OPF básico - Exemplo de aplicação dos conceitos de optimização não linear

Notas para a disciplina de DOSE (LEEC-FEUP)

Manuel Matos
FEUP, 2004

1. Introdução

A inclusão das equações do trânsito de potências no problema do despacho económico permite considerar as perdas de forma exacta e, se necessário, considerar também as restrições das linhas. Neste texto, mostra-se como se formularia o problema para uma pequena rede e ilustra-se a aplicação das técnicas clássicas de optimização de problemas não lineares com restrições de igualdade e desigualdade. Note-se que esta versão básica do OPF não inclui a optimização do trânsito de potência reactiva, ou seja, considera-se que os valores das tensões nos barramentos PV e de referência foram especificados previamente.

2. Optimização com restrições

Recordam-se, a seguir, as condições necessárias para o óptimo de um problema não-linear com restrições. Considere-se inicialmente o problema **P1**:

> **P1 –** Problema de optimização não-linear com restrições de igualdade
>
> $$\begin{aligned} &\min \quad f(\mathbf{x}) \\ &\text{suj}: \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Note-se que **x** é um vector, assim como **g** (o conjunto de restrições de igualdade do problema, na forma canónica). Repare-se também que é sempre possível reverter um problema dado para esta forma, pois max f(**x**)=min {–f(**x**)}. Para aplicação da teoria clássica de optimização, começa-se por construir o Lagrangeano:

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}'.\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

ou

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_j \lambda_j . g_j(\mathbf{x})$$

onde λ é o vector de multiplicadores de Lagrange (um para cada restrição), cujo significado será discutido mais tarde. A solução óptima de **P1** tem que satisfazer necessariamente as seguintes condições:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$
$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

ou, desdobrando, para um problema com n variáveis e m restrições de igualdade:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1..n$$
$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \lambda_j} = g_j(\mathbf{x}) = 0 \qquad j = 1..m$$

Note-se que o segundo conjunto de condições corresponde a recuperar as restrições do problema original. Finalmente, a resolução deste sistema de equações permite, nas condições previstas na teoria, obter a solução óptima $\mathbf{x}^*$.

Considere-se agora o problema completo **P2**:

> **P2 –** Problema de optimização não-linear com restrições de igualdade e desigualdade
>
> $$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{suj}: & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{array}$$

onde **h** é o vector das restrições de desigualdade do problema, na forma canónica. Neste caso, o Lagrangeano será:

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}'.\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}'.\mathbf{h}(\mathbf{x})$$

e as condições a satisfazer pelo óptimo são, para além das anteriores, que se repetem:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$
$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$$

as seguintes:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{\mu}'.\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}'.\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$$

A penúltima condição é designada por "condição de complementaridade" e permite avançar já com uma primeira ideia sobre o segundo conjunto de multiplicadores de Lagrange ($\boldsymbol{\mu}$), se se notar que a derivada corresponde ao primeiro membro das restrições de desigualdade, ou seja, que a condição é equivalente a $\mu_k.h_k(x)=0$ para cada restrição k. Na verdade, a condição estabelece que, se a restrição não estiver no limite ($h_k(x)<0$), o multiplicador respectivo tem de ser nulo; por outro lado, quando a restrição está no limite, o multiplicador é em geral positivo, dando uma indicação da melhoria da função objectivo (neste caso, diminuição) que poderia ser obtida se o limite fosse relaxado. Refira-se que, no caso das restrições de igualdade, os multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}$ têm um significado semelhante[1].

3. Problema simples de despacho incluindo a rede (OPF básico)

Considere-se um sistema eléctrico de energia formado por dois barramentos e uma linha, representada pela sua impedância Z=R+jX. Em ambos os barramentos há carga e produção, conhecendo-se as funções custo da produção:

$$C_1\left(P_1^G\right) = a + 2.P_1^G + 0{,}5.{P_1^G}^2 \qquad \$/h$$
$$C_2\left(P_2^G\right) = a + 2.P_2^G + 0{,}5.{P_2^G}^2 \qquad \$/h$$

Tratando-se de um problema académico, a unidade monetária não corresponde a nenhuma divisa em especial. Por outro lado, não se especifica o valor do custo fixo, pois é irrelevante para o despacho, uma vez

[1] Esta discussão será retomada mais adiante, em face do exemplo.

que ambos os grupos estão escalados para produzir.

