5. Análise de Complexidade de Algoritmos

João Pascoal Faria (versão original)
Ana Paula Rocha (versão 2003/2004)
Luís Paulo Reis (versão 2005/2006)

Introdução

- Algoritmo: conjunto claramente especificado de instruções a seguir para resolver um problema
- Análise de algoritmos:
  - provar que um algoritmo está correcto
  - determinar recursos exigidos por um algoritmo (tempo, espaço, etc.)
    - comparar os recursos exigidos por diferentes algoritmos que resolvem o mesmo problema (um algoritmo mais eficiente exige menos recursos para resolver o mesmo problema)
    - prever o crescimento dos recursos exigidos por um algoritmo à medida que o tamanho dos dados de entrada cresce

Complexidade Espacial e Temporal

- Complexidade espacial de um programa ou algoritmo: espaço de memória que necessita para executar até ao fim
  S(n) - espaço de memória exigido em função do tamanho (n) da entrada
- Complexidade temporal de um programa ou algoritmo: tempo que demora a executar (tempo de execução)
  T(n) - tempo de execução em função do tamanho (n) da entrada
- Complexidade ↑ versus Eficiência ↓
- Por vezes estima-se a complexidade para:
  - o "melhor caso" (pouco útil)
  - o "pior caso" (mais útil)
  - o "caso médio" (igualmente útil)

3

Notação de *O* grande

- Na prática, é difícil (senão impossível) prever com rigor o tempo de execução de um algoritmo ou programa
  - Para obter o tempo a menos de:
    - constantes multiplicativas (normalmente estas constantes são tempos de execução de operações atómicas)
    - parcelas menos significativas para valores grandes de *n*
  - Identificam-se as operações dominantes (mais frequentes ou muito mais demoradas) e determina-se o número de vezes que são executadas (e não o tempo de cada execução, que seria uma constante multiplicativa)
  - Exprime-se o resultado com a notação de *O* grande

4

Notação de *O* grande

- Definição:

  $T(n) = O(f(n))$ (ler: $T(n)$ é de ordem $f(n)$)

  se e só se existem constantes positivas c e n_0 tal que $T(n) \leq cf(n)$ para todo o $n > n_0$

- Exemplos:

  $c_k\, n^k + c_{k-1}\, n^{k-1} + \ldots + c_0 = O(n^k)$ (c_i - constantes)

  $\log_2 n = O(\log n)$

  (não se indica a base porque mudar de base é multiplicar por constante)

  $4 = O(1)$ (usa-se 1 para ordem constante)

5

Ordens mais comuns

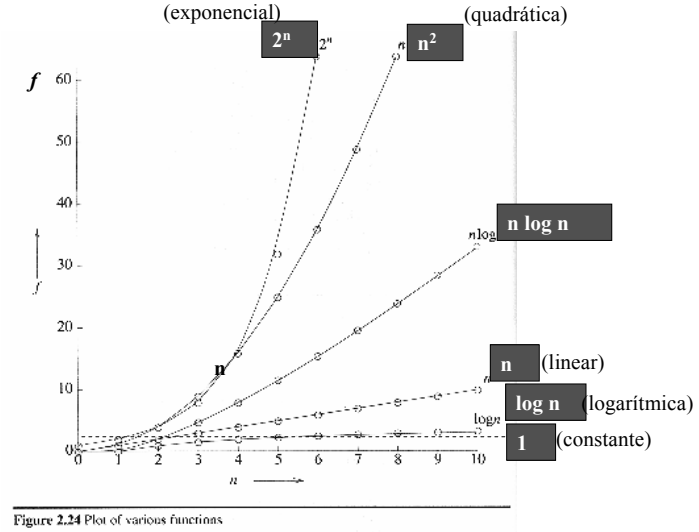


Figure 2.24 Plot of various functions

Fonte: Sahni, "Data Structures, Algorithms and Applications in C++"

6

Termo Dominante

- Suponha que se usa N^3 para estimar $N^3+350N^2 + N$
- Para $N = 10000$
  - Valor real = 1 003 500 010 000
  - Valor estimado = 1 000 000 000 000
  - Erro = 0.35% (não é significativo)
- Para valores elevados de N
  - o termo dominante é indicativo do comportamento do algoritmo
- Para valores pequenos de N
  - o termo dominante não é necessariamente indicativo do comportamento, mas geralmente, programas executam tão rapidamente que não importa

