TENSORES

1.1 INTRODUÇÃO

Os elementos sólidos utilizados em Engenharia Mecânica e das Estruturas desenvolvem-se num espaço tridimensional no que respeita à sua Geometria, sendo necessário posicionar pontos, curvas, superfícies e objectos no espaço geométrico tridimensional em que se inserem, para esse efeito utilizam-se sistemas de eixos ortogonais de referência, como se representa na figura 1.1.

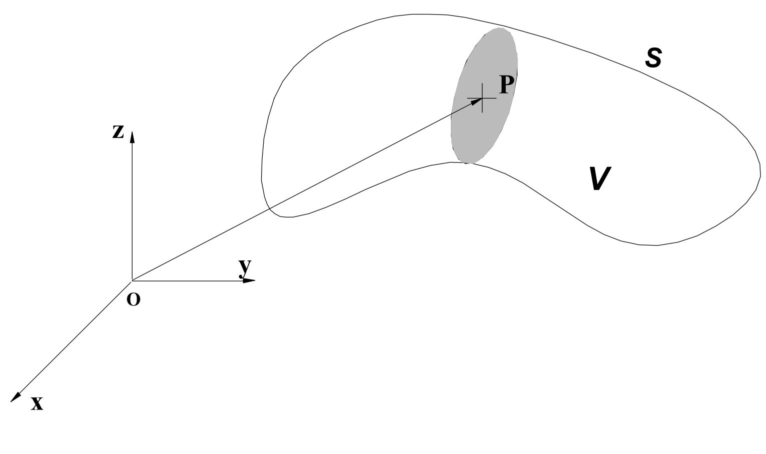

Figura 1.1: Sólido Tridimensional.

O ponto **P** da figura 1.1 pode ter a sua posição identificada no espaço através das **coordenadas** $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ referidas a um sistema de eixos coordenados que têm origem O e é constituído por três eixos coordenados ortogonais entre si, um sistema cartesiano.

Um conjunto de pontos pode estar contido sobre uma linha, sobre uma superfície ou num volume tridimensional. As linhas e as superfícies podem ser relevantes em termos geométricos para identificar conjuntos de pontos no espaço, por exemplo, isocurvas. Neste texto são considerados espaços vectoriais tridimensionais a não ser que se especifique o contrário e esses espaços são Euclidianos.

As quantidades físicas relevantes são por vezes, grandezas **escalares** que podem ser representadas por caracteres, como a,b,c…ou $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ como é o caso da massa, da densidade e da temperatura. Grandezas físicas como a força, a velocidade e a aceleração são em geral representadas por **vectores** para os quais se usam letras minúsculas em negrito, **u,v,w…** ou para as suas componentes a notação indicial u_i, v_i, w_i. As tensões, as deformações, etc…, são quantidades representadas em geral por **tensores de segunda ordem**, para os quais se usa a simbologia **A,B,C…** ou a notação indicial $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}\ldots$ associada às componentes do tensor. Os tensores de 2ª ordem ao longo do texto são em geral referidos simplesmente como **Tensores**. Para algumas grandezas podem ter de utilizar-se tensores de 3ª ordem para a sua representação, sendo a notação utilizada ***A,B,C…*** ou $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}\ldots$, ou eventualmente tensores de ordem superior á 3ª para os quais se utiliza a notação $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}\ldots$.

A fim de introduzir as operações e as propriedades dos tensores que são frequentemente utilizadas nos capítulos subsequentes, começa por fazer-se referência neste capítulo aos vectores, passando seguidamente aos tensores de 2ª ordem e finalmente faz-se uma breve referência aos tensores de ordem superior e às funções escalares, vectoriais e tensoriais, assim como aos conceitos de gradiente e divergência de tensores.

A Introdução feita ao Cálculo Tensorial não é exaustiva e muitas fórmulas são apresentadas sem demonstração, para um estudo mais detalhado do assunto existem vários textos, Dias Agudo[1978],Simmonds[1994],Danielson[1997],Holzapfel[2000] e Truesdell and Noll[1992] entre muitos outros que podem ser utilizados no referido estudo.

1.2 VECTORES

Um **vector** é geometricamente um segmento de recta, ao qual foi atribuído um sentido no espaço, por exemplo, na figura 1.2 , está representado um vector, **u**, este vector pode identificar a posição do ponto B relativamente ao ponto A, considerado como a origem do sistema de referência. Neste caso o vector **u**, é um vector de posição.

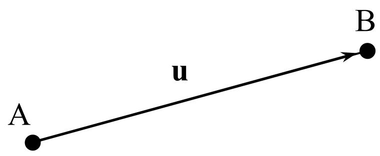

Figura 1.2: Vector de posição de **B** relativamente a **A**.

Um **vector** no espaço Euclidiano tridimensional pode ser representado pelas suas componentes relativamente a uma base de vectores. Designando por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base de vectores, o vector **u** pode ser escrito como uma combinação linear dos vectores de base, ou seja

$$\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{e}_1 + u_2\,\mathbf{e}_2 + u_3\,\mathbf{e}_3 \tag{1.1}$$

onde $u_i = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ são as componentes do vector **u**, as quais estão representadas geometricamente na figura 1.3. Em geral considera-se como base de vectores no espaço tridimencional, três vectores unitários ortogonais com a direcção dos eixos coordenados e com o sentido positivo desses eixos.

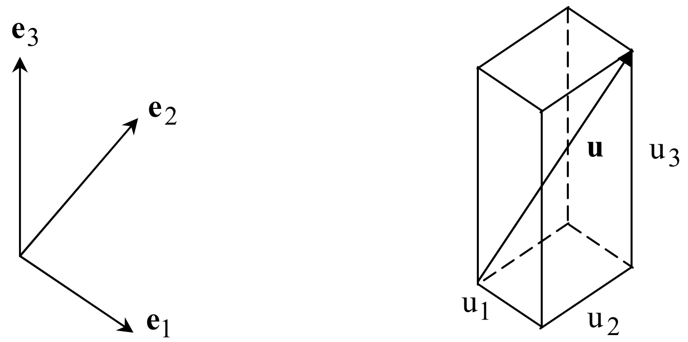

Figura 1.3: Componentes do Vector **u**.

A grandeza do vector pode representar-se, por $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. No caso de se considerar um espaço a n dimensões, um vector $\mathbf{u} = u_{i\,=\,1,\,n}$ pode ser designado por **tensor de 1ª ordem, ou vector**, não estando necessariamente associado ao espaço geométrico tridimensional. Se bem que a maior parte das grandezas relevantes em Mecânica dos Sólidos sejam grandezas representáveis no espaço tridimensional existem no entanto aplicações de Mecânica dos Sólidos em que o uso de tensores de 1ª ordem no espaço R_n é necessário.

1.3 OPERAÇÕES COM VECTORES E TENSORES DE 2ª ORDEM

1.3.1 ADIÇÃO DE VECTORES

A **soma** do vector **u** com o vector **v** é o vector **w** que se obtém adicionando os dois vectores $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, ou seja, as componentes do vector **w** obtém-se por adição das componentes dos vectores **u** e **v**:

$$w_1 = u_1 + v_1,\; w_2 = u_2 + v_2,\; w_3 = u_3 + v_3 \tag{1.2}$$

num espaço a três dimensões. A **subtracção** de dois vectores também é possível e processa-se adicionado um dos vectores ao vector que se obtém considerando o outro vector com o sinal negativo.

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + (-\,\mathbf{v})$$

As componentes do vector **w** são:

$$w_1 = u_1 - v_1,\; w_2 = u_2 - v_2,\; w_3 = u_3 - v_3 \tag{1.3}$$

A adição e subtracção de vectores no espaço tridimensional pode fazer-se geometricamente, recorrendo à lei do paralelogramo, como se representa na figura 1.4. A adição de vectores é comutativa e é associativa.

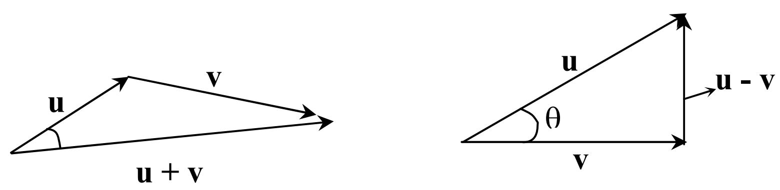

Figura 1.4: Adição e subtracção de vectores.

