

Análise Espectral de Walsh-Fourier

Isabel da Silva

Fac. de Engenharia da U.P., Dep. de Eng. Civil e Fac. de Ciências da U.P., Dep. de Matemática Aplicada

M. Eduarda da Silva

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Departamento de Matemática Aplicada

Resumo: Em análise de séries temporais, os métodos de Fourier são utilizados para caracterizar a variação periódica dos dados. No caso de séries com mudanças abruptas, formas descontínuas ou tomando valores num conjunto finito discreto, como no caso de séries categóricas, faz mais sentido (estatístico) analisar os dados através das funções de Walsh. Neste trabalho, descreve-se a análise espectral de Walsh-Fourier e em que medida a sua aplicação pode ser usada no controlo automático do bloqueio neuro-muscular.

Palavras-chave: Funções de Walsh, Análise Espectral de Walsh-Fourier, Controlo, Bloqueio Neuro-Muscular.

Abstract: In time series analysis, Fourier methods are used to characterize the periodic variation in the data. When the series presents sharp discontinuities and changes of levels it is more appropriate to analyse the data using the Walsh Functions. Here we describe Walsh-Fourier spectral analysis and we use this technique to characterize the control of the neuro-muscular blockade.

Keywords: Walsh Functions, Walsh-Fourier Spectral Analysis, Control, Neuromuscular Blockade.

1 Introdução

As funções de Walsh formam um conjunto completo, ordenado e ortonormado de *ondas rectangulares* que tomam, unicamente, os valores -1 e 1 .

Podem ser geradas através do produto de funções de Rademacher¹ na chamada ordem **“Dyadic” ou de Paley** (ver Beauchamp [1] e Morettin [7]) ou podem ser consideradas como as linhas (colunas) da matriz de Hadamard², na denominada ordem

¹ $R(n, t) = \text{sign}(\sin(2^n \pi t))$, onde sign representa o sinal do argumento.

²Matriz quadrada e simétrica, cujos elementos são ± 1 e cujas linhas (colunas) são ortogonais entre si. Estas matrizes são geradas recursivamente por

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_N = \mathbf{H}_{N/2} \otimes \mathbf{H}_2,$$

onde \otimes é o produto de Kronecker e $N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$.

Natural ou de Hadamard (ver Stoffer [9] e [10]).

De um modo geral, utiliza-se a ordem **Sequencial ou de Walsh**. Representam-se por $W(n, t)$, onde $t \in [0, 1[$ e $n = 1, 2, \dots$. O argumento n é denominado *sequência*, indica o número de trocas de sinal das funções no intervalo $[0, 1[$ e ordena as funções. Na figura (1) estão representadas as primeiras oito Funções de Walsh na ordem sequencial.

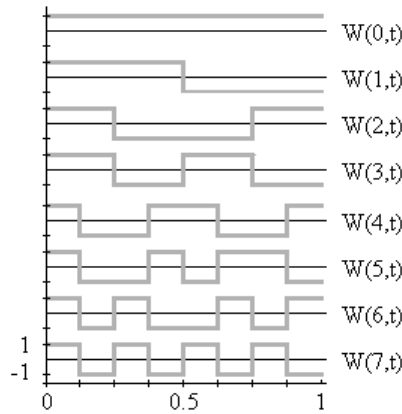


Figura 1: Funções de Walsh

Considerando as representações binárias de n e t , números inteiros positivos

$$n = \sum_{a=0}^{p-1} n_a 2^a, \quad t = \sum_{a=0}^{p-1} t_a 2^a \quad (1)$$

as funções de Walsh discretas na ordem sequencial, calculadas em $N = 2^p$ pontos, $p \in \mathbb{N}$, são definidas através de

$$W(n, t/N) = \prod_{r=0}^{p-1} (-1)^{n_{p-r-1}(t_r + t_{r+1})}.$$

Pode demonstrar-se que as funções de Walsh discretas, $W(n, t/N)$, com $N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$, e $n_1, n_2, t_1, t_2 = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$, satisfazem as seguintes propriedades:

$$W(n_1, t_1/N) = W(t_1, n_1/N) \quad (2)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W(n_1, t_1/N) = \begin{cases} 0 & \text{se } t_1, n_1 \neq 0 \\ 1 & \text{se } n_1 = 0 \text{ ou } t_1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$W(n_1, t_1/N) W(n_2, t_1/N) = W(n_1 \oplus n_2, t_1/N) \quad (4)$$

$$W(n_1, t_1/N) W(n_1, t_2/N) = W(n_1, (t_1 \oplus t_2)/N) \quad (5)$$

onde \oplus é a chamada adição (binária) módulo-2 ou *dyadic*, que é definida por:

$$n \oplus t = \sum_{a=0}^{p-1} |n_a - t_a| 2^a \quad (6)$$

onde n_a e t_a são os coeficientes da representação binária de n e t dada em (1). Note-se que $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$ e $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$.

Harmuth [2], introduziu a seguinte notação para classificar as funções de Walsh em termos de simetria

$$\begin{aligned} Cal(n, t) &= W(2n, t) \\ Sal(n, t) &= W(2n - 1, t), \quad n = 1, 2, \dots, N/2. \end{aligned}$$

Esta classificação pretende imitar o comportamento das funções trigonométricas: *Cal* corresponde a *co-seno Walsh* e *Sal* corresponde a *seno Walsh*.

Assim, Harmuth [2] define o termo *sequência* (designada por *H-sequência*, para não confundir com a definição dada inicialmente) como sendo metade do número médio de trocas de sinal por intervalo unitário, conceito que corresponde ao de frequência no caso de funções periódicas. Da mesma maneira, Harmuth [2] define o *período médio de oscilação* (inverso multiplicativo da H-sequência) como o dobro da média dos tempos entre trocas de sinal. Note-se que a H-sequência é aproximadamente metade da sequência.

2 Análise Espectral de Walsh-Fourier

Seja $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ uma amostra de dimensão $N = 2^p, p \in \mathbb{N}$, de uma série temporal $\{X(n); n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ com valor médio nulo e função de autocovariância absolutamente somável. Seja $W(n, \lambda)$ a n -ésima função de Walsh. Define-se a transformada de Walsh discreta dos dados através de

$$d_N(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W(n, \lambda), \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

No domínio da sequência, existem duas formas de desenvolver a análise espectral de séries temporais, Morettin [7] e Stoffer [9]:

- **Análise Espectral de Walsh:** baseia-se na estacionaridade *dyadic*, i.e., em processos $\{X(n); n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ com média nula, para os quais a função de autocovariância:

$$\text{cov}(X(n), X(m)) = E[X(n) X(m)]$$

depende unicamente da distância *dyadic* entre n e m , $\tau = n \oplus m$, definida em (6).

Neste caso, define-se a *função de autocovariância dyadic* por

$$B(\tau) = E[X(n) X(n \oplus \tau)], \quad n, \tau \in \mathcal{I}N$$

e o espectro de Walsh pode ser escrito como

$$f_w(\lambda) = \sum_{\tau=0}^{\infty} B(\tau) W(\tau, \lambda), \quad \text{com } 0 \leq \lambda < 1,$$

desde que a função de autocovariância lógica seja absolutamente somável, i.e., $\sum_{\tau=0}^{\infty} |B(\tau)| < \infty$.

- **Análise Espectral de Walsh-Fourier:** Baseia-se na estacionaridade usual em tempo real, i.e., em processos $\{X(n); n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ com média nula, para os quais a função de autocovariância (aritmética) depende unicamente da distância usual (lag) entre n e m , $k = |n - m|$:

$$R(k) = \text{cov}(X(n), X(m)) = E[X(n) X(n + k)]. \quad (7)$$

Kohn [3] demonstrou que a variância da transformada de Walsh dos dados é dada por

$$\text{var}[d_N(\lambda)] = \sum_{j=0}^{N-1} \Gamma(j) W(j, \lambda)$$

onde $\Gamma(j)$ é a *função de covariância lógica* que pode ser escrita como

$$\Gamma(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(j \oplus k - k), \quad 1 \leq j < N, \quad (8)$$

sendo \oplus a soma *dyadic* definida em (6).