7

Eficiência da Pesquisa Sequencial

- Eficiência temporal de SequentialSearch
  - A operação realizada mais vezes é o teste da condição de continuação do ciclo **for**, no máximo **n+1** vezes (no caso de não encontrar **x**).
  - Se **x** existir no array, o teste é realizado aproximadamente **n/2** vezes em média (1 vez no melhor caso)
  - **T(n) = *O(n)*** (linear) no pior caso e no caso médio
- Eficiência espacial de SequentialSearch
  - Gasta o espaço das variáveis locais (incluindo argumentos)
  - Como os arrays são passados "por referência" (de facto o que é passado é o endereço do array), o espaço gasto pelas variáveis locais é constante e independente do tamanho do array
  - **S(n) = *O(1)*** (constante) em qualquer caso

8

Eficiência Temporal da Pesquisa Binária

- Em cada iteração, o tamanho do sub-array a analisar é dividido por um factor de aproximadamente 2
- Ao fim de **k** iterações, o tamanho do sub-array a analisar é aproximadamente $\mathbf{n / 2^k}$
- Se não existir no array o valor procurado, o ciclo só termina quando $\mathbf{n / 2^k \approx 1} \Leftrightarrow \log_2 n - k \approx 0 \Leftrightarrow \mathbf{k \approx \log_2 n}$

- Assim, no pior caso, o nº de iterações é aproximadamente $\log_2 n$

  $\Rightarrow$ **T(n) = *O(log n)*** (logarítmico)

- É muito mais eficiente que a pesquisa sequencial, mas só é aplicável a arrays ordenados!

9

Eficiência da Ordenação por Inserção

- **InsertSorted(v, n, x) :**
  - o nº de iterações do ciclo `for` é:
    - **1**, no melhor caso
    - **n**, no pior caso
    - **n/2**, em média
- **InsertionSort(v, n) :**
  - faz `InsertSorted(,1,)`, `InsertSorted(,2,)`, ..., `InsertSorted(,n-1,)`
  - o nº total de iterações do ciclo `for` de `InsertSorted` é:
    - no **melhor caso**, 1 + 1 + ... + 1 (n-1 vezes) = n-1 ≈ **n**
    - no **pior caso**, 1 + 2 + ... + n-1 = (n-1)(1 + n-1)/2 = n(n-1)/2 ≈ $\mathbf{n^2/2}$
    - em **média**, metade do anterior, isto é, aproximadamente $\mathbf{n^2/4}$

    $\Rightarrow$ **T(n) = *O(n^2)*** (quadrático) (pior caso e média)

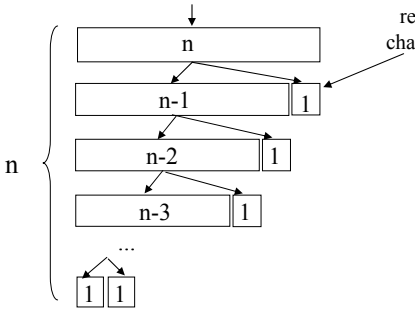
10

Eficiência da Ordenação por Partição

- As operações realizadas mais vezes no passo de partição são as comparações efectuadas nos passos 2.3.1 e 2.3.2.
- No conjunto dos dois passos, o número de comparações efectuadas é:
  - no mínimo **n** (porque todas as posições do array são analisadas)
  - no máximo **n+2** (correspondente à situação em que *i=j+1* no fim do passo 2.3.2)
- Por conseguinte, o tempo de execução do passo de partição é ***O(n)***
- Para obter o tempo de execução do algoritmo completo, é necessário somar os tempos de execução do passo de partição, para o array inicial e para todos os sub-arrays aos quais o algoritmo é aplicado recursivamente

Eficiência da Ordenação por Partição (cont.)

