

Ajuda Multicritério à Decisão - introdução

Notas para as disciplinas de SAD (LCI) e SAD (MGI)

Manuel Matos □ FEUP, 2005

0. Nota prévia

O presente texto destina-se aos alunos das disciplinas de Sistemas de Apoio à Decisão da Licenciatura em Ciência de Informação e do Mestrado em Gestão de Informação, e tem como objectivo complementar as aulas sobre Ajuda Multicritério à Decisão, com uma orientação de aprendizagem a partir do trabalho sobre um caso de estudo relativamente simples. Em consequência, não se deu relevância, no texto, a aspectos teóricos ou conceptuais que podem ser vistos na bibliografia colocada à disposição dos alunos, mas antes ao registo organizado do trabalho realizado nas aulas.

1. Introdução

Quando temos que tomar uma decisão, há alguns procedimentos que seguimos de forma mais ou menos sistemática:

- a) Identificamos *alternativas*, opções ou hipóteses de decisão. Por exemplo um conjunto de automóveis de entre os quais pretendemos escolher um, uma lista de candidatos que pretendemos ordenar, trajectos possíveis para uma viagem, um conjunto de propostas num concurso público, etc.
- b) Verificamos a viabilidade da alternativas (eliminando as que não satisfazem certos critérios eliminatórios, a que tecnicamente chamamos *restrições*). Por exemplo, descartamos os automóveis cujo custo ultrapassa a nossa disponibilidade financeira, os candidatos sem certas qualificações mínimas para o cargo, etc. Neste texto, vamos partir do princípio que as listas de alternativas em análise satisfazem todas as restrições, ou seja, são *viáveis*.
- c) Definimos os *critérios de avaliação*, aspectos relevantes ou pontos de vista a ter em conta quando comparamos duas alternativas em termos de preferência. Por exemplo, o custo (preferimos uma alternativa com menor custo do que outra), a experiência profissional (preferimos geralmente um candidato com maior experiência), a qualidade técnica (preferimos um projecto com maior qualidade técnica).

Em muitas circunstâncias da vida corrente, estes passos interligam-se e misturam-se, e a decisão acaba por surgir de modo relativamente informal. No entanto, em situações mais complexas ou quando as decisões são tomadas num ambiente organizacional, onde têm que ser justificadas ou, pelo menos, explicadas, há vantagem em seguir um procedimento formal que garanta a consistência do processo global. É o que veremos no desenvolvimento deste texto.

2. Formalização do problema

2.1. Tipos de problemas

Embora tendo características comuns, distinguem-se três tipos fundamentais de problema de decisão:

1. **Escolha** ou **selecção** da melhor alternativa (ocasionalmente, selecção de um número definido de alternativas – por exemplo as cinco melhores);
2. **Ordenação** de um conjunto de alternativas;

3. **Partição** de um conjunto em classes de preferência, normalmente pré-definidas, o que conduz ao problema de **atribuição de classe**.

Partiremos do princípio, neste texto, que estamos a lidar com problemas de escolha (o tipo mais frequente e, de certo modo, a base dos outros), mas far-se-ão menções aos outros problemas quando for apropriado.

2.2. Alternativas

A identificação das alternativas é um procedimento óbvio no início do processo, bem assim como a verificação da sua viabilidade. Em muitos casos, a identificação é imediata, mas há situações em que é indispensável um processo prévio de criação de alternativas, que pode ser bastante complexo¹. Por outro lado, há uma classe de problemas onde as alternativas são apenas definidas implicitamente como combinação de valores de variáveis de decisão, devendo respeitar um conjunto de restrições (equações e inequações) que definem a viabilidade. Estes problemas caem na área da programação matemática, ficando fora do âmbito deste texto.

Do ponto de vista terminológico, é importante esclarecer que o termo “alternativa” é usado neste contexto como sinónimo de “opção”, “hipótese”, “possível solução” ou “acção potencial”², de forma distinta, portanto, de situações em que se define uma espécie de “pré-decisão” (solução base) para a qual se constróem depois alternativas³.

Do ponto de vista formal, cada alternativa, para além da sua designação (“Peugeot 307”, “Candidato António Silva”, “Proposta nº7”, etc.), vai ser caracterizada pelo seus atributos, que a definem completamente do ponto de vista do processo de decisão. Os atributos correspondem à pontuação da alternativa nos critérios de avaliação, matéria que analisaremos a seguir. Outras características meramente descritivas das alternativas são utilizadas para a determinação dos atributos, deixando em seguida de ser consideradas, uma vez que não são directamente relevantes para o processo de decisão

Como se disse na introdução, partiremos do princípio de que a lista de alternativas que consideramos inclui apenas as alternativas viáveis, ou seja, opções que respeitam os requisitos mínimos (restrições) definidos para o problema.

2.3. Critérios

A definição dos critérios de avaliação é um ponto crucial do processo, por corresponder à identificação dos aspectos ou pontos de vista relevantes a ter em conta para estabelecer a preferência de uma alternativa sobre outra. Uma *família coerente de critérios* deve ser:

- **Exaustiva:** todos os pontos de vista relevantes devem ser incluídos.
- **Consistente:** se duas alternativas A e B são equivalentes excepto num critério k, e se nesse critério a_k é melhor do que b_k , então A deve ser considerada globalmente

¹ Recorde-se, por exemplo, a discussão pública de alternativas para a localização do novo aeroporto de Lisboa, ou os múltiplos esquemas possíveis para o desenvolvimento da Alta Velocidade Ferroviária. Independentemente do mérito das possíveis soluções, a caracterização completa de cada uma exigiu um conjunto de estudos complexos e demorados.

² Termo usado pela Escola Francesa de Ajuda à Decisão

³ É o que se passa, por exemplo, na discussão pública de projectos de novas estradas – existe um projecto previsto, mas é obrigatório apresentar alternativas com menor impacto ambiental. Como se verá no seguimento deste texto, essa não é talvez a melhor forma de definir o problema de decisão.

- pelo menos tão boa como B.
- **Não-redundante:** se se eliminar um dos critérios, deixam de ser satisfeitas as condições anteriores.

Para além disso, é desejável que sejam asseguradas ainda as seguintes propriedades:

- **Legibilidade:** o número de critérios deve ser relativamente baixo.
- **Operacionalidade:** a família de critérios deve ser aceite pelos interessados¹ e pelos agentes de decisão.

Neste ponto, surge-nos o conceito de **agente de decisão** (por vezes também designado por *decisor*), que é central nestes problemas. Trata-se da pessoa (por vezes o representante de uma entidade) responsável pela decisão final. Por um lado, o agente de decisão define e especifica os critérios a considerar, eventualmente com o apoio de especialistas. Por outro lado, como se verá mais à frente, não é possível levar a cabo o processo de decisão sem nele incorporar as *preferências* do agente de decisão.

Uma vez identificada uma família coerente de critérios, é necessário avançar na operacionalização, definindo as unidades associadas e respectiva escala. Este processo pode ser simples em critérios económicos, onde o custo se exprime directamente em euros, ou mais complicado quando estão envolvidos critérios associados a conceitos mais vagos, como a qualidade, o risco, o impacto ambiental ou social, etc. Na concretização deste tipo de critérios em atributos mensuráveis é usual recorrer a indicadores numéricos (por vezes mais do que um), que têm a vantagem de serem objectivos, mas podem não representar adequadamente o conceito que se pretende avaliar², o que exige cautela, clareza e transparência na sua definição.

Uma outra hipótese é a definição de categorias que correspondem a uma avaliação global do grau de satisfação do critério (por exemplo, “Muito Alta, Alta, Média, Baixa, Muito Baixa”, num critério associado à qualidade). Neste caso, convirá caracterizar claramente os aspectos a ter em conta e as situações que correspondem a cada categoria, para diminuir a subjectividade dos julgamentos. Por exemplo, para se considerar que um projecto tem “impacto social muito positivo” poderia exigir-se que o projecto ocasione um aumento significativo do emprego na região, aumente a mobilidade pela criação de novas vias de comunicação e favoreça o acesso da população a um determinado serviço. Impactos menos favoráveis nestes três aspectos (emprego, mobilidade, acesso ao serviço) conduziriam a avaliações de “positivo”, “regular”, “negativo”, etc., cuja descrição teria também que ser enunciada.

A Tabela 1 mostra um exemplo de uma lista de seis alternativas, caracterizadas em relação aos três critérios identificados para a situação (escolha de uma proposta de fornecimento de equipamento). Note-se que, enquanto o preço e o prazo são expressos nas suas unidades naturais, a qualidade técnica usa uma escala de categorias ou níveis de satisfação, sendo cada alternativa pontuada de acordo com o julgamento de especialistas. Os números 0 a 5 são usados, nesse caso, apenas como legenda da categoria, não possuindo à partida significado numérico³. Quando muito, poderá ser reconhecido que iguais diferenças de

¹ Usa-se aqui bastante o termo inglês “stakeholders”.

² Um exemplo clássico que suscita reflexão: numa comparação de cidades americanas, o critério “qualidade da saúde mental” era medido pelo indicador “número de suicídios por mil habitantes”.

