

Métodos Numéricos no Traçado de Campos

ELECTROTECNIA TEÓRICA

LEEC

Aníbal Castilho Coimbra de Matos

Maria Inês Barbosa de Carvalho

Dezembro de 2005

Nota introdutória

Estes apontamentos destinam-se apoiar as aulas da disciplina de Electrotecnicia Teórica da Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores. São aqui apresentados dois métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais parciais e ilustrada a sua aplicação à determinação do potencial eléctrico numa região do espaço.

Índice

1	Introdução	1
2	Método das diferenças finitas	3
3	Método dos Elementos Finitos	10
4	Conclusão	25
5	Bibliografia	26

1 Introdução

A determinação dos campos eléctricos e magnéticos numa dada região do espaço envolve frequentemente a resolução de equações diferenciais parciais. Em alguns casos é possível, tirando partido da geometria do problema, obter estes campos de uma forma analítica. No entanto, na situação mais geral estas equações apenas podem ser resolvidas recorrendo a métodos numéricos.

Apresentam-se aqui de uma forma resumida o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos. Tratam-se de dois métodos gerais de resolução numérica de equações diferenciais parciais com aplicações em diversos domínios.

Embora estes métodos possam ser aplicados a muitos problemas da área de electromagnetismo, para exemplificar a sua aplicação será considerado aqui o problema da determinação do potencial eléctrico V numa região do espaço.

Em situações estacionárias, a determinação do potencial eléctrico V numa região do espaço, onde a permitividade dieléctrica é ϵ e a densidade de carga é ρ , é feita recorrendo à resolução da equação de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

Serão apenas considerados problemas em que o potencial V não depende de z . Neste caso, a equação de Poisson toma a forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

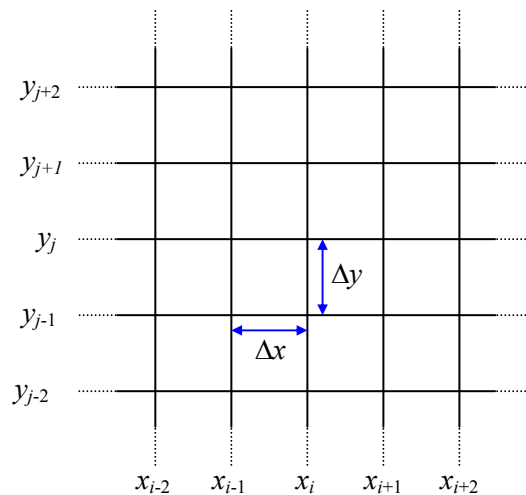
A unicidade da solução desta equação numa dada região é garantida pela consideração de condições fronteira apropriadas. Em geral, estas condições podem ser de dois tipos. Ou definem

o potencial eléctrico em pontos da fronteira da região, ou definem restrições sobre as componentes do vector campo eléctrico em pontos da fronteira. Estas últimas restrições traduzem-se naturalmente em condições envolvendo as derivadas parciais (de primeira ordem) do potencial eléctrico. Aqui, serão apenas abordados problemas com condições fronteira do primeiro tipo, ou seja, $V(x, y) = g(x, y)$ para todos os pontos da fronteira, onde $g(x, y)$ é uma função conhecida.

2 Método das diferenças finitas

A resolução numérica de equações diferenciais parciais pelo método das diferenças finitas envolve a discretização do espaço, a qual é realizada através da definição de uma grelha de pontos.

Considerando a grelha da figura, a solução da equação diferencial será determinada nos pontos (x_i, y_j) , definindo-se $V_{i,j} = V(x_i, y_j)$.