Assim, se a função de covariância lógica é absolutamente somável (o que é uma consequência da somabilidade absoluta da função de autocovariância aritmética) então, quando $N \rightarrow \infty$, $\text{var}[d_N(\lambda)] \rightarrow f(\lambda)$ onde

$$f(\lambda) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \Gamma(\tau) W(\tau, \lambda), \quad \text{com } 0 \leq \lambda < 1 \quad (9)$$

é a função de densidade espectral (espectro) de Walsh-Fourier de $X(n)$.

O tempo *dyadic*, embora com algum interesse teórico, tem um comportamento que implica que a sua utilização prática seja reduzida (ver Morettin [7], Robinson [8] e Beauchamp [1]). Assim, aqui o termo estacionaridade será utilizado, unicamente, no sentido usual e os resultados a seguir apresentados referem-se à Análise Espectral de Walsh-Fourier.

Dadas N observações, $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, de um processo estacionário, um estimador da função de densidade espectral é o periodograma de Walsh, definido por

$$I_W(\lambda_j) = \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W(n, \lambda_j) \right]^2, \quad (10)$$

onde λ_j é uma sequência na forma $\lambda_j = j/N$, $1 \leq j \leq N-1$, (j trocas cada N pontos no tempo).

A representação gráfica do periodograma de Walsh permite a identificação dos *picos* desta função. Um pico em λ_j indica, no domínio da sequência, "uma troca (**switch**) cada λ_j (unidades de tempo)".

À semelhança do que acontece com a transformada de Fourier, é possível calcular o periodograma de Walsh através da transformada rápida de Walsh (Stoffer [9], Stoffer [10]).

Quando se pretende comparar explicitamente a análise de Fourier com a de Walsh-Fourier, deve-se usar a definição de Harmuth para a sequência. Assim, o periodograma de Walsh definido em (10) é utilizado para obter o periodograma de Walsh-Harmuth

$$I_H(\lambda_j) = I_W((2j-1)/N) + I_W(2j/N), \quad (11)$$

com $j = 1, 2, \dots, (N-2)/2$, onde λ_j representa a H-sequência.

Kohn [3] mostrou que se λ_N tem uma representação binária finita e $(\lambda_N \oplus \lambda \rightarrow 0)$ quando $N \rightarrow \infty$, então $E[d_N^2(\lambda)] \rightarrow f(\lambda)$ quando $N \rightarrow \infty$. Mais, sob certas condições gerais, Kohn [3] mostrou que $d_N(\lambda_N) \xrightarrow{d} N(0, f(\lambda))$ quando $N \rightarrow \infty$. O mesmo autor mostrou igualmente que se $\{\lambda_{1,N}, \dots, \lambda_{M,N}\}$ é um conjunto de M sequências próximas da sequência de interesse, λ , tais que $|\lambda_{j,N} - \lambda_{k,N}| \geq 1/N$, para $j \neq k$ e $(\lambda_{j,N} \oplus \lambda \rightarrow 0)$, para $j = 1, \dots, M$ então tem-se $\sum_{j=1}^M d_N^2(\lambda_{j,N}) \xrightarrow{d} f(\lambda)\chi_M^2$, quando $N \rightarrow \infty$. Assim, tem-se que, $\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M d_N^2(\lambda_{j,N})$ é um estimador de $f(\lambda)$ com variância $2f^2(\lambda)/M$.