Vamos começar por recordar as formulações clássicas do despacho económico (sem consideração da rede), seguindo-se a aplicação da metodologia da secção 2 ao problema de despacho integrado com o trânsito de potências e, por último, a consideração de restrições de desigualdade (limite no trânsito da linha). Os limites de produção não são incluídos em nenhum dos modelos, mas a sua consideração poderia ser feita formalmente com uma estratégia semelhante à que se vai usar no ponto 3.3.

3.1. Despacho económico

Na versão mais simples do despacho económico, as perdas são ignoradas (ou uma sua estimativa é adicionada à carga) e os limites de produção dos geradores são verificados *a posteriori*. Por isso, o problema reduz-se a :

P3 – Despacho económico simples

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i C_i\left(P_i^G\right) \\ \text{suj}: \quad & \sum_i P_i^G - \sum_i P_i^C = 0 \end{aligned}$$

ou, no caso do nosso pequeno sistema,

$$\begin{aligned} \min \quad & C_1\left(P_1^G\right) + C_2\left(P_2^G\right) \\ \text{suj}: \quad & P_1^G + P_2^G - \left(P_1^C + P_2^C\right) = 0 \end{aligned}$$

O Lagrangeano é, neste caso (como há apenas uma restrição, não se usou índice em λ):

$$L\left(P_1^G, P_2^G, \lambda\right) = C_1\left(P_1^G\right) + C_2\left(P_2^G\right) + \lambda.\left(P_1^G + P_2^G - \left(P_1^C + P_2^C\right)\right)$$

e a aplicação das condições descritas anteriormente conduz ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial P_1^G} &= \frac{\partial C_1}{\partial P_1^G} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial P_2^G} &= \frac{\partial C_2}{\partial P_2^G} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= P_1^G + P_2^G - \left(P_1^C + P_2^C\right) = 0 \end{aligned}$$

cuja resolução permite obter os valores das variáveis de decisão P_1^G e P_2^G e o custo marginal λ. É habitual descrever-se esta solução como a "condição de igualdade dos custos marginais dos geradores":

$$\frac{\partial C_1}{\partial P_1^G} = \frac{\partial C_2}{\partial P_2^G} = -\lambda$$

Exemplo 1

No caso do sistema de teste, os valores óptimos do problema seriam $P_1^G = P_2^G = 2$ pu (resultado trivial, uma vez que as funções custo dos dois geradores são iguais), sendo o custo total correspondente C=2a+12 \$/h. Ter-se-ia também, entretanto, $-\lambda=4$ \$/h, custo marginal do sistema, ou seja, o custo unitário associado à próxima quantidade produzida ΔP, quando $\Delta P \rightarrow 0$.

.

A inclusão das perdas no exercício de despacho económico pode ser feita, de forma simplificada, adicionando à carga uma estimativa das perdas globais. Mais adequado é, no entanto, tomar em conta a influência de cada gerador nas perdas, o que leva à formulação seguinte, onde se incluem as perdas (que são função do despacho, ou seja, da produção atribuída aos diversos geradores) na equação de equilíbrio.

P4 – Despacho económico com perdas

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i C_i\left(P_i^G\right) \\ \text{suj}: \quad & \sum_i P_i^G - \sum_i P_i^C - P_p\left(\mathbf{P^G}\right) = 0 \end{aligned}$$