No caso de se considerarem vectores no espaço a n dimensões a adição processa-se de modo análogo ao referido sendo as componentes $w_i = u_i + v_i$. Podem somar-se α vezes o mesmo vector obtendo-se um vector que é **w** = α **u** e que corresponde ao produto de um escalar por um vector. A adição do vector **u** com o vector **(-u)** conduz ao vector nulo designado por **o**.

1.3.2 PRODUTOS ESCALAR, VECTORIAL E TRIPLO DE VECTORES

A operação produto de dois vectores aparece com três formas distintas e que correspondem a quantidades físicas distintas, o chamado **produto escalar**, o chamado **produto vectorial** e o chamado **produto tensorial**, podendo aparecer combinações destes produtos como, por exemplo o **produto escalar triplo**. Começa por estudar-se o produto escalar, o produto vectorial e os produtos triplos.

O **produto escalar ou produto interno** de dois vectores costuma representar-se por **u** ·**v** e é:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta\,(\mathbf{u},\,\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2\right) \qquad (1.4)$$

ou no espaço de dimensão n

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i\ v_i = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} u_i\ v_j\ \delta_{ij} \qquad (1.5)$$

onde δ_{ij} é o **símbolo de Kronecker**, ou seja é tal que:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} \qquad (1.6)$$

A grandeza resultante do **produto escalar** de dois vectores é uma grandeza escalar, no caso de serem dois vectores ortogonais entre si, o produto escalar, **u.v**, tem o valor zero. No caso de se usar a **convenção dos índices** repetidos, inventada por Einstein, a equação 1.5 pode escrever-se com a forma:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i\ v_i = u_i\ v_i\ .$$

Note-se que a convenção de índices repetidos não se aplica no caso de existir o sinal de adição entre as quantidades com o índice e que a operação subjacente à convenção dos índices repetidos é uma **contracção** que é representada em notação simbólica por um ponto entre os dois vectores.

Exemplo 1.1

Considere as expressões seguintes e expanda-as tendo em conta a convenção dos índices repetidos.

a) $u_i v_i w_j \mathbf{e}_j$ *b)* $\delta_{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i$

Solução:

a) *Somando primeiro em i e depois em j obtém-se:*

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)(w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3)$$

b) *Somando em j para o 1º membro da igualdade obtém-se :* $\delta_{ij}\mathbf{e}_j = \delta_{i1}\mathbf{e}_1 + \delta_{i2}\mathbf{e}_2 + \delta_{i3}\mathbf{e}_3$.

Sendo i=1,obtém-se: $\delta_{1j}\mathbf{e}_j = \delta_{11}\mathbf{e}_1 + \delta_{12}\mathbf{e}_2 + \delta_{13}\mathbf{e}_3 = \delta_{11}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$,

para i=2 obtém-se $\delta_{2j}\mathbf{e}_j = \delta_{21}\mathbf{e}_1 + \delta_{22}\mathbf{e}_2 + \delta_{23}\mathbf{e}_3 = \delta_{22}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$,

para i=3 obtém-se $\delta_{3j}\mathbf{e}_j = \delta_{31}\mathbf{e}_1 + \delta_{32}\mathbf{e}_2 + \delta_{33}\mathbf{e}_3 = \delta_{33}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$

de acordo com as características do símbolo de Kronecker.

Considerando um vector unitário, **e**, cujo módulo é $\|\mathbf{e}\|=1$, a projecção do vector **u** na direcção de **e** tem uma grandeza igual ao produto escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}=\|u\|\|e\|\cos\theta(\mathbf{u},\mathbf{e})$.

Dentre as propriedades do produto escalar há que referir o facto de ser uma operação comutativa $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$.

O **produto vectorial** de dois vectores **u** e **v** é um vector que é ortogonal aos vectores **u** e **v** e é representado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. O comprimento de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é definido como sendo igual à área do paralelogramo por eles formado no espaço tridimensional, como se representa na figura 1.5.

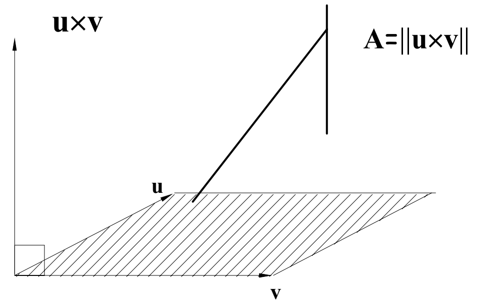

Figura 1.5: Área e Produto Vectorial de dois Vectores.

Os vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ são tais que:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 && \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \\ &\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 && \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \\ &\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 && \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

O **produto vectorial** de dois vectores, pode ser calculado do seguinte modo:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\mathrm{u}_i\ \mathbf{e}_i) \times (\mathrm{v}_j\ \mathbf{e}_j) = \mathrm{u}_i\ \mathrm{v}_j\ (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \tag{1.8}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\mathrm{u}_2\ \mathrm{v}_3 - \mathrm{u}_3\ \mathrm{v}_2)\,\mathbf{e}_1 + (\mathrm{u}_3\ \mathrm{v}_1 - \mathrm{u}_1\ \mathrm{v}_3)\,\mathbf{e}_2 + (\mathrm{u}_1\ \mathrm{v}_2 - \mathrm{u}_2\ \mathrm{v}_1)\,\mathbf{e}_3 =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \mathrm{u}_3 \\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Exemplo 1.2

Mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

Solução:

A quantidade $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *é tal que:* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\sum_{i=1}^{3} \mathrm{u}_i\ \mathbf{e}_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} \mathrm{v}_j\ \mathbf{e}_j\right) = \mathrm{u}_i\ \mathrm{v}_j\ (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) =$

$$= (\mathrm{u}_2\ \mathrm{v}_3 - \mathrm{u}_3\ \mathrm{v}_2)\,\mathbf{e}_1 + (\mathrm{u}_3\ \mathrm{v}_1 - \mathrm{u}_1\ \mathrm{v}_3)\,\mathbf{e}_2 + (\mathrm{u}_1\ \mathrm{v}_2 - \mathrm{u}_2\ \mathrm{v}_1)\,\mathbf{e}_3 \tag{a}$$

A quantidade $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *é tal que:*

$$-(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) = -\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\ \mathbf{e}_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{3} u_j\ \mathbf{e}_j\right) = -v_i\ u_j\ \left(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j\right)=$$

$$= -\left[\left(v_2\ u_3 - v_3\ u_2\right)\mathbf{e}_1 + \left(v_3\ u_1 - v_1\ u_3\right)\mathbf{e}_2 + \left(v_1\ u_2 - v_2\ u_1\right)\mathbf{e}_3\right]=$$

$$= \left(u_2\ v_3 - u_3\ v_2\right)\mathbf{e}_1 + \left(u_3\ v_1 - u_1\ v_3\right)\mathbf{e}_2 + \left(u_1\ v_2 - u_2\ v_1\right)\mathbf{e}_3 \qquad \text{(b)}$$

As expressões (a) e (b) são idênticas o que demonstra a veracidade da igualdade inicial.

O **produto escalar triplo** dos vectores **u**, **v** e **w** é representado por $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}$ e corresponde ao volume de um paralelepípedo, como se representa na figura 1.6 e tem a grandeza:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w} = w_1\left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right) + w_2\left(u_3 v_1 - u_1 v_3\right) + w_3\left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right) =$$

$$= \det\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \qquad (1.10)$$

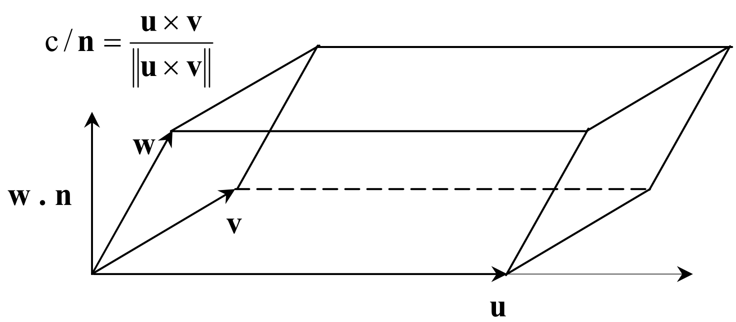

Figura 1.6: Volume e Produto Escalar Triplo.