3 Aplicação

Durante intervenções cirúrgicas é administrado um relaxante muscular que tem como função bloquear a transmissão neuromuscular, produzindo paralisia ou relaxamento muscular. O nível de relaxamento muscular é medido pelo anestesista a partir de um estímulo eléctrico externo. O controlo automático do bloqueio neuro-muscular tem sido objecto de estudo e vários controladores automáticos têm sido propostos na literatura. Aqui considera-se o controlador proposto por Mendonça e Lago [6]. Este

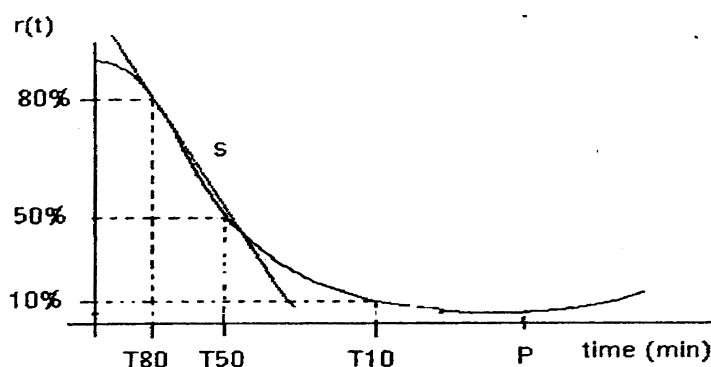


Figura 2: Medidas utilizadas para caracterizar as respostas dos pacientes à administração do relaxante. Fonte: Lago *et al.* [5]

controlador baseia-se não só nas características fármaco-dinâmicas e fármaco-cinéticas do relaxante muscular, mas também na resposta individual, relaxamento muscular, do paciente à dosagem administrada.

Sejam R e L os parâmetros do controlador. Estes são primeiramente estimados a partir das características fármaco-dinâmicas e fármaco-cinéticas do relaxante muscular, sendo em seguida afinados pelo relaxamento, $r(t)$, medido no paciente. Lago *et al.* [5] propõem que a afinação seja feita através de um modelo de regressão linear em que as variáveis preditoras são as seguintes medidas observadas: $T10$, $T50$ e $T80$ que são os tempos que o relaxamento do paciente, $r(t)$, demora a atingir um nível de 10%, 50% e 80%, respectivamente; S que representa o declive da recta definida pelos pontos $(T80, r(T80))$ e $(T50, r(T50))$ e P que indica a duração do efeito da dose inicial (ver figura (2)).

A figura (3) apresenta a resposta induzida pela administração de uma dose inicial de $500 \mu\text{gKg}^{-1}$ de *atracurium* a 34 pacientes. A variável $r(t)$ mede o nível de relaxamento muscular, cada 20 segundos, correspondendo 100% a uma actividade muscular total e 0% a uma paralisia total. São apresentadas 64 observações, referentes a 21.3 minutos.

Considerando que durante a intervenção cirúrgica um paciente passa por vários estádios de relaxamento muscular, investigou-se em que medida a análise de Walsh-Fourier pode contribuir para melhorar o controlador. Para isso, calculou-se o periodograma de Walsh-Harmuth do relaxamento muscular, $r(t)$, para todos os 34 pacientes.

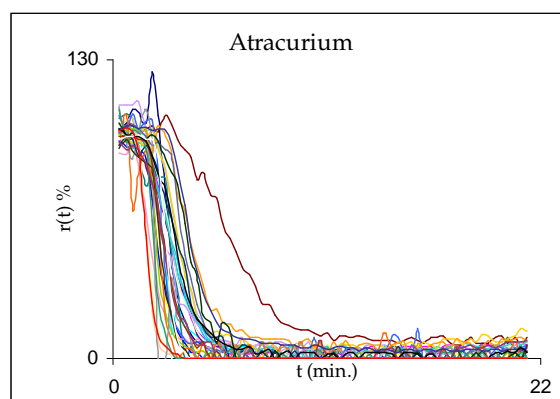


Figura 3: Resposta induzida por uma dose inicial de $500 \mu\text{gKg}^{-1}$ de *Atracurium* a 34 pacientes.