As condições de optimalidade são semelhantes às anteriores, conduzindo, no nosso problema, a:

$$\frac{\partial L}{\partial P_1^G} = \frac{\partial C_1}{\partial P_1^G} + \lambda.\left(1 - \frac{\partial P_p}{\partial P_1^G}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_2^G} = \frac{\partial C_2}{\partial P_2^G} + \lambda.\left(1 - \frac{\partial P_p}{\partial P_2^G}\right) = 0$$

ou seja,

$$\lambda = -\frac{\dfrac{\partial C_1}{\partial P_1^G}}{\left(1 - \dfrac{\partial P_p}{\partial P_1^G}\right)} = -\frac{\dfrac{\partial C_2}{\partial P_2^G}}{\left(1 - \dfrac{\partial P_p}{\partial P_2^G}\right)}$$

condição que poderia designar-se por "igualdade dos custos marginais corrigidos às perdas". A resolução do sistema de equações associado a estas condições (juntamente com a restrição de igualdade) permite então obter os valores das produções que conduzem ao custo óptimo, desde que se conheça a expressão de P_p. É usual, com esta formulação, recorrer-se à expressão aproximada:

$$P_p = \mathbf{P^{G'}}.\mathbf{B}.\mathbf{P^G} + \mathbf{P^{G'}}.\mathbf{B_0} + B_{00}$$

ou

$$P_p = \sum_i \sum_j B_{ij}.P_i^G.P_j^G + \sum_i B_{0i}.P_i^G + B_{00}$$

onde $\mathbf{B}$, $\mathbf{B_0}$ e B_{00} são parâmetros (respectivamente uma matriz, um vector e um escalar) obtidos a partir de um estudo de trânsito de potências para um regime de produção de referência (os detalhes sobre esse processo não são relevantes para o que nos ocupa, podendo ser vistos em Grainger e Stevenson (1994), pg. 543). Essa circunstância faz com que a expressão seja aproximada para regimes de produção semelhantes ao de referência, podendo introduzir erros importantes se o regime de produção final for muito diferente do de referência.

3.2. Inclusão das equações do trânsito de potência no despacho (OPF básico)

As dificuldades na consideração correcta das perdas, referidas na secção anterior, só podem ser ultrapassadas com a inclusão das equações do trânsito de potências no exercício de despacho. Nesta versão muito básica do OPF, as variáveis de decisão continuam a ser exclusivamente as potências geradas, supondo-se conhecidas as tensões especificadas nos barramentos PV e de referência, as posições das tomadas de transformadores e baterias, etc. Para o nosso pequeno sistema, o problema formula-se da seguinte forma:

> **P5** – Despacho incluindo trânsito de potências (exemplo)
>
> $$\begin{aligned} \min \quad & C_1\left(P_1^G\right)+C_2\left(P_2^G\right) \\ \text{suj}: \quad & P_1^G-P_1^C-\frac{1}{Z^2}\left(R.V_1^{\,2}-R.V_1.V_2.\cos\delta+X.V_1.V_2.\text{sen}\delta\right)=0 \\ & P_2^G-P_2^C-\frac{1}{Z^2}\left(R.V_2^{\,2}-R.V_1.V_2.\cos\delta-X.V_1.V_2.\text{sen}\delta\right)=0 \end{aligned}$$

Começando por construir o Lagrangeano,

$$L\left(P_1^G,P_2^G,\lambda_1,\lambda_2,\delta\right)=C_1\left(P_1^G\right)+C_2\left(P_2^G\right)+\lambda_1.\left(P_1^G-P_1^C-\ldots\right)+\lambda_2.\left(P_2^G-P_2^C-\ldots\right)$$

obtêm-se as condições:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial P_1^G}=\frac{\partial C_1}{\partial P_1^G}+\lambda_1=0 \\ &\frac{\partial L}{\partial P_2^G}=\frac{\partial C_2}{\partial P_2^G}+\lambda_2=0 \\ &\frac{\partial L}{\partial \delta}=\lambda_1.\left(R.V_1.V_2.\text{sen}\,\delta+X.V_1.V_2.\cos\delta\right)+\lambda_2.\left(R.V_1.V_2.\text{sen}\,\delta-X.V_1.V_2.\cos\delta\right)=0 \end{aligned}$$

juntamente com as restrições de igualdade iniciais. Temos assim cinco equações a cinco incógnitas, que permitem obter os valores pretendidos.

