

# Introdução ao problema de escalonamento e pré-despacho

*Apontamentos para a disciplina de DOSE*

*Manuel António Matos*

# índice

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA .....</b>	<b>1</b>
2.1. CUSTOS .....	1
2.2. RESTRIÇÕES.....	3
2.3. CONTRATOS DE FORNECIMENTO DE COMBUSTÍVEL .....	4
2.4. MODELO DO PROBLEMA DE ESCALONAMENTO .....	5
<b>3. METODOLOGIAS.....</b>	<b>6</b>
3.1. ORDEM DE MÉRITO .....	6
3.2. PROGRAMAÇÃO DINÂMICA .....	7
3.2.1. Estados.....	7
3.2.2. Trajectórias.....	8
3.2.3. Fórmula de recorrência.....	8
3.2.4. Resolução.....	9
3.2.5. Dificuldades.....	9
3.3. RELAXAÇÃO LAGRANGEANA .....	10
3.3.1. Modelo fundamental .....	10
3.3.2. Subproblemas .....	11
3.3.3. Processo iterativo .....	12
3.3.4. Convergência.....	13
3.4. MÉTODOS RECENTES.....	14
<b>4. COORDENAÇÃO HIDRO-TÉRMICA .....</b>	<b>14</b>
<b>5. BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>14</b>

## 1. Introdução

O conjunto de decisões que leva à atribuição de uma certa carga a cada um dos geradores do sistema eléctrico de energia começa pela definição das máquinas que, num determinado período, estarão em funcionamento. Esta fase é necessária, pois a cada máquina em funcionamento<sup>1</sup> (mesmo na potência mínima) fica associado um custo constante não desprezável, não sendo económico manter em funcionamento um número excessivo de máquinas.

A conhecida variação diária do diagrama de cargas leva, por outro lado, à necessidade de ir ligando e desligando grupos ao longo do dia, o que envolve custos associados à ligação e desligação, existindo também diversas restrições técnicas que limitam as opções de quem toma as decisões (tempos de arranque, tempos mínimos de paragem, etc.). Trata-se, portanto, de um problema multi-temporal, normalmente resolvido para a semana seguinte, com intervalos típicos de uma hora.

Finalmente, é necessário prever uma folga, designada por reserva girante, entre a carga prevista num dado intervalo e a potência total disponível nas máquinas em funcionamento para esse intervalo, seja para ter em conta aumentos inesperados de carga, seja para manter o serviço em caso de avaria de um grupo. Pelas mesmas razões, definem-se ainda outras reservas (reserva quente, reserva de  $n$  minutos), correspondentes à potência que pode ficar disponível em tempo reduzido (máquinas de arranque rápido, como grupos hídricos e turbinas a gás), no caso da reserva existente não se revelar suficiente.

Todos os aspectos referidos têm, portanto, que ser tidos em conta no problema de escalonamento dos grupos (muitas vezes, usa-se a designação inglesa de *unit commitment*), onde se faz também o pré-despacho, ou seja, uma antecipação grosseira da carga a atribuir a cada grupo, com o intuito de tomar em consideração os custos de funcionamento, associados ao consumo de combustível.

O presente texto é uma introdução ao problema e aos métodos de resolução mais utilizados, na sua versão clássica, onde apenas uma entidade é responsável pela gestão económica do sistema. A actual transformação do sector, na União Europeia, nos Estados Unidos e em muitos outros países, para um mercado de electricidade onde actuam vários participantes, tanto na oferta como na procura, será também abordada em secção própria. Note-se, no entanto, que o problema clássico continua a colocar-se em sistemas isolados (por exemplo ilhas) e em países onde não se assistiu à liberalização do sector.

## 2. Descrição do problema

Essencialmente, o problema de escalonamento e pré-despacho é um problema de optimização: procura-se satisfazer as cargas previstas, com uma certa reserva, a custo mínimo, respeitando todas as restrições técnicas.

### 2.1. Custos

Os custos associados aos grupos térmicos dependem, obviamente, do tipo de máquina

---

<sup>1</sup> Estamos a supor um sistema exclusivamente constituído por grupos térmicos. A coordenação hidro-térmica, e a consideração de outras fontes renováveis, tem especificidades que serão abordadas mais adiante.

primária (turbina a vapor, turbina a gás, grupo diesel) e de outros aspectos, como o processo de geração do vapor (fuel-oil, carvão, nuclear) ou a idade da máquina, o que implica uma análise caso a caso em problemas reais. De forma abreviada, os custos associados são os que se apresentam a seguir:

- Custo de funcionamento: custo associado ao consumo de combustível para produção de energia, tipicamente não linear. A função custo inclui o ponto (0,0), correspondente ao estado de paragem, o que a torna descontínua, como é patente na Figura 1<sup>2</sup>. Este custo é o mesmo que se utiliza no despacho (embora nesse caso não se considere, como se sabe, a hipótese do grupo estar parado). A função custo é muitas vezes aproximada polinomialmente (2º ou 3º grau).

