustra o ciclo de combustão.

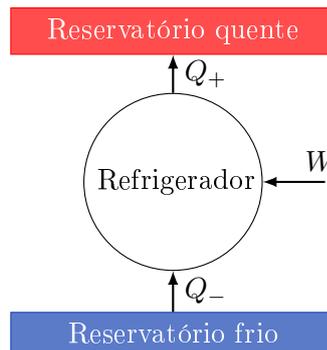


- Diagrama PV do ciclo de Otto.



26.3 Refrigeradores

- Invertendo o ciclo dum máquina térmica é retirado calor, Q_- do reservatório a baixa temperatura realizando trabalho W sobre o sistema.
- É fornecido calor $Q_+ = W + Q_-$ ao reservatório a temperatura elevada.
- A eficiência dum refrigerador é avaliada pelo seu



$$\text{coeficiente de desempenho} = \frac{Q_-}{W}$$

26.3.1 Exemplo: rendimento do ciclo de Otto

Exercício 60

Calcule o rendimento do ciclo de Otto em função da razão entre os volumes $r = V_2/V_1 = V_6/V_3 = V_5/V_4$, a chamada razão de compressão.

- Da Eq. 26.1 o rendimento η duma máquina térmica é,

$$\eta = \frac{W}{Q_+} = 1 - \frac{Q_-}{Q_+}$$

- O calor recebido pelo sistema do reservatório mais quente Q_+ é trocado num processo isocórico (a volume constante) assim,

$$Q_+ = C_V \Delta T = C_V(T_4 - T_3)$$

- O calor cedido pelo sistema ao reservatório menos quente Q_- é trocado também num processo isocórico (a volume constante) assim,

$$Q_- = C_V |\Delta T| = C_V(T_5 - T_6)$$

- Substituindo na expressão para η vem,

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{T_5 - T_6}{T_4 - T_3}$$

- Pode ser encontrada uma relação entre as temperaturas T_4 e T_5 usando a equação da adiabática Eq. 25.8,

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

e a Eq. 21.1 que diz que $P = \text{constante} T/V$ obtendo-se,

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}$$

$$T_4 V_4^{\gamma-1} = T_5 V_5^{\gamma-1}$$

$$T_4 = T_5 \frac{V_5^{\gamma-1}}{V_4^{\gamma-1}}$$

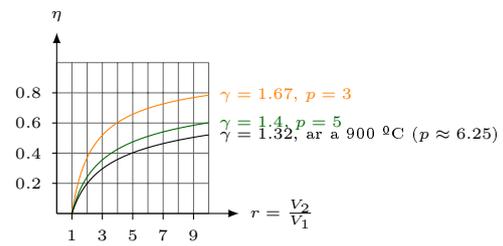
$$T_4 = T_5 r^{\gamma-1}$$

- De igual modo a relação entre as temperaturas T_3 e T_6 é,

$$T_3 = T_6 r^{\gamma-1}$$

- Então o rendimento é,

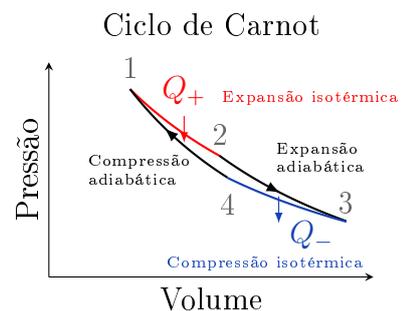
$$\begin{aligned}
 \eta &= 1 - \frac{T_5 - T_6}{T_4 - T_3} \\
 &= 1 - \frac{T_5 - T_6}{T_5 r^{\gamma-1} - T_6 r^{\gamma-1}} \\
 &= 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \\
 &= 1 - \frac{1}{r^p}
 \end{aligned}$$



26.4 Máquina de Carnot

- A 2ª lei da termodinâmica afirma que é impossível que o rendimento de uma máquina térmica, que opera entre dois reservatórios de calor, seja 100%.
- Uma questão pertinente é *qual é então o rendimento máximo possível?*
- Sadi Carnot respondeu a esta pergunta, sem sequer saber os enunciados da 1ª e 2ª leis da termodinâmica.
- Carnot descobriu, experimentalmente, que a máquina mais eficiente é uma máquina reversível, escrevendo o que hoje é conhecido pelo teorema de Carnot, *Nenhuma máquina térmica, que opere entre dois determinados reservatórios térmicos, pode ser mais eficiente do que uma máquina reversível que opere entre estes mesmos reservatórios.*
- Uma *máquina térmica reversível* é também chamada de *máquina de Carnot* que funciona segundo o *ciclo de Carnot*.
- Um *processo reversível* tem de evoluir *quase-estaticamente* para que em qualquer instante se possa inverter. *Assim estes processos são ideais* (não existem).
- É contudo possível realizar processos semelhantes aos reversíveis.
- Um processo reversível é o mais eficiente pois é o que *desperdiça* menos energia.
- Para um gás ideal, os 4 processos **reversíveis** do ciclo de Carnot estão ilustrados na figura seguinte.

- Absorção numa **expansão isotérmica** de Q_+ dum reservatório quente.
- Expansão adiabática para baixar a temperatura até à do reservatório frio.
- **Rejeição isotérmica** de Q_- para um reservatório frio.
- Compressão adiabática para voltar ao estado inicial.



- Se a máquina térmica não rejeitar o calor Q_- para um reservatório frio, devido à 2ª lei da termodinâmica acabaria, após alguns ciclos, eventualmente por atingir a temperatura do reservatório quente, deixando de funcionar.

- Podemos calcular o rendimento de uma máquina de Carnot considerando um gás ideal como a substância operante, visto *todos os ciclos de Carnot terem a mesma eficiência, para os mesmos reservatórios de calor*.
- Da Eq. 26.1 o rendimento η duma máquina térmica é,

$$\eta = \frac{W}{Q_+} = 1 - \frac{Q_-}{Q_+}$$

- Da Eq. 25.5 conclui-se que num processo isotérmico a energia interna dum gás não varia e assim a 1ª lei diz que,

$$\begin{aligned} 0 &= Q_+ - W_{\text{gás}} \\ Q_+ &= W_{\text{gás}} \\ Q_+ &= \int_{V_1}^{V_2} P dV \\ &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{k_B N T_+}{V} dV = k_B N T_+ \ln \frac{V_2}{V_1}, \end{aligned}$$

que é o calor absorvido na expansão isotérmica.