A representação do **produto escalar triplo** pode ser simplificada recorrendo ao chamado **símbolo permutador** que é representado por ε_{ijk}, tensor de 3ª ordem, o qual pode ser definido do seguinte modo:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se for } (i,\ j,\ k) \text{ em ordem cíclica e com } i,\ j,\ k \text{ distintos} \\ 0 & \text{se for } (i,\ j,\ k) \text{ tal } \textit{que } i = j \textit{ ou } i = k \textit{ ou } j = k \\ -1 & \text{se for } (i,\ j,\ k)\ i,\ j,\ k \text{ distintos e em ordem } \textit{não} \text{ cíclica} \end{cases} \qquad (1.11)$$

As ordens cíclicas de (i, j, k) com i = 1, 3 e k = 1, 3 são (1, 2, 3); (2, 3, 1) e (3, 1, 2). As ordens não cíclicas de (i, j, k) são (3, 2, 1); (1, 3, 2) e (2, 1, 3). Os vinte e sete produtos escalares triplos das bases de vectores $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$ e $\mathbf{e}_k$ são:

$$\left(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j\right).\mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk}$$

Exemplo 1.3

Mostre que $\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{\mathrm{pqk}} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$.

Solução:

Note-se que ε_{ijk} é

$$\varepsilon_{\mathrm{ijk}} = \left(\mathbf{e}_{\mathrm{i}} \times \mathbf{e}_{\mathrm{j}}\right).\ \mathbf{e}_{\mathrm{k}} = \det\begin{bmatrix} \delta_{\mathrm{i1}} & \delta_{\mathrm{i2}} & \delta_{\mathrm{i3}} \\ \delta_{\mathrm{j1}} & \delta_{\mathrm{j2}} & \delta_{\mathrm{j3}} \\ \delta_{\mathrm{k1}} & \delta_{\mathrm{k2}} & \delta_{\mathrm{k3}} \end{bmatrix} =$$

$$= \delta_{\mathrm{i1}}\left(\delta_{\mathrm{j2}}\delta_{\mathrm{k3}} - \delta_{\mathrm{j3}}\delta_{\mathrm{k2}}\right) - \delta_{\mathrm{i2}}\left(\delta_{\mathrm{j1}}\delta_{\mathrm{k3}} - \delta_{\mathrm{j3}}\delta_{\mathrm{k1}}\right) + \delta_{\mathrm{i3}}\left(\delta_{\mathrm{j1}}\delta_{\mathrm{k2}} - \delta_{\mathrm{j2}}\delta_{\mathrm{k1}}\right)$$

Como se pode verificar o 2º membro desta relação só tem 6 valores possíveis. O valor de $\varepsilon_{\mathrm{pqr}}$ *também pode ser calculado de modo análogo:*

$$\varepsilon_{\mathrm{pqr}} = \left(\mathbf{e}_{\mathrm{p}} \times \mathbf{e}_{\mathrm{q}}\right).\ \mathbf{e}_{\mathrm{r}} = \det\begin{bmatrix} \delta_{\mathrm{p1}} & \delta_{\mathrm{p2}} & \delta_{\mathrm{p3}} \\ \delta_{\mathrm{q1}} & \delta_{\mathrm{q2}} & \delta_{\mathrm{q3}} \\ \delta_{\mathrm{r1}} & \delta_{\mathrm{r2}} & \delta_{\mathrm{r3}} \end{bmatrix} =$$

$$= \delta_{\mathrm{p1}}\left(\delta_{\mathrm{q2}}\delta_{\mathrm{r3}} - \delta_{\mathrm{q3}}\delta_{\mathrm{r2}}\right) - \delta_{\mathrm{p2}}\left(\delta_{\mathrm{q1}}\delta_{\mathrm{r3}} - \delta_{\mathrm{q3}}\delta_{\mathrm{r1}}\right) + \delta_{\mathrm{p3}}\left(\delta_{\mathrm{q1}}\delta_{\mathrm{r2}} - \delta_{\mathrm{q2}}\delta_{\mathrm{r1}}\right)$$

Para i=1 é: $\varepsilon_{\mathrm{ijk}} = \delta_{\mathrm{i1}}\left(\delta_{\mathrm{j2}}\delta_{\mathrm{k3}} - \delta_{\mathrm{j3}}\delta_{\mathrm{k2}}\right)$ e $\varepsilon_{\mathrm{pqr}} = \delta_{\mathrm{p1}}\left(\delta_{\mathrm{q2}}\delta_{\mathrm{r3}} - \delta_{\mathrm{q3}}\delta_{\mathrm{r2}}\right)$. Consequentemente para i=1 é

$$\varepsilon_{\mathrm{ijk}}\ \varepsilon_{\mathrm{pqr}} = \delta_{\mathrm{i1}}\left(\delta_{\mathrm{j2}}\delta_{\mathrm{k3}} - \delta_{\mathrm{j3}}\delta_{\mathrm{k2}}\right)\ \delta_{\mathrm{p1}}\left(\delta_{\mathrm{q2}}\delta_{\mathrm{r3}} - \delta_{\mathrm{q3}}\delta_{\mathrm{r2}}\right) = \delta_{\mathrm{ip}}\left(\delta_{\mathrm{jq}}\delta_{\mathrm{kr}} - \delta_{\mathrm{jr}}\delta_{\mathrm{kq}}\right)$$

Para i qualquer é:

$$\varepsilon_{\mathrm{ijk}}\ \ \varepsilon_{\mathrm{pqr}} = \det\begin{bmatrix} \delta_{\mathrm{ip}} & \delta_{\mathrm{iq}} & \delta_{\mathrm{ir}} \\ \delta_{\mathrm{jp}} & \delta_{\mathrm{jq}} & \delta_{\mathrm{jr}} \\ \delta_{\mathrm{kp}} & \delta_{\mathrm{kq}} & \delta_{\mathrm{kr}} \end{bmatrix} =$$

$$= \delta_{\mathrm{ip}}\left(\delta_{\mathrm{jq}}\delta_{\mathrm{kr}} - \delta_{\mathrm{jr}}\delta_{\mathrm{kq}}\right) - \delta_{\mathrm{iq}}\left(\delta_{\mathrm{jp}}\delta_{\mathrm{kr}} - \delta_{\mathrm{jr}}\delta_{\mathrm{kp}}\right) + \delta_{\mathrm{ir}}\left(\delta_{\mathrm{jp}}\delta_{\mathrm{kq}} - \delta_{\mathrm{jq}}\delta_{\mathrm{kp}}\right)$$

Fazendo no 2º membro da relação anterior r=k obtém-se:

$$\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\,\delta_{jq} - \delta_{iq}\,\delta_{jp}$$

Fazendo uso do símbolo permutador o produto vectorial **u**×**v** pode ser escrito com a forma

$$u \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk}\ u_i v_j \mathbf{e_k}$$

No caso dos vectores u e v serem os vectores base $\mathbf{e}_i$ **e** $\mathbf{e}_j$, o produto vectorial é:

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk}\ \mathbf{e_k}$$

como resulta da definição do símbolo permutador.

Os escalares ε_{ijk} são referidos como sendo as componentes do tensor permutador e fazendo uso destes símbolos, o **produto escalar triplo** pode ser representado por:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \ .\ \mathbf{w} = u_i\ v_j\ w_k\ \varepsilon_{ijk} \tag{1.12}$$

Demonstra-se facilmente que o segundo membro da equação 1.12 é equivalente ao 2º membro da equação 1.10.