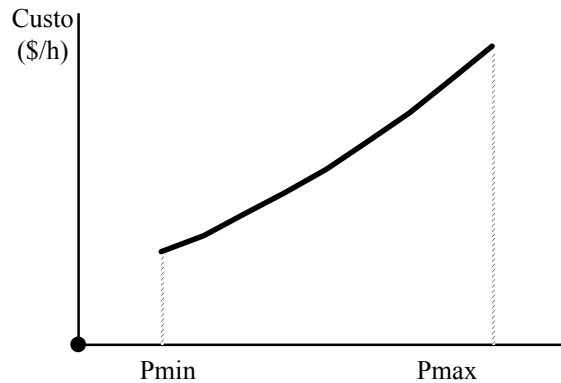


Figura 1 - Função custo (custo de funcionamento)

- Custo de arranque: independentemente da potência que os grupos vierem a produzir, existe um custo de arranque associado, que depende, no caso das centrais com turbina a vapor, do tempo de paragem anterior e do facto de se manterem ou não as caldeiras quentes durante o período de paragem. No primeiro caso (*banking*), o custo de arranque tem uma expressão do tipo:

$$C(t) = C_A + c_t \cdot t$$

onde  $C_A$  (\$) é o custo fixo de arranque, independente do tempo decorrido, e  $c_t$  (\$/h) é o custo horário associado ao consumo de combustível para manter a temperatura necessária. Na segunda hipótese (*cooling*), o custo depende do tempo decorrido desde a paragem do grupo (e corte do combustível), com a segunda parcela a tender exponencialmente para o custo  $C_F$  de arranque a frio:

$$C(t) = C_A + C_F \cdot (1 - e^{-t/\alpha})$$

Repare-se que a escolha entre os dois tipos de paragem é, em si, um problema interessante. Como se vê na Figura 2, a primeira hipótese é melhor para paragens curtas (algumas horas), deixando de o ser a partir de um ponto de equilíbrio que depende, obviamente, dos parâmetros das expressões anteriores.

<sup>2</sup> No caso de turbinas a vapor complexas, a curva da figura é uma aproximação convexa de uma função custo real "mal-comportada", usada para facilitar os processos de optimização.

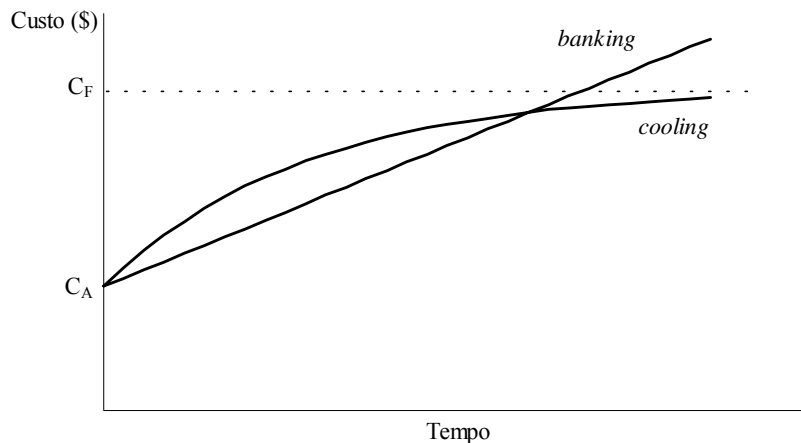


Figura 2 - Custos de arranque de centrais com turbina a vapor

No caso dos grupos diesel, o arranque pode assumir formas complexas, podendo incluir patamares de aquecimento intermédio, mudanças de combustível, etc, pelo que o custo de arranque pode não ser simples de descrever analiticamente. Daí que se usem, muitas vezes, modelos simplificados.

- Custo de paragem: quando se modeliza o custo de arranque de forma simplificada (em vez de usar as formulações indicadas atrás), os custos associados a manter condições para um arranque a quente (*banking*) são modelizados como custos de paragem. Também podem ter que ser considerados custos de paragem em certos tipos de grupo diesel.

## 2.2. Restrições

A restrição fundamental a considerar é, como habitualmente nos sistemas eléctricos de energia, a satisfação da carga, ou seja, a potência total disponível (soma das potências máximas de todos os grupos escalados) tem que ser superior à carga total prevista, em todos os intervalos. Como se disse, a diferença tem que ser superior à reserva girante definida para cada intervalo, de acordo com um dos princípios seguintes:

- Valor igual a uma percentagem da carga prevista para o intervalo;
- Valor igual à potência máxima da maior unidade em funcionamento;
- Reserva que garanta um risco de perda de carga inferior a um certo valor, tendo em conta as probabilidades de avaria dos grupos.

Os grupos térmicos, sobretudo aqueles em que a máquina primária é a turbina a vapor, não podem ser ligados de forma produzirem imediatamente a potência que se pretende, nem podem deslastrar imediatamente a carga que lhes está atribuída. Há também motivos técnicos que excluem o funcionamento ou paragem durante períodos curtos. De forma abreviada, as restrições associadas são os que se apresentam a seguir:

- Tempo de arranque: para cada tipo de grupo, define-se um tempo mínimo de arranque que depende do tempo de paragem anterior e está relacionado com a necessidade de aquecer caldeiras, obter pressões de vapor e outros condicionalismos técnicos. Em consequência, a decisão de utilizar o grupo pode ter de ser tomada muito antes da hora a que a potência respectiva vai ser necessária.
- Tempos mínimos de paragem e de funcionamento: por razões fundamentalmente de ordem técnica, os períodos de paragem e funcionamento não devem ser demasiado

reduzidos. Valores mínimos típicos para grupos com turbinas a vapor são 2 a 12 horas para o tempo de paragem e 1 a 8 horas para o tempo de funcionamento. Os restantes tipos de máquinas apresentam tempos mínimos menores.

