

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

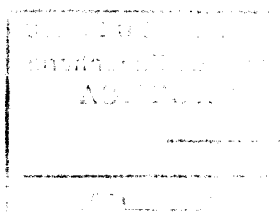
**TESTE PARA A IGUALDADE DE ESPECTROS:  
ESTUDO DA POTÊNCIA E  
COMPARAÇÃO DAS CONCENTRAÇÕES DA HORMONA  
LUTEÍNA EM DUAS FASES DO CICLO MENSTRUAL**

**ISABEL MARIA MARQUES DA SILVA**

Porto, Janeiro de 1998

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

**TESTE PARA A IGUALDADE DE ESPECTROS:  
ESTUDO DA POTÊNCIA E  
COMPARAÇÃO DAS CONCENTRAÇÕES DA HORMONA  
LUTEÍNA EM DUAS FASES DO CICLO MENSTRUAL**



**ISABEL MARIA MARQUES DA SILVA**  
Dissertação para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada  
Porto, 5 de Janeiro de 1998

51(043)/SILV/TEC

<b>UNIVERSIDADE DO PORTO</b>
Faculdade de Engenharia
<b>BIBLIOTECA M</b>
N.º <u>51845</u>
CDU <u>51(043)</u>
Data <u>12 / 3 / 2001</u>

Dissertação orientada por

Maria Eduarda da Rocha Pinto Augusto da Silva

Professora Auxiliar do  
Departamento de Matemática Aplicada da  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

# **I. Agradecimentos**

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, à Prof. Doutora Eduarda Silva, sob cuja supervisão foi realizada esta dissertação. Estou-lhe agradecida por ter sugerido o problema e pela sua disponibilidade e valiosa colaboração no decurso do trabalho.

Estou, igualmente, muito agradecida a minha família pelo seu apoio e paciência, assim como pela maravilhosa possibilidade que me ofereceram de estudar.

Por último, agradeço aos meus amigos pelo seu encorajamento e apoio, muito especialmente à Lucília.

Muito obrigada a todos

Isabel Maria Marques da Silva

*Aos meus Pais*

## II. Resumo

Neste trabalho, considera-se um teste para a igualdade de espectros de  $k$  séries cronológicas. Este teste, proposto por A. da Silva (1994), baseia-se na função de densidade espectral, pelo que não é necessário fazer qualquer tipo de suposição sobre as séries em estudo.

É feito um estudo da potência do teste, que revela que é competitivo com outros testes propostos na literatura, mas que impõem a condição de linearidade das séries.

O teste é aplicado às concentrações da hormona luteína em diferentes fases do ciclo menstrual. Esta hormona tem um papel muito importante no sistema reprodutivo e é sabido que não é segregada como uma corrente constante, mas de uma maneira irregular. Com este trabalho, conclui-se que existem diferenças no padrão de secreção da hormona luteína nas referidas fases.

**Palavras-chave:** Espectro, Biespectro, Séries Cronológicas Hormonais, Testes de Hipóteses.

### III. Abstract

In this thesis, we consider a test for the equality of spectra of  $k$  time series. This test, proposed by A. da Silva (1994), is based on the spectral density function and therefore no assumptions on the series under study are necessary.

A study of power of the test is done and we conclude that it is as powerful as others tests proposed in the literature.

We apply the test to the series of luteinizing hormone concentrations in different phases of the menstrual cycle. This hormone has an important role in the reproductive system and it is well known that it is secreted in an irregular pulsatile fashion, rather than in a steady stream. We conclude that the release pattern is different in the two phases of the cycle.

**Keywords:** Spectra, Bispectra, Hormonal Time Series, Test of Hypothesis.



## IV. Índice

I. Agradecimentos	3
II. Resumo e Palavras-chave	5
III. Abstract and Keywords	6
1. Introdução	8
1.1 Tópicos considerados nesta tese	8
1.2 Conceitos Básicos	9
1.3 Função de Densidade Espectral	11
1.3.1 Estimação	12
1.4 Função de Densidade Biespectral	15
1.4.1 Biespectro e Processos Lineares	16
1.4.2 Estimação	18
2. Teste para a Igualdade de Espectros	21
2.1 Motivação para o Teste	21
2.2 Descrição do Teste	24
2.3 Estudo da Potência	27
3. Comparação da Concentração da Hormona Luteína em duas Fases do Ciclo Menstrual	36
4. Conclusão	43
5. Referências	45
6. Apêndice: Teste para a Igualdade de Biespectros	47
6.1 Motivação para o Teste	47
6.2 Descrição do Teste	48

# 1. Introdução

## 1.1 Tópicos considerados nesta Tese

No capítulo 1 são apresentados os conceitos básicos da análise de séries cronológicas, são definidos o espectro e biespectro, e é descrita a estimação de cada um deles.

No capítulo 2 são descritos, brevemente, os testes propostos por Coates e Diggle (1986) e Diggle e Fisher (1991) para determinar se duas séries cronológicas lineares são realizações do mesmo processo estacionário.

Descreve-se, em seguida, o teste proposto por A. da Silva (1994) para a igualdade dos espectros (momentos de 2ª ordem) de  $k$  séries cronológicas estacionárias e apresentam-se os resultados do estudo da potência do teste.

No capítulo 3, são apresentados os resultados da aplicação do teste, descrito no capítulo 2, às concentrações da hormona luteína em duas fases do ciclo menstrual, de forma a saber se as características da frequência de secreção da hormona luteína é diferente nas duas fases foliculares do ciclo menstrual.

O capítulo 4 contém as conclusões deste trabalho.

No apêndice, descreve-se a generalização do procedimento proposto por A. da Silva para testar a igualdade dos biespectros (momentos de 3ª ordem) de  $k$  séries cronológicas, sobre a suposição de que a estrutura de 2ª ordem, das  $k$  séries, é a mesma.

## 1.2 Conceitos Básicos

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias  $\{X_t : t \in T\}$ . Se o parâmetro  $t$  representa o tempo, então  $\{X_t\}$ , com  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , diz-se uma série cronológica.

Assim, uma série cronológica é um registo de valores de uma qualquer quantidade flutuante medida ao longo do tempo.

Um processo estocástico diz-se completamente estacionário se a distribuição conjunta da variável aleatória  $\{X_t\}$  não se altera ao longo do tempo, i.e., para quaisquer inteiros  $k$  e  $N$  e para qualquer conjunto admissível  $t_1, \dots, t_N$ , tem-se que

$$F_{t_1+k, \dots, t_N+k}(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_N+k}) = F_{t_1, \dots, t_N}(X_{t_1}, \dots, X_{t_N})$$

Mas a estacionaridade completa é um requerimento muito forte, portanto, se um processo é tal que, para qualquer inteiro  $k$  e para qualquer conjunto admissível  $t_1, \dots, t_N$ , todos os momentos conjuntos até a ordem  $m$  de  $\{X_{t_1}, \dots, X_{t_N}\}$  existem e são iguais aos de  $\{X_{t_1+k}, \dots, X_{t_N+k}\}$ , então diz-se estacionário até a ordem  $m$  ou, simplesmente, estacionário.

Uma série cronológica  $\{X_t\}$  diz-se Gaussiana se  $\{X_{t_1}, \dots, X_{t_N}\}$  tem uma distribuição conjunta multivariada normal para todos os valores de  $N$  e para todas as escolhas possíveis de  $t_1, \dots, t_N$ .

Uma série cronológica Gaussiana que seja estacionária até a 2ª ordem é completamente estacionária, visto que a distribuição multivariada normal está completamente caracterizada pelos momentos de 1ª e 2ª ordem, i.e., pela sua média, variância e covariância.

Uma série cronológica Gaussiana é sempre uma série cronológica linear, e portanto pode ser escrita como

$$X_t = \sum_{u=0}^{+\infty} g_u \varepsilon_{t-u}$$

onde  $\varepsilon_t$  é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas,  $N(\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2)$ , e  $\{g_u\}$  é uma dada sucessão de constantes, que satisfazem a seguinte condição

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_u^2 < \infty.$$

Dada uma série cronológica estacionária de 2ª ordem,  $\{X_t\}$ , com  $\mu = E[X_t]$ , a sua função de autocovariância é definida por

$$R(k) = \text{cov}(X_t, X_{t-k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e a função geradora de cumulantes é dada por

$$K(m) = \ln \left( E \left[ e^{mX_t} \right] \right).$$

Quando  $K(m)$  pode ser expandida como uma série de potências da forma

$$K(m) = C_1 m + C_2 \frac{m^2}{2!} + \dots + C_r \frac{m^r}{r!} + \dots$$

os coeficientes  $C_r$  são chamados os cumulantes de ordem  $r$  de  $\{X_t\}$ .

Os cumulantes,  $\{C_r\}$ , estão intimamente relacionados com os momentos [Priestley (1981)]. Em particular, o cumulante de 3ª ordem corresponde ao momento centrado de 3ª ordem, i.e.

$$C_3(s_1, s_2) = \mu_3 = E \left[ (X_t - \mu)(X_{t+s_1} - \mu)(X_{t+s_2} - \mu) \right] \quad (1.1)$$

### 1.3 A Função de Densidade Espectral

Se a função de autocovariância de uma série cronológica é absolutamente somável, i.e.,  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |R(k)| < \infty$ , a sua transformada de Fourier

$$h(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{-iwk}, \quad -\pi \leq w \leq \pi,$$

é chamada função de densidade espectral (não normalizada) ou, simplesmente, espectro de  $\{X_t\}$ .