Esta grelha permite a aproximação das derivadas de V por diferenças entre valores nos diversos pontos da grelha. Assim,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_i, y=y_j} &\cong \frac{V(x_i + \Delta x, y_j) - V(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x} \\ &= \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{x=x_i, y=y_j} &\cong \frac{V(x_i, y_j + \Delta y) - V(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y} \\ &= \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta y}\end{aligned}$$

De um modo semelhante, pode também escrever-se

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=x_i, y=y_j} &\cong \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_i+\Delta x/2, y=y_j} - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_i-\Delta x/2, y=y_j}}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{V(x_i + \Delta x, y_j) - V(x_i, y_j)}{\Delta x} - \frac{V(x_i, y_j) - V(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{x=x_i, y=y_j} &\cong \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{x=x_i, y=y_j+\Delta y/2} - \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{x=x_i, y=y_j-\Delta y/2}}{\Delta y} \\ &= \frac{\frac{V(x_i, y_j + \Delta y) - V(x_i, y_j)}{\Delta y} - \frac{V(x_i, y_j) - V(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y}}{\Delta y} \\ &= \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta y^2}\end{aligned}$$

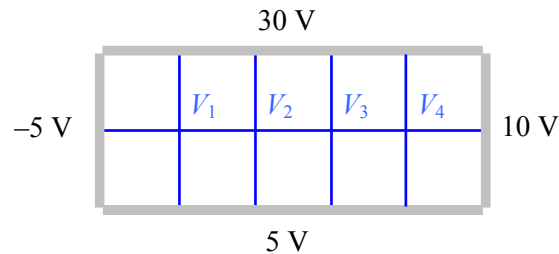
Substituindo estas duas últimas aproximações na equação de Poisson e considerando ainda que $\Delta x = \Delta y = h$, obtém-se

$$V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j} = -\frac{h^2 \rho}{\varepsilon}.$$

Esta equação relaciona o potencial no ponto (x_i, y_j) com os potenciais nos pontos vizinhos e deverá ser considerada para todos os pontos do interior da região. Juntando todas estas equações obtém-se um sistema de equações lineares, que uma vez resolvido fornecerá a solução aproximada do problema. Sempre que nas equações sejam referidos pontos da fronteira, o valor do respectivo potencial será o definido pelas condições fronteira dadas.

Exemplo 1

Na região representada tem-se $\rho = 0$. Considerando a grelha definida na figura, deverão ser consideradas 4 equações, correspondentes aos 4 pontos interiores.



As equações a resolver para determinar o potencial pelo método das diferenças finitas serão

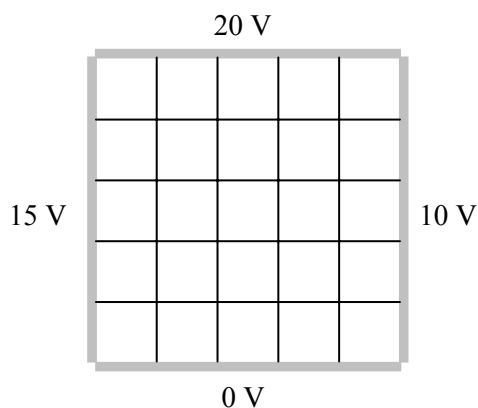
$$\begin{cases} -5 + 30 + V_2 + 5 - 4V_1 = 0 \\ V_1 + 30 + V_3 + 5 - 4V_2 = 0 \\ V_2 + 30 + V_4 + 5 - 4V_3 = 0 \\ V_3 + 30 + 10 + 5 - 4V_4 = 0 \end{cases}$$

A solução do sistema de equações pode ser calculada quer recorrendo ao método directo, quer recorrendo a um processo iterativo.

No primeiro caso, o método de resolução deverá ter em consideração a natureza esparsa da matriz de coeficientes (reduzido número de elementos não nulos), existindo técnicas que tiram partido da estrutura destas matrizes de forma a obter a solução do sistema de uma forma muito mais expedita do que seria possível utilizando a habitual eliminação gaussiana.

Exemplo 2

Na região da figura supõe-se que $\rho = 0$. Esta região foi discretizada de acordo com a grelha apresentada.



Considerando os pontos interiores numerados da esquerda para a direita e de cima para baixo, obtém-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix}
 -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5 \\
 V_6 \\
 V_7 \\
 V_8 \\
 V_9 \\
 V_{10} \\
 V_{11} \\
 V_{12} \\
 V_{13} \\
 V_{14} \\
 V_{15} \\
 V_{16}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -35 \\
 -20 \\
 -20 \\
 -30 \\
 -15 \\
 0 \\
 0 \\
 -10 \\
 -15 \\
 0 \\
 0 \\
 -10 \\
 -15 \\
 0 \\
 0 \\
 -10
 \end{bmatrix}$$

Como se pode observar, esta é uma matriz com um reduzido número de elementos não nulos. Note-se que o número de elementos não nulos em cada linha da matriz será no máximo cinco, pelo que o carácter esparsa da matriz será tão mais evidente quanto maior for o número de pontos da grelha.