³ Entre outras consequências deste facto, uma frase como “p4 tem o triplo da qualidade de p2” seria desprovida de sentido.

escalão (p.ex. p_2 para p_4 e p_4 para p_3 – dois níveis de diferença em ambos os casos) correspondem a iguais diferenças de qualidade, o que permite considerar os escalões como pontuações das alternativas.

Tabela 1- Seis propostas de fornecimento de equipamento

Critérios	p1	p2	p3	p4	p5	p6
Preço (milhares de euros)	150	145	160	120	160	160
Prazo de entrega (semanas)	10	9	8	16	10	4
Qualidade técnica (Má-0, Mt.Boa-5)	4	1	5	3	4	3

Para além destas das duas hipóteses mencionadas (indicadores numéricos e categorias), observa-se por vezes a utilização de ordenações, ou seja, cada alternativa recebe, em relação a um critério, uma pontuação que depende do número de alternativas que lhe são superiores naquele critério. Trata-se de uma opção a evitar por várias razões, das quais se destacam duas:

- a diferença de pontuação entre duas alternativas pode variar com a introdução ou saída de outras alternativas, o que não deveria acontecer;
- diferenças de pontuação iguais (por exemplo, 1º para 2º e 2º para 3º) podem corresponder a situações muito diferentes (2º quase tão bom como o 1º e o 3º bastante pior que o 2º).

2.4. Problemas multicritério

Quando se considera que um único critério é suficiente para representar as preferências do agente de decisão, o problema de decisão é trivial, como ocorreria no caso da Tabela 1 se se considerasse apenas o custo. Se assim fosse, a proposta p_4 seria imediatamente escolhida, por ter o menor custo, e também seria fácil ordenar todas as alternativas (embora se verificasse um empate para o último lugar).

As dificuldades surgem quando a decisão se baseia em vários critérios, pois estes são normalmente conflituosos, ou seja, não é habitualmente possível encontrar uma alternativa que seja melhor que as outras em todos os critérios simultaneamente. Regressando ao exemplo, constata-se que a proposta com melhor preço (p_4) é simultaneamente a que tem um maior prazo de entrega (o que não se pretende) e também não é a que apresenta maior qualidade.

É importante deixar claro, neste ponto, que não existe qualquer metodologia que, apenas com base na informação da Tabela 1, permita escolher de forma peremptória a melhor alternativa, ou ainda menos ordenar as alternativas. Só a intervenção do agente de decisão vai permitir chegar a uma conclusão, que resultará da conjugação das suas preferências com os atributos das alternativas.

Não há, portanto, em **problemas multicritério**, uma *solução ótima* que pudesse ser escolhida sem suscitar controvérsia¹, mas sim uma **solução preferida** que poderá ser diferente para diferentes agentes de decisão, sem que se possa dizer que um está certo e os outros errados, pois cada um dará mais ou menos importância a cada um dos critérios, de acordo com os seus interesses e com a sua percepção global da situação.

A incorporação das preferências pode ser realizada de modo mais ou menos formal

¹ Ressalva-se, claro, a circunstância pouco habitual em que os critérios não são conflituosos.

consoante os casos, mas normalmente inclui a participação de especialistas, que ajudam o agente de decisão a conduzir o processo de forma consistente. Esta perspectiva levou ao estabelecimento da designação moderna desta área: **ajuda multicritério à decisão**.

3. Abordagem básica ao problema

Uma vez estabelecido o ambiente e conceitos básicos destes problemas, fica claro que temos, por um lado, um conjunto de alternativas viáveis, caracterizadas pelos seus atributos (resultantes dos critérios definidos pelo agente de decisão). E que será necessário, por outro lado, incorporar as preferências do agente de decisão, de modo a chegarmos à solução preferida. Antes de prosseguir, no entanto, há alguns aspectos técnicos que é indispensável discutir. Para tal, vamos utilizar o problema da Tabela 2, com apenas dois critérios, para maior facilidade de exposição.

Tabela 2 – Exemplo de problema bicritério

Critérios	Projectos				
	P1	P2	P3	P4	P5
Custo (milhares de euros)	34	38	40	42	50
Número de lugares de consulta	100	250	400	350	500

Trata-se de um problema de escolha entre cinco possíveis projectos para um centro de documentação, cada um com o seu custo (a minimizar) e um número previsto de lugares sentados (a maximizar). As alternativas foram ordenadas por preços crescentes, apenas para facilidade de referência.

3.1. Representação gráfica

Havendo somente dois atributos, é possível uma representação gráfica como a da Figura 1, onde o ponto correspondente a cada alternativa resulta da marcação nos eixos dos valores dos seus dois atributos.

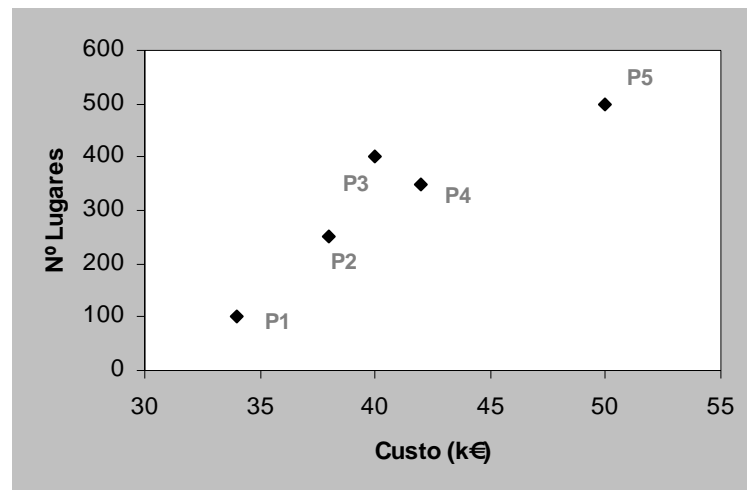


Figura 1 – Representação gráfica das alternativas

Este tipo de representação cartesiana permite formar, desde logo, uma ideia global sobre o conjunto das alternativas — percebe-se, por exemplo, que, à medida o custo aumenta, também aumenta o número de lugares, numa espécie de compensação a que só foge *P4*.

3.2. Alternativas dominadas

Examinando melhor a alternativa $P4$, reparamos que esta tem um custo superior ao de $P3$, ao mesmo tempo que apresenta um número de lugares inferior. Ou seja, $P3$ é melhor que $P4$ em ambos os critérios, pelo que será sempre preferida a $P4$ ¹. Dizemos então que $P3$ domina $P4$, e que $P4$ é dominada, de acordo com a seguinte definição:

*Uma alternativa diz-se **dominada** se e só se existe uma outra que não é pior do que ela em nenhum critério, sendo estritamente melhor pelo menos num deles.*

Repare-se que a alternativa que domina não tem que ser melhor em todos os critérios, mas apenas num deles, desde que nunca seja pior. A análise do problema da Tabela 1, por exemplo, permite verificar que a proposta $p5$ é dominada por $p1$ por ser mais cara, embora empate nos dois restantes critérios.

Este conceito de dominação² permite eliminar, nos problemas de escolha, todas as alternativas dominadas, designando-se as que restam por *não-dominadas*, ou *eficientes*. Atente-se, no entanto, que, em problemas de ordenação ou partição, as soluções dominadas não devem ser descartadas, podendo ser escolhidas logo a seguir às alternativas que as dominam. Imagine-se, por exemplo, que, no problema de ordenar as alternativas da Tabela 2, $P3$ era seleccionada, digamos, em 2º lugar; nesse caso, $P4$ poderia ser seleccionada para qualquer lugar a partir do 3º, uma vez que não é dominada por qualquer das restantes.

Regressando ao problema de identificação visual das alternativas dominadas, uma boa regra prática é começar por notar, a partir das direcções de preferência em cada critério, o “canto preferido” do gráfico.

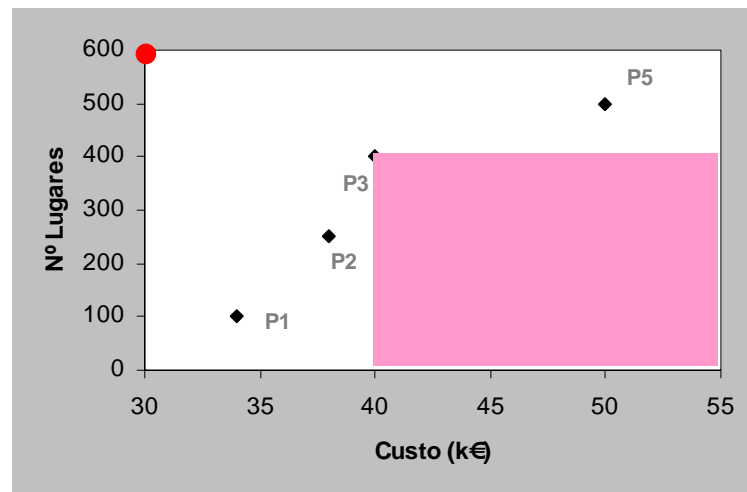


Figura 2 – Verificação gráfica da dominação

No exemplo que nos ocupa, preferimos menores custos e mais lugares, resultando que o canto preferido é o que está marcado na Figura 2 (ponto 30, 600). Em seguida, podemos definir a “zona de dominação” de cada alternativa, onde se situarão todas as alternativas dominadas por esta. Na Figura 2, marcou-se apenas a zona de dominação de $P3$ (onde se

¹ Repare-se que, neste caso, um agente de decisão que preferisse $P3$ a $P4$ estaria a comportar-se de forma irracional (ou então a família de critérios estaria incompleta). A consideração das preferências do agente de decisão vai fazer-se, como veremos, apenas em circunstâncias onde esta questão não se coloca.

