

# **Superfícies Complexas**

**Definição e realização de operações de intersecção**

**Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica**

**Texto de apoio a aula teórico-prática**



## Índice

Índice .....	3
1 Introdução .....	4
2 Representação de superfícies complexas .....	5
2.1 Introdução .....	5
2.2 Geração de malhas .....	5
2.2.1 Características de uma malha .....	5
2.3 Malhas estruturadas e não estruturadas .....	6
2.4 Medidas de qualidade de uma malha .....	6
2.5 Classificação de métodos de geração de malhas .....	7
2.5.1 Métodos da classe advancing front .....	7
2.5.2 Triangulação de Delaunay .....	10
2.6 Melhoria da qualidade de uma malha .....	13
2.6.1 Edge Splitting .....	14
2.6.2 Edge Flipping .....	14
3 Operações geométricas com malhas de elementos planos - intersecções .....	15
4 Síntese .....	18

## 1 Introdução

As superfícies complexas fazem parte da morfologia de edifícios novos e antigos. As superfícies topográficas exibem, também, irregularidades que as tornam complexas. As aplicações informáticas correntes permitem definir estas superfícies e realizar operações geométricas onde intervêm. Assim, importará fazer uma referência às superfícies complexas no âmbito de uma licenciatura em Engenharia Civil.

Uma forma usualmente empregue para definir, de forma aproximada, uma superfície complexa, é um conjunto de elementos planos que formam uma malha. Esta é a abordagem seguida quando se pretende criar um modelo geométrico de um elemento estrutural, por exemplo, a analisar com recurso ao método dos elementos finitos. Pode proceder-se de forma análoga para representar uma superfície topográfica a partir de um conjunto dos seus pontos, de coordenadas conhecidas.

Embora a definição de malhas e a realização de operações geométricas onde estas intervêm sejam processos que exigem a realização de um número significativo de operações auxiliares e de verificações, considera-se que é possível efectuar uma referência a este tema no âmbito das disciplinas de Geometria Descritiva e Desenho Técnico. Considera-se ainda que o estudo de malhas de elementos planos com recurso a métodos gráficos poderá ser útil para introduzir temas relacionados com a geração automática de malhas.

É realizada, no presente texto, uma abordagem à geração de malhas de elementos planos por processos manuais e à realização de operações geométricas de intersecção onde estas intervêm. Faz-se ainda referência a um conjunto de algoritmos de geração automática de malhas implementados no programa GD-FEUP, desenvolvido para dar apoio à preparação de aulas de Geometria Descritiva.

O documento foi desenvolvido da mesma forma que o conjunto de textos elaborados em anos anteriores para as aulas teórico-práticas de Geometria Descritiva leccionadas, sendo utilizado o programa GD-FEUP para gerar imagens dos elementos geométricos no espaço e as correspondentes representações bidimensionais com recurso ao Método de Monge.



Apresenta-se ainda neste texto, um conjunto de sugestões para aulas de Geometria Descritiva em que os alunos tenham acesso a computadores. Estas sugestões são assinaladas com a imagem indicada à esquerda.

## 2 Representação de superfícies complexas

### 2.1 Introdução

Superfícies complexas são aquelas que são formadas por um conjunto de elementos geométricos - de elementos planos, nomeadamente - justapostos. Este tipo de superfícies é usado habitualmente para representar, de forma aproximada, superfícies topográficas ou as formas de edifícios novos ou antigos. De uma forma geral, qualquer que seja o tipo de superfície complexa, ela poderá sempre ser definida, de forma aproximada, por um conjunto de elementos planos que constituem uma malha.

No capítulo que se segue serão abordados temas relacionados com a geração de malhas, quer por processos manuais, quer por processos automáticos, e com a realização de operações geométricas onde intervenham essas malhas.

### 2.2 Geração de malhas

#### 2.2.1 Características de uma malha

Importa definir um conjunto de características importantes de malhas de elementos planos. Estas características podem ser divididas em:

- Obrigatórias - indispensáveis para a validade geométrica da malha;
- Desejáveis - a não verificação de uma ou mais destas características podem torná-la inviável para uma determinada finalidade. Caso geral, as características desejáveis numa malha estão relacionadas com a qualidade dos seus elementos, conforme será definido adiante.

#### Características obrigatórias

Enumera-se em seguida um conjunto de características obrigatórias de uma malha de elementos planos:

- Todo o domínio a discretizar deve estar coberto por elementos, ou seja, ausência de vazios entre elementos;
- A intersecção de dois quaisquer elementos será, para malhas formadas por elementos planos, um ponto, um lado, ou o conjunto vazio;
- Cada lado de um elemento plano não pode ser partilhado por mais de dois elementos;
- Todos os elementos devem pertencer ao domínio a discretizar.

#### Características desejáveis

Conforme se referiu anteriormente, as características desejáveis de uma malha dependem do fim ao qual esta se destina. Frequentemente, as malhas são geradas com o fim de serem utilizadas em cálculos com recurso ao método dos elementos finitos ou para efeitos de representação gráfica.

Uma malha a ser utilizada para cálculo estrutural com recurso ao método dos elementos finitos deverá respeitar um conjunto de condições geométricas desejáveis. Segue-se um conjunto dessas características:

- Ausência de ângulos obtusos em elementos triangulares.
- Pequena variação entre dimensões dos lados de elementos vizinhos.

A não verificação deste tipo de características pode conduzir a resultados indesejáveis, incluído a divergência do processo de cálculo.

Para além destes aspectos, deve evitar-se que a malha seja demasiado refinada, isto é, que o número de elementos que a compõem seja excessivo para a precisão pretendida. Obviamente, uma malha mais simples conduz a um processamento mais rápido, tanto para efeito de cálculo como para efeito de representação gráfica.