Então, a função de autocovariância pode ser expressa como a transformada de Fourier inversa da função de densidade espectral,

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(w) e^{iwk} dw.$$

Mesmo que a função de densidade espectral não seja absolutamente somável, a função de autocovariância possui, sempre, uma “representação espectral”, em termos do seguinte integral de Fourier-Stieltjes

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwk} dH(w)$$

onde  $H(w)$  é conhecida como função de distribuição espectral ou, simplesmente, espectro integrado (não normalizado).

É claro que, quando  $h(w)$  existe, tem-se que  $dH(w) = h(w)dw$ , de modo que

$$H(w) = \int_{-\pi}^w h(\theta) d\theta.$$

Note-se que

$$\text{var}[X_t] = R(0) = \int_{-\pi}^{\pi} h(w)dw,$$

pelo que a função de densidade espectral pode ser interpretada como a decomposição da variância de um processo. O termo  $h(w)dw$  representa a contribuição, para a potência total, dos componentes em  $X_t$  com frequências entre  $w$  e  $w+dw$ .

Portanto, um “pico” na representação gráfica do espectro ao longo do tempo, indica uma importante contribuição para a potência das frequências no intervalo correspondente ao “pico”.

### 1.3.1 Estimação

Sejam  $X_1, \dots, X_N$  observações de um processo estacionário de 2ª ordem com média  $\mu$  e função de autocovariância  $R(k)$ . Um estimador da função de densidade espectral é o periodograma, definido por

$$I(w) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X}) e^{-itw} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{R}(k) e^{-ikw}$$

onde

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} X_t X_{t+k} \quad \text{e} \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t$$

são, respectivamente, estimadores de  $R(k)$  e  $\mu$ . O periodograma é calculado num conjunto de frequências da forma  $w_p = 2\pi p/N$ ,  $p = 0, 1, \dots, N/2$ , ditas frequências de Fourier.

O periodograma é um estimador de  $h(w)$  assintoticamente centrado mas inconsistente [Priestley (1981)].

A razão de inconsistência é que o cálculo de  $I(w)$  inclui  $N$  autocovariâncias amostrais e, embora cada uma seja  $O(1/N)$ , o efeito

acumulado dos  $N$  termos produz uma variância  $O(1)$ . Portanto, uma maneira de obter uma expressão com variância reduzida é omitir aqueles termos que correspondem à “cauda” da função de autocovariância, mas sem incrementar o enviesamento.

Considere-se, então, um estimador de  $h(w)$  da forma

$$\hat{h}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M \lambda_N(k) \hat{R}(k) e^{-iwk},$$

onde  $M$  é o ponto de truncagem e  $\lambda_N(k)$  é chamada janela retardada. Algumas das janelas retardadas mais utilizadas na estimação de espectros são mostradas na tabela (1.1). O valor do ponto de truncagem,  $M$ , deve ser escolhido de forma que  $M \rightarrow \infty$  quando  $N \rightarrow \infty$ , mas de modo que  $(M/N) \rightarrow 0$ .

Pode-se, ainda, escrever o estimador espectral como um integral ponderado do periodograma

$$\hat{h}(w) = \int_{-\pi}^{\pi} I(\theta) W_N(w - \theta) d\theta,$$

onde

$$W_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(N-1)}^{(N-1)} \lambda_N(k) e^{-ik\theta},$$

a chamada janela espectral, é a transformada de Fourier da janela retardada e satisfaz as seguintes condições:

- i)  $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\theta) d\theta = 1;$
- ii)  $W_N(\theta) = W_N(-\theta);$
- iii)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\theta) d\theta = 0.$

NOME	JANELA RETARDADA
Periodograma Truncado	$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 & \text{se }  k  \leq M \\ 0 & \text{se }  k  > M \end{cases}$
Bartlett	$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 -  k /M & \text{se }  k  \leq M \\ 0 & \text{se }  k  > M \end{cases}$
Blackman-Tukey	$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a \cos(\pi k/M) & \text{se }  k  \leq M \\ 0 & \text{se }  k  > M \end{cases}$
Parzen	$\lambda_N(k) = \begin{cases} 1 - 6(k/M)^2 + 6( k /M)^3 & \text{se }  k  \leq M/2 \\ 2(1 -  k /M)^3 & \text{se } M/2 \leq  k  \leq M \\ 0 & \text{se }  k  > M \end{cases}$

Tabela (1.1): Principais janelas utilizadas na prática

O estimador espectral,  $\hat{h}(w)$ , é um estimador assintoticamente cêntrico de  $h(w)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{h}(w)] = h(w),$$

com variância e covariância dadas, respectivamente, por

$$\text{var}[\hat{h}(w)] \sim \frac{2\pi}{N} h^2(w) \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\theta) d\theta, \quad (1.2)$$

e

$$\text{cov}[\hat{h}(w_1), \hat{h}(w_2)] \sim \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta) W_N(w_1 - \theta) W_N(w_2 - \theta) d\theta.$$

É possível demonstrar [Priestley (1981)] que  $\hat{h}(w)$  segue uma distribuição assintoticamente normal, com média  $h(w)$  e variância dada por (1.2).

Note-se que a variância assintótica de  $\hat{h}(w)$  é proporcional a  $h^2(w)$ , pelo que varia com a frequência; portanto, sugere-se uma transformação logarítmica como técnica para estabilizar a variância. Tem-se, então, que



Se o cumulante de 3ª ordem é absolutamente somável, i.e.

$$\sum_{s_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{+\infty} |C(s_1, s_2)| < \infty,$$

então o biespectro existe para todo  $w_1$  e  $w_2$ .

Se o processo é de valores reais, o momento centrado de 3ª ordem satisfaz as seguintes relações de simetria

$$C(s_1, s_2) = C(s_2, s_1) = C(-s_1, s_2 - s_1) = C(s_1 - s_2, -s_2),$$

e, portanto, para o biespectro tem-se que

$$h(w_1, w_2) = h(w_2, w_1) = h(w_1, -w_2 - w_1) = \overline{h(-w_1, -w_2)}.$$

#### 1.4.1 Biespectro e Processos Lineares

Considere-se um processo linear  $\{X_t\}$ , i.e.

$$X_t = \sum_{u=0}^{+\infty} g_u \varepsilon_{t-u}$$

onde  $\varepsilon_t$  é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com  $E[\varepsilon_t] = 0$ ,  $E[\varepsilon_t^2] = \sigma_\varepsilon^2$  e  $E[\varepsilon_t^3] = \mu_3$ .

A função de autocovariância de  $\{X_t\}$  é dada por

$$\begin{aligned} R(k) &= E[X_t X_{t+k}] \\ &= E\left[\left(\sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_u \varepsilon_{t-u}\right)\left(\sum_{u'=-\infty}^{+\infty} g_{u'} \varepsilon_{t+k-u'}\right)\right] \\ &= \sum_u \sum_{u'} g_u g_{u'} E[\varepsilon_{t-u} \varepsilon_{t+k-u'}] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_u g_{u+k}. \end{aligned}$$

O momento centrado de 3ª ordem é dado por

$$\begin{aligned} C(s_1, s_2) &= E[X_t X_{t+s_1} X_{t+s_2}] \\ &= \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{\infty} \sum_{r_3=-\infty}^{\infty} g_{r_1} g_{r_2} g_{r_3} E[\varepsilon_{t-r_1} \varepsilon_{t+s_1-r_2} \varepsilon_{t+s_2-r_3}] \\ &= \mu_3 \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} g_r g_{r+s_1} g_{r+s_2} \right) \end{aligned}$$

Seja  $H(w) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} g_r e^{-irw}$  a função de transferência do processo.

Então, a função de densidade espectral de  $\{X_t\}$  é dada por

$$\begin{aligned} h(w) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{-ikw} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} g_r g_{r+k} e^{-ikw} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} g_r e^{irw} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{r+k} e^{-i(r+k)w} \right) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} H(-w) H(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |H(w)|^2 \end{aligned}$$

A função de densidade biespectral é dada por

$$\begin{aligned} h(w_1, w_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} C(s_1, s_2) e^{-is_1w_1 - is_2w_2} \\ &= \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} g_r g_{r+s_1} g_{r+s_2} e^{-(is_1w_1 + is_2w_2)} \\ &= \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} H(w_1) H(w_2) H(-w_1 - w_2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pela expressão (1.3), e recordando que todos os cumulantes conjuntos de ordem superior à 2ª são nulos para as distribuições normais multivariadas, pode-se concluir que se as variáveis aleatórias  $\{\varepsilon_t\}$  são Gaussianas, o que implica que  $\{X_t\}$  também é Gaussiano, então o

biespectro  $h(w_1, w_2)$  é zero para todo  $w_1$  e  $w_2$ , que é a propriedade mais importante da função de densidade biespectral.

### 1.4.2 Estimação

Dada uma realização  $X_1, \dots, X_N$  de um processo  $\{X_t\}$ , real e estacionário de 3ª ordem, um estimador do momento centrado de 3ª ordem, é dado por

$$\hat{C}(s_1, s_2) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} (X_t - \bar{X})(X_{t+s_1} - \bar{X})(X_{t+s_2} - \bar{X}), \quad \tau = \max(s_1, s_2),$$

onde  $\bar{X}$  é a média da amostra.