² Certos autores portugueses usam o termo “dominância”.

encontra, naturalmente, $P4$), verificando-se que todas as outras zonas são vazias, uma vez que mais nenhuma alternativa domina $P4$ e não há outras alternativas dominadas.

Saliente-se que estes conceitos de “canto preferido” ou “zona de dominação” têm apenas interesse prático para uso neste contexto. Além disso, por comodidade, é habitual construir os atributos de forma a que sejam ou todos de maximização, ou todos de minimização.

3.3. Taxas de substituição

A aplicação do conceito de dominação permite, como vimos, eliminar algumas alternativas em problemas de escolha, mas não resolve ainda o problema de decisão. Prosseguindo com a nossa análise, vamos calcular algumas *taxas de substituição* entre alternativas, ou seja, o que se ganha e perde quando se troca uma alternativa por outra.

Comecemos por comparar os projectos $P3$ e $P5$, a partir dos dados da Tabela 2¹:

$$\begin{aligned} \text{Custo}(P5) - \text{Custo}(P3) &= 50 - 40 = 10 \text{ k€} \\ \text{N}^\circ \text{lug.}(P5) - \text{N}^\circ \text{lug.}(P3) &= 500 - 400 = 100 \text{ lugares} \end{aligned}$$

ou seja, se trocássemos $P3$ por $P5$, o custo aumentava 10 000 €, mas disporíamos de mais 100 lugares, o que significaria que cada lugar adicional custaria $10\,000/100 = 100$ €/lugar, sendo essa então a taxa de substituição² entre as duas alternativas. A Figura 3 mostra as diferenças indicadas sobre o gráfico, bem assim como as diferenças entre $P1$ e $P2$ (4000 euros, 150 lugares), que conduzem a uma taxa de substituição menor ($4000/150=26.67$ €/lugar)³.

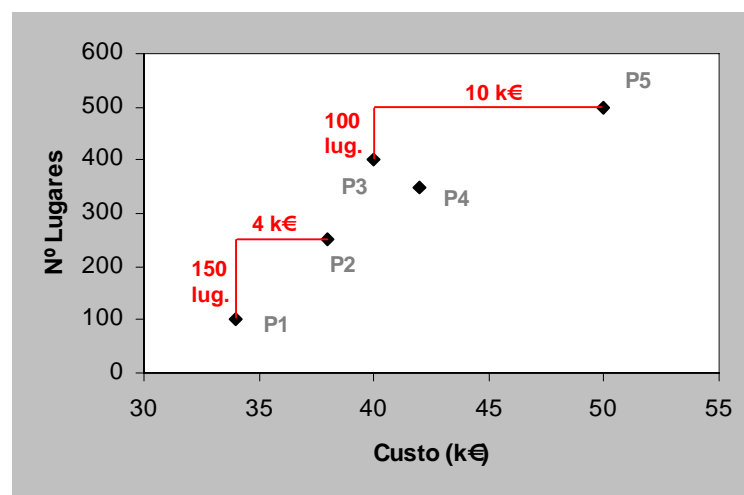


Figura 3 – Taxas de substituição entre alternativas

Chegados a este ponto, é possível desenvolver uma primeira ideia de interacção com o agente de decisão, que pode exprimir de forma concreta as suas preferências: se entender que cada lugar adicional vale mais do que 100 €, o agente de decisão prefere $P5$ a $P3$; caso contrário, prefere $P3$ a $P5$. O raciocínio inverso também é verdadeiro, naturalmente.

¹ Por comodidade, vamos usar, a partir deste ponto, o símbolo “k€” para indicar milhares de euros.

² *Trade-off*, em língua inglesa.

³ Deixa-se ao cuidado do leitor calcular a taxa de substituição entre $P2$ e $P3$, notando que não faria sentido fazer o cálculo para $P3$ e $P4$, pois aí o aumento de custo ocasiona uma *diminuição* do número de lugares, conduzindo a uma taxa de substituição negativa.

Admitamos agora que o agente de decisão define um valor de referência (constante em todo o espaço de decisão) para a taxa de substituição, por exemplo 40 €/lugar. Nessas circunstâncias, $P3 \succ P5$ ($P3$ é preferido a $P5$), uma vez que $40 < 100$, e que $P2 \succ P1$, pois $40 > 26.67$, não sendo difícil concluir, ainda, que $P3 \succ P2$. A conclusão final seria a de que $P3$ era a alternativa preferida por este agente de decisão, com estas preferências¹.

3.4. Função agregada de avaliação

Para sistematizar este procedimento, e generalizá-lo, note-se que a definição de uma taxa de substituição de referência constante corresponde, no fundo, a estabelecer uma equivalência entre atributos: 40 € são equivalentes a 1 lugar (no caso do exemplo). Assim sendo, se designarmos a taxa de referência por β , podemos construir uma *função agregada de avaliação*, expressa em euros, com a seguinte forma:

$$f(P_i) = f(\text{Custo}, N^\circ \text{Lug}) = \text{Custo} - \beta \cdot N^\circ \text{Lug}$$

No fundo, é como se calculássemos um *custo equivalente* por transformação do número de lugares em euros e dedução desse “benefício” ao custo. No caso de $P3$, teríamos:

$$f(P3) = f(40000, 400) = 40000 - 400 \beta$$

e, se $\beta=40$ €/lugar,

$$f(P3) = 40000 - 400 \times 40 = 40000 - 16000 = 24000 \text{ €}$$

Este valor agregado terá agora que ser comparado com os valores correspondentes das outras alternativas, para o mesmo β . Organizou-se esse cálculo na Tabela 3, que repete os dados da Tabela 2, acrescentando linhas adicionais para obtenção do custo equivalente. Outros valores de β levariam a alteração da linha L2a e a diferentes custos equivalentes¹.

Tabela 3 – Cálculo do custo equivalente quando $\beta=40$ €/lugar

linha	Critérios	Projectos				
		P1	P2	P3	P4	P5
L1	Custo (k€)	34	38	40	42	50
L2	Número de lugares de consulta	100	250	400	350	500
L2a	Equivalente (k€) [L2x40 €/lugar]	4	10	16	14	20
L3	Custo equivalente (k€) [L1-L2a]	30	28	24	28	30
L4	Ordenação final	4/5°	2/3°	1°	2/3°	4/5°

Antes de prosseguir, duas notas importantes:

- O custo equivalente não tem verdadeiro significado monetário, servindo apenas para realizar a comparação de alternativas;
- A hipótese de que a taxa de substituição de referência é constante em todo o espaço de decisão pode não se verificar, e não se verifica em muitas situações². Nessas

¹ O leitor poderá experimentar outros valores para a taxa de referência e verificar por si próprio que a decisão preferida se altera de forma consistente.

² O valor atribuído a “1 lugar adicional” é normalmente maior quando há poucos lugares ($P1$ vs $P2$), diminuindo à medida que o número de lugares aumenta.

circunstâncias, este modelo linear não seria apropriado. Voltaremos a este assunto mais tarde (4.2.2).

A generalização desta abordagem para três ou mais critérios é imediata, desde que se defina um atributo de referência (no exemplo, foi o custo em euros) e se estabeleçam taxas de substituição para todos os outros atributos¹. Por exemplo, no problema da Tabela 1, usar-se-ia uma função de agregação (custo equivalente):

$$f(\pi) = f(\text{Custo}, \text{Sem}, \text{Qual}) = \text{Custo} + \beta \cdot \text{Semanas} - \gamma \cdot \text{Qualidade}$$

Note-se o sinal positivo da parcela correspondente ao número de semanas do prazo (tem o mesmo sentido de preferência do custo, pois o interesse é minimizar) e o sinal negativo associado aos níveis de qualidade (a maximizar, tal como o número de lugares no exemplo anterior). Saliente-se também que se admite que, na qualidade técnica, os sucessivos escalões correspondem a diferenças iguais na qualidade, podendo assim ser considerados como uma pontuação sobre a qual podem ser realizadas operações numéricas.

Como exercício, o leitor poderá verificar que, com taxas de compensação $\beta=5$ k€/semana e $\gamma=8$ k€/escalão, a opção escolhida é $p6$, com um custo equivalente de 156 k€:

Esta situação é ocasionada pelo prazo muito baixo (4 semanas) de $p6$, que compensa o facto do seu custo ser dos mais elevados. Em relação a $p4$, por exemplo, $p6$ tem uma diferença de 12 semanas (16-4), o que corresponde a $\beta \cdot 12 = 60$ k€ a seu favor neste atributo, contra 40 k€ a favor de $p4$ no custo. Como as duas alternativas são iguais no terceiro critério, a diferença final é de 20 k€ (60-40) a favor de $p6$.