- Aplicando o mesmo raciocínio à compressão isotérmica obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= Q_- - W_{\text{gás}} \\ Q_- &= W_{\text{gás}} \\ Q_- &= \int_{V_3}^{V_4} P dV \\ &= - \int_{V_4}^{V_3} \frac{k_B N T_-}{V} dV = -k_B N T_- \ln \frac{V_3}{V_4}. \end{aligned}$$

- Para o cálculo do rendimento *só interessa o valor absoluto* do calor rejeitado,

$$Q_- = k_B N T_- \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

- Nos processos adiabáticos temos, para a expansão de 2 para 3,

$$T_+ V_2^{\gamma-1} = T_- V_3^{\gamma-1},$$

e para a compressão de 4 para 1 vem,

$$T_- V_4^{\gamma-1} = T_+ V_1^{\gamma-1}.$$

- Dividindo estas expressões obtemos,

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (26.2)$$

- Podemos então calcular a razão entre os calores Q_- e Q_+ ,

$$\frac{Q_-}{Q_+} = \frac{k_B N T_- \ln \frac{V_3}{V_4}}{k_B N T_+ \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

usando o resultado 26.2 vem,

$$\frac{Q_-}{Q_+} = \frac{T_-}{T_+} \quad (26.3)$$

- O rendimento da máquina de Carnot é assim dado por,

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{Q_-}{Q_+} \\ &= 1 - \frac{T_-}{T_+}. \end{aligned} \quad (26.4)$$

- Confirma-se que *o rendimento não depende da substância operante, mas apenas das temperaturas dos dois reservatórios.*
- Nota: para que $\eta \leq 1 \Rightarrow T_- \geq 0$.

26.5 Escala de temperatura absoluta

- Acabámos de ver que o *rendimento de uma* máquina de Carnot (*máquina reversível*):

1^o- é inferior a 100% logo *não há temperaturas termodinâmicas inferiores a zero.*

2^o- *só depende das temperaturas dos dois reservatórios de calor.*

- Montando uma máquina térmica reversível entre dois reservatórios de calor pode encontrar-se a razão entre as temperaturas (ver Eq. 26.3)

$$\frac{T_-}{T_+} = \frac{Q_-}{Q_+}$$

medindo apenas os calores recebidos e cedidos pela máquina.

- *Este processo não depende da substância operante utilizada, nem de nenhuma propriedade termométrica da matéria.*

- Escolhendo a temperatura dum ponto fixo a equação anterior define completamente a escala de temperatura termodinâmica.
- Por exemplo, usando a temperatura do ponto triplo da água (273.16 K) a escala termodinâmica coincide com a escala de temperatura de um gás ideal.

Aula 27

Entropia

27.1 Introdução ao conceito de entropia

- Já falámos de várias grandezas físicas que são variáveis de estado nomeadamente, a pressão, a temperatura, a energia interna, o volume.
- Estas grandezas descrevem o estado termodinâmico de um sistema físico.
- Vamos agora definir mais uma variável de estado, a entropia que se denomina pela letra S .
- À medida que a *termodinâmica e a física em geral* se foram desenvolvendo a *entropia* revelou ter um papel muito mais *fundamental* do que uma simples variável de estado.
- A entropia permite:
 - calcular a energia não disponível para realizar trabalho útil.
 - definir a direcção do tempo, explicando porque certas leis só se manifestam num sentido apesar de serem reversíveis.
 - medir a desordem num sistema.
 - compreender a origem de k_B .

27.1.1 Variação infinitesimal de entropia

- Considere-se um *processo reversível* em que um sistema passa dum estado de equilíbrio para outro infinitesimalmente diferente.
- Se dQ_r é a quantidade de energia transferida por *calor* entre os dois estados a *variação de entropia* é definida por,

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \quad (27.1)$$

onde T é a *temperatura* termodinâmica (ou absoluta) *do sistema*.

- No SI a entropia é expressa em unidades de J/K.
- O índice r em dQ_r serve para lembrar que *no cálculo da entropia temos de usar apenas o calor trocado durante um processo reversível*.
- Mesmo no caso em que o sistema tenha sido submetido a um processo irreversível entre dois estados, com troca de calor dQ , deve ser considerado apenas o calor trocado durante um processo reversível dQ_r entre esses dois estados
- Se o sistema recebe calor $dQ_r > 0$ logo $dS > 0$, a entropia do sistema aumenta.
- Se o sistema cede calor $dQ_r < 0$ logo $dS < 0$, a entropia do sistema diminui.

27.1.2 Variação finita de entropia

- Durante um processo finito *em geral a temperatura T não é constante*.
- Se dQ_r é o calor trocado quando o sistema está à temperatura T então *a variação de entropia num processo arbitrário reversível* entre dois estados a e b é dada por,

$$\Delta S = \int_a^b \frac{dQ_r}{T} \quad (27.2)$$

- Sendo a entropia uma variável de estado, ΔS apenas depende de $S_b - S_a$ e não do processo seguido entre a e b .

27.2 Entropia quando $T = 0$ ou terceira lei da termodinâmica

- Durante muito tempo pensou-se que apenas ΔS tinha significado físico.
- Nerst propôs o teorema do calor, também conhecido pela *terceira lei da termodinâmica*,

A entropia de qualquer sistema à temperatura zero é zero.

27.3 Entropia num processo reversível

- A máquina de Carnot recebe Q_+ do reservatório à temperatura T_+ .
- E cede Q_- para o reservatório à temperatura T_- .

- As trocas de calor dão-se apenas durante os processos isotérmicos então a variação de S num ciclo é,

$$\begin{aligned}\Delta S &= \oint \frac{dQ_r}{T} \\ &= \frac{1}{T_+} \int dQ_{r+} - \frac{1}{T_-} \int dQ_{r-} \\ &= \frac{Q_+}{T_+} - \frac{Q_-}{T_-} \\ &= S_+ - S_-\end{aligned}$$

- O sinal negativo de S_- é devido ao sistema perder a energia Q_-
- Mostrámos anteriormente que para um ciclo de Carnot se verifica a relação,

$$\begin{aligned}\frac{Q_-}{Q_+} &= \frac{T_-}{T_+} \\ \frac{Q_-}{T_-} &= \frac{Q_+}{T_+}\end{aligned}$$

- Então a variação de entropia no ciclo de Carnot é,

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{Q_+}{T_+} - \frac{Q_-}{T_-} \\ &= 0\end{aligned}$$

- O resultado anterior é mais geral pois S é uma função de estado.
- S só depende do estado inicial e final e não do processo entre estes estados.
- Então para *qualquer ciclo reversível*,

$$\begin{aligned}\Delta S &= \oint \frac{dQ_r}{T} \\ &= 0\end{aligned}$$

- Num ciclo reversível a variação de entropia é nula, $\Delta S = 0$.