Exemplo 2

NB: Para permitir a comparação com a resolução através da segunda formulação da secção 3.1 (problema **P4**), usam-se os mesmos dados de Elgerd (1983), pg. 286.

R=0,02 pu, X=0,1 pu, V_1=V_2=1 pu, cargas e funções custo como no exemplo 1.

A aplicação das condições indicadas anteriormente leva ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} &2+P_1^G+\lambda_1=0 \\ &2+P_2^G+\lambda_2=0 \\ &\lambda_1.\left(0{,}02\,\text{sen}\,\delta+0{,}1\cos\delta\right)+\lambda_2.\left(0{,}02\,\text{sen}\,\delta-0{,}1\cos\delta\right)=0 \\ &P_1^G-1-\frac{1}{0{,}0104}\left(0{,}02-0{,}02\cos\delta+0{,}1\,\text{sen}\,\delta\right)=0 \\ &P_2^G-3-\frac{1}{0{,}0104}\left(0{,}02-0{,}02\cos\delta-0{,}1\,\text{sen}\,\delta\right)=0 \end{aligned}$$

cuja resolução permite obter os valores de P_1^G=1,93158 pu e P_2^G=2,08617 pu, a que corresponde o custo mínimo C=2a+12,077 \$/h. O gerador 2 tem maior produção, dado que a carga local é maior do que a do outro barramento e assim reduzem-se perdas, mas repare-se que a solução com menores perdas (P_1^G=1 pu, P_2^G=3 pu) **não é** a solução óptima, pois coloca o gerador 2 numa zona de produção muito mais cara, o que não compensa a ausência de perdas.

Outros resultados: δ=0,096109 (5°,51), λ_1=-3,93158 \$/h, λ_2=-4.08617 \$/h, P_p=0,01775 pu, P_{12}=0,93158 pu. Repare-se que os custos marginais λ_1 e λ_2 mostram que um aumento de carga no barramento 1 conduz a um aumento de custo inferior ao que ocorreria se houvesse um aumento de carga no barramento 2. Para ilustrar, resolvam-se dois estudos de sensibilidade com um aumento de carga de (p.ex.) 0,001 pu, um no barramento 1, outro no barramento 2. Ver-se-á que o aumento de custo é muito semelhante aos valores respectivamente de -0,001.λ_1 e de -0,001.λ_2.

3.3. Inclusão de restrições das linhas

O modelo da secção anterior permite, para além de uma representação correcta das perdas, conhecer os trânsitos de potência nas linhas do sistema. É então possível verificar *a posteriori* se alguma linha excede a sua capacidade de transporte (que suporemos, simplificadamente, ser dada em termos de potência activa medida na emissão). No caso do exemplo 2, poderia verificar-se que o trânsito P_{12}=0,93158 pu ultrapassa o limite fixado para a linha (à saída do barramento 1), de 0,9 pu. Dada a simplicidade do sistema, a solução óbvia é diminuir a produção do gerador 1 para 1,9 pu e resolver o trânsito de potências, mas vamos utilizar esta situação para ilustrar a utilização dos conceitos expostos a propósito do problema **P2**.

P6 - Despacho incluindo trânsito de potências e restrições de capacidade (exemplo)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & C_1\left(P_1^G\right)+C_2\left(P_2^G\right) \\
\text{suj:} \quad & P_1^G-P_1^C-\frac{1}{Z^2}\left(R.V_1^2-R.V_1.V_2.\cos\delta+X.V_1.V_2.\operatorname{sen}\delta\right)=0 \\
& P_2^G-P_2^C-\frac{1}{Z^2}\left(R.V_2^2-R.V_1.V_2.\cos\delta-X.V_1.V_2.\operatorname{sen}\delta\right)=0 \\
& P_1^G-P_1^C-P_{12}^{max}\le 0
\end{aligned}
$$