3.5. Interpretação gráfica

Regressando ao exemplo a duas dimensões da Tabela 2, atente-se na Figura 4, onde se marcou uma linha cuja inclinação corresponde à taxa de substituição de referência de 40€/lugar², pelo que todos os seus pontos têm o mesmo custo equivalente (22 k€), de acordo com a fórmula da secção 3.4. Designa-se uma linha como esta, em que todos os pontos têm o mesmo valor global, por **curva de indiferença** (no caso, recta de indiferença), uma vez que o Agente de Decisão é forçosamente indiferente entre todos os pontos.

Na verdade, fica definida uma *família de rectas de indiferença*³, paralelas à que se desenhou, sempre correspondendo à taxa de substituição indicada, mas com um custo equivalente que vai diminuindo à medida que nos aproximamos do canto preferido. É o que se pode ver na Figura 5, onde estão desenhadas rectas de indiferença para diversos valores do custo equivalente, em milhares de euros.

¹ Naturalmente, apenas quando a hipótese de que as taxas são constantes for aceitável.

² A recta passa nos pontos (200, 30) e (600, 46), ou seja, 400 lugares (600-200) correspondem a 16000 € (46-30).

³ Trata-se de uma representação semelhante à que se usa nos mapas cartográficos, onde pontos de igual altitude são ligados por *curvas de nível*. Neste caso, poderemos dizer que se trata do *nível de satisfação* do AD, ou, como veremos a seguir, do *valor* atribuído às alternativas.

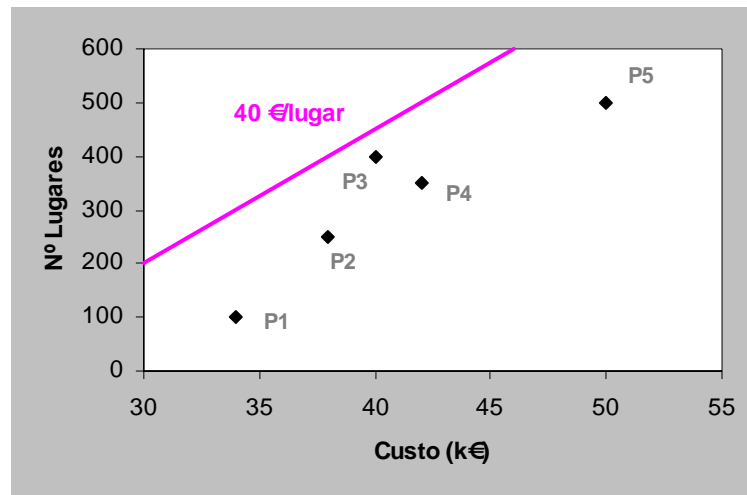


Figura 4 – Taxa de substituição de referência de 40 €/lugar

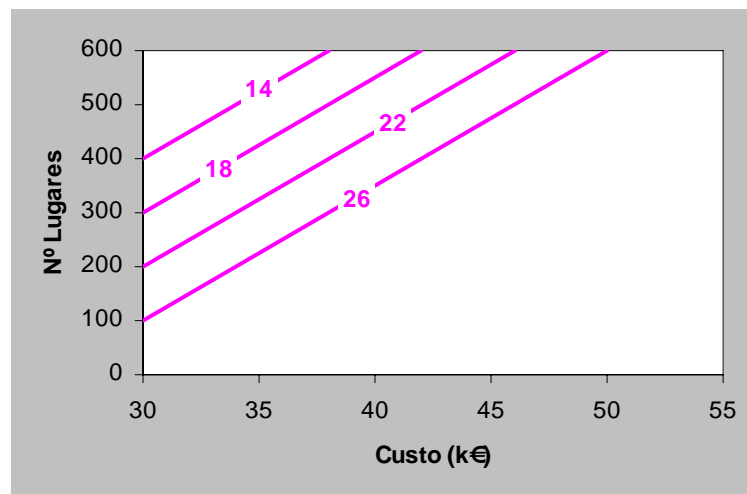


Figura 5 – Rectas de indiferença para 40 €/lugar

Com base nesta representação, é fácil concluir que o ponto onde passará a recta de indiferença de menor custo equivalente é *P3*, como se esperava. Também se vê que *P2* e *P4* aparecem “empatadas” em 2º lugar e que *P1* e *P5* estão “empatadas” no último lugar.

Vê-se assim que a função de agregação da secção 3.4 (função linear nos atributos) conduz a curvas de indiferença lineares. Veremos mais tarde (4.3.4) que funções mais complexas conduzem a curvas de indiferença não-lineares.

3.6. Preferências do Agente de Decisão

Comparem-se agora as figuras seguintes com a Figura 4, para observar a influência da alteração da taxa de substituição de referência na inclinação das rectas de indiferença e, consequentemente, nas ordenação preferida das alternativas. Na Figura 6, o valor de referência é 12 €/lugar, ou seja, valoriza-se bastante menos do que anteriormente o número de lugares, o que é o mesmo que dizer que se dá maior importância ao factor custo do que anteriormente. Com estas rectas de indiferença, é fácil concluir que o novo ponto preferido *P1*, o que está de acordo com a reflexão anterior¹.

¹ O leitor deve confirmar a conclusão patente na figura, repetindo os cálculos da Tabela 3 com a nova taxa.

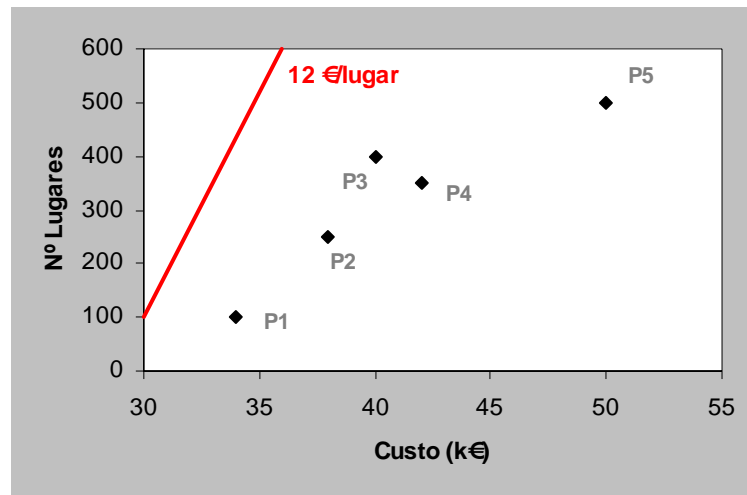


Figura 6 – Taxa de substituição de 12 €/lugar

Percebemos deste modo que diferentes taxas de substituição correspondem a diferentes valorizações da importância dos critérios, definindo, de certo modo, a estrutura de preferências do Agente de Decisão. Na verdade, o segundo AD, ao estabelecer o valor de 12 €/lugar, mostra dar mais importância ao custo do que o AD anterior (40 €/lugar). No limite, um AD que apenas quisesse ter em conta o custo estabeleceria $\beta = 0$ €/lugar, ao que corresponderia uma recta de indiferença vertical, sendo a ordenação das alternativas realizada apenas pelo custo, sem influência do número de lugares.

Em sentido contrário, um AD que privilegiasse o número de lugares tenderia a estabelecer um valor elevado para a taxa de substituição. A Figura 7 mostra uma dessas situações, correspondente a $\beta = 150$ €/lugar, na qual a alternativa preferida seria $P5^1$. A situação limite seria, neste caso, um valor infinito de β , com uma recta de indiferença horizontal.

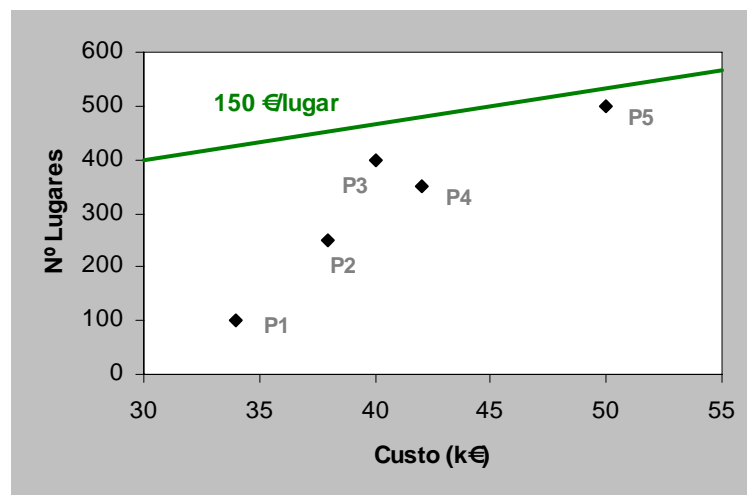


Figura 7 – Taxa de substituição de 150 €/lugar

Duas notas finais sobre este modelo simplificado de representação das preferências do Agente de Decisão, com base no exemplo:

- Diferentes valores de β podem conduzir à mesma ordenação e, ainda mais, à mesma escolha da alternativa preferida. Na verdade, quando $\beta < 20$ a opção escolhida é

sempre $P1$, no intervalo $20 < \beta < 100$ a hipótese preferida é sempre $P3$ e se $\beta > 100$ a alternativa escolhida é sempre $P5$ ¹. Os valores $\beta=20$ e $\beta=100$ correspondem a situações de empate para o 1º lugar;

- Há duas alternativas que, por motivos diferentes, nunca ficam em 1º lugar. A primeira é $P4$, ordenada sempre depois de $P3$, uma vez que é dominada por esta. No entanto, esta alternativa não deve ser excluída das ordenações, podendo até ficar em 2º lugar. A segunda é $P2$, que não é dominada mas perde sempre, ou para $P1$, ou para $P3$. Isto deve-se ao modelo linear utilizado e ao facto de $P2$ não pertencer à envolvente convexa do conjunto das soluções eficientes².