Portanto, um estimador para o biespectro seria o chamado periodograma de 3ª ordem, definido por

$$I(w_1, w_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{s_1=-(N-1)}^{(N-1)} \sum_{s_2=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{C}(s_1, s_2) e^{-i(w_1 s_1 + w_2 s_2)}.$$

O estimador  $I(w_1, w_2)$  é assintoticamente cêntrico, mas não é um estimador consistente de  $h(w_1, w_2)$  [Brillinger e Rosenblatt (1967a), (1967b)].

Para construir um estimador consistente, “amacia-se” o periodograma de 3ª ordem, através da introdução de uma função peso.

Considere-se, então, uma função limitada e não negativa, que satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = 1;$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 < \infty; \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_i^2 W(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 < \infty, \quad i = 1, 2; \\
\text{(iii)} \quad & W(\theta_1, \theta_2) = W(\theta_2, \theta_1) = W(\theta_1, -\theta_1 - \theta_2) = W(-\theta_1 - \theta_2, \theta_2);
\end{aligned}$$

e seja  $\lambda(s_1, s_2)$  a sua transformada de Fourier inversa

$$\lambda(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s_1\theta_1 + s_2\theta_2)} W(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

que deve satisfazer as seguintes condições de simetria

$$\lambda(s_1, s_2) = \lambda(s_2, s_1) = \lambda(-s_1, s_2 - s_1) = \lambda(s_1 - s_2, -s_2).$$

Então o estimador consistente do biespectro é dado por

$$\begin{aligned}
\hat{h}(w_1, w_2) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(\theta_1 - w_1, \theta_2 - w_2) I(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{s_1=-(M-1)}^{(M-1)} \sum_{s_2=-(M-1)}^{(M-1)} \lambda(s_1, s_2) \hat{C}(s_1, s_2) e^{-i(w_1 s_1 + w_2 s_2)}.
\end{aligned}$$

A função  $W(\theta_1, \theta_2)$  é chamada a janela biespectral, a sua transformada de Fourier é chamada a janela retardada e o  $M$ , parâmetro da janela, deve ser escolhido de modo que  $M \rightarrow \infty$  quando  $N \rightarrow \infty$ , mas de maneira que  $M^2/N \rightarrow 0$ .

Pode ser demonstrado que  $\hat{h}(w_1, w_2)$  é um estimador assintoticamente cêntrico e consistente de  $h(w_1, w_2)$  [Subba Rao e Gabr (1984)].

Subba Rao e Gabr (1984) propuseram a seguinte forma para a janela retardada, que satisfaz as referidas relações de simetria:

$$\lambda(s_1, s_2) = \lambda(s_1) \lambda(s_2) \lambda(s_1 - s_2)$$

Ainda, existe uma janela retardada óptima,  $\lambda^*$ , no sentido de que o estimador obtido tem o menor erro quadrático médio, definida por

$$\lambda^*(s_1, s_2) = \frac{8}{7\pi^3} [v(s_1, s_2) + v(-s_1, s_2 - s_1) + v(s_1 - s_2, -s_2)]$$

onde

$$v(s_1, s_2) = \frac{(2s_1^2 + 2s_2^2 + s_1s_2)}{\pi s_1^3 s_2^3} \cos(s_2 - s_1)\pi - \frac{(s_2 - s_1)}{s_1^2 s_2^2} \sin(s_2 - s_1)\pi.$$

## 2. Teste para a igualdade de espectros

### 2.1 Motivação para o Teste

Considere-se o problema de estabelecer se duas ou mais séries cronológicas são realizações do mesmo processo completamente estacionário.

Já foi referido que a estacionaridade completa é um requerimento severo, pelo que na prática se utiliza a definição, menos restritiva, da estacionaridade até a ordem  $m$ .

Em particular, se o processo é estacionário até a 2ª ordem, então as suas propriedades estatísticas estão caracterizadas pelos momentos de 1ª e 2ª ordem e, neste caso, o problema de estabelecer se duas ou mais séries cronológicas são realizações do mesmo processo é equivalente a determinar se as séries têm a mesma função de densidade espectral.

Coates e Diggle (1986) propuseram vários testes para a hipótese de que duas séries independentes  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$ ,  $t=1, \dots, N$ , são geradas pelo mesmo processo estacionário linear. Estes testes baseiam-se no periodograma.

Em particular, propuseram um procedimento semi-paramétrico baseado na suposição de que as funções de densidade espectral  $h_X(w)$  e  $h_Y(w)$ , das séries  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$ , respectivamente, estão relacionadas através da equação

$$h_Y(w) = h_X(w) \exp(\alpha + \beta w + \gamma w^2).$$

Este procedimento é obtido como uma generalização do teste da razão de verosimilhança, apoiada na distribuição logística, de modo a especificar a forma funcional da razão dos logaritmos espectrais [Coates e Diggle (1986)].

Estes autores também propõem dois testes não paramétricos. Um deles, que é extremamente fraco, baseia-se em razões de periodogramas

$$J(w) = \frac{I_x(w)}{I_y(w)},$$

onde  $I_x(w)$  e  $I_y(w)$  são os periodogramas das séries  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$ , respectivamente. Este teste é motivado pelo facto de que qualquer desvio na hipótese nula

$$H_0 : h_x(w) = h_y(w) \quad \forall w : 0 \leq w \leq \pi$$

tenderá a incrementar o maior dos logaritmos das razões dos periodogramas ou a decrementar o menor deles [Coates e Diggle (1986)].

O outro teste, baseia-se em somas cumulativas transformadas

$$c_j = \sum_{i=1}^j z_i, \quad \text{com } z_i = \ln[1 + J(w_i)^{-1}], \quad w_i = \frac{2\pi i}{N}, \quad i = 1, \dots, \left[ \frac{N-1}{2} \right],$$

de modo que, sobre a hipótese  $H_0$ , os  $c_j/c_m$  ( $j = 1, \dots, m-1$ ),  $m = [(N-1)/2]$ , podem ser consideradas como estatísticas de ordem de uma amostra aleatória uniforme e a estatística de Kolmogorov-Smirnov pode ser utilizada para determinar desvios de uniformidade [Coates e Diggle (1986)]. Uma desvantagem deste teste é que depende do “etiquetamento” arbitrário das duas séries.

Posteriormente, Diggle e Fisher (1991) trataram o problema de comparar os espectros de duas séries cronológicas através dos seus periodogramas cumulativos normalizados calculados nas frequências de Fourier, i.e.

$$F_x(w_j) = \frac{\sum_{i=1}^j I_x(w_i)}{\sum_{i=1}^m I_x(w_i)}, \quad \text{com } w_i = \frac{2\pi i}{N}, \quad i = 1, \dots, \left[ \frac{N-1}{2} \right].$$

para a série  $\{X_t\}$ , com expressão análoga para  $\{Y_t\}$ , com  $t = 1, \dots, N$  e  $m = \lfloor (N-1)/2 \rfloor$ .

Este procedimento, que pretende comparar os periodogramas das duas séries através da representação gráfica de  $F_y(w_j)$  contra  $F_x(w_j)$ , é complementado com um teste formal à hipótese nula  $H_0$ , que utiliza as estatísticas de Kolmogorov-Smirnov e de Crámer-von Mises, respectivamente:

$$D_m = \sup |F_x(w) - F_y(w)|$$

e

$$W_m = \int_0^\pi [F_x(w) - F_y(w)]^2 d\bar{F}(w)$$

onde  $\bar{F}(w) = 0.5[F_x(w) + F_y(w)]$ , como *medida de distância* entre  $F_y(w_j)$  e  $F_x(w_j)$ .

Todos estes testes supõem que as séries em estudo podem ser representadas por um processo geral linear estacionário.

Todavia, é bem sabido que muitas séries cronológicas reais não são lineares.

A. da Silva (1994) propôs um teste para a igualdade dos espectros de  $k$  séries cronológicas e generalizou este procedimento para testar a igualdade dos biespectros de  $k$  séries cronológicas, sobre a suposição de que a estrutura de 2ª ordem das  $k$  séries é a mesma (ver apêndice). Os testes baseiam-se na função de densidade espectral e biespectral das séries, pelo que não impõem qualquer tipo de restrições sobre as séries em estudo, exceptuando a estacionaridade. Ambos os testes utilizam técnicas multivariadas standard (reais e complexas).

Estes testes também podem ser utilizados como testes aproximados de estacionaridade (até a 3ª ordem), comparando diferentes áreas da



mesma série. Esta aproximação deve-se ao facto de que as séries são não independentes.

## 2.2 Descrição do Teste

Considerem-se  $k$  séries cronológicas  $X_t^{(i)}$ ,  $t=1, \dots, N$ ,  $i=1, \dots, k$  geradas por  $k$  processos estacionários  $\{X_t^{(i)}\}$ ,  $i=1, \dots, k$ . Seja  $h^{(i)}(w)$ ,  $-\pi \leq w \leq \pi$ ,  $i=1, \dots, k$ , a função de densidade espectral da  $i$ -ésima série.