Outro produto triplo é o chamado, **produto vectorial triplo** de três vectores **u,v,w**, representado por **u**×**(v**×**w)** e tendo em conta a definição de produto vectorial pode ser calculado a partir das componentes dos vectores **u,v,w** do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \varepsilon_{ijk}\, u_i \left(\varepsilon_{mnj}\, v_m\, w_n\right)\mathbf{e}_k = \varepsilon_{kij}\, \varepsilon_{mnj}\, u_i\, v_m\, w_n\, \mathbf{e}_k \\
&= \left(\delta_{km}\,\delta_{in} - \delta_{kn}\,\delta_{im}\right) u_i\, v_m\, w_n\, \mathbf{e}_k \\
&= u_n\, v_k\, w_n\, \mathbf{e}_k - u_m\, v_m\, w_k\, \mathbf{e}_k \\
&= \mathbf{(u.w)\ v\text{-}(u.v)\ w}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

O produto vectorial triplo é em geral não associativo, como se pode constatar.

Exemplo 1.4

Mostre $\mathbf{(u \times v) \times w = (u.w)\ v\text{-}(v.w)\ u.}$

Solução:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (u_i\, \mathbf{e}_i \times v_j\, \mathbf{e}_j) \times w_k\, \mathbf{e}_k = u_i\, v_j\, w_k\, (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \times \mathbf{e}_k = u_i\, v_j\, w_k\, \varepsilon_{ijm}\, (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_k) =$$

$= u_i\, v_j\, w_k\, \varepsilon_{ijm}\, \varepsilon_{mkn}\, \mathbf{e}_n = (\delta_{ik}\, \delta_{jn} - \delta_{in}\, \delta_{jk}) u_i\, v_j\, w_k\, \mathbf{e}_n = u_k\, v_n\, w_k\, \mathbf{e}_n - u_n\, v_k\, w_k\, \mathbf{e}_n =$

$= (\mathbf{u.w})\, \mathbf{v} - (\mathbf{v.w})\, \mathbf{u}.$ *c.q.d.*

Este vector está contido no plano **u,v** *e é em geral distinto de 1.13.*

1.3.3 PRODUTO TENSORIAL DE VECTORES

O **produto tensorial** de dois vectores **u** e **v** é um **tensor de 2ª ordem**, $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, este tensor pode actuar num vector **w**. A definição de produto tensorial está incluída na igualdade seguinte

$$[\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}]\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \tag{1.14}$$

De acordo com a expressão anterior, o tensor $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ actua no vector **w**, sendo o resultado um vector que tem a direcção e sentido do vector **u** e cujo comprimento é igual a $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\|\mathbf{u}\|$ ou seja o comprimento original de **u** multiplicado pelo produto escalar de **v** e **w**.

Por outras palavras, considerando os espaços vectoriais E, de dimensão p e F de dimensão q (sobre o mesmo corpo k), chama-se produto tensorial dos dois espaços um terceiro espaço vectorial sobre k que é designado por $E \otimes F$ que satisfaz as condições seguintes:

1. A cada para de vector $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} \in E$ e $\mathbf{v} \in F$, está associado um elemento $E \otimes F$, chamado produto tensorial de **u** por **v** e designado por $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, de tal modo que

- **a)** $\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \otimes v_2$ (Lei Distributiva)
- **b)** $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}$ "
- **c)** $(\lambda\, \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} = \lambda\, (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \otimes (\lambda\, \mathbf{v})$ (Lei Associativa)

2. Se $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_p\}$ for uma base de vectores de E e $\{\mathbf{f}_1, \ldots \mathbf{f}_q\}$ for uma base de vectores de F, os pq vectores $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha$ constituem uma base de $E \otimes F$ (espaço de dimensão pq).

As condições 1a) b) c) e 2 permitem-nos concluir que, com $\mathbf{u} = u_i\ \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{v} = v_\alpha\ \mathbf{f}_\alpha$, o elemento $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ do produto se pode escrever na forma

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u_i\ \mathbf{e}_i) \otimes (v_\alpha\ \mathbf{f}_\alpha) = u_i\ v_\alpha\ (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha)$$

com pq escalares $u_i\ v_\alpha\ (i = 1, ...; \alpha = 1, ...q)$ como componentes do vector $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ na base tensorial $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha$.

O **produto tensorial** dos vectores de base $\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{e}_j$ do espaço tridimensional, $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ representa um conjunto de tensores de 2ª ordem. Uma vez que o número de vectores base é 3, existem 9 combinações de produtos tensoriais entre eles.

Os 9 tensores, $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, constituem uma *base adequada* para representar as componentes de um **tensor de 2ª ordem** e tem uma função semelhante aos vectores base $\mathbf{e}_i$ em relação aos vectores.

O produto tensorial de três vectores dá origem a um tensor de 3ª ordem e é:

$\boldsymbol{R} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$

O produto tensorial é em geral não comutativo.

Exemplo 1.5

O tensor **A** *é um tensor cartesiano de ordem 2. Mostre que a projecção de* **A** *na base ortogonal de vectores* $\mathbf{e}_i$ *é definida de acordo com a relação seguinte*

$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\, \mathbf{e}_j$

onde A_{ij} *são as nove componentes do tensor* **A**.

Solução:

O produto $\mathbf{A}\,\mathbf{e}_j$*, de acordo com a definição de tensor de* 2^a *ordem, pode escrever-se com a seguinte forma*

$\mathbf{A}\,\mathbf{e}_j = A_{mn}(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_j$

De acordo com a definição $[\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}]\ \mathbf{w} = (\mathbf{v}\ .\ \mathbf{w})\ \mathbf{u}$ *o segundo membro da equação anterior pode ser alterado*

$$\mathbf{A}\,\mathbf{e}_j = A_{mn}(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_j = A_{mn}(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_m = A_{mn}\,\delta_{nj}\,\mathbf{e}_m = A_{mj}\,\mathbf{e}_m$$

Multiplicando escalarmente por $\mathbf{e}_i$ *ambos os membros da equação anterior obtém-se:*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\,\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot A_{mj}\,\mathbf{e}_m = A_{mj}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m = A_{mj}\,\delta_{im} = A_{ij}$$ *c.q.d.*

1.4 TENSORES

1.4.1 TENSORES DE 2ª ORDEM

O **tensor de 2ª** ordem **T**, pode ser expresso em termos das componentes T_{ij} relativas à base tensorial $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, como sendo:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\left[\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right] \tag{1.15}$$

ou tendo em conta a convenção dos índices repetidos $\mathbf{T} = T_{ij}\left\lfloor \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right\rfloor$.

Nestas condições as quantidades T_{ij} são valores escalares que dependem da base escolhida para a sua representação. A parte tensorial de **T** está ligada à base de tensores $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$.

À semelhança do que acontece com os vectores, o tensor **T**, ele próprio não depende do sistema de coordenadas escolhido, mas as suas componentes T_{ij} dependem. O tensor é completamente caracterizado pela sua acção nos três vectores base. A acção do tensor **T** no vector base $\mathbf{e}_k$ é:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{e}_k = T_{ij}\left\lfloor \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right\rfloor \mathbf{e}_k \tag{1.16}$$

O produto $\left\lfloor \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right\rfloor \mathbf{e}_k = \left(\mathbf{e}_j \,.\, \mathbf{e}_k\right)\mathbf{e}_i = \delta_{jk}\,\mathbf{e}_i$ pode ser introduzido com a forma $\delta_{jk}\,\mathbf{e}_i$ na equação (1.16), obtendo-se:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{e}_k = T_{ij}\,\mathbf{e}_i \tag{1.17}$$

O tensor **T** a actuar num vector **v** conduz à equação seguinte:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{v} = \left\lfloor T_{ij}\left\lfloor \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right\rfloor\right\rfloor\left(v_k\,\mathbf{e}_k\right) = T_{ij}\,v_k\left\lfloor \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right\rfloor \mathbf{e}_k \tag{1.18}$$

$$\mathbf{T}\,\mathbf{v} = T_{ij}\,v_j\,\mathbf{e}_i \tag{1.19}$$

A componente i do vector **T v** é:

$$(\mathbf{T}\mathbf{v})_i = T_{ij}\,v_j \tag{1.20}$$

Um aspecto relevante relacionado com a convenção dos índices repetidos tem a ver com o facto de o índice repetido poder ser mudado sem alterar o valor da expressão correspondente ou seja:

$$\mathbf{T}\ \mathbf{v} = T_{ij}\ v_j\ e_i = T_{\alpha\beta}\ v_\beta\ e_\alpha \tag{1.21}$$

1.4.2 OPERAÇÕES COM TENSORES DE 2ª ORDEM

A adição de vectores é uma operação já conhecida e foi referida em 1.3.1, a soma dos vectores resultantes do produto de um tensor de 2ª ordem por um vector, pode escrever-se com a seguinte forma

$$\mathbf{T}\ \mathbf{v} + \mathbf{P}\ \mathbf{v} = \underbrace{[\mathbf{T} + \mathbf{P}]}_{\text{soma de tensores}}\ \mathbf{v} \qquad \text{ou seja} \quad T_{ij} v_j + P_{ij} v_j = [T_{ij} + P_{ij}] v_j \tag{1.22}$$

Consequentemente a soma dos tensores **T** + **P** referidos à mesma base tensorial é facilmente calculada da seguinte forma:

$$[\mathbf{T}+\mathbf{P}]_{ij} = T_{ij} + P_{ij} \tag{1.23}$$

onde T_{ij} e P_{ij} representam, as componentes ij dos tensores **T** e **P** respectivamente.