3.7. Conclusões

Neste capítulo mostrou-se como é possível organizar a avaliação de alternativas em situações em que existem taxas de substituição constantes entre atributos. Viu-se como, nessas circunstâncias, podemos construir uma função agregada de avaliação com base nas taxas de substituição de referência (que representam as preferências do AD) e usar essa função para escolher uma alternativa ou ordenar todas as alternativas. Vimos também como há uma correspondência directa entre essa função e as rectas de indiferença que também definem as preferências do Agente de Decisão.

Tendo-se falado da variação da importância dos critérios entre diferentes AD, surge naturalmente a questão da concretização dessa importância em termos numéricos. Em linguagem corrente, perguntar-se-ia quais os “pesos” dos critérios que foram utilizados nas Figuras 4, 6 e 7. Veremos, no capítulo seguinte, que esta pergunta não tem sentido se não se definirem previamente as escalas e gamas de valores dos diferentes atributos, o que significa, também, que há diferentes respostas (todas aceitáveis) quando essas escalas e gamas de valores são diferentes. Pelo contrário, as taxas de substituição têm significado em si (e.g. 40 €/lugar), independentemente de quaisquer outros parâmetros da metodologia de decisão, pelo que é preferível a sua utilização.

4. Construção de funções de valor

4.1. Introdução

Apresentam-se, neste capítulo, as linhas gerais da teoria clássica de decisão que se referem à existência, construção e utilização de funções de valor. Dado o carácter do texto, não se insistirá na matéria teórica, que pode ser vista na bibliografia, optando-se antes por uma abordagem baseada na discussão do exemplo que temos vindo a utilizar.

Não estando no âmbito deste texto o tópico da decisão em ambiente incerto (onde as consequências das decisões não são conhecidas exactamente, embora se consigam descrever em termos de distribuições de probabilidade ou outro processo formal de descrição da incerteza), não abordaremos a Teoria da Utilidade, que tem muitos pontos de contacto com aquilo que vamos abordar. Tem que se referir, no entanto, que, dadas as semelhanças formais das duas teorias, é comum encontrar-se o termo “função utilidade

¹ Nos intervalos indicados, a ordenação de todas as alternativas não é sempre a mesma (apenas a alternativa preferida), mas também se podem identificar intervalos de β onde as ordenações se mantêm.

² Esta situação pode ser bastante inconveniente quando as soluções estão muito extremadas, e alternativas como $P2$ constituem uma boa solução de compromisso que a metodologia exclui de forma nem sempre evidente para o AD.

determinística” (ou mesmo apenas “função utilidade”) como sinónimo de “função de valor”.

Para o que nos ocupa, o ponto de partida é o *teorema de existência*. Para um conjunto de alternativas A, B, etc, definidas pelos seus valores numéricos nos vários critérios¹, o teorema estabelece que, se se verificarem certas condições relativamente simples, existe uma função de valor v com as seguintes propriedades:

$$v(A) > v(B) \text{ sse } A \succ B$$

$$v(A) = v(B) \text{ sse } A \sim B$$

Ou seja, a cada alternativa A é atribuído um *valor* $v(A)$ — calculado em função dos atributos de A — que pode ser usado para ordenar as alternativas, uma vez que, se uma alternativa tem mais *valor* do que outra, fica obrigatoriamente à frente na ordenação, e vice-versa (1ª condição). Por outro lado, duas alternativas indiferentes² terão forçosamente o mesmo *valor*, e vice-versa (2ª condição).

O teorema de existência é portanto a base para todo o processo operacional que se segue, mas infelizmente não nos ensina a construir a função de valor. Existem, entretanto, condições adicionais que facilitam essa tarefa, ao permitirem a utilização de um modelo aditivo para a função, como o que se indica a seguir para o caso em que há m atributos:

$$v(A) = k_1 \cdot v_1(a_1) + k_2 \cdot v_2(a_2) + \dots + k_m \cdot v_m(a_m)$$

As condições mencionadas, que podem ser vistas na bibliografia, referem-se sobretudo à *independência preferencial dos critérios* (as preferências num critério ou grupo de critérios não são afectadas pelo nível de satisfação nos outros critérios) e, no caso de apenas dois atributos, à *compensação de valor* (a mesma diminuição de valor num critério é sempre compensada pelo mesmo aumento de valor no outro). Dado o carácter do presente texto, vamos supor que estas condições se verificam sempre, mas, em aplicações reais, é conveniente não esquecer a necessidade de as verificar, sob pena de se construírem funções que produzem resultados mas não representam realmente as preferências do Agente de Decisão.

Regressando à expressão, notamos que há uma decomposição em relação aos atributos: cada parcela da soma depende apenas da *função de valor individual* do atributo respectivo, $v_i(a_i)$, multiplicada por um *parâmetro* k_i associado ao atributo. Note-se que as funções individuais podem assumir diversas formas, como se verá, nada obrigando a que sejam lineares. Por outro lado, esclareça-se que a designação de “pesos” ou “ponderações”, muitas vezes utilizada para designar os parâmetros k_1, k_2 , etc., é geradora de equívocos, uma vez que, na formulação apresentada, os parâmetros “pesam” as funções de valor individuais e não os atributos.

Finalmente, note-se que, em face do seu significado na linguagem corrente, o “valor” medido pela função é crescente com a satisfação, o que nem sempre sucede com as funções agregadas de avaliação (cf. 3.4) que podem ser a maximizar ou a minimizar, consoante representam um benefício ou um custo equivalente. Por outro lado, a escala de valor pode

¹ Por exemplo, com quatro critérios, $A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

² Mas que não têm que ser iguais em termos dos critérios (cf. Figura 4, onde P2 e P4 pertencem à mesma recta de indiferença, o que significa que $v(P2) = v(P4)$).

ser uma qualquer, mas é habitual usar-se uma escala normalizada entre 0 e 1, quer nas funções individuais $v_i(a_i)$, quer na função de valor de valor multiatributo $v(A)$ ¹. Um ponto importante é que o valor v não tem significado em si, sendo apenas um instrumento para a ordenação das alternativas, quando se comparam os respectivos valores.

4.2. Funções de valor individuais

As funções de valor individuais reflectem a variação da preferência do AD ao longo da gama de valores em causa. Supondo um atributo a maximizar, como o número de lugares no exemplo da Tabela 2, comecemos por analisar a situação em que um dado aumento do atributo ocasiona sempre o mesmo aumento de satisfação por parte do AD.

4.2.1. Funções lineares

É o que se representa na Figura 8, onde se pode ver que passar de 100 para 200 lugares (+100) ocasiona um aumento de valor de 0 para 0.25 (+0.25), o mesmo sucedendo, por exemplo, ao passar de 400 para 500 lugares (+100), em que o valor aumenta de 0.75 para 1.0 (+0.25).

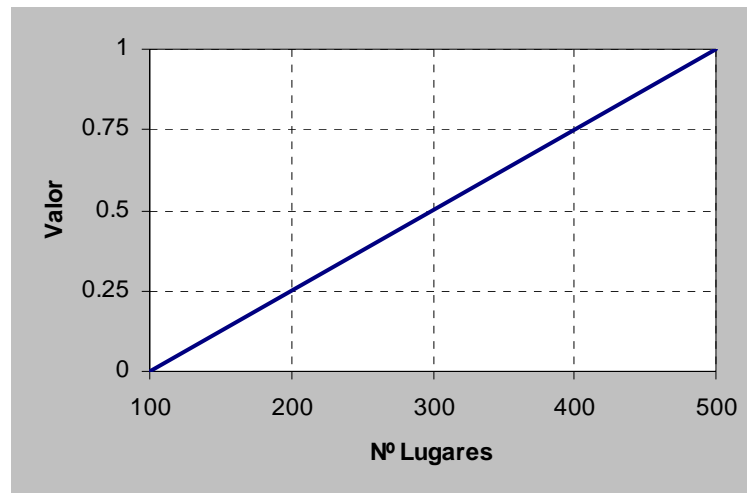


Figura 8 – Função de valor linear para o atributo “Número de lugares de consulta”

Temos, portanto, um andamento *linear*, correspondente à função (onde n é o número de lugares):

$$v_N(n) = \frac{n - 100}{500 - 100} = 0.0025 (n - 100)$$

Isto corresponde ao que costuma designar-se por *normalização*, ou seja, uma mudança de escala de forma a que todos os valores se passem a encontrar no intervalo [0 1]. Repare-se que, neste caso, se fixaram arbitrariamente os extremos em 100 e 500 lugares, fazendo-os corresponder respectivamente aos valores 1 e 0, o que mostra que a normalização não é única, sendo possível, por exemplo, limitarmo-nos a dividir o atributo por 500, ou definir limites diferentes para o atributo, como 0 e 1000. Em consequência, não basta dizer que se normalizou para caracterizar o processo.