- Limites de produção: valores máximo e mínimo da potência produzida pelo grupo, fixados por razões técnicas e económicas. Por exemplo, nos grupos Diesel, a produção a potências baixas é economicamente inviável, embora fosse possível tecnicamente (usando óleo diesel em vez de fuel-oil). Valores típicos da potência mínima para grupos com turbina a vapor são 40 a 70% da potência máxima. Estes limites também se utilizam no despacho.
- Taxas máximas de tomada e deslastre de carga: não sendo possíveis variações muito rápidas da potência produzida pelos grupos, definem-se taxas máximas de tomada e deslastre de carga (MW/h) que condicionam as alterações de produção em intervalos de tempo sucessivos. No despacho horário associado ao escalonamento, designado normalmente por pré-despacho, estes limites têm sobretudo influência nos períodos iniciais e finais de funcionamento. Estas restrições também são utilizadas no despacho multi-período, normalmente sob a forma de **janelas de operação** (máxima variação entre períodos seguintes).

Os aspectos focados, nomeadamente a questão dos tempos de arranque, mostram que o pré-despacho tem uma escala temporal completamente diferente da do despacho, possuindo, além disso, muito maior **incerteza** na definição das cargas e maior complexidade na formulação matemática, dada a presença de variáveis inteiras (ter ou não ligado cada grupo em cada período) e de funções custo não convexas.

Finalmente, uma referência a duas restrições um pouco diferentes, mas que também podem ter que ser consideradas:

- Restrições de pessoal: numa central com diversos grupos produtores, podem surgir restrições ao arranque simultâneo de vários grupos por não existir pessoal suficiente para efectuar todas as operações necessárias. Esta restrição tem diminuído de importância devido à progressiva automatização do processo de arranque.
- Grupos obrigatórios (*must-run*): por diversas razões, podem existir indicações de que certos grupos estão obrigatoriamente ligados em certos períodos do horizonte de escalonamento. Este tipo de restrições pode aumentar o custo global, mas favorece a rapidez da resolução do problema, por diminuir o número de variáveis inteiras.

### 2.3. Contratos de fornecimento de combustível

Embora muitas vezes não mencionados, os contratos de fornecimento de combustível devem ser tidos em conta nas aplicações industriais para escalonamento e despacho, uma vez que introduzem restrições adicionais com influência económica. Não sendo do âmbito do presente texto o desenvolvimento deste tópico, fica de qualquer modo a referência às principais situações:

- Contratos a curto prazo: esta hipótese, que não é a mais frequente, corresponde à aquisição de combustíveis a preços de mercado (*spot*), de acordo com as variações nas bolsas de mercadorias. Não acarreta grandes condicionamentos ao problema, mas tem associada uma grande incerteza futura, o que é evitado com os contratos de longo prazo.
- Contratos *take-or-pay*: nesta modalidade de contrato a longo prazo, a companhia produtora obriga-se a adquirir quantidades mínimas em certos períodos. Isso significa que, a partir de um certo ponto, as poupanças obtidas no consumo de combustível

não correspondem a uma efectiva poupança económica, pois a empresa paga o combustível, mesmo que não o consuma<sup>3</sup>.

- Contratos zonados: outra possibilidade de contrato a longo prazo, na qual são definidos patamares de preço para um certo período e um certo consumo de energia, como se esboça na Figura 3. Facilmente se compreende que a trajectória de consumo ao longo do tempo (no plano Energia x Tempo) tem influência no custo total de uma certa quantidade de combustível.

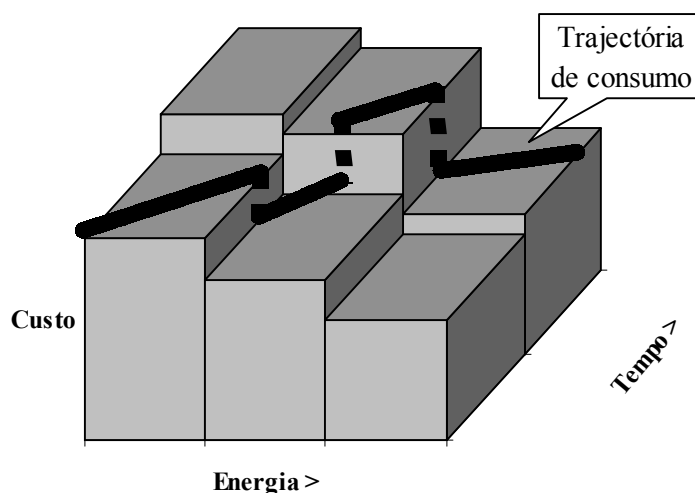


Figura 3 - Contratos zonados de fornecimento de combustível

#### 2.4. Modelo do problema de escalonamento

Tipicamente, o problema do escalonamento é definido usando intervalos horários, para um horizonte de 3 a 7 dias, dependendo do tipo de restrições existentes. Sendo o sistema constituído por  $n$  grupos produtores (supostos todos térmicos), e definindo um horizonte de  $h$  períodos, a função custo a minimizar será:

$$C = \sum_{i=1}^h (C_i + T_i) = \sum_{i=1}^h \left( \sum_{k=1}^n [u_{ik} (C_k^0 + C_k^V(P_{ik}) + C_k^A \cdot (1 - u_{i-1,k})) + (1 - u_{ik})(u_{i-1,k})C_k^P] \right)$$

onde  $C_i$  e  $T_i$  indicam, respectivamente, os custos totais de funcionamento e transição em cada período  $i$ ,  $C_k^0$  é o custo fixo de funcionamento do grupo  $k$  num período,  $C_k^V(P_{ik})$  é o custo variável (combustível) do grupo  $k$  e  $C_k^A$  e  $C_k^P$  são respectivamente os custos de arranque e paragem do grupo  $k$  (supostos constantes para simplificar). Finalmente,  $u_{ik}$  é uma variável binária (0 ou 1) que indica o estado (desligado, ligado) do grupo  $k$  no intervalo  $i$ . Note-se que, devido aos custos de transição, é necessário definir o estado inicial ( $i=0$ ), ou seja, todos os  $u_{0k}$  ( $k=1..n$ ), não sendo obviamente incluídos os custos variáveis respectivos.