Na resolução do sistema de equações pelo processo iterativo, a equação de cada ponto interior é resolvida em ordem ao potencial nesse mesmo ponto, ou seja,

$$V_{i,j} = \frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{h^2 \rho}{\epsilon}}{4}.$$

O processo iterativo consiste em obter novas estimativas dos potenciais nos diferentes pontos considerando os anteriores valores dos potenciais nos pontos vizinhos, de acordo com esta expressão. Para iniciar o processo, é necessário atribuir valores aos potenciais nos diferentes pontos. Se bem que o processo iterativo forneça estimativas dos potenciais cada vez mais próximas da solução do problema, é possível acelerar a convergência do método iterativo utilizando técnicas de relaxação. Estas consistem em modificar a forma de actualização dos novos valores do potencial, considerando uma média pesada entre o valor anterior e o novo valor fornecido pela expressão acima.

Exemplo 3

Considerando o sistema de equações do exemplo 1

$$\begin{cases} -5 + 30 + V_2 + 5 - 4V_1 = 0 \\ V_1 + 30 + V_3 + 5 - 4V_2 = 0 \\ V_2 + 30 + V_4 + 5 - 4V_3 = 0 \\ V_3 + 30 + 10 + 5 - 4V_4 = 0 \end{cases}$$

e resolvendo cada equação em relação ao potencial do respectivo ponto obtém-se

$$\begin{cases} V_1 = \frac{30 + V_2}{4} \\ V_2 = \frac{35 + V_1 + V_3}{4} \\ V_3 = \frac{35 + V_2 + V_4}{4} \\ V_4 = \frac{45 + V_3}{4} \end{cases}$$

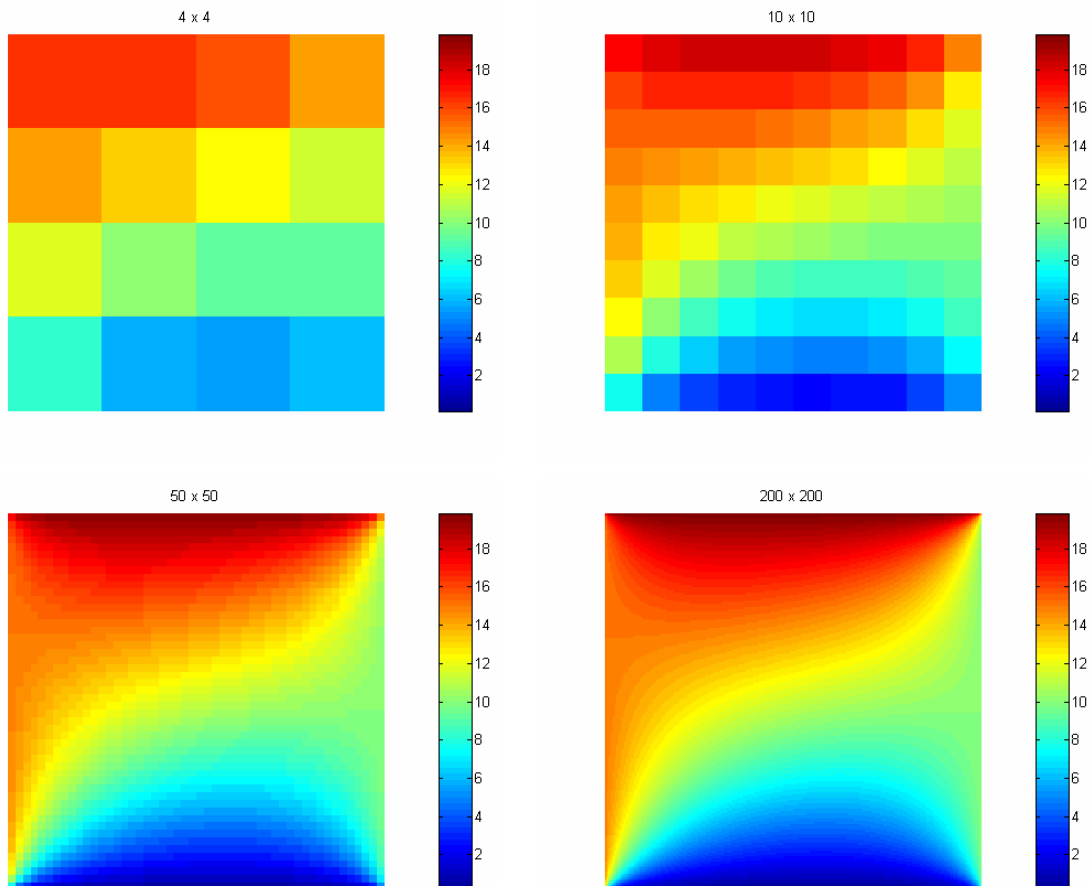
Iniciando as iterações em $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 0$, obtêm-se os valores apresentados na tabela seguinte