¹ Também é frequente, para evitar números decimais, multiplicar-se a escala por 20 ou 100. Estas operações, ou mesmo a adição de uma constante ao valor de todas as alternativas, não afectam a ordenação, que é a mesma em todas as circunstâncias, nem a obrigatória igualdade de valor entre alternativas indiferentes.

Atente-se agora na Figura 9, onde se mostra uma função de valor linear para o custo. Neste caso a função é decrescente, uma vez que o atributo é a minimizar, mas mantém-se a característica de que iguais variações no custo correspondem a iguais variações no valor (+5 k€ provocam sempre uma *diminuição* de valor de 0.25).

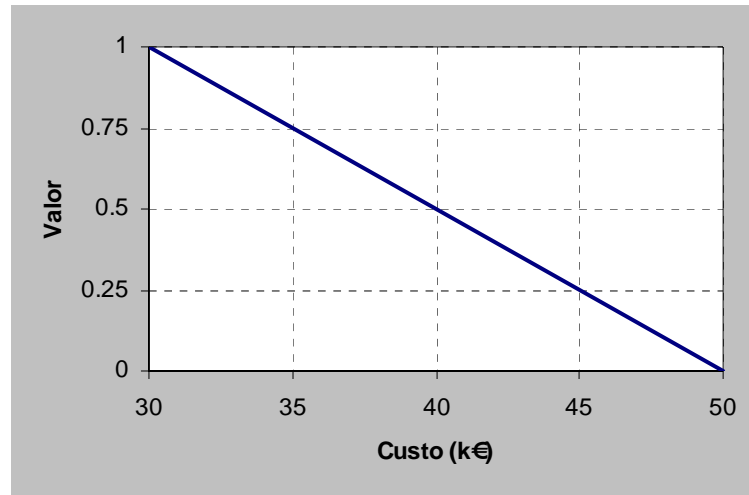


Figura 9 - Função de valor linear para o atributo “Custo”

A expressão matemática da função é, neste caso (c é o custo em k€):

$$v_c(c) = \frac{50 - c}{50 - 30} = 0.05 (50 - c)$$

Mais uma vez se salienta que os limites de 30 e 50 são arbitrários, podendo ter-se utilizado outros. Como veremos na secção 3.4, essa arbitrariedade desaparece com a definição dos parâmetros k_i da função de valor multiatributo, que serão diferentes consoante as gamas do atributo utilizadas, de forma a conduzir sempre ao mesmo resultado final em termos de ordenação. Isto significa, também, que as escalas de valor da Figura 8 ou da Figura 9 são individuais e não estão harmonizadas, não podendo portanto, nesta fase, ser comparadas ou agregadas. Daí o uso dos índices N e C na definição das funções.

4.2.2. Funções exponenciais

Voltemos agora ao atributo “número de lugares de consulta”, para o qual se construiu a função de valor linear representada na Figura 8, na suposição de que a variação da satisfação era linear com o número de lugares.

Imaginemos que nos apercebemos que o Agente de Decisão não concorda com esse pressuposto, indicando-nos que valoriza muito mais o aumento do número de lugares quando há poucos do que quando há bastantes. Por exemplo, o AD indica-nos que valoriza muito mais o aumento de 100 para 300 lugares do que o aumento de 300 para 500 (embora o aumento seja o mesmo em valor absoluto: 200 lugares). Isso significa que a função da Figura 8 não representa adequadamente as preferências do AD e não pode ser utilizada.

Repare-se, em contrapartida, na função quadrática da Figura 10, mais de acordo com as indicações do AD. Na verdade, o aumento de valor, ao passar de 100 para 300 é:

$$v(300) - v(100) = 0.75 - 0 = 0.75$$

enquanto que o aumento de valor ao passar de 300 para 500 é:

$$v(500) - v(300) = 1 - 0.75 = 0.25$$

ou seja, três vezes menor. Naturalmente, seria preciso confirmar junto do AD que esta seria uma função apropriada.

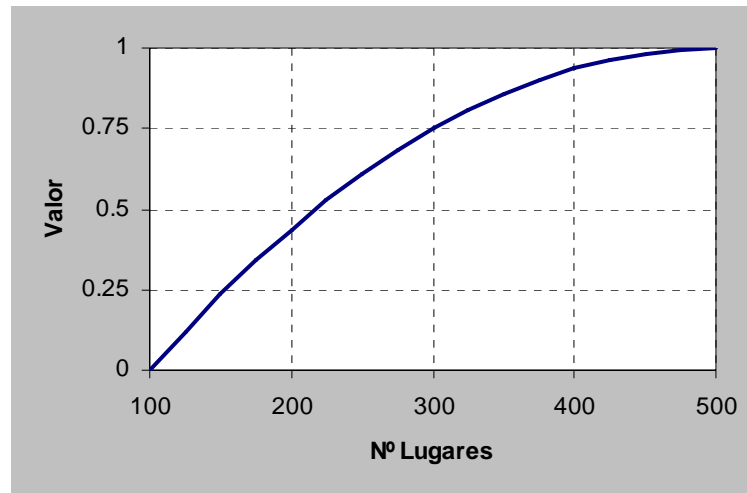


Figura 10 – Função quadrática para a valorização do número de lugares

Apesar do interesse da função quadrática utilizada, a necessidade de responder a diferentes variações da satisfação ao longo da escala do atributo aconselha o uso, para este efeito, de funções exponenciais, que podem variar a sua forma através de um único parâmetro a .

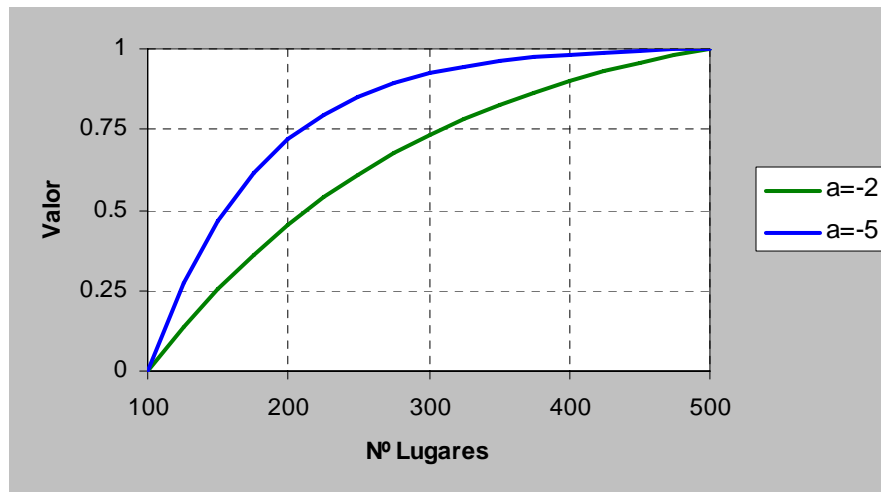


Figura 11 – Funções de valor exponenciais côncavas

Assim, na Figura 11 podem ver-se duas funções que correspondem a uma maior ($a=-5$) ou menor ($a=-2$) preocupação do AD em se afastar dos valores piores da escala do atributo. É possível, portanto, adequar a função ao AD por ajuste do parâmetro a .

Entretanto, pode acontecer que o AD estivesse sobretudo interessado manter-se próximo do melhor valor possível para o atributo, não fazendo grande distinção entre alternativas

com baixo número de lugares de consulta. Nesse caso, as funções apropriadas seriam as da Figura 12, onde mais uma vez o parâmetro a (agora positivo) permite adequar a forma da função à maior ou menor preocupação do AD em manter-se na proximidade dos melhores valores.