27.3.1 Entropia de um gás ideal num processo reversível

- Consideremos um *gás ideal submetido a um processo quase estático e reversível* entre dois estados i e f .
- Calculemos a variação de entropia se o gás absorve uma quantidade de calor dQ_r .

- Da 1ª lei vem,

$$\begin{aligned}dU &= dQ_r + dW_{viz} \\ dQ_r &= dU + PdV\end{aligned}$$

usando $dU = C_V dT$ e a equação dos gases ideais vem,

$$dQ_r = C_V dT + \frac{zRT}{V} dV$$

- Nesta forma a equação não se pode integrar sem saber como T varia com V .
- Dividindo ambos os membros por T vem,

$$\frac{dQ_r}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{zR}{V} dV$$

- Assumindo C_V constante no processo em questão podemos integrar ficando,

$$\int_i^f \frac{dQ_r}{T} = C_V \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} + \int_{V_i}^{V_f} \frac{zR}{V} dV$$

o termo do lado esquerdo é ΔS ,

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T_f}{T_i} + zR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

- Esta expressão mostra que a entropia:
 - só depende dos valores de V e T nos estados final e inicial.
 - pode ser negativa ou positiva dependendo dos valores iniciais e finais de V e T .
 - para um ciclo $T_i = T_f$ e $V_i = V_f$ logo $\Delta S = 0$ pois $\ln 1 = 0$
- Confirma-se que a entropia é uma variável de estado.

Entropia de um gás ideal, expansão isotérmica

- Consideremos um gás ideal submetido a uma expansão isotérmica.
- Como $T_i = T_f$ a variação de entropia é,

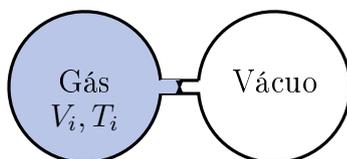
$$\begin{aligned}\Delta S &= \int \frac{dQ_r}{T} \\ &= zR \ln \frac{V_f}{V_i}\end{aligned}$$

- Como $V_f > V_i$ então $\Delta S > 0$
- A variação da entropia do gás é $+\frac{Q}{T}$ porque ganha energia e a do reservatório é $-\frac{Q}{T}$ porque perde energia
- *A variação líquida da entropia do gás mais a da sua vizinhança é zero.*
- Imaginemos o conjunto do *sistema mais as suas vizinhanças rodeados por uma parede adiabática.*
- Em termodinâmica este conjunto é denominado por *universo termodinâmico.*
- Um princípio geral da termodinâmica afirma que,
A variação de entropia do universo é nula num processo reversível.
- O universo termodinâmico não deve ser confundido com o universo real que pode ou não ser infinito nem ser um sistema isolado.

27.4 Entropia num processo irreversível

- Consideremos um processo irreversível entre dois estados em equilíbrio i e f .
- O cálculo da entropia faz-se escolhendo um qualquer processo reversível entre os mesmos dois estados.
- Como a entropia é uma função de estado (*o que é uma função de estado?*), qualquer processo reversível serve.
- Note-se que o calor Q envolvido no processo *irreversível* é diferente de Q_r envolvido no processo *reversível*.

27.4.1 Entropia numa expansão livre



- Calculemos a entropia numa expansão adiabática livre dum gás ideal.
- *A expansão do gás não é reversível nem quase estática.*
- *O gás não realiza trabalho, porque a expansão é livre.*

- Então,

$$\Delta U = 0 \Rightarrow T_f = T_i$$

- Neste processo adiabático irreversível $\Delta Q = 0$.
- Para encontrar S usamos ΔQ_r dum outro processo reversível entre i e f .
- Podemos e.g. usar uma expansão isotérmica entre V_i e V_f onde,

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_i^f \frac{dQ_r}{T} \\ &= zR \ln \frac{V_f}{V_i} \end{aligned}$$

como $V_f > V_i$

$$\Delta S > 0$$

- Durante a expansão livre adiabática o gás não troca energia com a vizinhança.
- Assim a variação de entropia da vizinhança é zero,

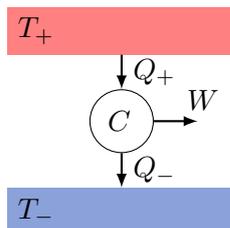
$$\Delta S_{viz} = 0$$

- Então a *entropia do universo aumenta*,

$$\Delta S_u = \Delta S_{viz} + \Delta S_{gás} > 0$$

- Repare-se ainda que se $V_f < V_i \Rightarrow \Delta S_{gás} < 0 \Rightarrow \Delta S_u < 0$
- A contracção espontânea dum gás nunca foi observada portanto,
 - a *entropia do universo (termodinâmico) nunca diminui*.
- Estes resultados obtidos para um gás ideal são gerais e válidos para qualquer processo irreversível.
 - *Em processos irreversíveis a entropia do universo aumenta.*
 - *A entropia do universo nunca diminui qualquer que seja o processo.*

27.5 A degradação de energia



- Consideremos uma máquina de Carnot que opera entre dois reservatórios T_+ e T_- .

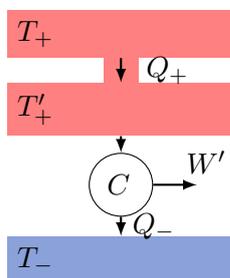
- Como vimos, a eficiência é dada por,

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{W}{Q_+} \\ &= 1 - \frac{T_-}{T_+}\end{aligned}$$

- Logo o trabalho realizado pela máquina é,

$$W = Q_+ \left(1 - \frac{T_-}{T_+} \right)$$

- Recordemos também que para uma máquina de Carnot, $\Delta S_u = 0$ pois executa um processo cíclico reversível.



- Consideremos agora que a mesma quantidade de calor Q_+ provém de outro reservatório $T'_+ < T_+$.
- Tal transferência de calor pode ser feita ligando o reservatório a T_+ com o reservatório a T'_+ por uma barra condutora de calor
- O novo trabalho realizado pela máquina de Carnot é,

$$W' = Q_+ \left(1 - \frac{T_-}{T'_+} \right)$$

note-se que $W' < W$ e,

$$\begin{aligned}\Delta W &= W - W' \\ &= Q_+ T_- \left(\frac{1}{T'_+} - \frac{1}{T_+} \right)\end{aligned}\tag{27.3}$$

- Este segundo processo considerado é irreversível devido à condução de calor pela barra
- O aumento de entropia do universo quando o calor flui pela barra é,

$$\Delta S_u = Q_+ \left(\frac{1}{T'_+} - \frac{1}{T_+} \right) \quad (27.4)$$

pois na máquina de Carnot $\Delta S = 0$

(27.5)

- Então a *energia perdida* devido ao uso da segunda máquina *irreversível* é,

$$\Delta W = T_- \Delta S_u$$

- Esta conclusão é geral e constata-se que
em qualquer processo irreversível a quantidade de energia que fica indisponível para realizar trabalho é $T_- \Delta S_u$
onde T_- é a temperatura do reservatório de energia mais frio
- A este resultado chama-se a *degradação de energia*.
- Significa que a disponibilidade da energia no universo para realizar trabalho diminui de $T_- \Delta S_u$ em cada processo irreversível.