Iteração	V_1	V_2	V_3	V_4
0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	7.500	8.750	8.750	11.250
2	9.688	12.813	13.750	13.438
3	10.703	14.609	15.313	14.688
4	11.152	15.254	16.074	15.078
5	11.313	15.557	16.333	15.269
6	11.389	15.662	16.456	15.333
7	11.415	15.711	16.499	15.364
8	11.428	15.729	16.519	15.375
9	11.432	15.737	16.526	15.380
10	11.434	15.739	16.529	15.381
11	11.435	15.741	16.530	15.382
12	11.435	15.741	16.531	15.383
13	11.435	15.741	16.531	15.383

A determinação do potencial pelo método das diferenças finitas fornece naturalmente soluções aproximadas do problema. Obviamente, estas aproximações serão tanto melhores quanto menor for o espaçamento entre pontos da grelha.

Exemplo 4

Considerando novamente o problema analisado no exemplo 2, apresentam-se em seguida as soluções obtidas utilizando grelhas com diferentes espaçamentos. Em cada caso indica-se o número de pontos interiores considerado.



As figuras ilustram a variação da solução obtida com o número de pontos da grelha. Como se pode observar, as duas últimas soluções são muito semelhantes, apesar de terem sido obtidas com números de pontos da grelha muito diferentes. Este facto permite concluir que estas soluções aproximadas estão já bastante próximas da solução exacta.

3 Método dos Elementos Finitos

Contrariamente ao método das diferenças finitas, no qual a solução aproximada da equação de Poisson é obtida apenas nos pontos de uma grelha, o método dos elementos finitos fornece uma solução aproximada definida em toda a região considerada, como se descreve em seguida.

É possível mostrar que a resolução da equação diferencial

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

no interior de uma região D , com a condição $V(x, y) = g(x, y)$ na sua fronteira, é equivalente à determinação da função $V(x, y)$ que minimiza o integral

$$I = \iint_D \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 - \frac{\rho}{\varepsilon} V \right] dx dy$$

e, simultaneamente, verifica a condição $V(x, y) = g(x, y)$ na fronteira de D .¹

O método dos elementos finitos assenta nesta equivalência, procurando-se encontrar a função $V(x, y)$ que resolve este segundo problema. A minimização do integral I é feita de uma forma aproximada considerando que a função $V(x, y)$ é uma combinação linear de funções, ou seja,

$$V(x, y) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \phi_j(x, y)$$

onde $\phi_j(x, y)$ são funções base pré-definidas.

¹ Note-se que este integral é proporcional à energia armazenada na região considerada, traduzindo esta equivalência o princípio da energia mínima.

Este problema de minimização reduz-se então à determinação dos coeficientes γ_j da combinação linear que minimiza o integral I e, simultaneamente, satisfaz a condição $V(x, y) = g(x, y)$ num número finito de pontos da fronteira.

É importante referir que ao restringir a função $V(x, y)$ a uma combinação linear de um número finito de funções base, não será possível alcançar o valor mínimo do integral I correspondente à solução exacta do problema de minimização, pelo que a solução obtida será apenas uma solução aproximada da equação diferencial.