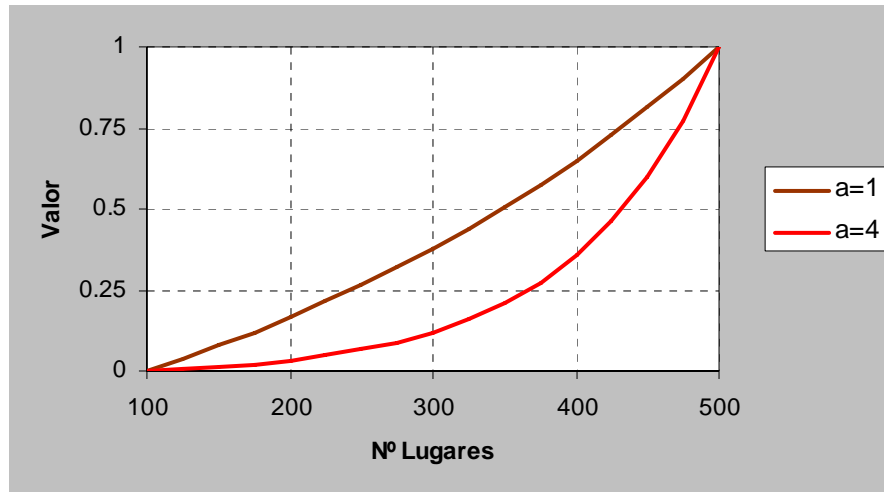


Figura 12 - Funções de valor exponenciais convexas

A expressão matemática das funções exponenciais é, para este caso (maximização):

$$v_N(n) = \frac{e^{a \cdot x} - 1}{e^a - 1}, \text{ onde } x = \frac{n - 100}{500 - 100}$$

Repare-se que a transformação de variável corresponde exactamente à normalização antes utilizada para obter uma função linear. No caso de um atributo de minimização, o procedimento é semelhante, variando apenas a transformação de variável, que passaria a ser a que se usou anteriormente para v_c .

4.2.3. Outras funções

Os dois casos anteriores (funções lineares e funções exponenciais) cobrem a generalidade das necessidades de modelização das preferências do Agente de Decisão. As funções exponenciais, apesar da sua aparente complexidade de cálculo, substituem com vantagem as funções polinomiais, sobretudo pela flexibilidade que resulta da sua convexidade poder ser ajustada através do parâmetro a .

Devem referir-se, no entanto, alguns casos especiais, como a função $v(x) = x_{\min}/x$, bastante usada em atributos a minimizar (mas que não é muito diferente de uma função exponencial com $a > 0$), ou a função logarítmica. Por outro lado, são de afastar funções em degrau, como a da Figura 13, pelas discontinuidades artificiais que introduzem na representação das preferências do AD, provocando grandes diferenças de valorização entre alternativas semelhantes (por exemplo, na função da figura, $v(299) = 0.5$ e $v(301) = 0.75$).

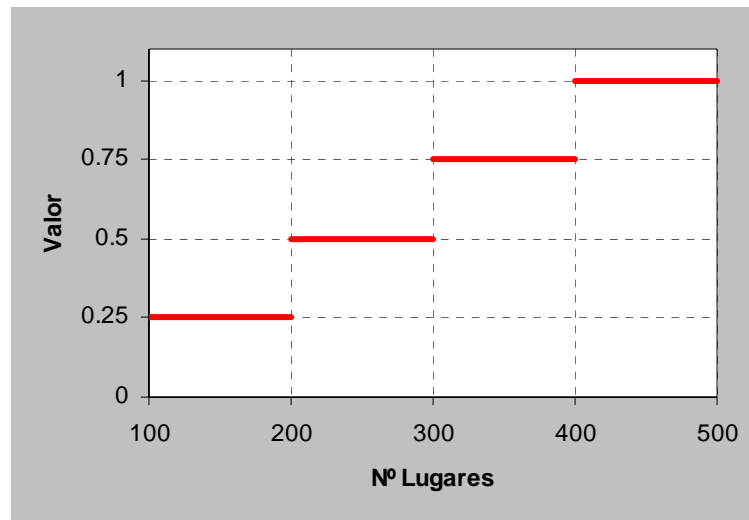


Figura 13 – Função de valor em degraus (a evitar!)

4.3. Função de valor global (multiatributo)

Uma vez definidas as funções de valor individuais, coloca-se o problema da obtenção dos parâmetros k_i da função de valor multiatributo aditiva:

$$v(A) = k_1 \cdot v_1(a_1) + k_2 \cdot v_2(a_2) + \dots + k_m \cdot v_m(a_m)$$

ou, no caso que temos vindo a estudar:

$$v(c, n) = k_C \cdot v_C(c) + k_N \cdot v_N(n)$$

Um erro frequente é pensar-se que os valores dos parâmetros k_i são fixados directamente pelo AD, com base na importância relativa dos critérios. Por exemplo, o AD indicaria que “o custo é três vezes mais importante do que o número de lugares”, resultando $k_C=0.75$ e $k_N=0.25$. Ora este tipo de afirmações do AD refere-se à sua ideia geral sobre os critérios, sem atender às gamas de valores utilizadas para definir as funções de valor individuais, que como vimos podem ser arbitrariamente modificadas¹.

O processo correcto de fixação dos parâmetros consiste na obtenção de um *juízo de indiferença* entre duas alternativas (reais ou fictícias), seguido de um processo de cálculo dos valores dos parâmetros.

4.3.1. Juízo de indiferença

Normalmente, o AD não está preparado para apresentar duas alternativas A e B entre as quais é indiferente ($A \sim B$), mas o processo seguinte permite chegar a essa situação.

- Apresentamos ao AD duas alternativas extremas {por exemplo $P1$ e $P5$ };
- O AD, ou é indiferente, ou prefere uma delas {por exemplo, prefere $P5$ };
- Mantemos a melhor das duas { $P5$ } e *melhoramos* a outra { $P1'=(34, 250)$ };

¹ A fixação directa só se admite se a valorização em todos os atributos usa uma escala comum sem ambiguidades, como é o caso das classificações escolares, onde se podem pesar, por exemplo, a classificação de um trabalho e de um exame, ambas definidas na escala de valor tradicional (em Portugal) 0-20.

- d) O AD, ou é indiferente, ou mantém a preferência (teremos que melhorar mais $P1$), ou inverte a preferência (teremos que reduzir a melhoria anterior);
 {Supondo que o AD inverteu a preferência ($P1 \succ P5$): $P1 \sim (34, 180)$ }
- e) Prosseguir até à indiferença {vamos admitir que $P1 \sim P5$ }.

Repare-se que este processo, que admite variantes (como piorar a melhor das duas iniciais), conduz garantidamente a uma indiferença.

4.3.2. Cálculo dos parâmetros

O cálculo dos parâmetros baseia-se na condição, já anteriormente expressa:

$$v(A) = v(B) \text{ sse } A \sim B$$

Ou seja, se há indiferença entre duas alternativas, o valor global delas tem que ser igual. Aplicando ao nosso exemplo, com o julgamento obtido na secção anterior, teremos:

$$v(34, 180) = v(50, 500)$$

ou seja, usando as expressões completas

$$k_C \cdot v_C(34) + k_N \cdot v_N(180) = k_C \cdot v_C(50) + k_N \cdot v_N(500)$$

Partindo agora do princípio que as funções individuais são lineares (cf. 4.2.1) teríamos, aplicando as fórmulas respectivas:

$$v_C(34) = 0.8, \quad v_N(180) = 0.2, \quad v_C(50) = 0, \quad v_N(500) = 1$$

e, substituindo atrás,

$$0.8 k_C + 0.2 k_N = k_N$$

ou

$$0.8 k_C - 0.8 k_N = 0$$

$$k_C - k_N = 0$$

Esta equação, conjugada com a condição $k_C + k_N = 1$, permite calcular os valores dos parâmetros que, com as funções individuais utilizadas, exprimem a indiferença identificada:

$$k_C = 0.5 \text{ e } k_N = 0.5$$

tendo-se realmente

$$v(34, 180) = k_C \cdot v_C(34) + k_N \cdot v_N(180) = 0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 0.2 = 0.5$$

e

$$v(50, 500) = k_C \cdot v_C(50) + k_N \cdot v_N(500) = 0.5 \times 0 + 0.5 \times 1 = 0.5$$

donde

$$v(34, 180) = v(50, 500)$$

A função de valor multiatributo será portanto, para uma alternativa genérica $A=(c, n)$, de

custo c e número de lugares n :

$$v(c, n) = 0.5 v_C(c) + 0.5 v_N(n) = 0.5 \frac{50 - c}{50 - 30} + 0.5 \frac{n - 100}{500 - 100}$$

Isto conclui o processo de construção da função de valor, que pode agora ser aplicada às alternativas, como se descreverá na próxima secção. No entanto, três aspectos merecem ser salientados neste ponto.

Primeiro, os valores dos parâmetros acabaram por corresponder ao que habitualmente se descreve como “pesos iguais” (50% para cada critério), mas há que ter consciência que isso sucede com as funções de valor individuais que se utilizaram (lineares), com as gamas que se consideraram no processo de linearização. Fossem outras as gamas e os valores dos parâmetros seriam diferentes, mantendo-se a estrutura de preferências do AD e o julgamento de indiferença que ele estabeleceu. O leitor é convidado a experimentar repetir o processo com gamas diferentes (por exemplo linearizando o custo entre 20 e 60), para verificar que os parâmetros são diferentes mas que a ordenação e distâncias relativas das alternativas se mantêm.