Pretende-se testar a hipótese de que os  $k$  processos têm momentos de 2ª ordem análogos, i. e., testar a hipótese nula

$$H_0^S : h^{(1)}(w) = h^{(2)}(w) = \dots = h^{(k)}(w) \quad -\pi \leq w \leq \pi$$

contra a alternativa

$$H_1^S : \text{Existe, pelo menos, um par de espectros que são diferentes.}$$

Suponha-se que  $P$  frequências uniformemente espaçadas  $w_1, \dots, w_P$  são escolhidas no intervalo  $]0, \pi[$ , i.e.

$$w_i = \frac{i\pi}{P+1}, \quad i=1, \dots, P.$$

$$\text{Seja } z_j^{(i)} = \log[h^{(i)}(w_j)], \quad i=1, \dots, k \text{ e } j=1, \dots, P.$$

Então para testar  $H_0^S$ , propõe-se testar a hipótese de que as  $k$  densidades espectrais são iguais no conjunto de frequências  $\{w_1, \dots, w_P\}$ , i.e., para  $\mu^{(i)} = [z_1^{(i)}, \dots, z_P^{(i)}]$ , testar a hipótese

$$H_{01}^S : \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \dots = \mu^{(k)}.$$

O que equivale a testar a igualdade de  $k$  médias de dimensão  $p$ , com variância desconhecida.

À volta de cada  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, P$ , considere-se definido um conjunto de frequências

$$w_{i,l} = w_i + ld\pi/N \quad l = -r, -(r-1), \dots, 0, 1, \dots, r$$

e estime-se o logaritmo da função de densidade espectral nessas frequências.

Seja  $n=2r+1$ ,  $\hat{h}^{(i)}(w)$  o estimador espectral da  $i$ -ésima série e

$$y_{j,l}^{(i)} = \log[\hat{h}^{(i)}(w_{j,l})], \quad i=1, \dots, k; \quad j=1, \dots, P \text{ e } l=1, \dots, n.$$

Se  $d\pi/N$  é maior que a largura de banda da janela utilizada na estimação e  $2\pi r/N$  é menor que a largura de banda da função de densidade espectral, então podem-se considerar  $y_{j,l}^{(i)}$ ,  $l=1, \dots, n$ , como  $n$  observações não correlacionadas de uma distribuição normal com média  $\log[h^{(i)}(w_j)]$  e variância  $\sigma^2$ . Para assegurar que os diferentes conjuntos de frequências  $w_{i,l}$  não se sobrepõem, requer-se ainda que  $d < N/2r(P+1)$ .

Seja  $X$  a matriz de observações:

$$X = \begin{bmatrix} y_{11}^{(1)} & \dots & y_{1n}^{(1)} & \dots & y_{11}^{(k)} & \dots & y_{1n}^{(k)} \\ y_{21}^{(1)} & \dots & y_{2n}^{(1)} & \dots & y_{21}^{(k)} & \dots & y_{2n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{P1}^{(1)} & \dots & y_{Pn}^{(1)} & \dots & y_{P1}^{(k)} & \dots & y_{Pn}^{(k)} \end{bmatrix} \\ = [y_1^{(1)} \quad \dots \quad y_n^{(1)} \quad \dots \quad y_1^{(k)} \quad \dots \quad y_n^{(k)}]$$

onde cada  $y_l^{(i)}$ ,  $l=1, \dots, n$ ;  $i=1, \dots, k$ , é uma observação de uma população normal de dimensão  $P$ , com média  $\mu^{(i)}$  e matriz de covariância  $\Sigma = \sigma^2 I$ .

Pelo critério da razão de verosimilhança para testar as médias de  $k$  populações de dimensão  $P$  com variância comum [Anderson(1984)],  $H_{01}^S$  é rejeitada, com um nível de significância  $\alpha$ , se:

$$-(kn - k - \frac{1}{2}(P - k + 2)) \log U_{P,k-1,k(n-1)} > \chi_{P(k-1)}^2(\alpha).$$

onde

$$U_{P,k-1,k(n-1)} = \frac{\left| (kn)^{-1} \sum_{i,1} (\mathbf{y}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}^{(i)}) (\mathbf{y}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}^{(i)})' \right|}{\left| (kn)^{-1} \sum_{i,1} (\bar{\mathbf{y}}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}) (\bar{\mathbf{y}}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}})' \right|} \quad (2.1)$$

com

$$\bar{\mathbf{y}}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{y}_{\alpha}^{(i)} \quad \bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{y}_{\alpha}^{(i)}.$$

Se  $k=2$ , pode-se utilizar a estatística  $T^2$  de Hotelling e então a região de rejeição de nível  $\alpha$  é

$$F_c^S > F_{P,2n-P-1}(\alpha) \quad (2.2)$$

onde

$$F_c^S = \frac{2n - P - 1}{(2n - 2)P} T_c^2$$

e

$$T_c^2 = \frac{n}{2} \mathbf{d}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{d}$$

segue uma distribuição de Hotelling com  $n-2$  graus de liberdade, com

$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{y}}^{(1)} - \bar{\mathbf{y}}^{(2)} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = (kn)^{-1} \sum_{i,1} (\mathbf{y}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}^{(i)}) (\mathbf{y}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}^{(i)})'.$$

Se  $H_{01}^S$  não for rejeitada deve testar-se a hipótese da igualdade dos espectros nas frequências  $0$  e  $\pi$ .

Seja  $z_0^{(i)} = \log[h^{(i)}(0)]$  e  $z_\pi^{(i)} = \log[h^{(i)}(\pi)]$ ,  $i=1, \dots, k$ . Definindo  $\mu^{(i)} = [z_0^{(i)}, z_\pi^{(i)}]$ , propõe-se testar a hipótese:

$$H_{02}^S: \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \dots = \mu^{(k)}.$$

Considere-se o conjunto de frequências

$$w_{0_1} = l d \pi / N \text{ e } w_{\pi_1} = \pi - l d \pi / N, \quad l = 0, 1, \dots, r.$$

Então, a hipótese nula  $H_{02}^S$  é rejeitada com um nível de significância  $\alpha$  se

$$-\left(kn - k - \frac{1}{2}(4 - k)\right) \log U_{2,k-1,k(n-1)} > \chi_{2(k-1)}^2(\alpha)$$

onde  $U_{2,k-1,k(n-1)}$  é a expressão dada pelo critério da razão de verosimilhança dada por (2.1). Analogamente, quando  $k=2$ , a região de rejeição de nível  $\alpha$  é dada por (2.2) com  $P=2$  e  $n=r+1$ .

### 2.3 Estudo da Potência

Nesta secção apresentam-se os resultados do estudo de simulação da potência do teste proposto por A. da Silva (1994) para a igualdade dos espectros de  $k$  séries cronológicas.

O estudo realizou-se de modo a poder ser comparado com os estudos da potência reportados por Coates e Diggle (1986) e Diggle e Fisher (1991), para os respectivos testes.

Para estimar a potência, o teste aplicou-se a simulações de pares de processos auto-regressivos, AR(p), i.e., processos satisfazendo a equação

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

onde  $\{\varepsilon_t\}$  é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas,  $N(0, 1)$ .

Estas variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas, geram-se através de desvios uniformes entre  $(0, 1)$ , usando o método de transformações [Knuth (1981)]. Os requeridos desvios pseudo-aleatórios uniformemente distribuídos, obtiveram-se utilizando a função RAN1 sugerida por Press *et al* (1986).

As observações dos modelos simulados obtiveram-se recursivamente de um valor inicial nulo e para garantir a independência das simulações ignoraram-se 700 observações de cada série entre simulações sucessivas.

Geraram-se séries de dois tamanhos diferentes, as séries “curtas” com  $N=64$  observações e as séries “longas” com  $N=1024$  observações.

Simularam-se 100 pares de processos para cada um dos seguintes casos:

**(a)** Ruído branco vs AR(1), com  $\alpha_1 \geq 0$ , i.e.

$$X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)} \quad \text{vs} \quad X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)},$$

**(b)** Ruído branco vs AR(2), com  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 > 0$ , i.e.

$$X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)} \quad \text{vs} \quad X_t^{(2)} = \alpha_2 X_{t-2}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)},$$

**(c)** Ruído branco vs AR(3), com  $\alpha_2 = 0$  e  $\alpha_1 = -\alpha_3 > 0$ , i.e.

$$X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)} \quad \text{vs} \quad X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} - \alpha_1 X_{t-3}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$$

**(d)** AR(1), com  $\alpha_1 = 0.5$  vs AR(1), com  $\alpha_1 > 0$ , i.e.

$$X_t^{(1)} = 0.5X_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t^{(1)} \quad \text{vs} \quad X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}.$$

Para calcular a estatística do teste, foram usados os seguintes parâmetros

$$P=4; r=3; d = \begin{cases} 33 & \text{se } N = 1024 \\ 2 & \text{se } N = 64 \end{cases},$$

e a janela utilizada na estimação do espectro foi a de Parzen com um ponto de truncagem

$$M = \begin{cases} 32 & \text{se } N = 1024 \\ 8 & \text{se } N = 64 \end{cases}.$$

O valor do parâmetro  $d$  utilizado na aplicação do teste foi escolhido de modo a satisfazer a condição  $d < N/2r(P+1)$ , que garante que os diferentes conjuntos de frequências  $\{w_{i1}\}$  não se sobrepõem.

Para estimar a potência do teste foram seguidos os seguintes passos:

- 1°. Calcular a estatística  $F_c^s$  para cada um dos 100 pares de simulações e em cada um dos quatro casos
- 2°. Comparar o valor obtido com o quantil 5% e 1% da distribuição  $F$  com (4,9) graus de liberdade,  $F_{(4,9)}(0.05) = 3.63$  e  $F_{(4,9)}(0.01) = 6.42$ , respectivamente
- 3°. Contabilizar o número de vezes que, em cada caso, a hipótese nula

$$H_0^S : h^{(1)}(w) = h^{(2)}(w) \quad -\pi \leq w \leq \pi$$

é rejeitada quando ela é falsa, i.e., calcular a frequência relativa da rejeição da igualdade dos espectros das séries do par, de modo a obter as estimativas da potência,  $\hat{P}(0.05)$  e  $\hat{P}(0.01)$ , para os respectivos níveis de significância do teste, 5% e 1%.