Na resolução deste problema de minimização com restrições, os parâmetros $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ são divididos em dois conjuntos. Os parâmetros $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ são utilizados para minimizar I , enquanto os parâmetros $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_m$ são utilizados na satisfação das condições fronteira.

Sendo os parâmetros $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ unicamente usados na minimização de I , está-se perante um problema clássico de minimização sem restrições, tendo-se então

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_i} = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Substituindo a expressão de $V(x, y)$ no integral I , obtém-se

$$I = \iint_D \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right)^2 - \frac{\rho}{\varepsilon} \sum_{j=1}^m \gamma_j \phi_j \right] dx dy.$$

Notando que

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j \phi_j \right) = \phi_i$$

e também que

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right)^2 \right) = \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) = \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right)^2 \right) = \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial y},$$

as equações resultantes da minimização ficam

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot \left(\iint_D \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy \right) = \iint_D \frac{\rho}{\varepsilon} \phi_i dx dy, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Definindo as constantes

$$\alpha_{ij} = \iint_D \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy, \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, m,$$

que apenas dependem das funções base consideradas, as equações acima podem ser escritas na forma

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \gamma_j = \iint_D \frac{\rho}{\varepsilon} \phi_i dx dy.$$

Notando ainda que os parâmetros $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_m$ são determinados a partir das condições fronteira, o sistema de n equações que permite determinar os parâmetros $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ fica

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \gamma_j = \beta_i, \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

onde as constantes β_i são definidas por

$$\beta_i = \iint_D \frac{\rho}{\varepsilon} \phi_i dx dy - \sum_{j=n+1}^m \alpha_{ij} \gamma_j.$$

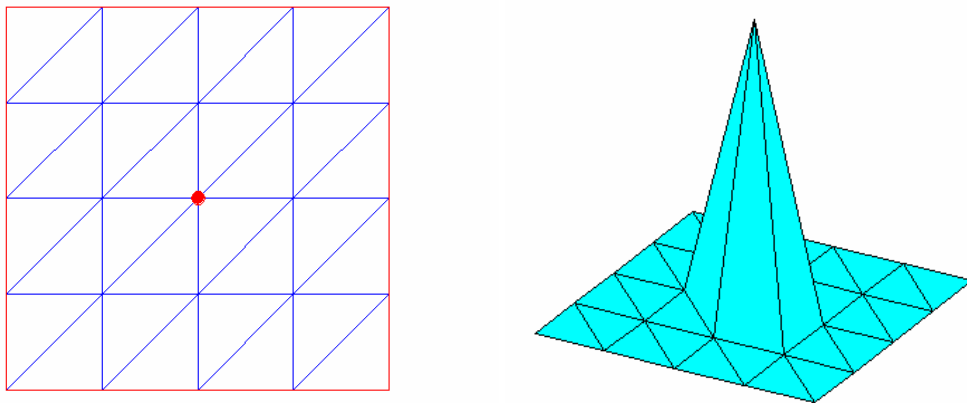
O sistema de equações anterior pode ainda ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Refira-se novamente que as constantes α_{ij} e β_i que definem este sistema de equações dependem apenas das funções base ϕ_j e das condições fronteira.

O sistema de equações obtido permite determinar a solução do problema. É, no entanto, necessário definir inicialmente as funções base usadas. Estas deverão ser escolhidas de forma a facilitar não só a determinação das constantes α_{ij} e β_i que definem o sistema de equações, como também a resolução do próprio sistema de equações. Efectivamente, a solução da equação aproximada da equação diferencial será tanto melhor quanto maior for o número de funções base consideradas, o que na prática se traduz por sistemas de equações de elevada dimensão, que importa resolver de forma eficiente.

A definição das funções base assenta na subdivisão da região D do espaço em pequenas áreas (elementos) de geometria bem definida. Para o caso bidimensional aqui analisado, estes elementos serão triângulos, definindo-se tantas funções base quantos os vértices dos triângulos em que se subdividiu a região D . Cada uma destas funções caracteriza-se por tomar o valor 1 num dos vértices, o valor 0 em todos os outros, e ser uma função linear em x e em y em cada um dos triângulos. Dito de outra forma, em cada um dos triângulos, cada uma das funções é caracterizada por uma expressão do tipo $a + bx + cy$, ou seja, identifica-se com um plano. As figuras seguintes ilustram a subdivisão de uma região em triângulos (neste caso iguais) e a função base associada a um dos vértices.