Pior caso:

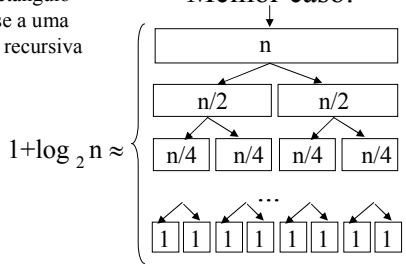


- profundidade de recursão: **n**
- tempo de execução total (somando totais de linhas):

  T(n) = O[n+n+(n-1) + ... +2]

  = O[n+(n-1)(n + 2)/2] = ***O(n²)***

Melhor caso:



- profundidade de recursão: ≈ *1+log ₂ n* (sem contar com a possibilidade de um elemento ser excluído dos sub-arrays esquerdo e direito)
- tempo de execução total (uma vez que a soma de cada linha é *n*):

  T(n) = O[(1+log₂n) n] = ***O(n log n)***

Eficiência da Ordenação por Partição (cont.)

- Prova-se que no caso médio (na hipótese de os valores estarem aleatoriamente distribuídos pelo array), o tempo de execução é da mesma ordem que no melhor caso, isto é:

  T(n) = *O(n log n)*

- O critério seguido para a escolha do *pivot* destina-se a tratar eficientemente os casos em que o array está inicialmente ordenado

Comparação de tempos médios de execução (observados) de diversos algoritmos de ordenação

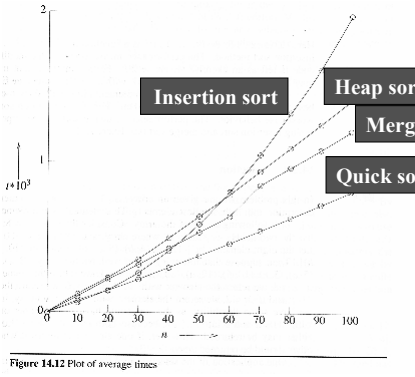


Figure 14.12 Plot of average times

Cada ponto corresponde à ordenação de 100 arrays de inteiros gerados aleatoriamente

Fonte: Sahni, "Data Structures, Algorithms and Applications in C++"

Método de ordenação por partição (*quick sort*) é na prática o mais eficiente, excepto para arrays pequenos (até cerca 20 elementos), em que o método de ordenação por inserção (*insertion sort*) é melhor!

Complexidade Espacial de QuickSort

- O espaço de memória exigido por cada chamada de **QuickSort**, sem contar com chamadas recursivas, é independente do tamanho (*n*) do array
- O espaço de memória total exigido pela chamada de **QuickSort**, incluindo as chamadas recursivas, é pois proporcional à profundidade de recursão
- Assim, a complexidade espacial de **QuickSort** é:
  - ***O(log n)*** no melhor caso (e no caso médio)
  - ***O(n)*** no pior caso

- Em contrapartida, a complexidade espacial de **InsertionSort** é ***O(1)***

15

Estudo de um caso : subsequência máxima

- Problema:
  - Dado um conjunto de valores (positivos e/ou negativos) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, determinar a subsequência de maior soma
- A subsequência de maior soma é zero se todos os valores são negativos

- Exemplos:

  -2, 11, -4, 13, -4, 2

  1, -3, 4, -2, -1, 6

16

Subsequência máxima - cúbico

```
// MaxSubSum1: Calcula a Subsequência máxima utilizando três ciclos

template <class Comparable>
Comparable maxSubSum1(const vector<Comparable> &vec)
{
    Comparable maxSum = 0;
    for (int i = 0; i < vec.size(); i++)
       for (int j = i; j < vec.size(); j++)
       {
               Comparable thisSum = 0;
               for (int k = i; k <= j; k++)
                       thisSum += vec[k];
               if (thisSum > maxSum) maxSum = thisSum;
       }
    return maxSum;
}
```

17

Subsequência máxima - cúbico

- Análise
  - ciclo de *N* iterações no interior de um outro ciclo de *N* iterações no interior de um outro ciclo de *N* iterações $\Rightarrow$ $\boldsymbol{O(N^3)}$, algoritmo cúbico!
  - Valor estimado por excesso (factor de 6) pois alguns ciclos possuem menos de *N* iterações
- Como melhorar
  - Remover um ciclo
  - Ciclo mais interior não é necessário
  - *thisSum* para próximo *j* pode ser calculado facilmente a partir do antigo valor de *thisSum*