Note-se que, quando as séries são geradas pelo mesmo processo, a hipótese nula é verdadeira, pelo que não se está a estimar a potência, mas sim a verificar o nível de significância nominal do teste.

A tabela (2.1) mostra as estimativas da potência obtidas para as séries “curtas”, em cada um dos quatro casos. A 1ª coluna apresenta os parâmetros do 2º processo para cada par e as 2ª e 3ª colunas mostram as estimativas  $\hat{P}(0.05)$  e  $\hat{P}(0.01)$  para cada par de séries simuladas, em cada caso.

Para  $\alpha_1 = 0$  no caso **(a)** e  $\alpha_1 = 0.5$  no caso **(d)**, as duas séries do par simulado são geradas pelo mesmo processo e as frequências relativas da rejeição da hipótese nula são bastante superiores aos níveis esperados de 5% e 1% , pelo que o método repetiu-se, alterando os valores de alguns dos parâmetros.

Em particular, verificou-se que quando aumenta o parâmetro da janela,  $M$ , a referida frequência relativa aproxima-se dos níveis esperados mas a potência do teste decresce. É sabido que quando o valor do  $M$  aumenta, também aumenta a variância do estimador, mas diminui o seu enviesamento e vice-versa [Priestley (1981)]; isto deve-se ao facto de que o parâmetro  $M$  controla a razão do “decaimento” da janela retardada,  $\lambda_N(s)$ , pelo que, quanto menor é o valor do  $M$ , mais “amaciado” é o estimador espectral.

Verificou-se também, que se o valor do parâmetro  $P$  diminui, o teste é competitivo mas continua a apresentar desvios nos níveis encontrados, que são ainda mais acentuados quando o valor deste parâmetro aumenta.

Comparar estes resultados com os resultados obtidos por Diggle e Fisher (1991) para séries “curtas”, permite concluir que o teste proposto por A. da Silva (1994) tem tendência a rejeitar a hipótese da igualdade dos espectros quando o número de observações é reduzido.

(a) $X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$		
$\alpha_1$	$\hat{P}(0.05)$	$\hat{P}(0.01)$
0.0	0.99	0.95
0.2	0.94	0.92
0.4	0.99	0.97
0.6	1.00	1.00
0.8	1.00	1.00
(b) $X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_2 X_{t-2}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$		
$\alpha_2$	$\hat{P}(0.05)$	$\hat{P}(0.01)$
0.2	0.96	0.95
0.4	0.99	0.98
0.6	0.99	0.98
0.8	1.00	0.99
(c) $X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} - \alpha_1 X_{t-3}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$		
$\alpha_1$	$\hat{P}(0.05)$	$\hat{P}(0.01)$
0.2	0.98	0.95
0.4	0.99	0.98
0.6	1.00	1.00
(d) $X_t^{(1)} = 0.5X_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$		
$\alpha_1$	$\hat{P}(0.05)$	$\hat{P}(0.01)$
0.1	1.00	1.00
0.3	1.00	0.99
0.5	0.90	0.84
0.7	0.92	0.84
0.9	0.99	0.94

**Tabela(2.1):** Estimativas da potência para séries “curtas”



Na tabela (2.2) podem ver-se as estimativas da potência,  $\hat{P}(0.05)$  e  $\hat{P}(0.01)$ , nos mesmos quatro casos, para séries “longas”.

A verificação dos níveis de significância nominal feita através do caso **(a)** com  $\alpha_1 = 0$  e do caso **(d)** com  $\alpha_1 = 0.5$ , conduz a valores inferiores que os níveis esperados.

Com relação à potência, podemos ver que já não é tão elevada. Isto deve-se ao facto de que o domínio dos valores dos parâmetros dos modelos é mais restrito de modo a incrementar a sensibilidade do teste, i.e., os processos foram escolhidos de modo a serem mais “semelhantes”.

E como era de esperar, à medida que os processos de cada par se vão tornando mais “diferenciados”, a potência do teste aumenta, sendo, empiricamente, uma função monótona crescente da diferença absoluta entre os parâmetros dos processos do par, considerando que o parâmetro do ruído branco é 0 (zero), nos casos **(a)**, **(b)** e **(c)**.

A comparação com os resultados obtidos por Coates e Diggle (1986) e Diggle e Fisher (1991) revela que o teste proposto por A. da Silva (1994) é competitivo com os anteriores para os casos **(b)** e **(d)**, mas é menos potente nos restantes casos.

Os resultados obtidos até aqui, referem-se a estimativas da potência nas frequências  $w \in ]0, \pi [$ . Por isso, ainda foi estimada a potência para as frequências  $w = 0$  e  $w = \pi$ , aplicando o teste àquelas séries para as quais foi aceite a hipótese da igualdade de espectros nas frequências  $w \in ]0, \pi [$ .

Na tabela (2.3) observam-se os resultados obtidos para a estimativa da potência do teste com um nível de significância de 5%,  $\hat{P}(0.05)$ , para as séries “longas”.

Temos agora que a frequência relativa da rejeição da hipótese nula quando as séries são geradas pelo mesmo processo, apresentam um grande desvio do nível 5% esperado: no caso **(a)** com  $\alpha_1 = 0$  temos que  $\hat{P}(0.05) = 0.35$  e no caso **(d)** com  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\hat{P}(0.05) = 0.33$ .

<b>(a)</b> $X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$		
$\alpha_1$	$\hat{P}(0.05)$	$\hat{P}(0.01)$
0.00	0.06	0.00
0.05	0.05	0.02
0.10	0.20	0.09
0.15	0.38	0.16
0.20	0.62	0.34
0.25	0.75	0.50
<b>(b)</b> $X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_2 X_{t-2}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$		
$\alpha_2$	$\hat{P}(0.05)$	$\hat{P}(0.01)$
0.05	0.06	0.01
0.10	0.13	0.02
0.15	0.25	0.08
0.20	0.33	0.17
0.25	0.54	0.29
<b>(c)</b> $X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} - \alpha_1 X_{t-3}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$		
$\alpha_1$	$\hat{P}(0.05)$	$\hat{P}(0.01)$
0.05	0.16	0.06
0.10	0.40	0.24
0.15	0.65	0.41
0.20	0.80	0.58
0.25	0.94	0.74
<b>(d)</b> $X_t^{(1)} = 0.5X_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$		
$\alpha_1$	$\hat{P}(0.05)$	$\hat{P}(0.01)$
0.35	0.23	0.13
0.40	0.14	0.08
0.45	0.08	0.05
0.50	0.03	0.01
0.55	0.03	0.01
0.60	0.14	0.02
0.65	0.27	0.12

**Tabela(2.2):** Estimativas da potência para séries “longas”

No caso **(c)** a potência já não se apresenta como uma função monótona da diferença absoluta entre os parâmetros dos processos, mas conserva esta propriedade nos restantes casos.

Vemos ainda, que a potência aumentou para os casos **(a)**, **(b)** e **(d)**, quando comparamos as tabelas (2.2) e (2.3), mas no caso **(c)** a potência decresceu.

É de notar que os casos **(b)** e **(c)** foram escolhidos, inicialmente por Coates e Diggle (1986), por serem favoráveis e desfavoráveis, respectivamente, aos testes por eles recomendados.

Note-se, também, que nos resultados apresentados neste estudo da potência foram fixados os valores dos parâmetros do teste, **P** e **r**, e a janela utilizada na estimação da função de densidade espectral, pelo que não deve ser considerado como um estudo completo da potência do teste. Como já foi referido, os casos testados foram aqueles utilizados anteriormente por Coates e Diggle (1986) e Diggle e Fisher (1991), de modo a facilitar a comparação entre os dois tipos de testes. Para completar este estudo, poderiam, por exemplo, serem utilizadas outras janelas na estimação da função de densidade espectral, aplicar o teste a outros tipos de pares de processos ou utilizar outros valores dos parâmetros do teste.

Por último, note-se que apesar da condição  $d\pi/N$  maior que a largura de banda da janela utilizada na estimação da função de densidade espectral não ser verificada, o teste apresenta-se com potência elevada. Isto deve-se ao facto de que o teste utiliza técnicas de análise multivariada, que conduzem a testes mais potentes.

<b>(a)</b> $X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$	
$\alpha_1$	$\hat{P}(0.05)$
0.00	0.35
0.05	0.44
0.10	0.54
0.15	0.76
0.20	0.92
0.25	0.96
<b>(b)</b> $X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_2 X_{t-2}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$	
$\alpha_2$	$\hat{P}(0.05)$
0.05	0.45
0.10	0.62
0.15	0.80
0.20	0.91
0.25	0.98
<b>(c)</b> $X_t^{(1)} = \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} - \alpha_1 X_{t-3}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$	
$\alpha_1$	$\hat{P}(0.05)$
0.05	0.33
0.10	0.33
0.15	0.26
0.20	0.30
0.25	0.17
<b>(d)</b> $X_t^{(1)} = 0.5X_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t^{(1)}$ vs $X_t^{(2)} = \alpha_1 X_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_t^{(2)}$	
$\alpha_1$	$\hat{P}(0.05)$
0.35	0.86
0.40	0.67
0.45	0.48
0.50	0.33
0.55	0.52
0.60	0.79
0.65	0.95

**Tabela(2.3):** Estimativas da potência para séries “longas”, em  $w=0$  e  $w=\pi$

### 3. Comparação da Concentração da Hormona Luteína em duas Fases do Ciclo Menstrual

A hormona luteína tem um papel muito importante no sistema reprodutivo; é sabido que esta hormona não é segregada como uma corrente constante, mas sim de uma maneira irregular [Murdoch (1985)].