Aula 28

Transferência de calor

28.1 Transferência de calor por convecção, radiação e condução

- Consideremos 3 processos de transferir energia térmica de um lugar para outro.
- *Condução* de energia térmica ocorre a nível atômico através das colisões entre átomos ou moléculas, passando esta energia de uns para os outros, sem haver transporte das partículas. Deste modo a energia térmica vai sendo conduzida/transferida ao longo do material, das zonas mais quentes para as mais frias.
- *Radiação* de energia térmica é feita através do espaço que envolve um corpo. A energia térmica é transportada pela radiação electromagnética. E.g. do Sol recebemos energia térmica sob a forma de radiação.
- *Convecção* de energia térmica ocorre a nível macroscópico envolvendo o transporte de massa, das zonas mais quentes para as mais frias. Ou seja, as moléculas transportam consigo a energia transferindo-a num outro local. O estudo desta forma de transporte de energia é mais complexo.

28.2 Lei de Fourier

- No que se segue será abordado apenas o problema do transporte de energia por condução de calor
- A corrente de calor ou corrente térmica $I = dQ/dt$, é o calor transportado por unidade de tempo, sendo dada pela *lei de Fourier*,

$$I = -kS \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (28.1)$$

onde a corrente de calor I é medida em Watts (W), k é a *condutividade térmica* do material ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$), S é a secção atravessada pela corrente de calor (m^2) e $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ é o gradiente de temperatura (K m^{-1}).

- Rearranjando a Eq. 28.1 temos,

$$-\Delta T = \frac{\Delta x}{kS} I.$$

- À quantidade,

$$\frac{\Delta x}{kS},$$

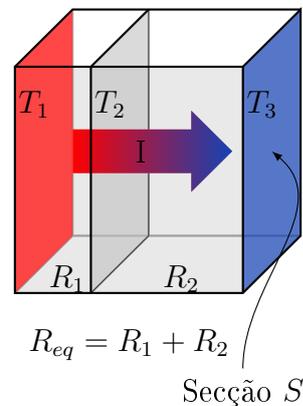
chama-se a resistência térmica, R do material e mede-se em unidades (K/W).

- Assim podemos escrever,

$$-\Delta T = RI.$$

28.3 Associações em série e em paralelo na condução de calor

- Consideremos duas camadas de condutores térmicos com a mesma secção transversal S , espessuras diferentes e materiais também diferentes com resistências térmicas R_1 e R_2 , respectivamente.
- A face quente está à temperatura T_1 , a face fria à temperatura T_3 e a interface entre os materiais está à temperatura T_2 .



- Devido à conservação da energia, se o *fluxo de calor for estacionário a corrente I é a mesma em ambas as camadas*. Assim vem,

$$T_1 - T_2 = IR_1$$

$$T_2 - T_3 = IR_2,$$

da soma destas equações obtemos,

$$T_1 - T_3 = I(R_1 + R_2)$$

$$-\Delta T = IR_{eq}.$$

- Assim a resistência equivalente de uma associação em série de resistências é a soma de cada uma das resistências individuais,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \dots$$

- Se o calor flui paralelamente por vários caminhos, todos à mesma diferença de temperatura, então a corrente total é a soma das correntes por cada um dos caminhos,

$$\begin{aligned} I_{tot} &= I_1 + I_2 + I_3 + \dots \\ &= \frac{-\Delta T}{R_1} + \frac{-\Delta T}{R_2} + \frac{-\Delta T}{R_3} + \dots \\ &= -\Delta T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \right) \\ &= \frac{-\Delta T}{R_{eq}} \end{aligned}$$

- Assim a resistência equivalente de uma associação em paralelo de resistências é,

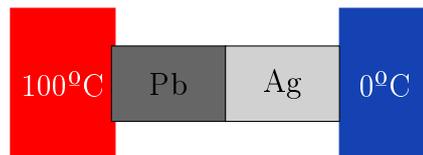
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \dots$$

28.3.1 Exemplo: corrente térmica

Exercício 61

Duas barras de metal isoladas cada uma com 5 cm e seção 6 cm² estão colocadas entre duas paredes. Uma parede é mantida a 100°C e a outra a 0°C. Um dos metais é o Chumbo ($k_{Pb} = 353 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$) e o outro é a Prata ($k_{Ag} = 429 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$).

(a) Calcule a corrente térmica total através das duas barras e (b) a temperatura na interface.



- A resistência equivalente é,

$$R_{eq} = R_{Pb} + R_{Ag} = \frac{\Delta x_{Pb}}{k_{Pb}S} + \frac{\Delta x_{Ag}}{k_{Ag}S} = 0.43 \text{ K/W}$$

e a corrente é,

$$I = \frac{-\Delta T}{R_{eq}} = \frac{100}{0.43} = 232.6 \text{ W}$$

- A diferença de temperatura ao longo da barra de Chumbo é,

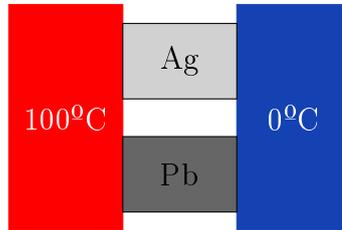
$$-\Delta T = IR_{Pb} = 54.9 \text{ K} = 54.9^\circ\text{C}$$

logo na interface, $T_i = 100^\circ\text{C} - 54.9^\circ\text{C} = 45.1^\circ\text{C}$.

28.3.2 Exemplo: corrente térmica em paralelo

Exercício 62

As duas barras de metal foram rearrumadas como mostra a figura. (a) Calcule a corrente térmica em cada barra, (b) a corrente térmica total e (c) resistência térmica equivalente do sistema.