### 2.3 Malhas estruturadas e não estruturadas

É importante distinguir as malhas em duas categorias, com respeito à forma como os nós da malha estão ligados com os vizinhos. No caso de malhas estruturadas, as ligações entre nós são conhecidas à priori, sendo possível identificar a posição relativa de cada nó a partir dos seus índices, ou números de ordem. Este tipo de malhas pode ser aplicado, de forma eficiente, a superfícies de geometria conveniente, sendo necessário estudar cada caso particular a fim de averiguar a sua aplicabilidade. Muitos dos programas de cálculo automático actuais utilizam este tipo de malhas para discretizar superfícies de contorno poligonal planas.

Os algoritmos de geração de malhas estruturadas tendem a ser simples e robustos, embora possam dar origem a malhas excessivamente refinadas quando aplicados a nuvens de pontos dispostos de forma irregular, ou a domínios de contorno composto por um elevado número de segmentos. Assim, os algoritmos de geração de malhas não estruturadas têm vindo a ganhar um papel cada vez mais importante.

### 2.4 Medidas de qualidade de uma malha

De acordo com o referido em 2.2.1, uma malha deve possuir um conjunto de características desejáveis, que a tornam mais ou menos apta para um determinado fim. Estas características variam, naturalmente, com o fim para o qual a malha é gerada, pelo que existe um grande número de medidas de qualidade disponíveis, de características distintas. Ainda assim, é possível adoptar medidas de qualidade simples com o fim de gerar malhas formadas por elementos regulares.

Uma medida de qualidade de uma malha formada por elementos triangulares planos frequentemente adoptada na sua análise é o histograma de índices de compacidade dos seus elementos. Um índice de compacidade popular, proposto por Gueziec, é função da relação entre a área de um triângulo e a soma dos quadrados dos comprimentos dos seus lados:

$$C = \frac{4\sqrt{3}A}{l_0^2 + l_1^2 + l_2^2}.$$

Este parâmetro assume valores entre 0, para triângulos degenerados e 1, para triângulos equiláteros. É ainda possível adoptar como medida de qualidade, o valor mínimo ou médio dos índices de compacidade dos elementos da malha.

Note-se porém, que a determinação dos valores dos parâmetros referidos não é simples caso não sejam empregues métodos numéricos, pelo que se considera inviável adoptar medidas de qualidade de uma malha se se pretender utilizar em exclusivo métodos gráficos de análise.



PROGRAMA - Definir diversos elementos triangulares, observando a variação dos seus índices de compacidade. Testar, em particular, triângulos equiláteros e triângulos rectângulos.

## 2.5 Classificação de métodos de geração de malhas

Os métodos de geração de malhas podem ser divididos, numa primeira análise, em manuais, semi-manuais e automáticos. As malhas geradas por processos manuais devem respeitar as condições obrigatórias listadas acima, sendo geralmente difícil impor a verificação das condições desejáveis, especialmente em malhas de grande dimensão, o que pode torná-las inviáveis para fins profissionais.

Os algoritmos de geração automática de malhas requerem uma intervenção humana nula ou mínima, sendo desenvolvidos de modo a procurar otimizar determinados parâmetros que medem a qualidade da malha. Estes métodos são aplicáveis a malhas de qualquer dimensão, embora possam não ser adequados às características geométricas particulares da superfície a discretizar.

Finalmente, os métodos semi-manuais procuram contornar as desvantagens citadas, combinando a eficiência dos métodos automáticos com a flexibilidade dos métodos manuais. É possível, por exemplo, efectuar alterações a malhas geradas por processos automáticos, ou combinar malhas de forma a adaptá-las de modo conveniente ao domínio a considerar.

Os métodos de geração automática de malhas triangulares mais populares são os da classe *advancing front* e os que geram triangulações de *Delaunay*. Embora estes algoritmos tenham sido concebidos inicialmente para definir malhas planas, ou 2D, existe actualmente um grande número de variantes aplicáveis a malhas no espaço a três dimensões, formadas por elementos triangulares planos, ou 2D½.

### 2.5.1 Métodos da classe *advancing front*

Os métodos de geração de malhas da classe *advancing front* procuram criar malhas triangulares para um dado domínio, dado o seu contorno e um conjunto de pontos conhecidos. Os novos elementos são acrescentados à malha a partir deste contorno até que todo o domínio esteja coberto. O contorno é um conjunto de segmentos de recta que, no caso de uma

superfície topográfica, por exemplo, se projecta ortogonalmente sobre um plano horizontal segundo um polígono que contém o conjunto de pontos conhecidos.