As restrições são aquelas apontadas na secção 2.2, sobressaindo as condições fundamentais

<sup>3</sup> Pode pensar-se que, não consumindo, a empresa poderia armazenar esse combustível, mas as capacidades de armazenamento também são limitadas, para além de existir um custo associado.

de reserva e, sobretudo, de equilíbrio entre produção e carga:

$$\sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot P_k^{\max} \geq P_i^{\text{carga}} + P_i^{\text{reserva}}, \forall i$$

$$\sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot P_{ik} = P_i^{\text{carga}}, \forall i$$

As restantes restrições estão essencialmente relacionadas com limites, pelo que não se justifica representá-las todas aqui explicitamente, o que se faz apenas para os limites à produção:

$$u_{ik} \cdot P_k^{\min} \leq P_{ik} \leq u_{ik} \cdot P_k^{\max}, \forall i, k$$

Trata-se, portanto, de um problema de optimização não linear com restrições, com variáveis inteiras, de resolução exacta impossível a partir de um certo número de grupos. Na secção seguinte, serão abordadas algumas das técnicas utilizadas para obter uma solução próxima da óptima.

### 3. Metodologias

Sem carácter exaustivo, descrevem-se a seguir os principais aspectos das metodologias mais vulgares de abordagem ao problema. Ressalta-se, desde logo, que a enumeração de todas as possíveis alternativas não pode ser utilizada, dada a explosão combinatória associada. Como exemplo simples, veja-se que, com apenas 10 grupos, teríamos  $2^{10}-1$  (1023) combinações possíveis em cada intervalo; supondo apenas 24 intervalos (um dia), o número total de alternativas seria  $1023^{24}$  ( $> 10^{72}$ ). Claro que nem todas as combinações são viáveis<sup>4</sup>, mas isso não chega para tornar a enumeração viável, excepto em sistemas de dimensão trivial.

#### 3.1. Ordem de mérito

O problema de escalonamento foi inicialmente abordado através de heurísticas baseadas numa **ordem de mérito**, que procuravam calcular um índice simples que permitisse definir a ordem de entrada em serviço dos grupos. Um indicador popular, que corresponde ao custo total por unidade de potência produzida<sup>5</sup>, é:

$$M_k = \frac{C_k^0 + C_k^v(P_k^{\max})}{P_k^{\max}}$$

Os grupos são então escalados por ordem crescente dos respectivos  $M_k$ , e retirados pela ordem contrária. A definição da escala de serviço parte deste princípio, supondo os grupos à potência máxima, e é depois mais ou menos afinada para ter em conta as restrições indicadas anteriormente. Algumas abordagens incluem heurísticas de aplicação local para eliminar situações de paragem seguida de arranque e outras similares, de modo a diminuir o custo total. Ou seja, neste caso não se considera o modelo matemático indicado na secção

<sup>4</sup> É de esperar que todas as combinações com um número reduzido de grupos não consigam satisfazer a carga, na maior parte dos períodos.

<sup>5</sup> Este índice não deve ser confundido com o *custo variável por unidade de potência*, às vezes utilizado em metodologias simplificadas de despacho, onde o custo fixo já não tem influência.



anterior. Este tipo de abordagens tem a vantagem da simplicidade, mas deixa de fora alguns parâmetros importantes do problema, conduzindo a soluções sub-óptimas.

O algoritmo descrito a seguir recorre aos princípios descritos para decidir a paragem de grupos, nos períodos em que a carga está a diminuir. Nos períodos em que a carga está a aumentar, bastará aplicar a ordem de mérito para ir ligando os grupos necessários.

#### Heurística para quando a carga diminui

- Seleccionar o grupo ligado que tem maior  $M_k$ .
- Verificar se a sua paragem permite ainda alimentar a carga, com suficiente reserva. Se não for possível, manter o escalonamento e avançar para o próximo período.
- Verificar se o número de horas que decorre até ao grupo ser de novo necessário é inferior ao tempo mínimo de paragem do grupo. Se for, manter o escalonamento e avançar para o próximo período.
- Comparar o custo de manter o grupo a funcionar (até ser de novo necessário) com o custo de paragem e arranque (tendo em conta o número de horas anterior). Se o primeiro custo for menor, manter o escalonamento e avançar para o próximo período.
- Parar o grupo e repetir o procedimento.

### 3.2. Programação dinâmica

A utilização da programação dinâmica neste tipo de problemas permite reduzir muito o espaço de pesquisa, ao evitar repetições de cálculos que ocorrem na enumeração total de soluções (mesmo limitada a soluções viáveis em cada intervalo). Saliente-se, no entanto, que em sistemas de grande dimensão (muitos grupos, muitos períodos), também esta técnica acaba por não poder ser utilizada, devido à conhecida *maldição da dimensionalidade*. Não sendo objectivo deste texto a descrição dos princípios e fundamentos da programação dinâmica, passamos directamente a uma das formulações possíveis (pesquisa para a frente), com algumas simplificações para permitir uma melhor exposição da metodologia.