Divisão de uma região em triângulos e função base associada ao vértice indicado.

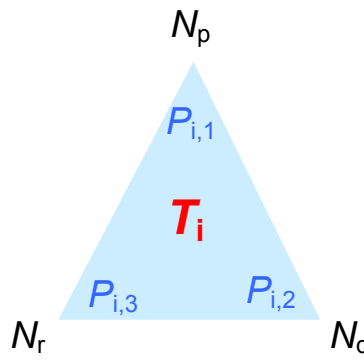
Como a figura mostra, cada uma das funções base apresenta uma forma piramidal, sendo não nula apenas nos triângulos aos quais o vértice a ela associado pertence.

Visto de outra forma, isto significa que num dado triângulo apenas serão não nulas as três funções associadas aos seus vértices. Assim, o conjunto de todas as funções base fica completamente especificado ao definir, para cada triângulo, as expressões das três funções que aí são não nulas.

Considere-se então a região D dividida nos triângulos T_1, T_2, \dots, T_K . Cada um destes triângulos T_i , é definido pelos seus vértices $P_{i,1}, P_{i,2}$ e $P_{i,3}$. Alguns destes vértices são partilhados por dois ou mais triângulos, sendo então necessário estabelecer também uma numeração global de todos os vértices, os quais são aqui designados por N_1, N_2, \dots, N_m . Note-se que esta numeração global irá corresponder à numeração das funções base já considerada.

Uma vez que num dado vértice N_j a função ϕ_j toma o valor 1 e todas as outras funções base tomam o valor 0, o valor da solução $V(x, y)$ nesse vértice será simplesmente γ_j .

Considere-se agora um dado triângulo T_i de vértices $P_{i,1} = (x_{i,1}, y_{i,1})$, $P_{i,2} = (x_{i,2}, y_{i,2})$ e $P_{i,3} = (x_{i,3}, y_{i,3})$. Suponha-se ainda que a estes três vértices corresponde a numeração global p , q e r , ou seja, $N_p = P_{i,1}$, $N_q = P_{i,2}$ e $N_r = P_{i,3}$.



Neste triângulo, apenas serão não nulas as funções ϕ_p , ϕ_q e ϕ_r , correspondentes aos vértices N_p , N_q e N_r , respectivamente. Estas funções são neste triângulo caracterizadas pelas expressões

$$\begin{aligned}\phi_p(x, y) &= a_{i,1} + b_{i,1}x + c_{i,1}y \\ \phi_q(x, y) &= a_{i,2} + b_{i,2}x + c_{i,2}y \\ \phi_r(x, y) &= a_{i,3} + b_{i,3}x + c_{i,3}y\end{aligned}$$

As constantes que definem cada uma destas funções são obtidas directamente a partir das condições atrás enunciadas, ou seja, cada uma das funções deve tomar o valor 1 num dos vértices e 0 nos outros. Por exemplo, para a função ϕ_p , tem-se

$$\begin{aligned}\phi_p(x_{i,1}, y_{i,1}) &= a_{i,1} + b_{i,1}x_{i,1} + c_{i,1}y_{i,1} = 1 \\ \phi_p(x_{i,2}, y_{i,2}) &= a_{i,1} + b_{i,1}x_{i,2} + c_{i,1}y_{i,2} = 0 \\ \phi_p(x_{i,3}, y_{i,3}) &= a_{i,1} + b_{i,1}x_{i,3} + c_{i,1}y_{i,3} = 0\end{aligned}$$

Expressões semelhantes podem ser obtidas para as funções ϕ_q e ϕ_r . As equações resultantes podem ser facilmente expressas na seguinte equação matricial