18

Subsequência máxima - quadrático

```
// MaxSubSum2: Calcula a Subsequência máxima utilizando dois ciclos

template <class Comparable>
Comparable maxSubSum2(const vector<Comparable> &vec)
{
    Comparable maxSum = 0;
    for (int i = 0 ; i < vec.size(); i++)
    {
       Comparable thisSum = 0;
       for (int j = i; j < vec.size(); j++)
       {
           thisSum += vec[j];
           if (thisSum > maxSum) maxSum = thisSum;
       }
    }
    return maxSum;
}
```

19

Subsequência máxima - quadrático

- Análise
  - ciclo de *N* iterações no interior de um outro ciclo de *N* iterações $\Rightarrow$ ***O(N²)*** , algoritmo quadrático
- É possivel melhorar?
  - Algoritmo linear é melhor : tempo de execução é proporcional a tamanho de entrada (difícil fazer melhor)
    - Se A_{ij} é uma subsequência com custo negativo, A_{iq} com q>j não é a subsequência máxima

20

Subsequência máxima - linear

```
// MaxSubSum3: Calcula a Subsequência máxima utilizando um ciclo

template <class Comparable>
Comparable maxSubSum3(const vector<Comparable> &vec)
{
    Comparable thisSum = 0, maxSum = 0;
    for (int j=0; j < vec.size(); j++)
    {
       thisSum += vec[j];
       if (thisSum > maxSum)
              maxSum = thisSum;
       else if (thisSum < 0)
           thisSum = 0;
    return maxSum;
}
```


Subsequência máxima - recursivo

- Método "divisão e conquista"
  - Divide a sequência ao meio
  - A subsequência máxima está:
    a) na primeira metade
    b) na segunda metade
    c) começa na 1ª metade, vai até ao último elemento da 1ª metade, continua no primeiro elemento da 2ª metade, e termina num elemento da 2ª metade.
  - Calcula as três hipóteses e determina o máximo
  - a) e b) calculados recursivamente
  - c) realizado em dois ciclos:
    - percorrer a 1ª metade da direita para a esquerda, começando no último elemento
    - percorrer a 2ª metade da esquerda para a direita, começando no primeiro elemento

Subsequência máxima - recursivo

```
// MaxSubSumRec: Calcula a Subsequência máxima utilizando recursão

template <class Comparable>
Comparable maxSubSumRec(const vector<Comparable> &vec,
       int left, int right)
{
  Comparable maxLeftBorderSum = 0, maxRightBorderSum = 0;
  Comparable leftBorderSum = 0, rightBorderSum = 0;
  int center = (left + right )/2;
  if (left == right)
       return (vec[left]>0 ? vec[left] : 0 );
  Comparable maxLeftSum = maxSubSumRec(vec, left, center);
  Comparable maxRightSum = maxSubSumRec(vec, center+1, right);
  …
```


Subsequência máxima - recursivo

```
  …
  for (int i = center ; i >= left ; i--)
  {
     leftBorderSum += vec[i];
     if (leftBorderSum > maxLeftBorderSum)
              maxLeftBorderSum = leftBorderSum;
  }

  for (int j = center+1 ; j <= right ; j++)
  {
     rightBorderSum += vec[j];
     if (rightBorderSum > maxRightBorderSum)
              maxRightBorderSum = rightBorderSum;
  }

  return max3(maxleftSum, maxRightSum,
              maxLeftBorderSum + maxRightBorderSum);
}
```

Subsequência máxima - recursivo

- Análise
  - Seja *T(N)* = tempo execução para problema tamanho N
  - *T(1)* = 1 (recorda-se que constantes não interessam)
  - *T(N)* = 2* *T(N/2)* + *N*
    - duas chamadas recursivas, cada uma de tamanho *N/2*. O tempo de execução de cada chamada recursiva é *T(N/2)*
    - tempo de execução de caso c) é *N*

Subsequência máxima - recursivo

- Análise:

$T(N) = 2* T(N/2) + N$
$T(1) = 1$

$T(N/2) = 2* T(N/4) + N/2$
$T(N/4) = 2* T(N/8) + N/4$
...
$T(N) = 2*2*T(N/4) + 2*N/2 + N$
$T(N) = 2*2*2*T(N/8) + 2*2*N/4 + 2*N/2 + N$
$T(N) = 2^k * T(N/2^k) + kN$

$T(1) = 1 : N/2^k = 1 \Rightarrow k = \log_2 N$

$T(N) = N*1 + N* \log_2 N = O(N*logN)$