- A corrente térmica em cada barra é,

$$I_{Pb} = \frac{-\Delta T}{R_{Pb}} = \frac{100}{0.236} = 423.6 \text{ W}$$

$$I_{Ag} = \frac{-\Delta T}{R_{Ag}} = \frac{100}{0.194} = 514.8 \text{ W}$$

logo $I_{tot} = I_{Pb} + I_{Ag} = 938.4 \text{ W}$.

- A resistência equivalente é,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{Pb}} + \frac{1}{R_{Ag}}$$

$$R_{eq} = \frac{R_{Pb}R_{Ag}}{R_{Pb} + R_{Ag}} = 0.107 \text{ K/W.}$$

28.4 Potência radiada - lei de Stefan

- A lei de Stefan afirma que a taxa à qual um objecto radia energia é proporcional à 4ª potência da sua temperatura absoluta,

$$\mathcal{P} = \sigma e AT^4$$

- \mathcal{P} é a potência radiada em wats, W.
- $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.6696 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}$ é a constante de Stefan, onde c e h são respectivamente a velocidade da luz no vácuo e a constante de Planck.
- A é a área da superfície do objecto em m^2 .
- $0 \leq e \leq 1$ é a emissividade, depende das propriedades da superfície do objecto, representando a fracção da energia incidente absorvida pela superfície.
- Se $e = 1$ o corpo absorve toda a radiação diz-se um *corpo negro*.
- Se $e = 0$ o corpo reflete toda a radiação diz-se um *reflector ideal*.
- A potência líquida radiada de um objecto à temperatura T que está num ambiente à temperatura T_0 é,

$$\mathcal{P}_{liq} = \sigma e A (T^4 - T_0^4)$$

- Se $T = T_0$ o corpo emite e absorve radiação à mesma taxa, está em *equilíbrio térmico* e a sua temperatura mantém-se constante.
- Se $T > T_0$ o corpo emite mais radiação do que absorve e a sua temperatura desce.
- Se $T < T_0$ o corpo absorve mais radiação do que emite e a sua temperatura sobe.

28.4.1 Exemplo: potência radiada por um ser humano

Exercício 63

Consideremos que a superfície de um ser humano típico tem uma área de 1.5 m^2 , a emissividade da pele é $e = 0.9$ e a pele está a 36° C .

(a) Qual a energia radiada em 10 min e num dia, assumindo a temperatura do ar sempre igual a 20° C ?

(b) Qual a potência líquida radiada se a temperatura do ar for de 0° C e 40° C ?

(a)

- A potência líquida radiada é,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{liq} &= \sigma e A (T^4 - T_0^4) \\ &= 5.6696 \times 10^{-8} \times 0.9 \times 1.5 \times (309.15^4 - 293.15^4) \\ &= 133.8 \text{ W} \end{aligned}$$

- A energia radiada em 10 min = 600 s é,

$$\begin{aligned} Q &= \mathcal{P}_{liq} \times \Delta t \\ &= 80.3 \text{ kJ} = 19.2 \text{ kcal} \end{aligned}$$

- A energia radiada em 24 hrs = 86400 s é,

$$\begin{aligned} Q &= \mathcal{P}_{liq} \times \Delta t \\ &= 11.560 \text{ MJ} = 2763 \text{ kcal} \end{aligned}$$

(b)

- A potência líquida radiada a 0° C é,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{liq} &= \sigma e A (T^4 - T_0^4) \\ &= 5.6696 \times 10^{-8} \times 0.9 \times 1.5 \times (309.15^4 - 273.15^4) \\ &= 273 \text{ W} \end{aligned}$$

- A potência líquida radiada a 40° C é,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{liq} &= \sigma e A (T^4 - T_0^4) \\ &= 5.6696 \times 10^{-8} \times 0.9 \times 1.5 \times (309.15^4 - 313.15^4) \\ &= -37 \text{ W} \end{aligned}$$

Apêndice A

Constantes Físicas e Tabela Periódica

No website do NIST (National Institute of Standards and Technology) estão disponíveis os valores de várias constantes físicas fundamentais cujos valores são os mais rigorosos até à presente data.

As constantes físicas fundamentais de uso mais frequente são, (ver em <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>)

2018 CODATA adjustment

From: <http://physics.nist.gov/constants>

Fundamental Physical Constants — Frequently used constants

Quantity	Symbol	Value	Unit	Relative std. uncert. u_r
speed of light in vacuum	c	299 792 458	m s^{-1}	exact
Newtonian constant of gravitation	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^2 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$	2.2×10^{-5}
Planck constant*	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	J Hz^{-1}	exact
	\hbar	$1.054\,571\,817 \dots \times 10^{-34}$	J s	exact
elementary charge	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C	exact
vacuum magnetic permeability $4\pi\alpha\hbar/e^2c$	μ_0	$1.256\,637\,062\,12(19) \times 10^{-6}$	N A^{-2}	1.5×10^{-10}
vacuum electric permittivity $1/\mu_0c^2$	ϵ_0	$8.854\,187\,8128(13) \times 10^{-12}$	F m^{-1}	1.5×10^{-10}
Josephson constant $2e/h$	K_J	$483\,597.848\,4 \dots \times 10^9$	Hz V^{-1}	exact
von Klitzing constant $\mu_0c/2\alpha = 2\pi\hbar/e^2$	R_K	$25\,812.807\,45 \dots$	Ω	exact
magnetic flux quantum $2\pi\hbar/(2e)$	Φ_0	$2.067\,833\,848 \dots \times 10^{-15}$	Wb	exact
conductance quantum $2e^2/2\pi\hbar$	G_0	$7.748\,091\,729 \dots \times 10^{-5}$	S	exact
electron mass	m_e	$9.109\,383\,7015(28) \times 10^{-31}$	kg	3.0×10^{-10}
proton mass	m_p	$1.672\,621\,923\,69(51) \times 10^{-27}$	kg	3.1×10^{-11}
proton-electron mass ratio	m_p/m_e	$1836.152\,673\,43(11)$		6.0×10^{-11}
fine-structure constant $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	α	$7.297\,352\,5693(11) \times 10^{-3}$		1.5×10^{-10}
inverse fine-structure constant	α^{-1}	$137.035\,999\,084(21)$		1.5×10^{-10}
Rydberg frequency $\alpha^2m_e c^2/2h$	cR_∞	$3.289\,841\,960\,2508(64) \times 10^{15}$	Hz	1.9×10^{-12}
Boltzmann constant	k	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	J K^{-1}	exact
Avogadro constant	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}	exact
molar gas constant $N_A k$	R	$8.314\,462\,618 \dots$	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	exact
Faraday constant $N_A e$	F	$96\,485.332\,12 \dots$	C mol^{-1}	exact
Stefan-Boltzmann constant $(\pi^2/60)k^4/\hbar^3c^2$	σ	$5.670\,374\,419 \dots \times 10^{-8}$	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$	exact
Non-SI units accepted for use with the SI				
electron volt (e/C) J	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	J	exact
(unified) atomic mass unit $\frac{1}{12}m(^{12}\text{C})$	u	$1.660\,539\,066\,60(50) \times 10^{-27}$	kg	3.0×10^{-10}

* The energy of a photon with frequency ν expressed in unit Hz is $E = h\nu$ in J. Unitary time evolution of the state of this photon is given by $\exp(-iEt/\hbar)|\varphi\rangle$, where $|\varphi\rangle$ is the photon state at time $t = 0$ and time is expressed in unit s. The ratio Et/\hbar is a phase.