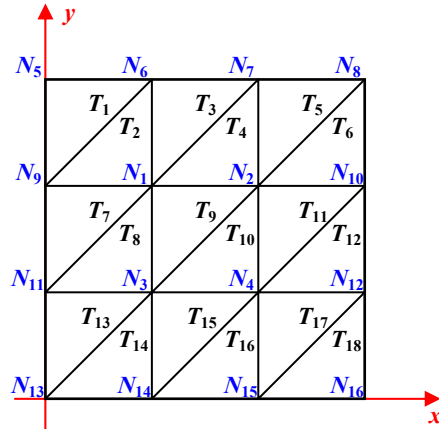
$$\begin{bmatrix} 1 & x_{i,1} & y_{i,1} \\ 1 & x_{i,2} & y_{i,2} \\ 1 & x_{i,3} & y_{i,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} \\ b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} \\ c_{i,1} & c_{i,2} & c_{i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da qual resulta

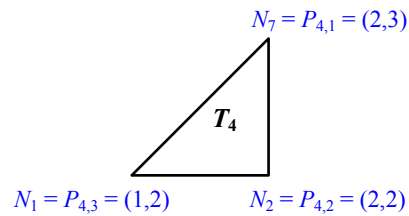
$$\begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} \\ b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} \\ c_{i,1} & c_{i,2} & c_{i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{i,1} & y_{i,1} \\ 1 & x_{i,2} & y_{i,2} \\ 1 & x_{i,3} & y_{i,3} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Exemplo 5

Considere-se a região D do plano definida por $0 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq 3$. Esta região encontra-se dividida em 18 triângulos iguais, como se indica na figura. A numeração global dos vértices é também indicada na figura.



Considere-se o triângulo T_4 , com a numeração local de vértices indicada na figura seguinte.



Neste triângulo apenas são não nulas as funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_7 , as quais são aí definidas pelas expressões

$$\phi_7(x, y) = a_{4,1} + b_{4,1}x + c_{4,1}y$$

$$\phi_2(x, y) = a_{4,2} + b_{4,2}x + c_{4,2}y$$

$$\phi_1(x, y) = a_{4,3} + b_{4,3}x + c_{4,3}y$$

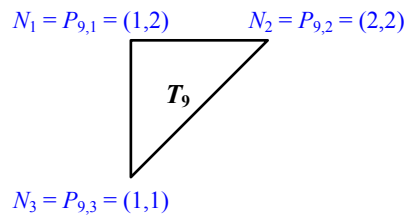
sendo as constantes a , b e c , dadas por

$$\begin{bmatrix} a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se então que no triângulo T_4 as funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_7 , serão

$$\begin{aligned}\phi_7(x, y) &= -2 + y \\ \phi_2(x, y) &= 1 + x - y \\ \phi_1(x, y) &= 2 - x\end{aligned}$$

Considere-se agora o triângulo T_9 , com a numeração local de vértices indicada na figura seguinte.



Neste triângulo apenas são não nulas as funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , as quais são aí definidas pelas expressões

$$\begin{aligned}\phi_1(x, y) &= a_{9,1} + b_{9,1}x + c_{9,1}y \\ \phi_2(x, y) &= a_{9,2} + b_{9,2}x + c_{9,2}y \\ \phi_3(x, y) &= a_{9,3} + b_{9,3}x + c_{9,3}y\end{aligned}$$

sendo as constantes a , b e c , dadas por

$$\begin{bmatrix} a_{9,1} & a_{9,2} & a_{9,3} \\ b_{9,1} & b_{9,2} & b_{9,3} \\ c_{9,1} & c_{9,2} & c_{9,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se então que no triângulo T_9 as funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , serão

$$\begin{aligned}\phi_1(x, y) &= -x + y \\ \phi_2(x, y) &= -1 + x \\ \phi_3(x, y) &= 2 - y\end{aligned}$$

Seguindo um processo semelhante, podem determinar-se as expressões das funções que são não nulas em cada triângulo. Por exemplo, a função ϕ_1 será não nula, não só nos triângulos T_4 e T_9 , como ainda nos triângulos T_2 , T_3 , T_7 e T_8 , sendo globalmente definida pelas seguintes expressões

$$\phi_1(x, y) = \begin{cases} 2 + x - y & (x, y) \in T_2 \\ 3 - y & (x, y) \in T_3 \\ 2 - x & (x, y) \in T_4 \\ x & (x, y) \in T_7 \\ -1 + y & (x, y) \in T_8 \\ -x + y & (x, y) \in T_9 \end{cases}.$$