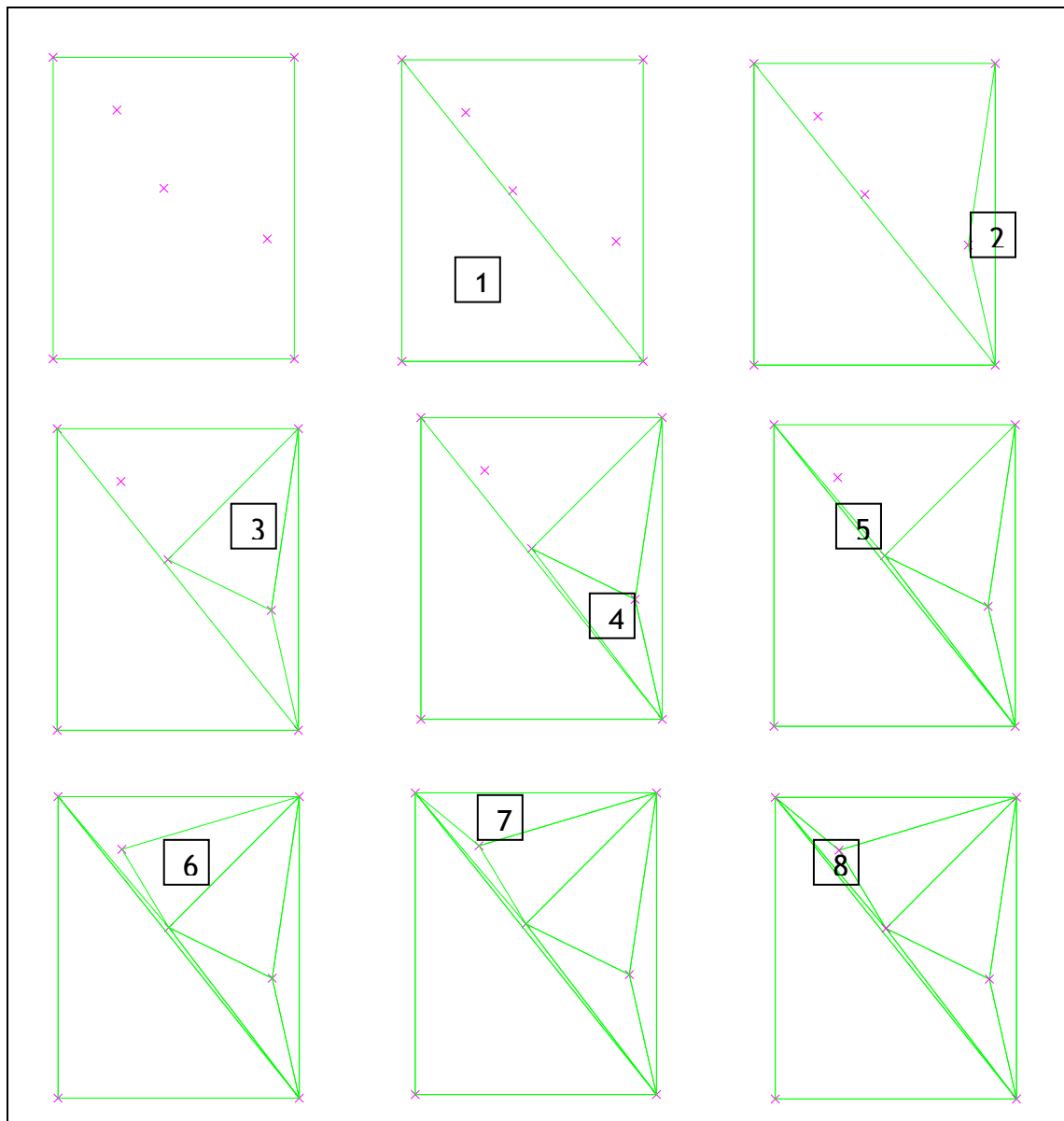
O processo é relativamente intuitivo, o que, por um lado, o torna adequado à geração de malhas por processos manuais e, por outro, facilita o acompanhamento do processo de geração automática de uma malha, uma vez que os elementos são gerados numa sequência previsível.

Ilustra-se na Fig. 1 o processo de geração de uma malha muito simples construída a partir de um contorno inicial formado por quatro segmentos de recta. Para além dos pontos pertencentes a este contorno, são conhecidos três outros pontos da malha. É de referir que a malha apresentada foi gerada sem procurar melhorar, de qualquer forma, a qualidade dos seus elementos, pelo que alguns triângulos apresentam um aspecto alongado. Note-se ainda que, na Fig. 1, são representadas projecções ortogonais de uma malha não plana, isto é, de uma malha  $2D\frac{1}{2}$ , sobre um plano horizontal, pelo que os elementos aparentam uma compacidade inferior àquela que efectivamente os caracteriza.



PROGRAMA - Procurar gerar uma malha a partir de um pequeno conjunto de pontos, comparando-a com a malha gerada pelo programa. Avaliar a qualidade das malhas definidas usando as funções disponíveis na página “S. Comp”.





**Fig. 1 - Geração de uma malha simples - método advancing front**

Apresenta-se em seguida um esquema onde se ilustra o processo de geração de malhas por um algoritmo de classe advancing front:

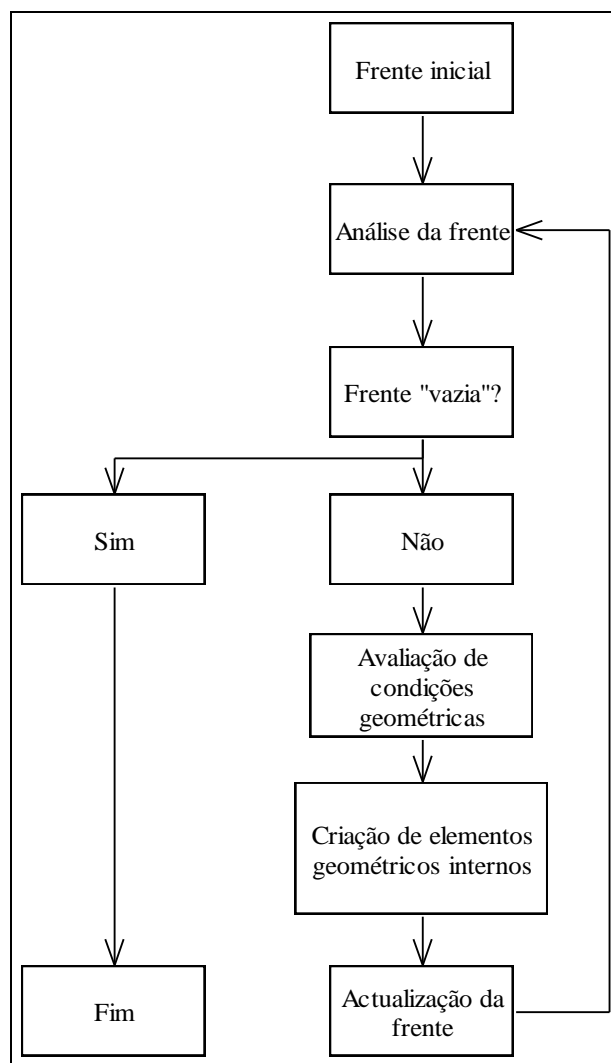


Fig. 2 - Representação esquemática de um algoritmo da classe *Advancing Front*

### 2.5.2 Triangulação de Delaunay

Uma triangulação 2D diz-se de Delaunay se respeitar a seguinte condição:

*Qualquer elemento triangular da malha pode ser inscrito numa circunferência que não contém, no seu interior, nenhum ponto para além dos vértices do elemento.*

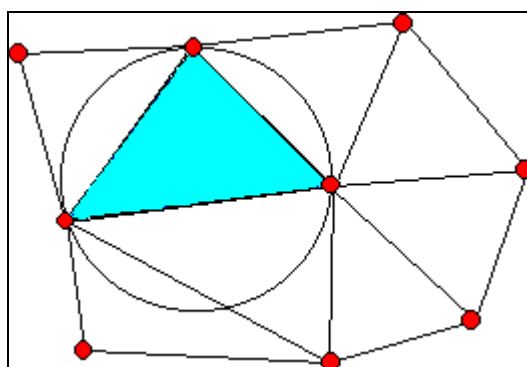


Fig. 3 - Condição de Delaunay

Os métodos que geram triangulações do tipo de Delaunay têm vindo a ganhar popularidade relativamente a outros métodos de geração de malhas por um conjunto de motivos, entre os quais:

- Existem algoritmos bem estudados, eficientes e robustos deste tipo.
- Existem variantes destes algoritmos aplicáveis a malhas  $2D\frac{1}{2}$ .
- As malhas geradas possuem um conjunto de propriedades interessantes:
  - A condição de Delaunay tende a criar elementos inscritos em circunferências de raio tão pequeno quanto o possível, o que por sua vez resulta em malhas de boa qualidade, formadas por elementos compactos.
  - O contorno de uma malha plana deste tipo é o menor polígono convexo que contém todos os pontos que lhe dão origem.
  - Muitas das características da malha a gerar podem ser previstas à partida, nomeadamente o número  $T$  de elementos da malha, que é obtido pela fórmula de Euler, fazendo  $T = 2V - k - 2$ , onde  $V$  é o número de pontos conhecidos e  $k$  é o número de pontos pertencentes ao contorno da malha.

Note-se, contudo, que não é viável empregar este tipo de métodos na geração de malhas por processos manuais, dada a quantidade de problemas métricos intervenientes na verificação da condição de Delaunay, especialmente no caso de malhas  $2D\frac{1}{2}$ .

Ao contrário do que sucede com os algoritmos da classe *advancing front*, as triangulações de Delaunay podem ser geradas de forma aparentemente desordenada. Qualquer triângulo que verifique a condição de Delaunay pode ser enviado directamente para o ficheiro de resultados, sem necessidade de se efectuar verificações suplementares. Assim, a sequência pela qual os elementos são definidos depende exclusivamente da ordem seguida pelo algoritmo para analisar cada possível triângulo da malha.

A Fig. 4 ilustra o processo de geração de uma malha com base no critério de Delaunay. Note-se que, de acordo com este critério, qualquer elemento gerado, pode ser inscrito numa circunferência que não contém qualquer outro ponto para além dos vértices do elemento triangular. Na figura, algumas das circunferências referidas foram substituídas por arcos de circunferência de modo a reduzir a densidade de traços no desenho.



**PROGRAMA** - Comparar malhas geradas por algoritmos diferentes a partir do mesmo conjunto de pontos. Observar que no caso de malhas  $2D\frac{1}{2}$ , especialmente se as malhas forem geradas a partir de pontos cujas cotas apresentam diferenças significativas, a qualidade tende a ser claramente superior nas malhas geradas pelo algoritmo *advancing front* proposto. Isto deve-se ao facto de o algoritmo baseado no critério de Delaunay gerar malhas triangulares planas, que são depois deformadas de modo a que se adaptem à superfície a aproximar. O algoritmo *advancing front* proposto avalia o índice de compacidade de cada elemento antes de o enviar para o ficheiro de dados.