A tabela periódica com as propriedades atômicas dos elementos pode ser obtida em, <http://physics.nist.gov/PhysRefData/PerTable/index.html>.

PERIODIC TABLE

Atomic Properties of the Elements

NIST National Institute of Standards and Technology
U.S. Department of Commerce

Physical Measurement Laboratory www.nist.gov/pml
Standard Reference Data www.nist.gov/srd

FREQUENTLY USED FUNDAMENTAL PHYSICAL CONSTANTS¹

1 second = 9 192 631 770 periods of radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of the ground state of ¹³³Cs

speed of light in vacuum *c* 299 792 458 m s⁻¹ (exact)

Planck constant *h* 6.626 070 15 × 10⁻³⁴ J·Hz⁻¹ (exact)

elementary charge *e* 1.602 176 634 × 10⁻¹⁹ C (exact)

Boltzmann constant *k_B* 1.380 650 5 × 10⁻²³ J·K⁻¹ (exact)

Rydberg constant *R_∞* 1.097 373 157 × 10⁷ m⁻¹ (exact)

Boltzmann constant *k_B* 9.103 383 703 × 10⁻³¹ kg (exact)

electron mass *m_e* 9.109 383 703 × 10⁻³¹ kg

energy equivalent *m_ec²* 0.510 998 950 MeV

proton mass *m_p* 1.672 621 924 × 10⁻²⁷ kg

neutron mass *m_n* 1.674 927 471 × 10⁻²⁷ kg

fine-structure constant *α* 7.297 352 539 × 10⁻³

Compton wavelength *λ_C* 2.426 310 238 × 10⁻¹² m

Nickson constant *G* 6.674 × 10⁻¹¹ m³ kg⁻¹ s⁻²

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031	1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065	1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080	1081	1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089	1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108	1109	1110	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122	1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129	1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140	1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154	1155	1156	1157	1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185	1186	1187	1188	1189	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1196	1197	1198	1199	1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1210	1211	1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310	1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361	1362	1363	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370	1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377	1378	1379	1380	1381	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	---

Apêndice B

Dados úteis

Alfabeto Grego			Equivalência em Português
<i>A</i>	α	Alfa	A
<i>B</i>	β	Beta	B
Γ	γ	Gama	G
Δ	δ	Delta	D
<i>E</i>	ϵ	Épsilon	É
<i>Z</i>	ζ	Zeta	DZ
<i>H</i>	η	Eta	Ê
Θ	θ	Teta	TH
<i>I</i>	ι	Iota	I
<i>K</i>	κ	Capa	C
Λ	λ	Lambda	L
<i>M</i>	μ	Miu	M
<i>N</i>	ν	Niu	N
Ξ	ξ	Csi	CS
<i>O</i>	o	Omicron	Ó
Π	π	Pi	P
<i>P</i>	ρ	Rô	R
Σ	σ	Sigma	S
<i>T</i>	τ	Tau	T
Υ	υ	Ypsilon	U
Φ	ϕ	Fi	F
<i>X</i>	χ	Qui	Q
Ψ	ψ	Psi	PS
Ω	ω	Ómega	Ô

Tabela B.1: Alfabeto Grego

Numeral	Decimal	Potências de dez	Ordem de magnitude
décima de milésima	0.0001	10^{-4}	-4
milésima	0.001	10^{-3}	-3
centésima	0.01	10^{-2}	-2
décima	0.1	10^{-1}	-1
um	1	10^0	0
dez	10	10^1	1
cem	100	10^2	2
mil	1 000	10^3	3
dez mil	10 000	10^4	4
cem mil	100 000	10^5	5
milhão	1 000 000	10^6	6
mil milhões	1 000 000 000	10^9	9

Tabela B.2: Ordens de magnitude

Apêndice C

Momento de inércia de uma esfera

C.1 Cálculo do momento de inércia de uma esfera

Cálculo do momento de inércia de uma esfera

- Consideremos uma esfera sólida e homogênea, com massa m e raio R que roda em torno do eixo z . O seu momento de inércia calcula-se usando a equação 18.4,

$$I = \int r_z^2 dm, \quad (\text{C.1})$$

onde dm é a massa de um pequeno volume dV da esfera que está à distância r_z do eixo de rotação, que neste caso é o eixo z .

Se a esfera é homogênea então a razão,

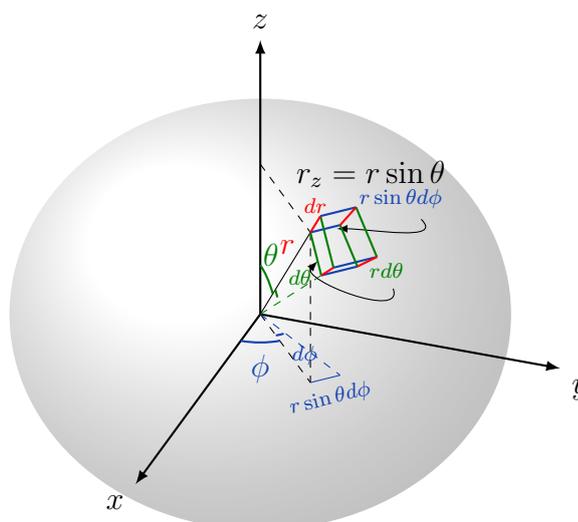
$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

é constante e podemos então escrever $dm = \rho dV$. Usando coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) dV é igual ao produto do comprimento das três arestas do pequeno volume indicado na figura,

$$dV = r dr r \sin \theta d\phi r d\theta.$$

Na figura também se pode ver que a distância do volume dV ao eixo dos zz é,

$$r_z = r \sin \theta.$$



Então podemos escrever o momento de inércia como,

$$\begin{aligned} I &= \int r_z^2 dm \\ &= \int (r \sin \theta)^2 \rho dv \\ &= \int \int \int (r \sin \theta)^2 \rho r dr r \sin \theta d\phi r d\theta. \end{aligned}$$