Verificou-se que os periodogramas apresentam picos nas H-sequências 3/128, 7/128, e 15/128 que correspondem a períodos médios de 14.2 minutos, 6.1 minutos e 2.8 minutos, respectivamente. Na figura (4) representa-se, a título ilustrativo, um dos periodogramas de Walsh-Harmuth obtido.

Para estudar a relação entre os períodos médios indicados pela análise de Walsh-Fourier e as medidas T_{10} , T_{50} , T_{80} , S e P utilizadas, empiricamente, na afinação dos parâmetros do controlador, utilizaram-se 500 séries de relaxamento muscular, simuladas através de um modelo proposto por Lago, *et al.* [5]. Na figura (5) apresentam-se 100 simulações de 64 observações do referido modelo, sem e com ruído adicionado. Verifica-se que o coeficiente de correlação entre $r(2.8)$ (nível de relaxamento 2.8 minutos depois da administração do relaxante) e o T_{50} é de 0.95.

Este resultado sugere que se investigue em que medida a inclusão dos períodos médios correspondentes às H-sequências e sequências dos picos do periodograma, melhora a estimação dos parâmetros, L e R , do controlador. Para isso, usando as 500 séries simuladas estimaram-se modelos de regressão linear que incluem como variáveis preditoras não só as medidas já mencionadas (T_{10} , T_{50} , T_{80} , S , P) mas também os períodos médios ($r(12.3)$, $r(14.0)$, $r(28.3)$). As tabelas (1) e (2) apresentam a percentagem de variação explicada pela regressão quando as variáveis preditoras incluídas são as indicadas na primeira coluna e a variável dependente é a indicada na segunda e terceira colunas, respectivamente. As linhas assinaladas com * apresentam os valores encontrados na literatura (Lago *et al* [5]).

A análise da tabela (1) permite concluir que a inclusão dos períodos médios pode melhorar a precisão das estimativas de R e L .

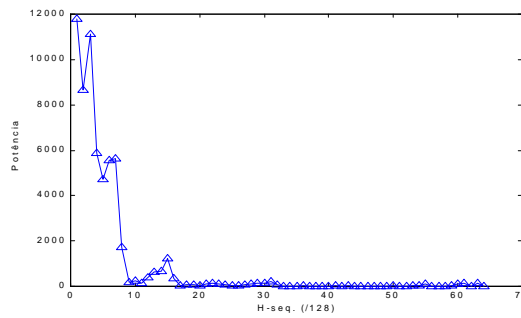


Figura 4: Periodograma de Walsh-Harmuth de uma das séries, $r(t)$.

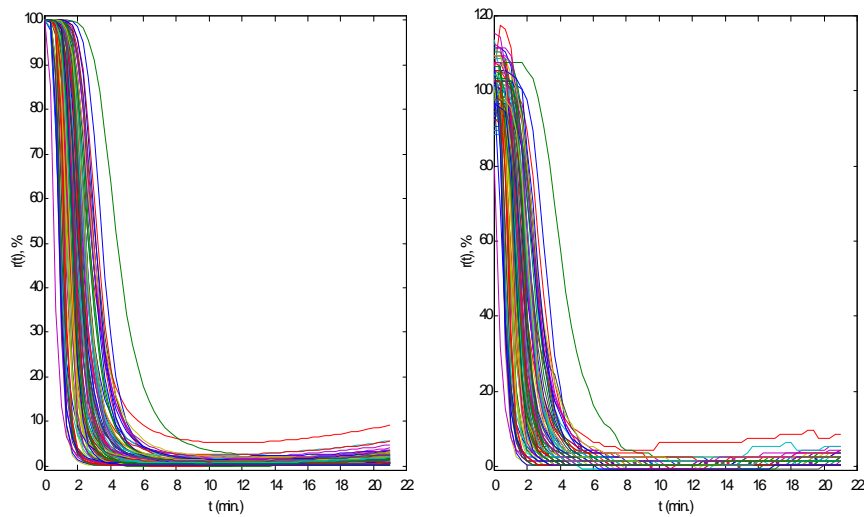


Figura 5: 100 respostas simuladas induzida por uma dose inicial de $500 \mu\text{gKg}^{-1}$ de *Atracurium*, sem e com ruído adicionado, respectivamente.