Com este estudo pretende-se saber se as características de frequência desta segregação são as mesmas nas duas fases foliculares do ciclo menstrual.

Para este fim, analisaram-se quatro séries cronológicas da concentração da hormona luteína (LH) medidas em amostras de sangue retiradas a uma mulher adulta e saudável em intervalos de 10 minutos, cujos cronogramas estão representados na figura (3.1). Cada série é formada por N=48 observações; duas séries foram retiradas no início da fase folicular e duas no fim da fase folicular de dois ciclos menstruais consecutivos da referida mulher. Assim, designa-se por:

**Série 1** a série do início da fase folicular do 1º ciclo menstrual,

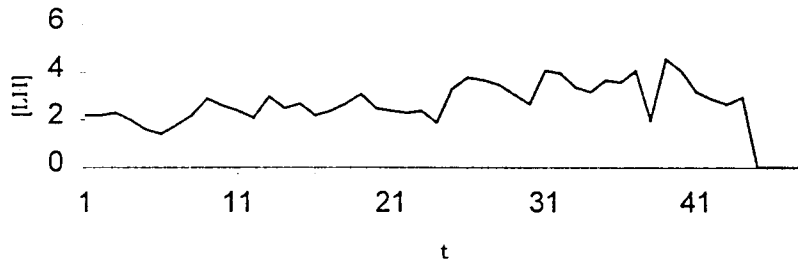
**Série 2** a série do fim da fase folicular do 1º ciclo menstrual,

**Série 3** a série do início da fase folicular do 2º ciclo menstrual,

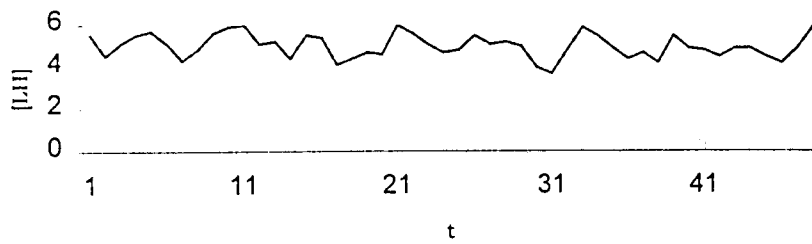
**Série 4** a série do fim da fase folicular do 2º ciclo menstrual.

Note-se que na 1ª série, as quatro últimas observações são nulas, presumivelmente devido a erros na experiência ou no registo dos dados. Assim, na aplicação do teste serão utilizadas, unicamente, as primeiras 44 observações de cada série.

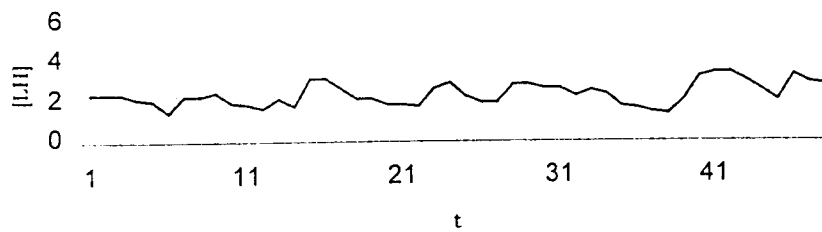
O intervalo de amostragem de 10 minutos foi escolhido após um estudo inicial [Murdoch (1985)], com amostras de sangue recolhidas em intervalos de 5 minutos, que sugeriu que características importantes do padrão de variação dos níveis de concentração da hormona luteína



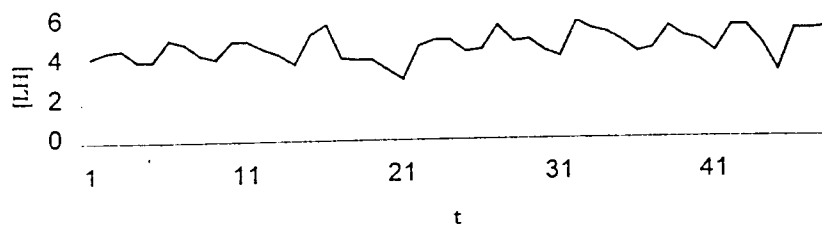
**Série 1:** Início da fase folicular , ciclo 1.



**Série 2:** Fim da fase folicular, ciclo 1



**Série 3:** Início da fase folicular , ciclo 2



**Série 4:** Fim da fase folicular, ciclo 2

Figura (3.1): Cronogramas das séries hormonais

poderiam ser observadas utilizando um intervalo maior de tempo na amostragem.

Os espectros de cada uma das séries estão representados na figura (3.2). No cálculo dos espectros, foi utilizada a janela de Parzen, com um ponto de truncagem  $M=7$ . O espectro foi calculado em 100 frequências de intervalo  $[0,\pi]$ , i.e.,  $\Delta w = \frac{\pi}{101}$ .

Analisando a figura (3.2), e notando que os eixos dos gráficos têm a mesma escala, suspeita-se que existem diferenças entre as séries referentes às duas fases foliculares.

Na figura (3.3) estão representados os biespectros de cada série, calculados com a janela bidimensional de Parzen com um ponto de truncagem,  $M=7$ .

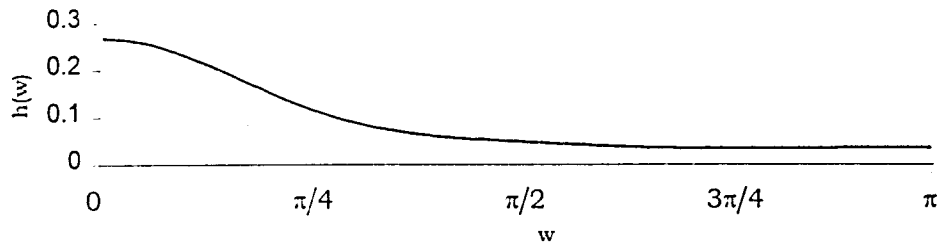
Lembrando que a função de densidade biespectral se anula para séries Gaussianas, pode-se afirmar que as séries 1 e 4 apresentam um certo desvio de gaussianidade.

Para confirmar esta afirmação, tentou-se aplicar um teste de simetria e linearidade, proposto por Subba Rao e Gabr (1984), às séries hormonais, mas devido ao reduzido número de observações disponíveis, o referido teste não permitiu retirar conclusões.

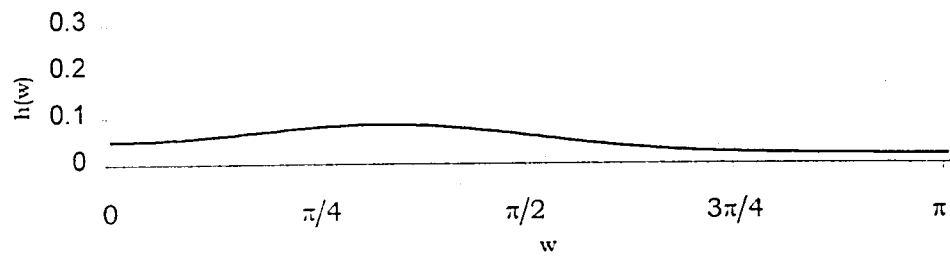
Para proceder à comparação da concentração da hormona luteína nas duas fases foliculares do ciclo menstrual, foi aplicado o teste proposto por A. da Silva (1994) às séries hormonais, de modo a comparar as séries 1 e 3, respectivamente, com cada uma das séries restantes, as séries 2 e 4.

O teste para a igualdade dos espectros foi repetido para vários valores dos parâmetros  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{r}$ . Os valores obtidos para a estatística calculada pelo teste em cada um dos casos, assim como os quantil 5% e 1% da distribuição  $F$  com os correspondentes graus de liberdade são

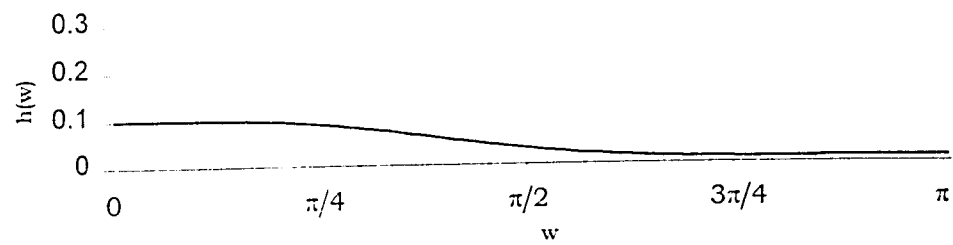
### Série 1



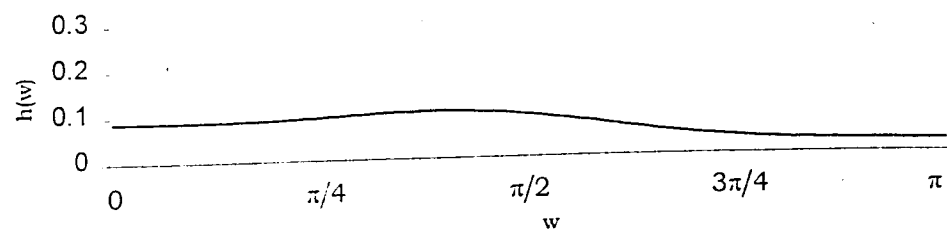
### Série 2



### Série 3



### Série 4



Figura(3.2): Espectros das séries harmônicas

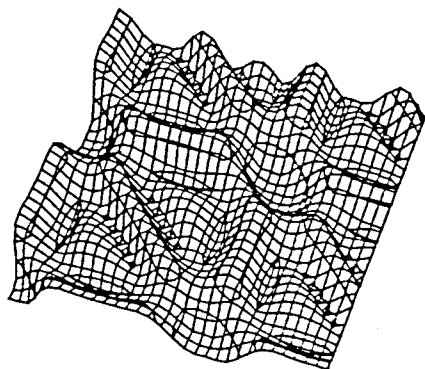


apresentados na tabela (3.1). Na estimação da função de densidade espectral foi utilizada a janela de Parzen, com  $M=7$ .