Deve notar-se que a operação adição de tensores à semelhança do que acontece com a operação de adição de vectores é uma operação comutativa.

A multiplicação de um vector, **Tv**, por um escalar, α, também é possível, sendo

$$[\alpha\ \mathbf{T}]\ \mathbf{v} = \alpha\ [\mathbf{T}\ \mathbf{v}] \qquad \text{ou seja} \qquad [\alpha T]_{ij} = \alpha T_{ij} \tag{1.24}$$

A multiplicação por um escalar é uma operação distributiva

$$\alpha\ [\mathbf{T} + \mathbf{P}]_{ij} = \alpha\ T_{ij} + \alpha\ P_{ij} \tag{1.25}$$

O produto escalar de vectores, **u** com o vector **Tv**, **u·T v,** é um escalar. Esta operação não é comutativa, mas existe um processo de obter o mesmo resultado que é transpondo o tensor **T** e trocando a ordem dos vectores, ou seja:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \ \mathbf{T}^T \mathbf{u} \tag{1.26}$$

As componentes do tensor transposto $\mathbf{T}^{\mathbf{T}}$ são tais que $T^T_{ij} = T_{ji}$ como se pode demonstrar. No caso do tensor **T** ser simétrico o tensor transposto $\mathbf{T}^{\mathbf{T}}$ é igual a **T**. Para tensores simétricos, **T**, pode dizer-se que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T v} = \mathbf{v} \cdot \ \mathbf{T u}$, como resulta do facto de para tensores simétricos ser $\mathbf{T}^{\mathbf{T}} = \mathbf{T}$.

O produto de dois tensores é representado por $[\mathbf{PT}]$ e pode ser obtido, considerando

$$[\mathbf{PT}]\ \mathbf{v} = \mathbf{P}\ [\mathbf{T}\ \mathbf{v}]$$

sendo

$$[\mathbf{PT}]_{ij}\ v_j\ \mathbf{e}_i = P_{ik}\ [\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k]\left(T_{mj}\ v_j\ \mathbf{e}_m\right) = \left(P_{ik}\ T_{mj}\ \delta_{km}\right) v_j\ \mathbf{e}_i$$

ou seja tendo em conta que se pode proceder à contracção do índice m,

$$[\mathbf{PT}]_{ij} = P_{ik}\ T_{kj} \tag{1.27}$$

É preciso notar que esta operação é em tudo análoga à operação produto de matrizes. O tensor $\left[\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{T}\right]$ é um tensor de 2ª ordem e é:

$$\left[\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{T}\right]_{ij} = P_{ki}\ T_{kj} \tag{1.28}$$

o qual pode ser obtido considerando o produto escalar

$$\mathbf{P}\ \mathbf{u}\ .\ \mathbf{T}\ \mathbf{v} = \mathbf{u}\ .\ \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\ (\mathbf{T}\ \mathbf{v}) = \mathbf{u}\ .\left[\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\ \mathbf{T}\right]\mathbf{v} \tag{1.29}$$

Note-se que no caso de ser **P = T**, o produto $\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\ \mathbf{T}$ é um tensor simétrico mesmo que o tensor **T** não seja simétrico.

Um tensor que é frequentemente utilizado é o **tensor identidade I** que tem a propriedade de ser tal que **I v = v** para todos os vectores **v**. O tensor identidade pode ser calculado em termos dos vectores base como sendo,

$$\mathrm{I} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \delta_{ij}\left[\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right] \tag{1.30}$$

onde as somas em i e em j estão subentendidas.

Note-se que a equação anterior pode ser demonstrada calculando o produto do tensor **I** pelo vector base e_j.

A **norma** do tensor **A** é designada por $\|\mathbf{A}\|$ é um valor não negativo que é igual à raiz quadrada de **A**:**A**.

O tensor **T**, tem um inverso, $\mathbf{T}^{-1}$, tal que

$$\mathbf{T}^{-1}\ (\mathbf{T}\ \mathbf{v}) = \mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}\left(\mathbf{T}^{-1}\ \mathbf{v}\right) = \mathbf{v} \ \ \text{sendo } \mathbf{T}\ \mathbf{T}^{-\mathbf{1}} = \mathbf{T}^{-\mathbf{1}}\ \mathbf{T} = \mathbf{I} \tag{1.31}$$

Em termos das componentes do tensor, esta relação toma a forma

$$T^{-1}_{ik}\, T_{kj} = \delta_{ij} \qquad e \qquad T_{ki}\, T^{-1}_{kj} = \delta_{ij} \tag{1.32}$$

sendo T_{ij} as componentes de **T** e T^{-1}_{ij} as componentes de $\mathbf{T}^{-1}$.

A forma como se calculam as componentes T^{-1}_{ij} a partir das componentes T_{ij} é análoga à considerada nas operações de Cálculo Matricial

Exemplo 1.6

Mostre que o tensor **A** *pode ser considerado igual à soma de um tensor simétrico com um tensor anti-simétrico do seguinte modo:*

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}}{2}$$

Solução:

Considere-se que a decomposição é feita de tal modo que **A=B+C** *sendo* $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}}{2}$ *e* $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}}{2}$ *e pretende-se mostrar que* **B** *é simétrico e* **C** *anti-simétrico.*

$$B_{ij} = \frac{A_{ij} + A^{T}_{ij}}{2} = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} = \frac{A_{ji} + A^{T}_{ji}}{2} = B_{ji} = B^{T}_{ij}$$

Consequentemente **B** *é um tensor simétrico.*

$$C_{ij} = \frac{A_{ij} - A^{T}_{ij}}{2} = \frac{A_{ij} - A_{ji}}{2} = -\frac{A_{ji} - A^{T}_{ji}}{2} = -C_{ji} = -C^{T}_{ij}$$

Consequentemente **C** *é um tensor anti-simétrico.*

O **traço** de um tensor **A**, é um escalar designado por tr**A** que é igual à soma dos elementos da diagonal da forma matricial do tensor de 2ª ordem,

tr**A**= $\mathbf{A}_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$. (1.33)

Em notação indicial a **contracção** significa, identificar dois índices e somar considerando os índices mudos. Em notação simbólica é caracterizada por um ponto entre os dois vectores. Além da contracção simples já referida, é possível considerar a **contracção dupla** de dois tensores **A** e **B**, caracterizada por dois pontos, da qual resulta um escalar. A contracção dupla pode ser definida em termos do traço do seguinte modo:

$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{B} : \mathbf{A}$ ou

$$A_{ij} B_{ij} = B_{ij} A_{ij} \qquad (1.34)$$

As propriedades da contracção dupla são:

$\mathbf{I}{:}\mathbf{A} = \mathrm{tr}\mathbf{A} = \mathbf{A}{:}\mathbf{I}$

$\mathbf{A} : (\mathbf{BC}) = (\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) : \mathbf{C} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}) : \mathbf{B}$

$\mathbf{A} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) : \mathbf{A}$

$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) : (\mathbf{w} \otimes \mathbf{y}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{y})$

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l) = \delta_{ik}\,\delta_{jl} \qquad (1.35)$$

as quais podem ser demonstradas.