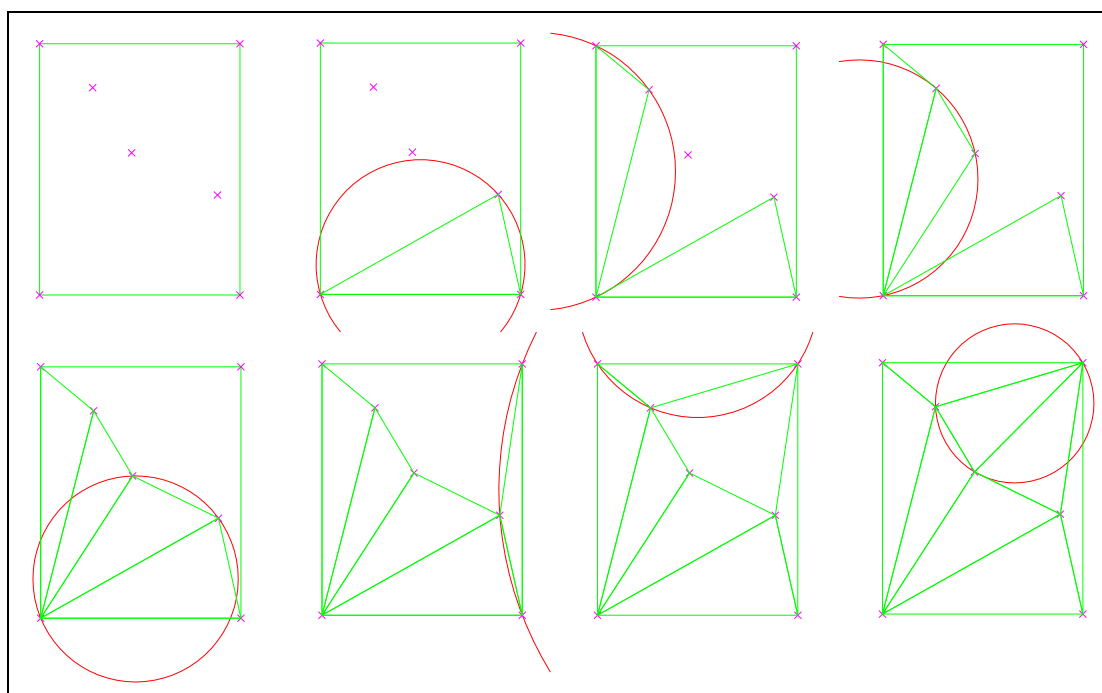


Fig. 4 - Geração de uma malha simples - critério de Delaunay.

Apresenta-se, na Fig. 5, uma representação de um diagrama de geração de malhas do tipo Delaunay. Este algoritmo é particularmente simples, dado que se limita a verificar sucessivamente a condição de Delaunay para todos os conjuntos de três pontos da malha. Existem outros algoritmos claramente mais eficientes do que o indicado.

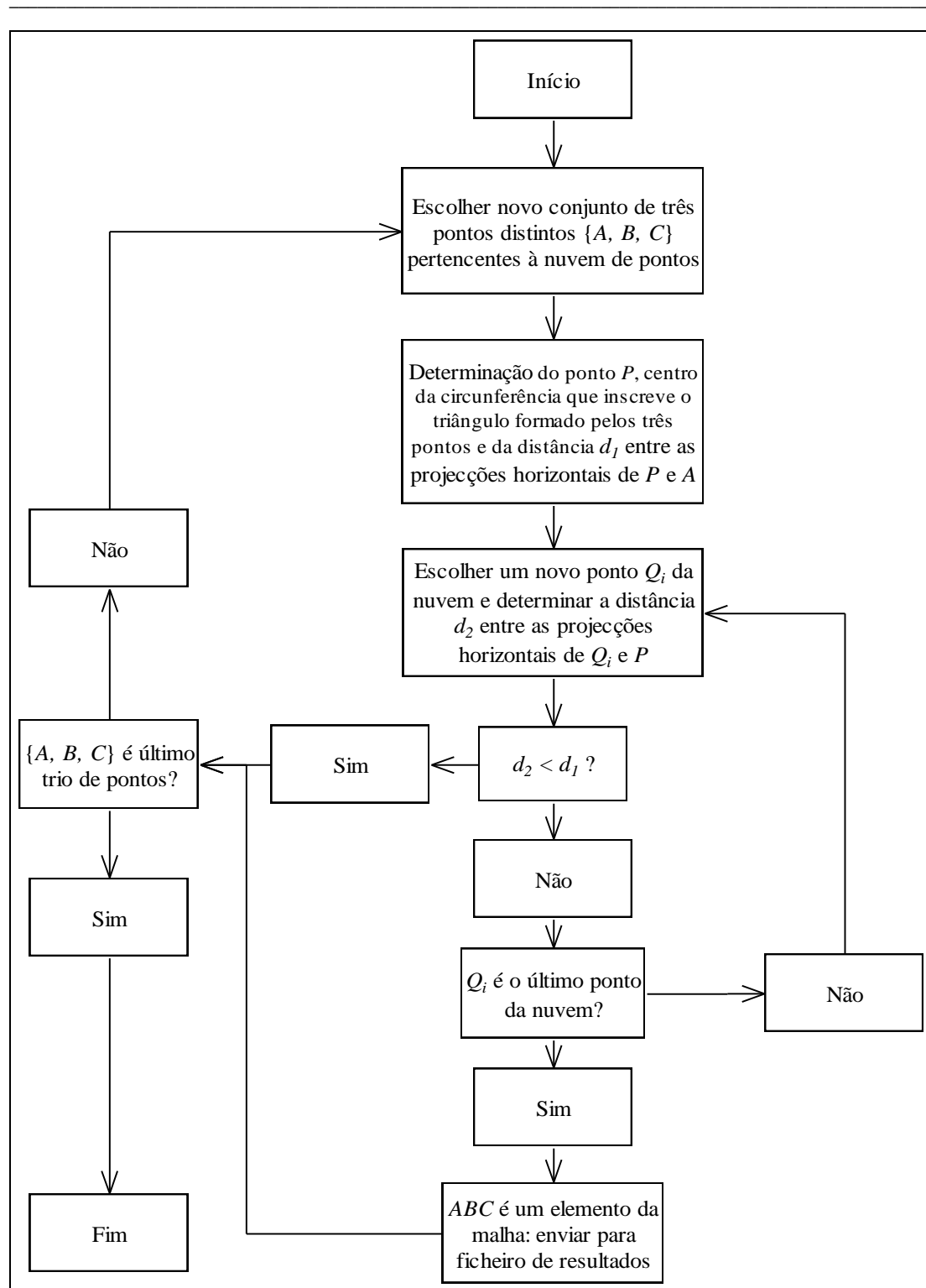


Fig. 5 - Representação esquemática de um algoritmo do tipo Delaunay

## 2.6 Melhoria da qualidade de uma malha

Independentemente do processo de geração de uma malha, existe um conjunto de operações simples que permitem melhorar a sua qualidade. Refere-se, em seguida, duas operações que podem ser realizadas com este fim, designadas por *edge splitting* e *edge flipping*.