#### 3.2.1. Estados

Em cada um dos períodos, designa-se por **estado** cada uma das combinações dos  $n$  grupos, em que uns estão ligados e outros desligados. O número total de combinações é, como já se disse,  $2^n - 1$ , mas nem todas são admissíveis, ou seja, em muitas delas a potência total disponível não é suficiente. Em cada um destes estados, será necessário distribuir a carga total<sup>6</sup> pelos diversos grupos, realizando aquilo que se designa por *pré-despacho*, de forma a calcular o **custo de funcionamento** associado à combinação em causa. O pré-despacho pode ser efectuado através de uma regra baseada na ordem de mérito (unidades com menor  $M_k$  funcionando à plena carga<sup>7</sup>, até ser satisfeita toda a potência necessária) ou por recurso aos custos marginais (como se faz no despacho<sup>8</sup>), sem violar os limites das máquinas. Em cada período haverá então vários estados possíveis, cada um caracterizado pelos grupos que estão ligados e por um custo total de funcionamento.

<sup>6</sup> Nesta descrição, não se consideram as perdas nem as restrições ao trânsito de potências impostas pelos limites de transmissão.

<sup>7</sup> Neste caso, o cálculo do índice não inclui o custo fixo (cf. Nota 5)

<sup>8</sup> Aspecto não desenvolvido neste texto. Pode ser visto em qualquer dos livros indicados na bibliografia.

### 3.2.2. Trajectórias

A Figura 4 dá uma ideia da situação depois de definidos os estados em cada período. Podem ser definidas diversas **trajectórias**, cada uma correspondente à selecção de um estado em cada período, ficando associado a cada trajectória um custo global que é a soma dos custos totais de funcionamento de todos os estados e dos custos de transição entre cada par de estados consecutivos. O problema passa a ser encontrar a trajectória óptima, ou seja, aquela que apresenta o custo global mínimo. Na figura, supõem-se apenas quatro períodos<sup>9</sup>, e representam-se os estados viáveis por quadrados. As trajectórias estão representadas por setas (de espessura diferente) que percorrem todos os períodos.

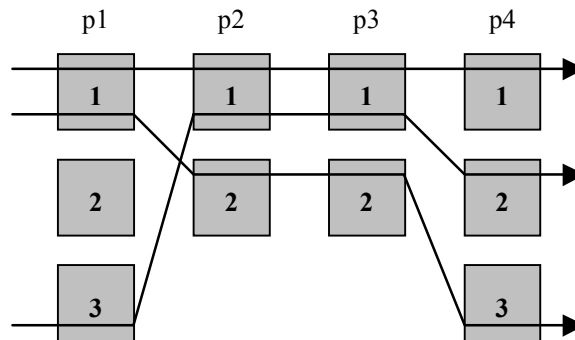


Figura 4 - Períodos, estados e trajectórias

Mesmo considerando só os estados viáveis, o número total de trajectórias pode ser muito grande em problemas reais (neste caso:  $3 \times 2 \times 2 \times 3 = 36$ ), pelo que a resolução por enumeração está fora de causa.

### 3.2.3. Fórmula de recorrência

A resolução através da programação dinâmica baseia-se no estabelecimento de uma fórmula de recorrência como a seguinte (pesquisa para a frente):

$$F(i, j) = \min_k [C(i, j) + T((i-1, k) - (i, j)) + F(i-1, k)]$$

onde  $i$  é o período,  $j$  o estado actual e  $k$  indica aos diversos estados do período anterior.  $F(i, j)$  é o custo total (desde o início) associado ao estado  $j$ ,  $C(i, j)$  é o custo total da combinação  $j$  no período  $i$  (depende da carga) e  $T$  representa o custo de transição entre os estados  $k$  e  $i$  (pode ser nulo, se não houver arranques ou paragens). Em aplicações simplificadas,  $T$  é simplesmente a soma dos custos de arranque (supostos constantes) com os custos de paragem. Na Figura 5, mostra-se o esquema de cálculo de

$$F(2,1) = C(2,1) + \min\{F(1,1), [T(12-21) + F(1,2)], [T(13-21) + F(1,3)]\}$$

notando-se que, quando a combinação de grupos escalados se mantém, não há lugar a custos de transição.

<sup>9</sup> Repare-se que no 2º e 3º períodos a carga será com certeza superior à dos outros.

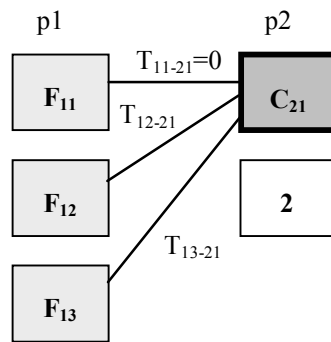


Figura 5 - Esquema do cálculo de  $F(2,1)$

Note-se, por ser fonte de erros, que não há qualquer interesse em calcular o mínimo dos  $F(i,j)$  num determinado período  $i$ , excepto se não houver custos de transição, o que nunca acontece<sup>10</sup>.

### 3.2.4. Resolução

A aplicação do **princípio da optimalidade** que é a base da programação dinâmica está implícita na forma de recorrência. Em termos simplificados, dir-se-á que qualquer trajectória, candidata a óptima, que vá dum certo estado intermédio até ao fim, terá que ter tido um percurso óptimo nos períodos anteriores. No caso da Figura 5, por exemplo, a melhor trajectória que continue a partir de (2,1) daqui terá que passar, no primeiro período, pelo estado associado ao mínimo encontrado.