Exemplo 1.7

Mostre a partir da definição (1.34) que:

a) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ *b)* $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$

Solução:

a) Multiplicando $\mathbf{AB}$ *à esquerda por* $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$*, obtém-se:*

$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$

consequentemente $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

b) $(\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1})^{\mathbf{T}} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$

Consequentemente $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$

1.4.3 TENSORES DE ORDEM SUPERIOR À 2ª

Um **tensor cartesiano de ordem n** pode escrever-se com a forma

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_n}\, \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \qquad (1.36)$$

Um tensor de ordem n num espaço cartesiano tem 3^n componentes $A_{i_1 i_2 \cdots i_n}$, como se pode facilmente constatar por observação de 1.36. No caso particular de n ser igual a zero, obtém-se um escalar. Um tensor de 1ª ordem é um vector e tem 3 componentes, etc.

O **tensor de 3ª ordem** no espaço cartesiano tem 27 componentes e pode ser escrito com a seguinte forma:

$$\boldsymbol{A} = A_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad \text{sendo } A_{ijk} \text{ as componentes de } \boldsymbol{A}. \tag{1.37}$$

O tensor permutador, ε_{ijk} referido anteriormente é um exemplo de um tensor de 3ª ordem. Os conceitos envolvidos na definição do tensor permutador de 3ª ordem podem ser utilizados para definir o **tensor permutador de ordem n**,

$$E_{i_1,i_2,i_3,\ldots,i_n} = \begin{cases} 1 & \text{se for } (i_1,i_2,i_3,\ldots,i_n) \text{ em ordem cíclica e distintos} \\ 0 & \text{se for } (i_1,i_2,i_3,\ldots,i_n) \text{ tal que } i_1 = i_2 \text{ou } i_2 = i_3 \text{ e/ou...} i_{n-1} = i_n \\ -1 & \text{se for } (i_1,i_2,i_3,\ldots,i_n) \text{ distintos e em ordem não cíclica} \end{cases}$$

(1.38)

Outro exemplo particular de um tensor de 3ª ordem é o chamado **produto triádico** de três vectores **u,v,w,** representado por **u**⊗**v**⊗**w**, com as características seguintes

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\otimes\mathbf{w}=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}$$

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})\mathbf{x}=(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x})\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}):(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{y})\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}):\mathbf{I}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u} \tag{1.39}$$

A **contracção dupla** de um tensor de 3ªordem, ***A*** com um tensor de 2ª ordem, **B** produz um vector, como se pode verificar:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} : \mathbf{B} &= A_{ijk} B_{lm} (\mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j} \otimes \mathbf{e_k}) : (\mathbf{e_l} \otimes \mathbf{e_m}) \\ &= A_{ijk} B_{lm} (\mathbf{e_j} \cdot \mathbf{e_l})(\mathbf{e_k} \cdot \mathbf{e_m}) \mathbf{e_i} \\ &= A_{ijk} B_{lm} \delta_{jl} \delta_{km} \mathbf{e_i} \\ &= A_{ijk} B_{jk} \mathbf{e_i} \end{aligned} \tag{1.40}$$

Os **tensores cartesianos de 4ª ordem** que podem ser representados por $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\ldots$têm 81 componentes e podem exprimir-se em termos dos vectores base cartesianos do seguinte modo

$$\mathbb{A} = A_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \tag{1.41}$$

O produto tensorial de dois tensores de 2ª ordem é um tensor de 4ª ordem e pode representar-se esse produto em notação simbólica como $\mathbb{C}=\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ a que corresponde a notação indicial $C_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$.

As operações de **contracção simples e dupla** consideradas para os tensores de 2ª ordem podem ser utilizadas para tensores de ordem superior à 2ª , tornando-se também possível contracções de ordem superior.

1.5 MUDANÇA DE BASE

Considere-se dois sistemas de coordenadas cartesianas, o 1º com uma base de vectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e o 2º com uma base de vectores ortogonal $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$. Um vector **v** no espaço pode ser conhecido em termos das suas componentes numa base ou noutra base ortonormada, como se mostra na figura 1.7.

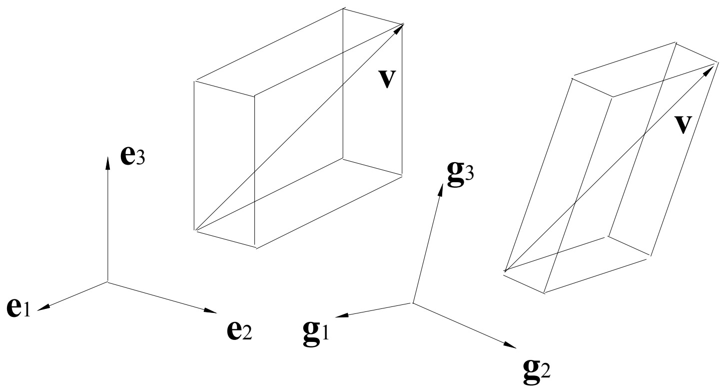

Figura 1.7: Componentes do Vector **v** em Sistemas de Coordenadas Distintas.

$$\mathbf{v} = v_j \, \mathbf{e}_j = v'_j \, \mathbf{g}_j \tag{1.42}$$

A relação entre os dois conjuntos de componentes pode ser obtida considerando o produto escalar do vector **v** por uma das bases de vectores, por exemplo, $\mathbf{e}_i$, ou seja:

$$\mathbf{e}_i\ \mathbf{v} = v_i = v'_i\ (\mathbf{e}_i\ .\ \mathbf{g}_i) \quad \text{ou} \quad v_i = Q_{ij}\ v'_j \tag{1.43}$$

tendo em conta que $v_j\ (\mathbf{e}_i\ .\ \mathbf{e}_j) = v_j\ \delta_{ij} = v_i$.

Os produtos escalares $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g}_j)$ correspondem a nove valores escalares, as componentes do **tensor de transformação** ou de **mudança de coordenadas**, **Q**, que são:

$$Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g}_j \tag{1.44}$$

os escalares Q_{ij} são os cosenos dos ângulos entre os nove pares de vectores base.

As componentes do tensor de segunda ordem, **T,** podem ser estabelecidas em duas bases de vectores ortonormadas de modo análogo ao considerado para o vector **v**, ou seja:

$$\mathbf{T} = T'_{ij}\ [\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j] = T_{ij}\ [\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j] \tag{1.45}$$

onde T'_{ij} é a componente ij do tensor **T** na base tensorial $[\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j]$ e T_{ij} é a componente ij na base de tensores $[\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j]$. A relação entre as componentes nos dois sistemas de coordenadas pode ser obtida, calculando o produto $\mathbf{g}_m\ .\ \mathbf{T}\mathbf{g}_n$, do seguinte modo

$$\mathbf{g}_m \cdot \mathrm{T}\mathbf{g}_n = T'_{mn} = T_{ij}\,(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g}_m)\,(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{g}_n) \tag{1.46}$$

Designando por $Q_{ij} = \mathbf{g}_i\ .\ \mathbf{e}_j$, a formula anterior pode ser escrita com a seguinte forma

$$T'_{mn} = Q_{mi}\ Q_{nj}\ T_{ij} \tag{1.47}$$

Portanto um tensor de 1ª ordem recorre a um **tensor de transformação, Q**, com componentes Q_{ij} para efeito de mudança de eixos, um tensor de 2ª ordem recorre a dois tensores de transformação.

No caso de se tratar **duma transformação ortogonal**, os tensores de transformação têm componentes tais que

$$Q_{ki}\ Q_{kj} = \delta_{ij} \tag{1.48}$$

$$Q_{ik}\ Q_{jk} = \delta_{ij}$$

Estas equações podem ser facilmente demonstradas recorrendo à definição de Q_{ij}.

Exemplo 1.8.

O sistema de eixos Ox'_1, x'_2, x'_3 *é obtido a partir do sistema de eixos* Ox_1, x_2, x_3 *considerando uma rotação de 45º no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio em torno do eixo* x_3. *Determine:*

a) as componentes do vector $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ *no sistema de eixos* Ox'_1, x'_2, x'_3

b) *as componentes do tensor*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no sistema de eixos Ox'_1, x'_2, x'_3.