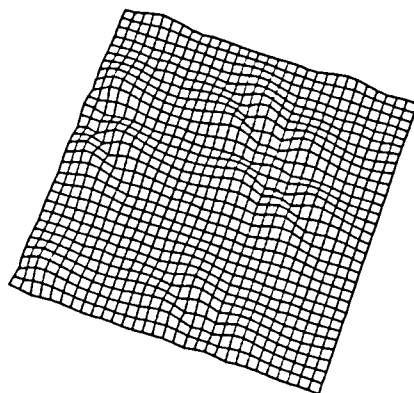
Da análise da tabela (3.1), resulta que os valores da estatística  $F_C^s$  são maiores que os referidos pontos da distribuição  $F$ , o que implica que as séries em estudo têm momentos de 2ª ordem diferentes.

Assim, conclui-se que o teste indica que existe uma diferença na potência entre as séries nas duas fases foliculares do ciclo menstrual.

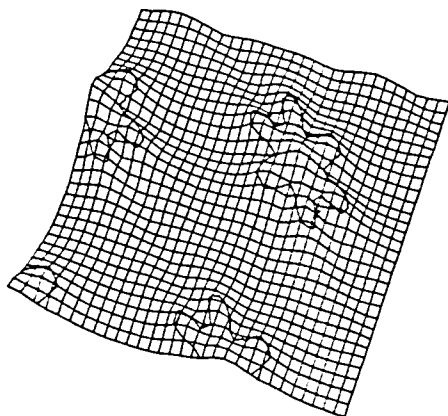
Série 1



Série 2



Série 3



Série 4

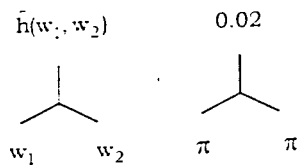
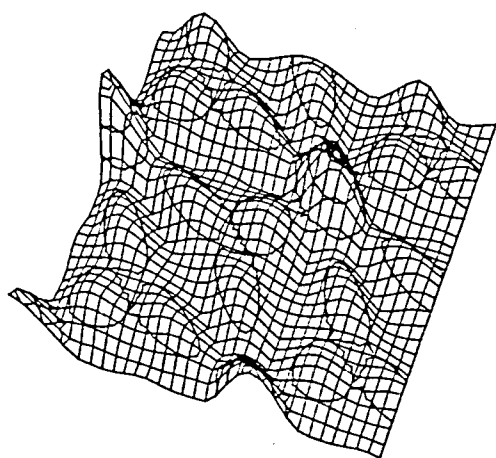


Figura (3.3): Biespectros das séries harmonais

P=4; r=3; d=1	$F_c^S$	
Série 1 vs Série 2	332.319	$F_{4,9}(0.01) = 6.42$
Série 1 vs Série 4	216.470	
Série 3 vs Série 2	1077.269	$F_{4,9}(0.05) = 3.63$
Série 3 vs Série 4	118.144	

P=5; r=3; d=1	$F_c^S$	
Série 1 vs Série 2	48.405	$F_{5,8}(0.01) = 6.63$
Série 1 vs Série 4	376.849	
Série 3 vs Série 2	10329.283	$F_{5,8}(0.05) = 3.69$
Série 3 vs Série 4	426.296	

P=6; r=3; d=1	$F_c^S$	
Série 1 vs Série 2	66279.328	$F_{6,7}(0.01) = 7.19$
Série 1 vs Série 4	9699.271	
Série 3 vs Série 2	4971.921	$F_{6,7}(0.05) = 3.87$
Série 3 vs Série 4	1900.388	

P=4; r=4; d=1	$F_c^S$	
Série 1 vs Série 2	25.387	$F_{4,13}(0.01) = 5.21$
Série 1 vs Série 4	59.280	
Série 3 vs Série 2	185.423	$F_{4,13}(0.05) = 3.18$
Série 3 vs Série 4	69.803	

Tabela (3.1): Resultados da aplicação do teste às séries hormonais

## 4. Conclusão

Uma série cronológica é um conjunto de dados observados sequencialmente ao longo do tempo. As séries cronológicas surgem em vários campos da ciência, tais como sismologia, biologia, oceanografia e endocrinologia, entre outros.

A análise espectral ou análise no domínio da frequência é uma decomposição da variação total da série em componentes harmônicas, que representam variações cíclicas em frequências correspondentes a ciclos completos. Esta análise é feita calculando o espectro e biespectro das séries, estimados a partir das observações disponíveis.

Na literatura têm sido propostos vários testes para determinar se diversas séries são realizações do mesmo processo estacionário. Os testes propostos por Coates e Diggle (1986) e Diggle e Fisher (1991), supõem que as séries em estudo são lineares. No entanto, é bem sabido que muitas séries cronológicas reais não possuem esta característica. Neste trabalho, considera-se o teste proposto por A. da Silva (1994) para a igualdade dos espectros. Ao contrário dos testes mencionados anteriormente, este teste não pressupõe a linearidade das séries em estudo.

O estudo da potência realizado a este teste revelou que, em geral, é competitivo com os testes propostos pelos outros autores, para os casos simulados e os parâmetros utilizados, com  $N=1024$ .

Verificou-se, ainda, que quando o número de observações aumenta, mais precisamente a partir de  $N=500$  observações, o teste é potente e os níveis de significância encontrados são os correctos.

Uma vez que o teste proposto por A. da Silva (1994) utiliza técnicas de análise multivariada, que conduzem a testes mais potentes, as conclusões retiradas do estudo da potência para séries "curtas", fazem acreditar que os desvios obtidos devem-se a erros numéricos.

Neste trabalho analisam-se quatro séries cronológicas provenientes da endocrinologia, que registam os níveis de concentração da hormona luteína medidas em amostras de sangue retiradas a uma mulher adulta e saudável, em intervalos de 10 minutos. Duas das séries referiam-se ao início da fase folicular e as outras duas, ao fim da fase folicular de dois ciclos menstruais consecutivos.

A aplicação do teste às referidas séries, revelou-nos que existe uma diferença na potência entre as duas fases foliculares do ciclo menstrual.

## 5. Referências

- A. da Silva, M. Eduarda. (1994). Testing for Equality of Second and Third Order Spectral of Stationary Processes. Actas do II Congresso da SPE.
- Anderson, T. W. (1984). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. John Wiley and Sons, New York.
- Brillinger, D. R. e Rosenblatt, M. (1967a). Asymptotic Theory Estimates of the k-th Order Spectra, in Spectral Analysis of Time Series, Wiley, New York, ed. B. Harris.
- Brillinger, D. R. e Rosenblatt, M. (1967b). Computation and Interpretation of the k-th Order Spectra, in Spectral Analysis of Time Series, Wiley, New York, ed. B. Harris.
- Coates, D. S., Diggle, T. J.(1986), Test for Comparing to estimated spectral densities in J. Time Series Anal., 7, pp 7-20.
- Diggle, P. J., Fisher, N.I.(1991), Nonparametric comparison of cumulative periodogram in Appl. Statist., 40, pp 423-434.
- Giri, N. (1965). On the Complex Analogues of  $T^2$  - and  $R^2$  - Test in Ann. Math. Stat. , 36, pp 664-670.
- Khatri, C. G. (1965). Classical Statistical Analysis Based on a Certain Multivariate Complex Gaussean Distribution in Ann. Math. Stat., 36, pp 98-113.
- Knuth, D.E. (1981). Seminumerical Algorithms, The Art of Computer Programming, 2<sup>a</sup> ed., vol. 2, Reading, MA: Addison-Wesley.
- Murdoch, A. P., Diggle, P. J., Dunlop, W., Kendall-Taylor, P. (1995). Determination of the Frequency of Pulsatile Luteinizing Hormone

Secretion by Time Series Analysis in Clinical Endocrinology, 22, pp 341-346.

Pemberton, J. (1990). Piecewise Constant Autoregressive Models for Univariate Time Series, Technical Report MCS-90-04. Department of Mathematics and Computer Science, University of Salford

Press, H. W., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (1986). Numerical Recipes in FORTRAN, The Art of Scientific Computing. 2<sup>a</sup> ed., Cambridge University Press.

Priestley, M. B. (1981) Spectral Analysis and Time Series. Academic Press.