Este problema só difere de **P5** pela inclusão da restrição de desigualdade que obriga a respeitar o limite da linha (usou-se a lei dos nós no barramento 1 para substituir P_{12}, que não é uma das variáveis originais). O Lagrangeano será, neste caso:

$$
L\left(P_1^G,P_2^G,\lambda_1,\lambda_2,\delta,\mu\right)=C_1\left(P_1^G\right)+C_2\left(P_2^G\right)+\lambda_1.\left(P_1^G-P_1^C-\ldots\right)+\lambda_2.\left(P_2^G-P_2^C-\ldots\right)+\mu.\left(P_1^G-P_1^C-P_{12}^{max}\right)
$$

e as condições a respeitar pelo óptimo são, para além das três restrições**:**

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial P_1^G}=\frac{\partial C_1}{\partial P_1^G}+\lambda_1+\mu=0 \\
& \frac{\partial L}{\partial P_2^G}=\frac{\partial C_2}{\partial P_2^G}+\lambda_2=0 \\
& \frac{\partial L}{\partial \delta}=\lambda_1.\left(R.V_1.V_2.\operatorname{sen}\delta+X.V_1.V_2.\cos\delta\right)+\lambda_2.\left(R.V_1.V_2.\operatorname{sen}\delta-X.V_1.V_2.\cos\delta\right)=0 \\
& \mu.\left(P_1^G-P_1^C-P_{12}^{max}\right)=0 \\
& \mu\ge 0
\end{aligned}
$$

Neste caso, a presença de desigualdades e da condição de complementaridade não levam directamente à resolução de um sistema de equações, como no caso anterior. Uma possível estratégia é começar por supor μ=0, o que conduz a **P5** – se esse problema tiver solução compatível com a desigualdade (ou seja, trânsito inferior ao limite), o problema fica resolvido. Se a desigualdade for violada, então a condição de complementaridade obriga a que a desigualdade esteja no limite, o que nos dá o valor da produção no gerador 1 e permite resolver o sistema de equações (sem esquecer as restrições de igualdade) para obter os valores óptimos das restantes variáveis. No final, haverá que verificar se $\mu\ge 0$.

Exemplo 3

Dados como no exemplo 2 e $P_{12}^{max} = 0,9$ pu

Neste caso, as condições são:

$$2 + P_1^G + \lambda_1 + \mu = 0$$

$$2 + P_2^G + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 .(0,02 \operatorname{sen} \delta + 0,1 \cos \delta) + \lambda_2 .(0,02 \operatorname{sen} \delta - 0,1 \cos \delta) = 0$$

$$P_1^G - 1 - \frac{1}{0,0104}(0,02 - 0,02 \cos \delta + 0,1 \operatorname{sen} \delta) = 0$$

$$P_2^G - 3 - \frac{1}{0,0104}(0,02 - 0,02 \cos \delta - 0,1 \operatorname{sen} \delta) = 0$$

$$P_1^G - 1 - 0,9 \le 0$$

$$\mu .(P_1^G - 1 - 0,9) = 0$$

$$\mu \ge 0$$

Uma vez que o caso μ=0 já foi estudado, conduzindo à violação da restrição de capacidade da linha, terá que ser, como se disse:

$P_1^G - 1 - 0,9 = 0$, ou seja P_1^G =1,9 pu

O conhecimento deste valor permite resolver o sistema de cinco equações a cinco incógnitas incluído na formulação do problema, obtendo-se P_2^G =2.11657 pu e C=2a+12,078 \$/h (ligeiramente superior, como se esperava, ao custo sem a restrição).

Outros resultados: δ=0,092872 (5°,32), λ_1=-3,96601 \$/h, λ_2=-4.11657 \$/h, P_p=0,01658 pu, μ=0,06601 \$/h. Os valores dos λ subiram (em valor absoluto) devido ao congestionamento na rede, e o custo marginal μ indica a diminuição de custo que haveria por unidade de aumento do limite da linha 1-2. Neste caso, pode ver-se que, resolvendo de novo o problema com um limite 0,9001 pu, o custo diminui de aproximadamente 0,001.μ.

4. Referências

Elgerd, O.I. (1983), Electric Energy Systems Theory – an introduction, McGraw-Hill, New York.
Grainger, J.J. e Stevenson, W.D. (1994), Power System Analysis, McGraw-Hill, New York.