### 2.6.1 Edge Splitting

Uma forma elementar de melhorar a qualidade de um elemento triangular alongado, é dividi-lo em dois, a partir do seu lado maior. A divisão deve, naturalmente, ser efectuada de modo a que o incremento de qualidade da malha, indicado pela medida de qualidade adoptada, seja tão grande quanto o possível. Assim, a determinação do ponto do lado maior que conduz a um valor óptimo da medida de qualidade, deve ser efectuada por métodos numéricos.

Esta operação pode ser realizada durante a geração da malha, ou após a sua completa definição. Frequentemente, o *edge splitting* surge como uma solução eficiente para corrigir os elementos triangulares que são gerados junto ao contorno inicial da malha. É possível efectuar divisões sucessivas até que seja atingido um índice de compacidade aceitável, embora este procedimento possa conduzir a um refinamento excessivo da malha em algumas regiões.

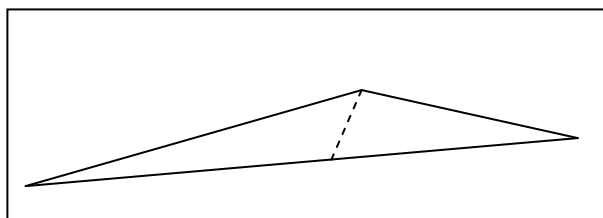


Fig. 6 - Divisão de um elemento de reduzido índice de compacidade

### 2.6.2 Edge Flipping

Um segundo processo vulgarmente utilizado para melhorar a qualidade de uma malha é alterar a configuração de pares de elementos da forma ilustrada na Fig. 7. Naturalmente, este processo pode resultar numa definição indesejada de uma malha, dado que substitui um conjunto de arestas previamente definidas.

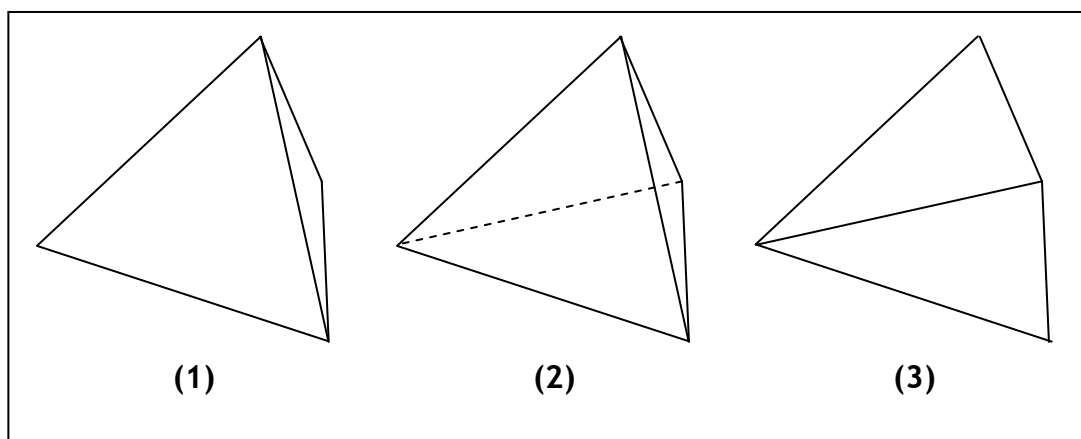


Fig. 7 - Processo de substituição de um par de elementos com o fim de melhorar qualidade da malha - *Edge Flipping*

### 3 Operações geométricas com malhas de elementos planos - intersecções

Uma vez gerada a malha, é possível realizar diversas operações geométricas e empregar métodos auxiliares, como a substituição de planos de projecção, na resolução de problemas métricos.

Entre as operações geométricas referidas nos capítulos anteriores, as mais relevantes onde intervêm malhas de elementos planos serão, porventura, as intersecções. No caso de uma superfície topográfica, por exemplo, podem ser obtidas curvas de nível efectuando intersecções sucessivas da respectiva malha com planos horizontais. Podem também ser realizadas operações de intersecção de uma malha com uma recta ou com outra malha. Refira-se ainda que, a realização de operações geométricas com malhas de grande dimensão é, naturalmente, inviável caso se pretenda recorrer a métodos gráficos.

De uma forma genérica, pode afirmar-se que a intersecção de uma malha composta por  $n$  elementos planos  $e_1, e_2, \dots, e_n$  com um outro elemento geométrico  $E$  é um conjunto de elementos  $I$ :

$$I = (E \cap e_1) \cup (E \cap e_2) \cup \dots \cup (E \cap e_n) \quad (1)$$

Desta forma, qualquer intersecção de uma malha com um outro elemento  $E$  é obtida pelo conjunto das intersecções dos seus elementos com  $E$ . Importa, pois, fazer uma breve referência ao processo de intersecção de um elemento plano com uma recta, um plano, ou um outro elemento plano.