Para dar uma ideia da diminuição do esforço de cálculo em relação à enumeração, veja-se o número de operações a realizar:

- Calcular  $F$  para os três estados do primeiro período, ou seja,  $F(1,1)$ ,  $F(1,2)$  e  $F(1,3)$ . Como é o período inicial, não há custos do estado anterior, mas devem ser considerados os custos de transição em relação à situação anterior ao estudo.
- Calcular  $F(2,1)$  e  $F(2,2)$ . Em cada um destes dois casos, fica determinado o melhor estado anterior.
- Calcular  $F(3,1)$  e  $F(3,2)$ . Em cada um destes dois casos, fica determinada a melhor sub-trajectória anterior.
- Calcular  $F(4,1)$ ,  $F(4,2)$  e  $F(4,3)$ . O menor destes valores é o custo óptimo, e fica também determinada a trajectória óptima.

Como se vê, há lugar a 10 cálculos do valor de  $F$  (número total de estados). No caso da enumeração, a avaliação de cada trajectória envolvia 4 cálculos semelhantes, ou seja, haveria que realizar o equivalente a  $4 \times 36 = 144$  avaliações de  $F$ .

### 3.2.5. Dificuldades

Quando o número de grupos e de períodos tem dimensão real, a aplicação da programação dinâmica ocasiona tempos de execução incomportáveis. Para além da possível utilização de outros métodos (ver 3.3 e 3.4), pode usar-se uma versão da programação dinâmica em que se considera, em cada período, apenas um número limitado das sub-trajectórias com menor custo, ignorando-se as restantes. Isto pode diminuir bastante o número de avaliações (e o tempo de execução), mas deixa de ser garantida a obtenção da solução óptima.

<sup>10</sup> Nessa hipótese, o problema seria *separável por períodos*, tornando-se muitíssimo mais simples.

### 3.3. Relaxação lagrangeana

O termo "relaxação" aponta para o princípio básico desta metodologia, que consiste em ignorar temporariamente as restrições

$$\sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot P_{ik} = P_i^{\text{carga}}, \forall i$$

o que permite tornar o problema *separável em relação aos grupos*, uma vez que estas são as únicas restrições de ligação entre eles. O processo de resolução usa otimização dual para ir impondo (iterativamente) restrições aos subproblemas dos grupos, com base no grau de satisfação das restrições relaxadas, até ser encontrada uma solução final que satisfaça as restrições, e que é ótima. Apesar de certa exigência técnica, esta metodologia, ao não sofrer das limitações da programação dinâmica, tem características apropriadas aos problemas reais.

#### 3.3.1. Modelo fundamental

A derivação do modelo da relaxação lagrangeana parte da expressão já mencionada

$$C = \sum_{i=1}^h \left( \sum_{k=1}^n [u_{ik} (C_k^0 + C_k^V(P_{ik}) + C_k^A \cdot (1 - u_{i-1,k})) + (1 - u_{ik})(u_{i-1,k})C_k^P] \right)$$

podendo dizer-se que estamos perante o seguinte problema de optimização (ignorando de momento as restrições de reserva):

$$\begin{aligned} \min \quad & C \\ \text{suj:} \quad & P_i^{\text{carga}} - \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot P_{ik} = 0, \forall i \\ & u_{ik} \cdot P_k^{\min} \leq P_{ik} \leq u_{ik} \cdot P_k^{\max}, \forall i, k \end{aligned}$$

Pode então escrever-se a expressão do lagrangeano (admitindo que as restrições de limite de potência são verificadas *a posteriori*):

$$L(\mathbf{P}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}) = C + \sum_{i=1}^h \lambda_i \left( P_i^{\text{carga}} - \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot P_{ik} \right)$$

onde  $\mathbf{P}$  é a matriz que reúne os  $P_{ik}$ ,  $\mathbf{U}$  é a matriz que reúne os  $u_{ik}$  e  $\boldsymbol{\lambda}$  é o vector dos  $\lambda_i$ .

Em vez de atacar o problema primal  $\min L(\mathbf{P}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda})$ , a relaxação lagrangeana resolve o problema dual, começando por definir-se:

$$q(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{P}, \mathbf{U}} L(\mathbf{P}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda})$$

e chegando-se ao óptimo através de:

$$q^*(\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\lambda \geq 0} q(\boldsymbol{\lambda})$$

A metodologia da relaxação consiste em resolver iterativamente o problema, partindo de um valor inicial para o vector  $\lambda$ , o que permite simplificar o cálculo de  $q(\lambda)$ , como se verá. A actualização de  $\lambda$  (por exemplo através do gradiente) permite então avançar na direcção do óptimo.

Para se compreender a alteração no cálculo de  $q(\lambda)$  quando  $\lambda$  é fixado, considere-se a expressão completa de  $L$ , onde  $C_k$  é a função custo total ( $C^0 + C^V$ ) da máquina  $k$ :

$$L = \sum_{i=1}^h \left( \sum_{k=1}^n [u_{ik} (C_k(P_{ik}) + C_k^A \cdot (1 - u_{i-1,k})) + (1 - u_{ik})(u_{i-1,k})C_k^P] \right) + \sum_{i=1}^h \lambda_i \left( P_i^{\text{carga}} - \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot P_{ik} \right)$$

Reestruturando a expressão, obtém-se, sucessivamente,

$$L = \sum_{i=1}^h \left( \sum_{k=1}^n [u_{ik} (C_k(P_{ik}) + C_k^A \cdot (1 - u_{i-1,k})) + (1 - u_{ik})(u_{i-1,k})C_k^P] - \lambda_i \sum_{k=1}^n u_{ik} \cdot P_{ik} \right) + \sum_{i=1}^h \lambda_i \cdot P_i^{\text{carga}}$$

e

$$L = \sum_{i=1}^h \left( \sum_{k=1}^n [u_{ik} (C_k(P_{ik}) - \lambda_i P_{ik} + C_k^A \cdot (1 - u_{i-1,k})) + (1 - u_{ik})(u_{i-1,k})C_k^P] \right) + \sum_{i=1}^h \lambda_i \cdot P_i^{\text{carga}}$$