Preditores	L	1/R
* T50	87	41
r (12.3)	91	60
r (14.0)	91	64
r (12.3) e r (14.0)	91	68
* T50, S e P	95	69
[r (12.3) e r (14.0)] ou [r (12.3) e r (28.3)] ou [r (14.0) e r (28.3)]	95	70
* T80, T50, T10 e S	90	60
r (12.3)	92	68
r (14.0)	93	69

Tabela 1: % de variação explicada por um modelos de regressão linear quando se consideram como preditores as medidas T10, T50, T80, S, P e os valores do nível de relaxamento correspondentes aos períodos médios, em minutos. (*: Lago, *et al.* [5])

Estimadores	L	1/R
r (1.3), r (3.0), r (6.0), r (12.3), r (14.0) e r (28.3)	93	67
r (1.3), r (2.6), r (3.0), r (5.6), r (12.3) e r (28.3)	93	69

Tabela 2: % de variação explicada pelos modelos de regressão linear quando se consideram como preditores apenas os valores do nível de relaxamento correspondentes aos períodos médios, em minutos.

A tabela (2) apresenta os resultados de uma análise semelhante mas em que as variáveis a incluir na regressão são apenas os períodos médios. Verifica-se que medidas *T10*, *T50*, *T80*, *S*, *P* podem ser substituídas, por vezes com vantagem, pelos períodos médios.

4 Comentários

A Análise Espectral de Walsh-Fourier não deve ser considerada como substituta ou simplesmente como uma réplica da Análise de Fourier. Cada uma destas análises possui características e propriedades que permitem explorar as observações sob diferentes perspectivas. Assim, estas análises devem ser consideradas complementares.

Agradecimentos

As autoras agradecem a Teresa Mendonça e Pedro Lago a colaboração prestada no decorrer deste trabalho.

Referências

- [1] BEAUCHAMP, K.G. (1975) *Walsh Functions and their applications*. Academic Press.
- [2] HARMUTH, H.F. (1972) *Transmission of Information by Orthogonal Function*. 2nd. ed. Springer-Verlag.
- [3] KOHN, R. (1980) On the Spectral Decomposition of Stationarity Time Series using Walsh Functions. I. *Advances in Applied Probability*, No. 12, pp. 183-199.
- [4] LAGO, P., MENDONÇA, T. e GONÇALVES, L. (1998) On-line autocalibration of a PID controller of neuromuscular blockade. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*, Trieste, pp. 363-367.
- [5] LAGO P., MENDONÇA T., AZEVEDO H. e CARIDADE C.(2000) Comparison of on-line autocalibration techniques of controller of neuromuscular blockade. *Proceedings of the 4th Symposium of the International Federation of Automatic Control on Modelling and Control of Biomedical Systems*, Germany, pp. 263-268.
- [6] MENDONÇA, T. e LAGO, P. (1998) PID control strategies for the automatic control of neuromuscular blockade. *Control Engeneering Practice*, 6, pp. 1225-1231.
- [7] MORETTIN, P.A. (1981) Walsh Spectral Analysis. *SIAM Review*, No. 23, pp. 279-291.
- [8] ROBINSON, G.S. (1972) Logical Convolution and Discrete Walsh and Fourier Power Spectra. *IEEE transactions on Audio and Electroacoustics*, Vol AU-20, No. 4, pp. 271-280.
- [9] STOFFER, D.S. (1987) Walsh-Fourier Analysis of discrete-valued Time Series. *Journal of the Time Series Analysis*, Vol. 8, No. 4, pp. 449-467.
- [10] STOFFER, D.S. (1991) Walsh-Fourier Analysis and its Statistical Applications. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 86, No. 414, pp. 461-479.