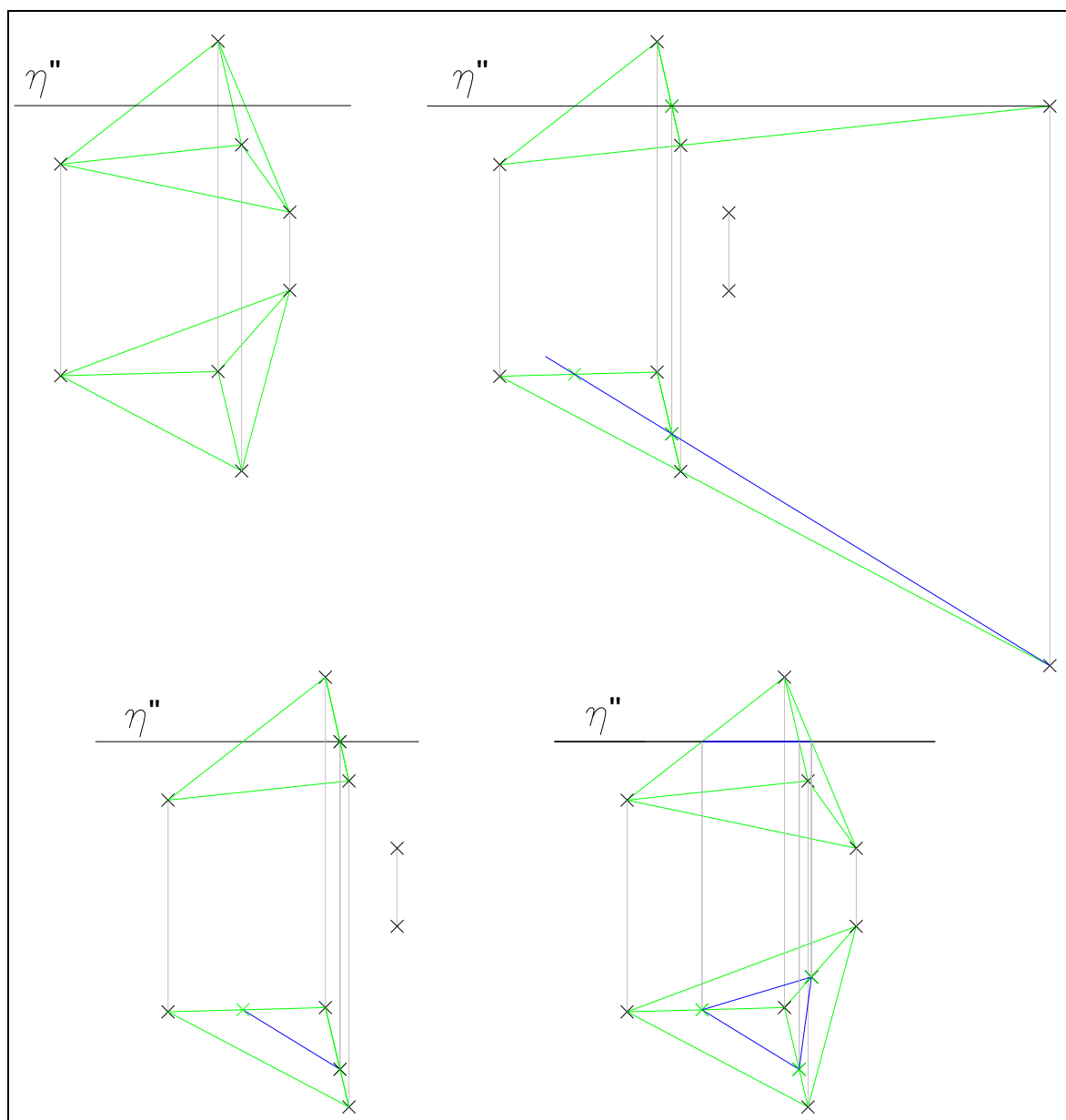
Considere-se o plano  $\varphi_i$  que contém o elemento  $e_i$  da malha. Uma forma simples de obter a intersecção de  $e_i$  com  $E$  é:

$$E \cap e_i = E \cap \varphi_i \cap e_i \quad (2)$$

Assim, um problema de intersecção de uma malha composta por  $n$  elementos planos com o elemento geométrico  $E$  pode ser resolvido por um conjunto de  $n$  intersecções de  $E$  com os planos que contêm os elementos da malha. Por sua vez, cada uma destas intersecções deve ser intersectada com o respectivo elemento plano e, finalmente, ser adicionada a  $I$ .

Note-se que, dado o grande número de intersecções a efectuar, poderá ser vantajoso empregar o método da substituição para colocar  $E$  numa posição particular que simplifique as operações a realizar. Caso  $E$  seja um plano, por exemplo, poderá ser vantajoso torná-lo projectante antes de realizar qualquer operação de intersecção.

Ilustra-se, na Fig. 8, o processo de intersecção de um plano horizontal com uma malha muito simples, formada por três elementos triangulares planos. Representa-se, na primeira imagem, os dados do problema. Na segunda imagem pode observar-se a intersecção do plano que contém o primeiro elemento triangular com o plano  $\eta$ . Segue-se a intersecção da recta definida no passo anterior com o respectivo elemento triangular e, na última imagem, o resultado final.