O ponto essencial é que, quando  $\lambda$  é fixado, a primeira parcela é separável para cada máquina, enquanto que a segunda é constante, não tendo portanto interferência na minimização de  $L$ . Tem-se assim, para  $q(\lambda)$ <sup>11</sup>:

$$q(\lambda) = \min_{\mathbf{P}, \mathbf{U}} L(\mathbf{P}, \mathbf{u}, \lambda) = \sum_{k=1}^n \min_{\mathbf{P}_k, \mathbf{u}_k} \left\{ \sum_{i=1}^h [u_{ik} (C_k(P_{ik}) - \lambda_i P_{ik} + C_k^A \cdot (1 - u_{i-1,k})) + (1 - u_{ik})(u_{i-1,k})C_k^P] \right\}$$

onde  $\mathbf{P}_k$  é o vector que reúne os  $P_{ik}$  ( $i=1..h$ ) e  $\mathbf{u}_k$  reúne os  $u_{ik}$  ( $i=1..h$ ).

### 3.3.2. Subproblemas

A partir da última expressão, é então possível definir subproblemas para cada grupo, onde voltam a ser considerados os limites de produção. Ou seja, para cada grupo  $k$ , terá que se resolver:

$$\min_{\mathbf{P}_k, \mathbf{u}_k} \left\{ \sum_{i=1}^h [u_{ik} (C_k(P_{ik}) - \lambda_i P_{ik} + C_k^A \cdot (1 - u_{i-1,k})) + (1 - u_{ik})(u_{i-1,k})C_k^P] \right\}$$

$$\text{sujeito a: } u_{ik} \cdot P_k^{\min} \leq P_{ik} \leq u_{ik} \cdot P_k^{\max}, \quad \forall i$$

O resultado da resolução de cada um destes subproblemas é, fundamentalmente, o escalonamento da máquina  $k$  nos diversos períodos  $i$  (ou seja, o vector  $\mathbf{u}_k$ ) em face dos valores propostos para os  $\lambda_i$  respectivos. Naturalmente, também é determinado o pré-despacho condicional para cada período  $i$  (os  $P_{ik}$ ) sem utilização posterior.

<sup>11</sup> Note-se a inversão dos somatórios, que realça a separabilidade por grupo.

A resolução dos subproblemas é feita, em geral, por programação dinâmica, beneficiando-se do facto de, em cada período  $i$ , haver apenas dois estados para o grupo, como se mostra na Figura 6, onde se supõe que, inicialmente, o grupo estava desligado.

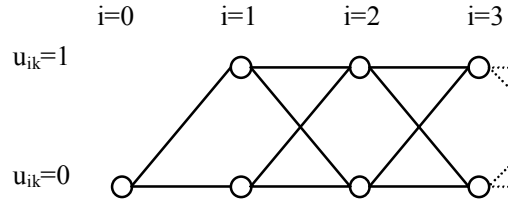


Figura 6 - Diagrama de estados para um subproblema ( $u_{0k}=0$ )

O desenvolvimento do processo é portanto bastante fácil, notando-se que o custo próprio de todos os estados da linha de baixo (grupo desligado) é  $C_{i0}=0$ . No que respeita aos estados da linha de cima (grupo ligado), o custo próprio é o que corresponde a.

$$\text{ou}^{12} \quad \min_{P_{ik}} \{C_k(P_{ik}) - \lambda_i P_{ik}\}$$

$$\frac{dC_k(P_{ik})}{dP_{ik}} - \lambda_i = 0$$

obtém-se um valor de  $P_{ik}^*$  que deve ser sujeito, posteriormente, às restrições de limite de potência. Tem-se então, para o subproblema:

$$\min_{P_{ik}} \{C_k(P_{ik}) - \lambda_i P_{ik}\} = \begin{cases} C_k(P_k^{\min}) - \lambda_i P_k^{\min} & , P_{ik}^* \leq P_k^{\min} \\ C_k(P_{ik}^*) - \lambda_i P_{ik}^* & , P_k^{\max} \leq P_{ik}^* \leq P_k^{\min} \\ C_k(P_k^{\max}) - \lambda_i P_k^{\max} & , P_{ik}^* \geq P_k^{\max} \end{cases}$$

A partir daqui, o processo segue como habitualmente na programação dinâmica, tendo que ser adicionados os custos de transição.

### 3.3.3. Processo iterativo

Como se disse, o processo começa pela definição de um valor inicial para os custos marginais,  $\lambda^0$  (por exemplo  $\lambda^0=0$ ), com o qual se resolvem os subproblemas, obtendo-se o escalonamento (todos os  $u_{ik}$ ). É possível então fazer o despacho em cada período, do qual resultam as produções corrigidas  $P'_{ik}$ , podendo calcular-se o correspondente custo total, com a expressão já conhecida:

$$C^0 = \sum_{i=1}^h \left( \sum_{k=1}^n [u_{ik} (C_k(P'_{ik}) + C_k^A \cdot (1 - u_{i-1,k})) + (1 - u_{ik})(u_{i-1,k}) C_k^P] \right)$$

<sup>12</sup> Note-se que os  $\lambda_i$  podem ser interpretados como os *preços* a que seria paga a energia produzida.