Solução

a)As componentes do tensor de transformação são:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Consequentemente:

$$\begin{Bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

b)O tensor $\mathbf{A}'$ *é:*

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Os tensores de 2ª ordem T_{ij} têm propriedades que não dependem da escolha das bases em que estão definidos e que são os chamados invariantes dos tensores. Os invariantes dos tensores são tais que:

$$f\left(Q_{ik}, Q_{j\ell}, T_{k\ell}\right) = f\left(T_{ij}\right) \tag{1.49}$$

sendo f uma função invariante do tensor.

Os invariantes do tensor, **T**, considerados fundamentais são:

$$\begin{aligned} I_T &= T_{ii} \\ II_T &= T_{ij}\ T_{ji} \\ III_T &= T_{ij}\ T_{jk}\ T_{ki} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Uma generalização para o caso de tensores de ordem superior à 2ª, da lei de transformação de tensores de um sistema de eixos noutro sistema de eixos é:

$$T'_{mn\ldots p} = Q_{mi}\ Q_{nj} \ldots Q_{pk}\ T_{ij\ldots k}$$

sendo o número de tensores de transformação igual à ordem do tensor.

1.6. VALORES PRÓPRIOS DE TENSORES SIMÉTRICOS DE 2ª ORDEM

O produto interno de um tensor **T** por um vector **u**

$$\mathbf{Tu = v} \quad \text{ou} \quad T_{ij} u_j = v_j \tag{1.51}$$

pode ser visto como uma transformação linear pela qual o vector **u** é transformado através do tensor **T** num vector imagem **v** num espaço Euclidiano tridimensional. No caso particular do tensor **T** ser simétrico, com componentes reais T_{ij}, definido em cada ponto do espaço, associado a cada direcção no espaço, definida pelo vector unitário **n** num ponto, existe um vector imagem **v** tal que

$$\mathbf{T.n = v} \quad \text{ou} \quad T_{ij} n_j = v_i \tag{1.52}$$

No caso do vector **v** ser um múltiplo escalar de **n**, **v** = λ**n**, então a equação 1.52 toma a forma

$$\mathbf{T.n} = \lambda\ \mathbf{n} \quad \text{ou} \quad T_{ij} n_j = \lambda\, n_i \tag{1.53}$$

sendo a direcção **n** chamada de **direcção principal** ou **vector próprio** de **T** e o escalar λ chamado de **valor principal** ou **valor próprio de T**. As equações 1.53 constituem um sistema de equações a que se pode dar a forma

$(\mathbf{T}-\lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{n} = 0$ ou $(T_{ij} - \lambda\,\delta_{ij})\,n_j = 0$ (1.54)

Este sistema homogéneo de equações para as incógnitas **n** e λ , tem uma solução não trivial se o determinante dos coeficientes for nulo, isto é

$|\mathbf{T}-\lambda\,\mathbf{I}| = 0$ ou $\left|T_{ij} - \lambda\,\delta_{ij}\right| = 0$ (1.55)

por expansão do qual se obtém uma equação cúbica em λ, conhecida por **equação característica** e que tem a forma

$$\lambda^3 - I_T\,\lambda^2 + II_T\,\lambda - III_T = 0 \quad (1.56)$$

onde os coeficientes de λ podem exprimir-se do seguinte modo em termos das componentes do tensor **T**

$$I_T = \mathrm{tr}\mathbf{T} = T_{ii}$$

$$II_T = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\mathbf{T})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{T}^2)\right] = \frac{1}{2}\left[T_{ii}\ T_{jj} - T_{ij}\ T_{ji}\right] \quad (1.57)$$

$$III_T = \det\mathbf{T} = \varepsilon_{ijk}\,T_{1i}\ T_{2j}\ T_{3k}$$

sendo estas quantidades conhecidas como **1º, 2º e 3º invariantes escalares principais do tensor T**, respectivamente.

As raízes da equação 1.56 são reais desde que o tensor T seja simétrico e com componentes reais.

O cálculo dos **vectores principais** faz-se recorrendo ás equações 1.54 e á condição de ser $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$. É possível demonstrar que os vectores principais são mutuamente ortogonais.

Qualquer tensor simétrico **T** pode ser representado pelos seus valores próprios λ_i e pelos vectores próprios correspondentes que formam uma base ortogonal $\mathbf{n}_i$. Tendo em conta que $\mathbf{I} = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ e que **T=TI**, sendo **I o tensor identidade** obtém-se a chamada **decomposição espectral** de **T** que é

$$\mathbf{T} = \mathbf{TI} = (\mathbf{T}\,\mathbf{n}_i) \otimes \mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\,\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (1.58)$$

O tensor **T na base das direcções principais** é um tensor diagonal, cujos valores diagonais são os valores próprios de **T**, ou seja

$$T'_{ij} = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{T}\,\mathbf{n}_j = \mathbf{n}_i \cdot \lambda_j\,\mathbf{n}_j = \lambda_j\,\delta_{ij}$$

Este resultado pode ser obtido directamente da decomposição espectral 1.58.

Exemplo 1.9.

Determine os valores próprios e vectores próprios do tensor, **T**, *cujas componentes são:*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

Os invariantes do tensor **T,** *são:*

$$I_T = \mathrm{tr}(\mathbf{T}) = 1$$

$$II_T = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\mathbf{T})^2 + \mathrm{tr}\left(\mathbf{T}\right)^2\right] = -39$$

$$III_T = \det \mathbf{T} = -99$$

A equação característica toma a forma:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 39\lambda - 99 = 0$$

Resolvendo obtém-se:

$$\lambda_1 = -6.8310; \lambda_2 = 4.831; \lambda_3 = 3.0000$$

que são os valores principais do tensor **T.**

As equações que permitem a obtenção dos vectores próprios são:

$$(2-\lambda)n_1 + 5n_2 = 0$$
$$5n_1 + (-4-\lambda)n_2 = 0$$
$$(3-\lambda)n_3 = 0$$

Para cada um dos valores de λ arbitra-se um dos valores de n_i *e resolve-se o sistema de equações para obter os restantes valores de* n_i *e seguidamente normalizam-se os vectores obtidos. Os vectores próprios são:*

$$v_1 = \begin{Bmatrix} 0.4927 \\ -0.8702 \\ 0 \end{Bmatrix}; v_2 = \begin{Bmatrix} -0.8702 \\ -0.4927 \\ 0 \end{Bmatrix}; v_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

1.7 CAMPOS ESCALARES, CAMPOS VECTORIAIS E CAMPOS TENSORIAIS

Um campo corresponde essencialmente a uma função que é definida num domínio contínuo. Uma função tensorial é uma função cujos argumentos são uma ou mais variáveis tensoriais cujos valores são escalares, vectores ou tensores.

Um campo escalar está associado a uma função $f(\mathbf{x})$ cujo valor para um ponto x do domínio contínuo é um escalar, um campo vectorial está associado a um função cujo valor num ponto é um vector e um campo tensorial está associado a uma função cujo valor num ponto é um tensor. As funções ϕ(**A**), **u(A)** e **T(A)** são exemplos de **funções escalares, vectoriais e tensoriais** de um tensor variável **A.** O tensor variável pode ser visto duma forma geral e pode ser um escalar, um vector ou um tensor de ordem superior.

Um **campo escalar** $f(\mathbf{x})$ pode ser desenvolvido em **série de Taylor** do seguinte modo

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{dx}) = f(\mathbf{x}) + df + o(d\mathbf{x}) \quad \text{com} \quad df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x}$$

O termo **o**(dx) tende para zero quando d**x** tende para zero. A quantidade df pode ser escrita com a seguinte forma

$$df = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} e_j \cdot d\mathbf{x} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \tag{1.59}$$

A grandeza $\nabla f(\mathbf{x})$ associada à função escalar é o chamado **gradiente** o qual dá uma indicação do modo como o campo escalar varia quando se muda de um ponto para outro do campo. O gradiente de uma função $f(\mathbf{x})$ é um campo vectorial. O gradiente é um vector que tem um sentido tal que indica a direcção segundo a qual o campo está a mudar mais rapidamente. A dimensão do vector $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$ indica a velocidade de mudança do campo escalar em determinada direcção.