**Fig. 8 (1 a 4) - Intersecção de um plano horizontal  $\eta$  com uma malha formada por três elementos planos triangulares**

Caso se pretenda intersectar uma recta com uma malha de elementos planos, o procedimento será semelhante ao indicado para o caso de um plano. Pode observar-se, na Fig. 9, o processo de intersecção de uma recta oblíqua  $r$  com uma malha formada por três elementos planos. A recta intersecta os elementos  $PQR$  e  $QRS$  nos pontos  $J$  e  $K$ , respectivamente. O ponto  $I$ , intersecção de  $r$  com o plano que contém o elemento  $PQS$ , não pertence a este elemento, logo, não faz parte da intersecção da recta com a malha dada.



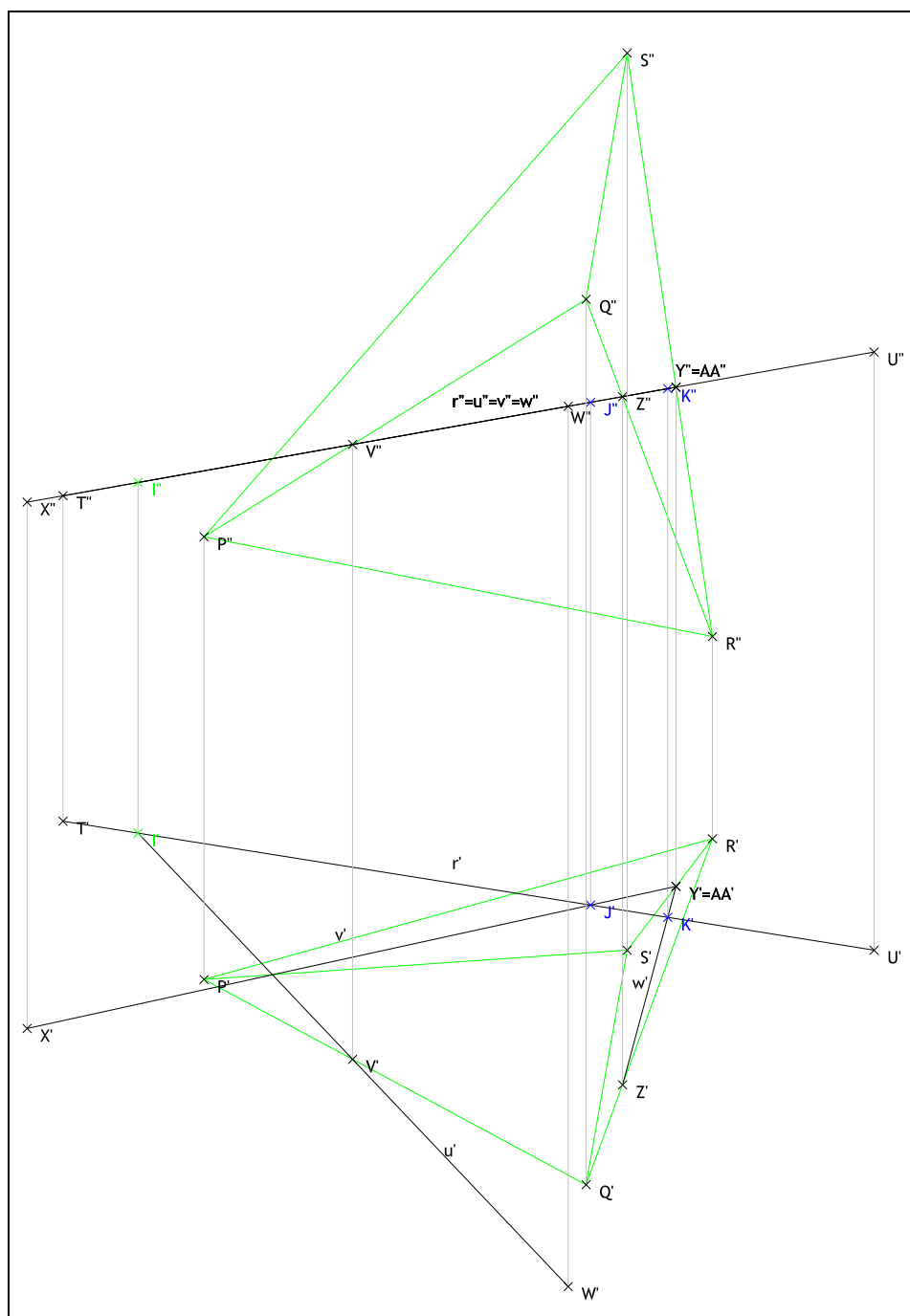


Fig. 9 - Intersecção de uma recta oblíqua  $r$  com uma malha formada por três elementos planos triangulares



PROGRAMA - Definir uma malha simples e determinar a sua intersecção com um plano oblíquo com e sem recorrer ao método da substituição dos planos de projecção para tornar projectante o plano a intersectar. Verificar que a densidade de traços tende a ser significativamente menor quando se recorre a este método auxiliar, especialmente no caso de malhas compostas por um grande número de elementos planos.

## 4 Síntese

As malhas de elementos triangulares planos são uma forma de aproximar superfícies complexas frequentemente utilizada para efeito de representação gráfica 3D, bem como para cálculo com recurso ao método dos elementos finitos.

As malhas possuem um conjunto de características mensuráveis, que as tornam mais ou menos aptas para um determinado fim, isto é, que lhes confere maior ou menor qualidade.

Embora possam ser geradas por processos manuais, há vantagens claras na geração automática de malhas. Existem diversas categorias de algoritmos para este fim, sendo os mais relevantes, os da classe *Advancing Front* e os que empregam *Triangulação de Delaunay*.

É possível realizar operações de intersecção onde intervêm superfícies, caso estas sejam definidas, de forma aproximada, por uma malha de elementos triangulares, usando as construções geométricas habitualmente empregues nas aulas de Geometria Descritiva.