Se o processo de optimização seguir o método do gradiente, o próximo passo é calcular a derivada de  $q(\lambda)$ <sup>13</sup>:

$$\frac{dq(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^h \left( \sum_{k=1}^n [u_{ik} (C_k(P_{ik}) - \lambda_i P_{ik} + C_k^A (1 - u_{i-1,k})) + (1 - u_{ik}) (u_{i-1,k}) C_k^P] \right) + \sum_{i=1}^h \lambda_i \cdot P_i^{carga}$$

e

$$\frac{dq(\lambda)}{d\lambda_i} = P_i^{carga} - \sum_{k=1}^n (u_{ik} \cdot P_{ik}) \quad , \forall i$$

ou seja, o valor da derivada é simplesmente o défice (ou excesso) de carga em cada período. A actualização de  $\lambda$  faz-se então através de:

$$\lambda^{r+1} = \lambda^r + \frac{dq(\lambda)}{d\lambda} \cdot \alpha$$

sendo  $\alpha$  um factor de controlo do passo do método, que tem que ser sintonizado caso a caso<sup>14</sup>, e  $r$  o contador de iterações. Os novos valores dos custos marginais permitem recomeçar o processo, sendo de notar a interpretação seguinte: nos períodos com défice de carga, a derivada é positiva, pelo que o respectivo  $\lambda_i$  aumenta, levando a que apareçam mais grupos a produzir (cf. Nota 12). Inversamente, nos períodos com excesso de produção, a derivada negativa faz diminuir o número de grupos escalados.

Ou seja, o processo de relaxação lagrangeana, embora desenvolvido para otimizar a gestão centralizada, reproduz de certa maneira o funcionamento de um mercado em que cada produtor se propõe produzir mais ou menos, consoante os preços que o mercado lhe oferece. Por outro lado, os preços sobem ou descem de acordo com a variação da oferta (neste caso a procura é fixa, ou inelástica em relação aos preços), tendendo-se para um equilíbrio que constituirá a solução óptima em ambos os casos. Repare-se que seria possível incluir no modelo cargas variáveis com o preço, de forma semelhante à que se desenvolveu para os produtores, mas com curvas em que a procura decresce com o preço (p.ex.  $P(\lambda_i) = P^{\max} - k \cdot \lambda_i$ ). Dessa forma, reproduzir-se-ia completamente a situação de mercado.

### 3.3.4. Convergência

Delineado o processo iterativo, resta definir o critério de convergência. Para tal, começamos por definir o intervalo dual (*dual gap*) em cada iteração  $r$  (excepto a primeira, onde normalmente  $q=0$ ):

$$g = \frac{C^r - q^r}{q^r}$$

A evolução do intervalo dual permite avaliar a proximidade da solução óptima, onde, em

<sup>13</sup> Note-se que  $\lambda$  é um vector.

<sup>14</sup> Muitas vezes, usam-se valores diferentes para o caso de derivada positiva e negativa (menor neste caso).

princípio, ele se anularia. No entanto, em problemas com variáveis inteiras, tal nunca sucede exactamente, pelo que podemos assistir a situações em que o prolongamento do processo iterativo provoca um novo afastamento do óptimo. Daí que tenham importância os processos de estimação do valor do intervalo dual, realizados antes de iniciar o processo iterativo, e indispensáveis para o controlo da convergência em problemas de dimensão real. Trata-se, no entanto, de matéria que transcende o carácter introdutório deste texto, pelo que não será desenvolvido.

### 3.4. Métodos recentes

A emergência de métodos de cálculo para problemas combinatórios baseados em meta-heurísticas (*simulated annealing*, *tabu search*) e computação evolucionária (algoritmos genéticos, programação evolucionária) ocasionou aplicações inovadoras ao problema de escalonamento. Os resultados apresentados na literatura são bastante encorajadores, sendo de esperar o desenvolvimento desta linha de abordagem nos próximos anos.

## 4. Coordenação hidro-térmica

Uma última referência para a consideração dos grupos hídricos, uma vez que a descrição que se fez, correspondente aos modelos mais vulgarizados, se refere unicamente aos grupos térmicos. Normalmente, é realizado um pré-despacho separado para o sub-sistema hídrico, onde são tidas em conta as previsões de afluências e as restrições próprias dos sistemas hidroeléctricos e são fixados valores finais para os volumes armazenados nas albufeiras, decorrentes de estudos energéticos a longo prazo. A natureza dinâmica do problema geral de escalonamento, e as relações entre os sub-sistemas térmico e hídrico, particularmente no que respeita à bombagem, têm levado, no entanto, a uma tentativa de integração em modelos completos (coordenação hidro-térmica), não abordada neste texto.

## 5. Bibliografia

Bertsekas, D., *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Athena Scientific, 1996.

Braun, H., "Unit Commitment and Thermal Optimization - Problem Statement", in *Optimization in Planning and Operation of Electric Power Systems*, SVOR/ASRO, Thun, 1992.

Cheng, C-P, Liu, C-W, Liu, C-C, "Unit Commitment by Lagrangian Relaxation and Genetic Algorithms", *IEEE Trans. Power Systems*, Vol.15, No.2, 2000.

Grainger, J., Stevenson W., *Power Systems Analysis*, McGraw-Hill, 1994.

Matos, M., Enquadramento do problema de despacho óptimo, (*Nota para a disciplina de Análise de Sistemas Eléctricos I*), FEUP, 1996.

Silva, J.L., *Pré-despacho optimizado em sistemas produtores hidrotérmicos com elevada componente hídrica*, Dissertação de doutoramento, FEUP, 1985.

Sterling, M.J., *Power System Control*, IEE, London, 1978.

Wood, A.J, Wollenberg, B.F., *Power Generation, Operation and Control*, John Wiley, 1996.