O **gradiente** de um campo escalar ϕ**(A)** de variável tensorial **A** pode ser obtido considerando o desenvolvimento em série de Taylor de ϕ**(A+dA)**, ou seja

$$\phi(\mathbf{A}+\mathbf{dA}) = \phi(\mathbf{A}) + d\phi + o(\mathbf{dA})$$

$$\text{sendo } d\phi = \frac{\partial \phi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} : d\mathbf{A} = \mathbf{tr}\left[\left(\frac{\partial \phi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}}\right)^{\mathbf{T}} d\mathbf{A} \right] = \mathrm{tr}\left[\left(\mathrm{grad}_A \phi(\mathbf{A})\right)^{\mathrm{T}} \cdot d\mathbf{A} \right] \tag{1.60}$$

Um campo vectorial é uma função vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ que define um vector em cada ponto do domínio. As operações de multiplicação de vectores podem ser consideradas num campo vectorial, nomeadamente os produtos escalar, vectorial e tensorial. Associado a uma função vectorial pode definir-se o vector gradiente de um campo vectorial do seguinte modo

$$\operatorname{grad}_x \mathbf{v} = \nabla \otimes \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{1.61}$$

cujas componentes cartesianas são:

$$\operatorname{grad}_x \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{1.62}$$

No caso do campo escalar a quantificação da mudança pode ser feita por consideração do gradiente, no caso do campo vectorial a quantificação da mudança pode ser feita por consideração da chamada **divergência** do vector, a qual é definida como sendo

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{v}.\mathbf{n} \quad dS \tag{1.63}$$

onde ds é um elemento de área de dimensões infinitésimos sobre a superfície do domínio de volume V.

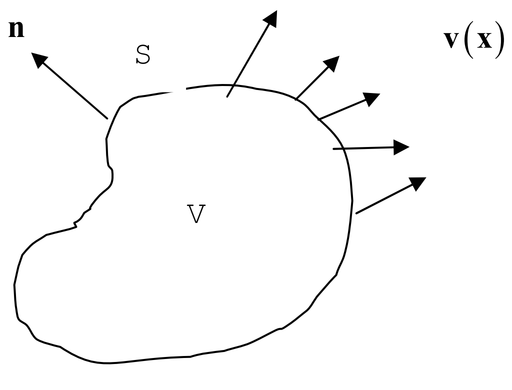

Figura 1.8: Sólido no espaço.

A grandeza $\int_S$ **v** . **n** ds é por vezes referida como sendo o **fluxo**.

É possível demonstrar que:

$$\text{div } \mathbf{v}\,(\mathbf{x}) = \frac{\partial\, \mathbf{v}\,(\mathbf{x})}{\partial\, x_i}\, \mathbf{e}_i = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \text{tr}(\text{grad}_{\mathbf{x}}\, \mathbf{v}) \tag{1.64}$$

O chamado **teorema da divergência** traduz-se na igualdade seguinte:

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} \text{ dV} = \int_S \mathbf{v} \,.\, \mathbf{n} \text{ dA} \tag{1.65}$$

No caso dos campos tensoriais de variável **x**, a **divergência** de um campo tensorial é:

$$\text{div } \mathbf{T}\,(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \tag{1.66}$$

O teorema da divergência para um campo tensorial é traduzido pela seguinte equação, ou seja:

$$\int_v \text{div } \mathbf{T} \text{ dv} = \int_S \mathbf{Tn} \text{ ds} \tag{1.67}$$

Algumas das grandezas relevantes em Mecânica dos Sólidos são grandezas que podem incluir-se no tipo de grandezas representáveis por funções escalares, vectoriais e tensoriais.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Mostre que $\|\mathbf{v}\|^2 = v_i\ v_i$ (use o conceito de produto escalar)

2. Calcule o valor das seguintes expressões

a) δ_{ii} **b)** $\delta_{ij}\ \delta_{ij}$ **c)** $\mathbf{e}_i \,.\, \mathbf{e}_j$ sendo $\mathbf{e}_i$ um vector unitário **d)** $\delta_{ij}\ u_i\ u_j$

e) $\delta_{ik}\ \delta_{jk}\ T_{ij}$ **f)** $\varepsilon_{ijk}\, \delta_{kj}$

3. Os valores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ têm componentes num mesmo sistema de eixos que são: $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)$. Calcule o comportamento dos vectores e o ângulo que formam entre si. Determine a área do paralelogramo formado pelos vectores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

4. Mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_i \; v_j \left(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j\right)$.

5. Mostre que $(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

6. Mostre que o tensor $A^T A$ é um tensor simétrico.

7. Mostre que $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$

8. Mostre que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$.

9. Mostre que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2\right)$

10. Mostre que o produto escalar triplo é anti-simétrico ou seja que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}$$

11. Mostre que $[\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}]^T = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ (Note que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b}\; \mathbf{T}^T \mathbf{a}$)

12. Mostre que $\det T = \varepsilon_{ijk} \quad T_{i1} \quad T_{j2} \quad T_{k3}$

13. Mostre que $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} . \det \mathbf{B}$

14. Considere dois sistemas de eixos cartesianos um com base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e o outro com base $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ tal que a matriz de transformação $Q_{ij} \equiv \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_j$ é constituída pelos cosenos directos dos ângulos formados pelos vectores base $\mathbf{g}_i$ e $\mathbf{e}_j$.

a) Mostre que $\mathbf{g}_i = Q_{ij} \; \mathbf{e}_j$ e que $\mathbf{e}_i = Q_{ij} \; \mathbf{g}_j$

b) Pode definir-se um tensor de rotação **Q** tal que $\mathbf{e}_i = Q \quad \mathbf{g}_i$. Mostre que este tensor pode ser definido do seguinte modo $\mathbf{Q} = Q_{ij} \lfloor \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \rfloor$ e que Q_{ij} são as componentes do tensor na base $\lfloor \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \rfloor$. Mostre que o tensor pode exprimir-se com a forma $\mathbf{Q} = \lfloor \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{g}_j \rfloor$

c) Mostre que o produto $\mathbf{Q}^T \; \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, e que **Q** é um tensor ortogonal.

15. Calcule o tensor $\mathbf{T}^{-1}$ no caso do tensor **T** ter as componentes seguintes

$$\mathbf{T} \approx \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

16. Determine a relação entre os valores principais de **C** e **E** no caso de ser $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}\text{-}\mathbf{I})$

17. Determine os valores principais e os vectores principais do tensor simétrico

$$\mathrm{T} \approx \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 5/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

18. Considere a função vectorial $\mathbf{v}(\mathrm{x}) = \mathrm{u}_2\ \mathrm{u}_3\ \mathrm{e}_1 + \mathrm{u}_1\ \mathrm{u}_3\ \mathrm{e}_2 + \mathrm{u}_1\ \mathrm{u}_2\ \mathrm{e}_3$ e calcule o gradiente $\nabla\ \mathbf{v}$ e a divergência do campo vectorial, div **v**.

19. Considere as funções vectoriais $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ e a função tensorial $\mathbf{T}(\mathbf{x})$. Calcule os valores seguintes

a) $\nabla(\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v})$ **b)** $\mathrm{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ **c)** $\nabla(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ **d)** $\mathrm{div}(\mathbf{T}\ \mathbf{v})$ **e)** $\nabla(\mathbf{u} \,.\, \mathbf{T}\ \mathbf{v})$

d) $\nabla(\mathbf{T}\ \mathbf{v})$ **g)** $\mathrm{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$ **h)** $\mathrm{div}\left[(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\ \mathbf{w}\right]$ **i)** $\nabla\left[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \,.\, \mathbf{w}\right]$

BIBLIOGRAFIA

Dias Agudo, F. A.[1978] "*Int. à Alg. Linear e Geometria Analítica",* Livraria Escolar Editora, Lisboa.

Simmonds, J.G. [1982] "*A brief on tensor analysis*", Springer-Verlag, New York.

Danielson, D.A.[1997], "*Vectors and Tensors in Engineering and Physics"*, 2nd edn, Addison-Wesley Publishing Company, Reading.

Holzapfel, G.A.[2000], "*Nonlinear Solid Mechanics"*, John Willey&Sons.

Truesdell, C. and Noll W. [1992], "*The Nonlinear Field Theories of Mechanics"*, 2nd edn, Springer Verlag, Berlin.