Subba Rao, T. e Gabr, M. M. (1984). An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series, Lecture Notes in Statistics, Vol 24. Springer-Verlag.

## 6. Apêndice: Teste para a igualdade dos biespectros

### 6.1 Motivação para o Teste

Já foi referido que se um processo é Gaussiano, está completamente caracterizado pelos seus momentos de 2ª ordem, mas momentos de ordem superior são necessários para caracterizar processos não Gaussianos e, ainda, para distinguir entre certos tipos de processos Gaussianos e não Gaussianos.

Suponha-se, então, que se estabelece que as séries em estudo têm a mesma estrutura estatística até a 2ª ordem, o próximo passo é testar se elas também têm momentos de 3ª ordem similares.

Obviamente, se elas têm a mesma estrutura estatística até a 3ª ordem, não se pode concluir que são realizações do mesmo processo estocástico.

Mas testar a igualdade dos momentos de 3ª ordem, pode indicar diferenças entre as séries que poderiam passar despercebidas de outra maneira.

Se as séries têm momentos de 2ª ordem diferentes, seguramente não serão realizações do mesmo processo estocástico e não é necessário testar a igualdade de momentos de ordem superior.

O procedimento descrito a seguir, é a generalização do teste, proposto por A. da Silva (1994), da igualdade dos espectros, mas para testar a igualdade dos biespectros de  $k$  séries cronológicas, supondo que a sua estrutura de 2ª ordem é a mesma. Baseia-se na função de densidade biespectral e portanto, também não impõe qualquer tipo de restrições às séries, além da estacionaridade.



## 6.2 Descrição do Teste

Considerem-se  $k$  séries cronológicas  $X_t^{(i)}$ ,  $t = 1, \dots, N$ ,  $i = 1, \dots, k$  geradas por  $k$  processos estacionários  $\{X_t^{(i)}\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Seja  $h^{(i)}(w)$ ,  $-\pi \leq w \leq \pi$ , e  $h^{(i)}(w_1, w_2)$ ,  $-\pi \leq w_1, w_2 \leq \pi$ , as funções de densidade espectral e biespectral, respectivamente, da  $i$ -ésima série.

Pretende-se testar a hipótese de que os  $k$  processos têm os mesmos momentos de 3ª ordem assumindo que os seus momentos de 2ª ordem são semelhantes. Isto equivale a testar a igualdade do biespectro em todas as frequências assumindo a igualdade dos espectros:

$$H_0^B : h^{(1)}(w_1, w_2) = h^{(2)}(w_1, w_2) = \dots = h^{(k)}(w_1, w_2), \text{ para todo } -\pi \leq w_1, w_2 \leq \pi$$

dado que  $h^{(1)}(w) = h^{(2)}(w) = \dots = h^{(k)}(w)$ , para todo  $-\pi \leq w \leq \pi$

contra a hipótese alternativa

$$H_1^B : \text{Existem, pelo menos, um par de biespectros diferentes.}$$

Seja  $\hat{h}^{(i)}(w_1, w_2)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , o estimador biespectral da  $i$ -ésima série.

Considere-se um conjunto de  $K$  frequências definidas por

$$w_i = \frac{i\pi}{K}, \quad w_j = \frac{j\pi}{K}, \quad i = 1, \dots, L, \quad j = i+1, \dots, \gamma(i)$$

onde

$$L = 2K/3, \quad \gamma(i) = K - [i/2].$$

Seja  $P = \sum_{i=1}^L \gamma(i) - i$  o número de pares de frequências assim obtido e

seja

$$\mu_l^{(m)} = h^{(m)}(w_i, w_j), \quad l = 1, \dots, P, \text{ para algum } i = 1, \dots, L \text{ e } j = i+1, \dots, \gamma(i).$$

Então para testar  $H_0^B$ , propõe-se testar que os  $k$  biespectros são iguais no conjunto de  $P$  frequências  $(w_i, w_j)$ , i.e. definindo  $\mu^{(m)} = (\mu_1^{(m)}, \dots, \mu_P^{(m)})'$ ,  $m = 1, \dots, k$ , testa-se a hipótese

$$H_{01}^B : \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \dots = \mu^{(k)}.$$

À volta de cada um dos  $P$  pontos frequências  $(w_i, w_j)$ , constrói-se uma fina "grelha" de frequências  $(w_{i_p}, w_{j_q})$  definida por

$$w_{i_p} = w_i + \frac{pd\pi}{N}, \quad p = -r, -(r-1), \dots, 0, 1, \dots, r$$

$$w_{j_q} = w_j + \frac{qd\pi}{N}, \quad q = -r, -(r-1), \dots, -1, 1, \dots, r.$$

Seja  $n = 4r + 1$  e

$$\begin{aligned} \xi_l^{(m)} &= (\xi_{l1}^{(m)}, \dots, \xi_{ln}^{(m)}) \\ &= \left\{ \hat{h}^{(m)}\left(w_i - \frac{rd\pi}{N}, w_j\right), \hat{h}^{(m)}\left(w_i - \frac{(r-1)d\pi}{N}, w_j\right), \dots, \hat{h}^{(m)}(w_i, w_j), \dots \right. \\ &\quad \hat{h}^{(m)}\left(w_i + \frac{rd\pi}{N}, w_j\right), \hat{h}^{(m)}\left(w_i, w_j - \frac{rd\pi}{N}\right), \hat{h}^{(m)}\left(w_i, w_j - \frac{(r-1)d\pi}{N}\right), \dots \\ &\quad \left. \dots, \hat{h}^{(m)}\left(w_i, w_j + \frac{rd\pi}{N}\right) \right\} \end{aligned}$$

com  $l = 1, \dots, P$ .

Então  $\xi_{il}^{(m)}$ ,  $l = 1, \dots, n$ , podem ser consideradas como  $n$  observações não correlacionadas de uma distribuição normal complexa com média  $h^{(i)}(w_i, w_j)$  se  $d\pi/N$  é maior que a largura de banda da janela utilizada na estimação e  $2\pi r/N$  é menor que a largura de banda da função de densidade espectral. Também se deve ter  $d < N/Kn$  para assegurar que os diferentes conjuntos de frequências não se sobrepõem.

Seja X a matriz de todas as observações

$$X = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^{(1)} & \dots & \mathbf{y}_n^{(1)} & \dots & \mathbf{y}_1^{(k)} & \dots & \mathbf{y}_n^{(k)} \end{bmatrix},$$

onde  $\mathbf{y}_l^{(m)}$ ,  $l = 1, \dots, n$ ,  $m = 1, \dots, k$  é uma observação de uma população normal complexa de dimensão P, com média  $\mu^{(m)}$  e matriz de covariância  $\Sigma^{(m)}$ . Como se supõe que as k séries têm espectros idênticos, tem-se que  $\Sigma^{(1)} = \Sigma^{(2)} = \dots = \Sigma^{(k)}$ .

O critério da razão de verosimilhança para testar a igualdade das médias de k populações complexas com matriz de covariância comum, mas desconhecida, é dado por [Khatri (1965)]:

$$U_{P, k-1, k(n-1)} = \frac{\left| (\text{kn})^{-1} \sum_{i,1} (\mathbf{y}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}^{(i)})(\mathbf{y}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}^{(i)})^* \right|}{\left| (\text{kn})^{-1} \sum_{i,1} (\bar{\mathbf{y}}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}})(\bar{\mathbf{y}}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}})^* \right|}$$

onde

$$\bar{\mathbf{y}}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{y}_\alpha^{(i)} \quad \bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{y}_\alpha^{(i)}.$$

A hipótese nula é rejeitada, com um nível de significância  $\alpha$ , se

$$-(kn - k - \frac{1}{2}(P - k + 2)) \log U_{P, k-1, k(n-1)} > \chi_{P(k-1)}^2(\alpha).$$

Se  $k=2$ , pode-se utilizar a estatística complexa,  $T^2$ , de Hotelling.

Seja

$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{y}}^{(1)} - \bar{\mathbf{y}}^{(2)} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = (\text{kn})^{-1} \sum_{i,1} (\mathbf{y}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}^{(i)})(\mathbf{y}_1^{(i)} - \bar{\mathbf{y}}^{(i)})^*.$$

Neste caso, o teste da razão de verosimilhança, dado por

$$T_c^2 = \frac{n}{2} \mathbf{d}^* \mathbf{S}^{-1} \mathbf{d}$$

segue uma distribuição de Hotelling, com  $n-2$  graus de liberdade.

Seja

$$F_c^B = \frac{2n - P - 1}{(2n - 2)P} T_c^2 .$$

Então a região de rejeição, de nível  $\alpha$ , é dado por

$$F_c^B > F_{P, 2n-P-1}(\alpha) .$$

Se a hipótese nula é aceite, então tem-se que testar  $H_0^B$  em  $w_1 = w_2 = 0$  e sobre a recta  $w_1 = 0$ : define-se um conjunto de frequências sobre a recta  $w_1 = 0$ , diga-se  $(0, w_i)$  e forma-se uma amostra na vizinhança dessas frequências, diga-se  $(0, w_{i_q})$ . Note-se que, nessas frequências o biespectro é real e portanto, quando  $k=2$ , usa-se a estatística de Hotelling,  $T^2$ , para duas amostras.

A estatística  $T^2$  e a sua análoga complexa são invariantes sobre transformações que deixem a hipótese nula invariante [ Anderson(1984), Giri (1965)].



FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000051845