Segundo, o julgamento (34, 180)~(50, 500) tem implícita uma taxa de substituição β de:

$$\beta = \frac{50 - 34}{500 - 180} = \frac{16}{320} = 0.05 \text{ k€ / lugar} = 50 \text{ € / lugar}$$

que é constante em todo o espaço de decisão, uma vez que se utilizaram funções lineares. Esta constatação permite compreender que a metodologia baseada em taxas de substituição que se apresentou inicialmente (secção 3) corresponde exactamente ao uso de uma função de valor aditiva linear, com curvas de indiferença do tipo das apresentadas na Figura 5. Na abordagem da secção 3, a inclinação das rectas (e portanto a ordenação final) depende da taxa de substituição, enquanto na metodologia com funções de valor depende das alternativas indicadas como indiferentes (o que tem implícita uma taxa de substituição).

Terceiro, a taxa de substituição define-se entre valores de atributos, enquanto que os parâmetros k_i se definem entre funções de valor. No caso linear, seria possível calcular *pesos dos atributos* (nas suas escalas originais), mas os valores obtidos podem ser perturbadores, uma vez que a importância fica misturada com factores de escala¹. Se se usar pelo menos uma função não-linear, a taxa de compensação indicada só é válida entre as alternativas indicadas (cf. mais à frente, 4.3.4), pelo que nem sequer faria sentido falar-se de *pesos* entre atributos.

4.3.3. Aplicação da função de valor multiatributo

Dadas as suas características, a aplicação da função de valor multiatributo não oferece quaisquer dificuldades. Os cálculos detalhados na Tabela 4, onde se apresentam (linhas L1a e L2a) os resultados das funções de valor individuais e também (linha L3) o resultado final, mostram que a alternativa P3 é a preferida por este AD, seguindo-se as restantes de

¹ Para o AD do exemplo que temos vindo a seguir, 1 lugar corresponde a 50 €, o que corresponde a pesos normalizados para o custo e número de lugares de respectivamente 1/51 (2%) e 50/51 (98%). No entanto, se o custo fosse expresso em k€, os pesos passariam a ser respectivamente 1000/1050 (95.2%) e 50/1050 (4.8%). O leitor tirará as suas conclusões...

acordo com o seu valor global, resultando a ordenação indicada na linha L4.

O leitor é convidado a repetir o exercício com diferentes funções de valor individuais (recalculando sempre os parâmetros), sejam lineares com outras gamas de definição, sejam exponenciais.

Tabela 4 – Aplicação da função de valor multiatributo

linha	Critérios	Projectos				
		P1	P2	P3	P4	P5
L1	Custo (k€)	34	38	40	42	50
L2	Número de lugares de consulta	100	250	400	350	500
L1a	Valor do custo	0.8	0.6	0.5	0.4	0
L2a	Valor do número de lugares	0	0.38	0.75	0.63	1
L3	Valor global [$k_C \cdot L1a + k_N \cdot L2a$]	0.40	0.49	0.63	0.51	0.50
L4	ordenação	5	4	1	2	3

4.3.4. Curvas de indiferença

Embora não seja indispensável para a avaliação das alternativas (e constitua um processo algo trabalhoso), é bastante instrutivo fazer o traçado das curvas de indiferença. Na Figura 14 podem ver-se as curvas (neste caso rectas, como já se tinha salientado na secção 3.5) correspondentes ao exemplo que temos vindo a analisar, estando também marcados (sem legenda) os pontos que representam os cinco projectos em causa. O leitor poderá comparar os valores da Tabela 4 com a situação das alternativas em relação às rectas de indiferença, em alguns casos exactamente (p.ex. $P1$ e $P5$ estão sobre rectas de indiferença), nos outros aproximadamente (p.ex. $P2$ está ligeiramente abaixo da recta 0.5, sendo $v(P2) = 0.49$).

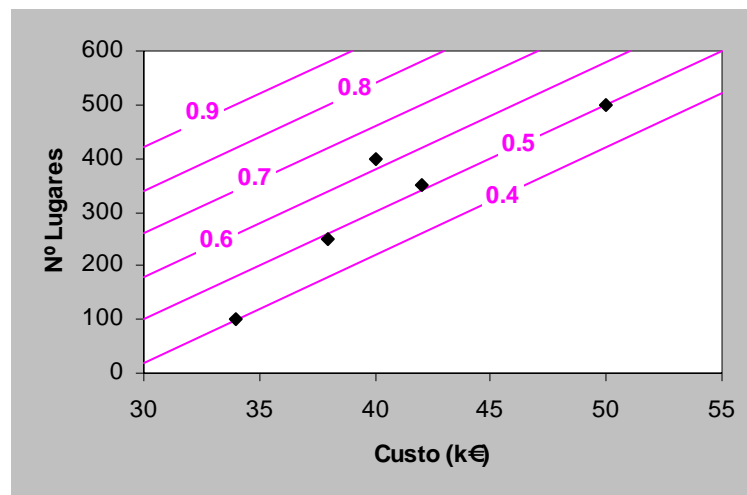


Figura 14 – Curvas de indiferença (ambas as funções lineares)

Sem dar os detalhes dos cálculos, considere-se agora uma nova situação, em que a valorização dos número de lugares segue uma função exponencial côncava intermédia às da Figura 11 ($a=-4$). Nessas circunstâncias, e supondo que o julgamento de indiferença era o mesmo que se utilizou anteriormente¹, obter-se-ia, seguindo o processo de cálculo de parâmetros exposto na secção 4.3.2, $k_C=0.354$ e $k_N=0.646$.

¹ Ou seja, $(34, 180) \sim (50, 500)$, o que implica $v(34,180)=v(50,500)$

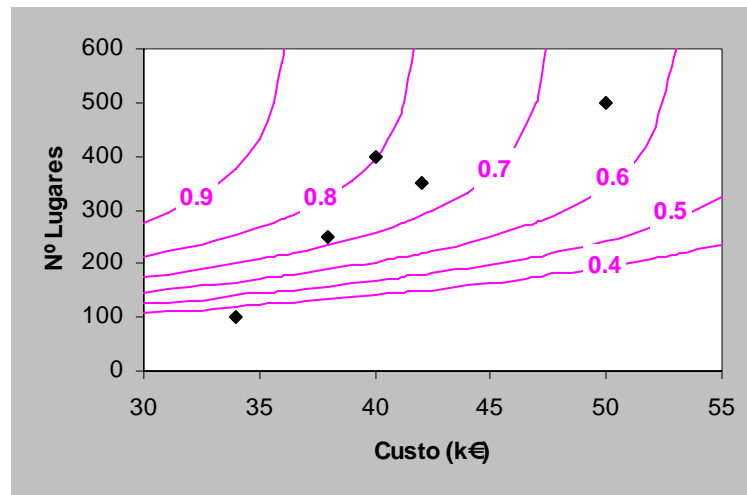


Figura 15 – Curvas de indiferença (v_1 linear, v_2 exponencial com $a=-4$)

As curvas de indiferença correspondentes, desenhadas na Figura 15, são agora claramente não-lineares, conduzindo também a uma ordenação diferente, como o leitor poderá verificar. A alternativa *PI*, por exemplo, é bastante penalizada por ter o valor mínimo no atributo “número de lugares de consulta”, em virtude da nova função de valor usada para esse atributo.

Finalmente, repare-se que as taxas de substituição não são agora constantes, como acontecia anteriormente. Na zona de baixo número de lugares, um pequeno aumento do número de lugares compensa um grande aumento de custo (as curvas de indiferença são pouco inclinadas). Pelo contrário, na zona de elevado número de lugares, um grande aumento do número de lugares apenas compensa um pequeno aumento de custo. Isto corresponde a uma variação gradual de atitude do AD, quando aumenta o número de lugares, desde aquela representada na Figura 7 até à da Figura 6, variação frequente em problemas de decisão reais. A utilização de funções de valor multiatributo não-lineares permite assim modelizar adequadamente este tipo de estrutura de preferências, onde, insiste-se, não faz sentido falar de “pesos dos critérios”, uma vez que os parâmetros k_i serão, quando muito, “pesos das funções de valor”.

5. Conclusões

A utilização de modelos formais de decisão, nem sempre muito complexos do ponto de vista matemático, permite organizar de forma consistente processos de selecção ou ordenação de alternativas cuja avaliação exige a consideração de múltiplos pontos de vista.

As metodologias simples apresentadas neste texto são suficientes para a maior parte dos problemas onde se pretende seguir a abordagem clássica baseada em funções aditivas. Salienta-se, no entanto, que as condições de aplicabilidade desta abordagem (que não discutimos no texto) nem sempre estão satisfeitas, o que pode exigir metodologias mais complexas. Por outro lado, há outras perspectivas sobre a ajuda à decisão, não contempladas neste texto, que podem ser uma boa alternativa metodológica em muitas circunstâncias. A bibliografia indicada a seguir abarca estes dois aspectos.

6. Bibliografia

Robert T Clemen, *Making hard decisions with decision tools*. 2nd rev. ed. . Pacific Grove, CA: Duxbury Press , 2001.

Ralph L. Keeney e Howard Raiffa. *Decisions with Multiple Objectives: preferences and Value Tradeoffs*. New York: John Wiley & Sons. 1976.

Ralph L. Keeney. *Value Focused Thinking*. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1996.

Bernard Roy e Denis Bouyssou. *Aide multicritère à la décision: méthodes et cas*. Paris: Economica. 1993.