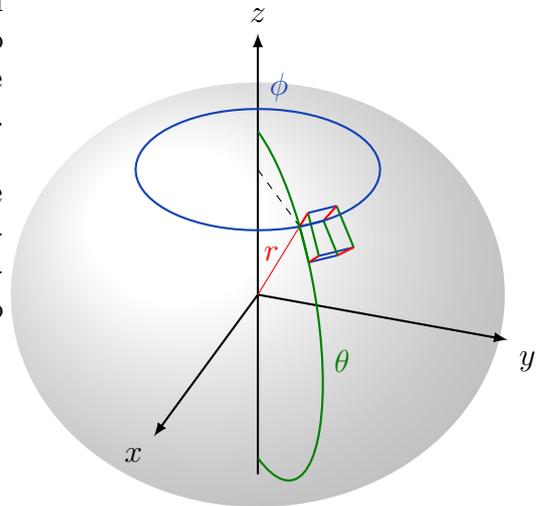
Temos três integrais para resolver e como as variáveis (r, θ, ϕ) se encontram separadas, o cálculo resume-se ao produto de três integrais,

$$I = \rho \int r^4 dr d\phi \int \sin^3 \theta d\theta.$$

Os limites de integração de cada um destes integrais são, de 0 até R para o primeiro, de 0 até 2π para o segundo e de 0 até π para o terceiro, ver figura.

Desta forma todo o volume da esfera é varrido e somamos o produto do quadrado da distância a que todas as massas dm , que constituem a esfera, estão do eixo zz , pela própria massa dm ,

$$I = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta.$$



O cálculo dos dois primeiros integrais resulta em,

$$I = \rho \frac{R^5}{5} 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta,$$

para resolver o terceiro integral mudamos a variável de integração $u = \cos \theta$

logo $du = -\sin\theta d\theta$ assim vem,

$$\begin{aligned} I &= \rho \frac{R^5}{5} 2\pi \int_1^{-1} -(1-u^2) du \\ &= \rho \frac{R^5}{5} 2\pi \left[\frac{u^3}{3} - u \right]_1^{-1} \\ &= \rho \frac{R^5}{5} 2\pi \frac{4}{3} \\ &= \rho \underbrace{\frac{4\pi R^3}{3}}_m \frac{2R^2}{5} \\ &= \frac{2mR^2}{5}, \end{aligned}$$

onde m é a massa total da esfera.

Apêndice D

Dedução de $P(v)$ feita por Maxwell

D.1 Dedução de $P(v)$ feita por Maxwell

Dedução de $P(v)$ feita por Maxwell

- Seja n o número total (constante) de moléculas numa caixa com um volume elementar dV e v_x , v_y e v_z as componentes da velocidade de cada molécula.
- Queremos encontrar uma função $\mathcal{P}(v)$ tais que $n\mathcal{P}(v_x)dv_x$ seja igual ao número total de moléculas que têm velocidade v_x no intervalo entre v_x e $v_x + dv_x$.
- De igual modo para as outras duas componentes $n\mathcal{P}(v_y)dv_y$ e $n\mathcal{P}(v_z)dv_z$ serão igual ao número de moléculas com velocidades a variar entre $[v_y, v_y + dv_y]$ e $[v_z, v_z + dv_z]$, respectivamente.
- Assumindo que não há direcções preferidas no gás, \mathcal{P} , é sempre a mesma função.
- Então, como v_x , v_y e v_z são independentes, o número total de moléculas cujas componentes da velocidade variam simultaneamente nos intervalos $[v_x, v_x + dv_x]$, $[v_y, v_y + dv_y]$ e $[v_z, v_z + dv_z]$ será dado por,

$$\begin{aligned}dn &= n \mathcal{P}(v_x)dv_x \mathcal{P}(v_y)dv_y \mathcal{P}(v_z)dv_z \\ &= n \mathcal{P}(v_x)\mathcal{P}(v_y)\mathcal{P}(v_z) dv_x dv_y dv_z\end{aligned}\tag{D.1}$$

- Consideremos agora só aquelas moléculas que têm velocidade total $v = \text{constante}$ não obstante v_x , v_y e v_z poderem variar.
- Como,

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

diferenciando obtemos,

$$2v dv = 2v_x dv_x + 2v_y dv_y + 2v_z dv_z,$$

se $v = \text{constante}$, então $dv = 0$ e,

$$v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = 0$$

- Como não há direcções preferenciais dn deverá ser independente dos valores individuais de v_x , v_y e v_z , desde que se verifique a eq. anterior, assim,

$$\begin{aligned} d(dn) &= 0 \\ \frac{d(dn)}{dv_x} dv_x + \frac{d(dn)}{dv_y} dv_y + \frac{d(dn)}{dv_z} dv_z &= 0 \\ \mathcal{P}'(v_x) dv_x \mathcal{P}(v_y) \mathcal{P}(v_z) \\ + \mathcal{P}(v_x) \mathcal{P}'(v_y) dv_y \mathcal{P}(v_z) + \mathcal{P}(v_x) \mathcal{P}(v_y) \mathcal{P}'(v_z) dv_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

dividindo tudo por $\mathcal{P}(v_x)\mathcal{P}(v_y)\mathcal{P}(v_z)$ vem,

$$\frac{\mathcal{P}'(v_x)}{\mathcal{P}(v_x)} dv_x + \frac{\mathcal{P}'(v_y)}{\mathcal{P}(v_y)} dv_y + \frac{\mathcal{P}'(v_z)}{\mathcal{P}(v_z)} dv_z = 0 \quad (\text{D.3})$$

- Basicamente procuramos os extremos de dn sujeitos à condição $dv = 0$
- Então para encontrar a função \mathcal{P} multiplicamos $dv = 0$ por uma constante λ (a determinar) e adicionamos a $d(dn) = 0$ obtendo,

$$\left(\frac{\mathcal{P}'(v_x)}{\mathcal{P}(v_x)} + \lambda v_x\right) dv_x + \left(\frac{\mathcal{P}'(v_y)}{\mathcal{P}(v_y)} + \lambda v_y\right) dv_y + \left(\frac{\mathcal{P}'(v_z)}{\mathcal{P}(v_z)} + \lambda v_z\right) dv_z = 0 \quad (\text{D.4})$$

- Cada termo desta equação tem de ser zero, pois dv_x , dv_y e dv_z são diferentes de zero
- Então

$$\frac{\mathcal{P}'(v_x)}{\mathcal{P}(v_x)} + \lambda v_x = 0, \quad (\text{D.5})$$

expressão análoga para os factores de dv_y e dv_z .

- Integrando, obtém-se,

$$\ln \mathcal{P}(v_x) = -\frac{\lambda v_x^2}{2} + A, \quad (\text{D.6})$$

onde A é uma const. de integração.

Ou exprimindo o resultado na forma exponencial,

$$\mathcal{P}(v_x) = B e^{(-\lambda \frac{v_x^2}{2})} \quad (\text{D.7})$$

- λ tem de ser positivo caso contrário \mathcal{P} e consequentemente o número de moléculas seria infinito.
- Para encontrar B repare-se que $\mathcal{P}(v_x)dv_x = \frac{dn}{n}$ é a *probabilidade* de encontrar uma molécula com velocidade v_x no intervalo $[v_x, v_x + dv_x]$.
- Então certamente que no intervalo $[-\infty, +\infty]$, *probabilidade* = 1, ou seja com certeza absoluta se encontrará uma molécula que tenha uma velocidade entre $-\infty$ e $+\infty$ então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(v_x)dv_x = 1 \quad (\text{D.8})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B e^{(-\lambda \frac{v_x^2}{2})} dv_x = 1$$

$$B \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\lambda \frac{v_x^2}{2})} dv_x = 1$$

$$2B \int_0^{+\infty} e^{(-\lambda \frac{v_x^2}{2})} dv_x = 1$$

$$B \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} = 1,$$

onde foi usada a Eq. E.1.

Assim

$$B = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \quad (\text{D.9})$$

logo

$$\mathcal{P}(v_x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{(-\lambda \frac{v_x^2}{2})} \quad (\text{D.10})$$

- Para encontrar o valor de λ vamos calcular o valor médio do quadrado da componente x da velocidade, $\overline{v_x^2}$ e relacionar este valor com a energia cinética média por grau de liberdade que como vimos na Sec. 527, Pag. 194 é dada por,

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} k_B T \quad (\text{D.11})$$

- Sendo,

$$\begin{aligned}
 \overline{v_x^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \mathcal{P}(v_x) dv_x & (D.12) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{(-\lambda \frac{v_x^2}{2})} dv_x \\
 &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} 2 \int_0^{+\infty} v_x^2 e^{(-\lambda \frac{v_x^2}{2})} dv_x \\
 &\quad \text{usando a Eq. E.2 vem,} \\
 &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} 2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi 2^3}{\lambda^3}} = \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

então $\lambda = \frac{1}{v_x^2}$.

- Recordando $\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} k_B T$ podemos escrever,

$$\overline{v_x^2} = \frac{k_B T}{m} \Leftrightarrow \lambda = \frac{m}{k_B T} \quad (D.13)$$

- Completamos assim a expressão da função $\mathcal{P}(v_x)$,

$$\mathcal{P}(v_x) = \sqrt{\frac{m}{k_B T}} \frac{1}{2\pi} e^{(-\frac{m}{k_B T} \frac{v_x^2}{2})}. \quad (D.14)$$

- Então o número de moléculas numa caixa de volume elementar, que têm velocidades entre $[v_x, v_x + dv_x]$ será dado por,

$$\begin{aligned}
 dn &= n \mathcal{P}(v_x) dv_x \\
 &= n \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{(-\frac{m v_x^2}{2 k_B T})} dv_x \quad (D.15)
 \end{aligned}$$

- Para obter a probabilidade referente às 3 componentes da velocidade relembra-se a expressão D.1,

$$dn = n \mathcal{P}(v_x) \mathcal{P}(v_y) \mathcal{P}(v_z) dv_x dv_y dv_z$$

- Substituindo o valor da função \mathcal{P} encontramos a função que procuramos $P(v_x, v_y, v_z) = \mathcal{P}(v_x) \mathcal{P}(v_y) \mathcal{P}(v_z)$,

$$\begin{aligned}
 \frac{dn}{n} &= \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \right)^3 e^{(-\frac{m v_x^2}{2 k_B T})} e^{(-\frac{m v_y^2}{2 k_B T})} e^{(-\frac{m v_z^2}{2 k_B T})} dv_x dv_y dv_z \\
 &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2 k_B T})} dv_x dv_y dv_z \quad (D.16)
 \end{aligned}$$

- Em coordenadas esféricas o elemento de volume $dv_x dv_y dv_z \rightarrow 4\pi v^2 dv$ então,

$$\frac{dn}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \quad (\text{D.17})$$

- Encontramos então a função distribuição das velocidades moleculares entre v e $v + dv$,

$$P(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

Apêndice E

Integrais Úteis

E.1 Integrais Gaussianos

Integrais Gaussianos

- Devido à forma da função de distribuição das velocidades de Maxwell-Boltzmann é comum encontrar integrais com a forma,

$$\int x^n e^{-ax^2} dx.$$

- Quando n é um inteiro positivo par ou $n = 0$ o integral chama-se Gaussiano, ou melhor integral de funções Gaussianas.
- Pode mostrar-se que a sua solução geral é da forma,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \left(-\frac{d}{da}\right)^{n/2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

- Exemplos:

$$\text{Se } n=0 \text{ então } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{E.1})$$

$$\text{Se } n=2 \text{ então } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad (\text{E.2})$$

$$\text{Se } n=4 \text{ então } \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}} \quad (\text{E.3})$$

- Repare-se que em qualquer destes integrais se verifica $\int_{-\infty}^{\infty} = 2 \int_0^{\infty}$.

E.2 Integrais Pseudo Gaussianos

Integrais Pseudo Gaussianos

- Quando n é um inteiro positivo ímpar o integral chama-se pseudo Gaussiano porque pode ser calculado usando métodos tradicionais. Se os limites variarem entre $-\infty$ e $+\infty$ o integral é nulo pois a função integranda é ímpar.
- Assim pode mostrar-se que a sua solução geral é da forma,

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \left(-\frac{d}{da}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2a}.$$

- Exemplos:

$$\text{Se } n=1 \text{ então } \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \quad (\text{E.4})$$

$$\text{Se } n=3 \text{ então } \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2} \quad (\text{E.5})$$

$$\text{Se } n=5 \text{ então } \int_0^{\infty} x^5 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{a^3} \quad (\text{E.6})$$

- Calculemos explicitamente o integral para $n=1$. Fazendo a mudança de variável $y = ax^2$, que implica $dy = 2ax dx$ temos,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \\ &= \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{dy}{2a} \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{2a} [-e^{-y}]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$