Como já referido, os coeficientes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ da combinação linear das funções base encontram-se divididos em dois conjuntos. Esta divisão está directamente relacionada com o facto de cada um dos vértices dos triângulos em que é dividida a região D poder ser um ponto do seu interior ou um ponto da sua fronteira. Assim, considerando que os vértices N_1, N_2, \dots, N_n se encontram no interior de D , enquanto os vértices $N_{n+1}, N_{n+2}, \dots, N_m$ se encontram na sua fronteira, os coeficientes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ serão determinados a partir da minimização do integral I , enquanto os coeficientes $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_m$ serão utilizados na satisfação das condições fronteira.

A determinação destes últimos coeficientes é feita de uma forma imediata, notando que para todos os pontos da fronteira de D se deverá ter $V(x, y) = g(x, y)$, e também que para cada vértice N_j se tem $V(N_j) = \gamma_j$, resultando então que $\gamma_j = g(N_j)$ para todos os vértices na fronteira de D , ou seja, para $j = n + 1, n + 2, \dots, m$.

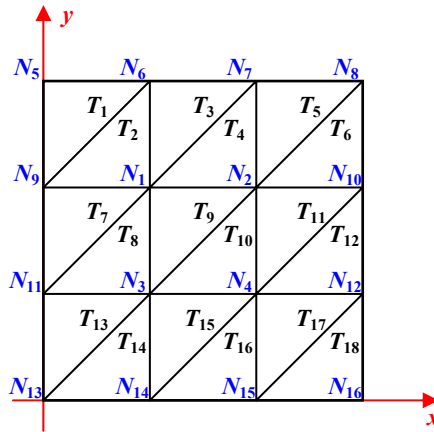
É importante referir que, quando a função que define o potencial na fronteira apresenta uma descontinuidade num ponto corresponde a um vértice, é habitual tomar como potencial nesse ponto o valor médio dos limites “à esquerda” e “à direita”.

Exemplo 6

Considere-se novamente a região D do plano definida por $0 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq 3$. Suponha-se que o potencial na sua fronteira varia de acordo com o seguinte

$$\begin{aligned}g(x,0) &= 9 - (x-3)^2 \\g(x,3) &= 2x \\g(0,y) &= 4y(3-y) \\g(3,y) &= 9 - y\end{aligned}$$

Considere-se também a divisão da região em triângulos definida no exemplo 5, ou seja,



Os valores dos coeficientes γ_j correspondentes aos 12 vértices na fronteira serão

$$\begin{aligned}\gamma_5 &= g(0,3) = 0 & \gamma_6 &= g(1,3) = 2 & \gamma_7 &= g(2,3) = 4 & \gamma_8 &= g(3,3) = 6 \\ \gamma_9 &= g(0,2) = 8 & \gamma_{10} &= g(3,2) = 7 & \gamma_{11} &= g(0,1) = 8 & \gamma_{12} &= g(3,1) = 8 \\ \gamma_{13} &= g(0,0) = 0 & \gamma_{14} &= g(1,0) = 5 & \gamma_{15} &= g(2,0) = 8 & \gamma_{16} &= g(3,0) = 9\end{aligned}$$

Para a determinação dos restantes coeficientes que definem a solução $V(x,y)$, é necessário calcular as constantes α_{ij} e β_i do sistema de equações lineares já apresentado. A forma como se encontram definidas as funções base torna o cálculo destas constantes simples. Na verdade, o valor

$$\alpha_{ij} = \iint_D \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy$$

apenas será não nulo quando os vértices N_i e N_j são comuns a pelo menos um triângulo. Nesse caso, a integração deverá ser estendida a todos os triângulos a que estes vértices pertencem simultaneamente. Resulta assim que a matriz de coeficientes do sistema de equações será esparsa, facilitando deste modo a sua resolução. Note-se ainda que em cada triângulo, as derivadas parciais das funções ϕ_i e ϕ_j são constantes, o que simplifica ainda mais a determinação de α_{ij} .

Exemplo 7

Continuando a considerar a região definida nos exemplos anteriores, bem como a sua divisão nos elementos já considerados, é possível determinar os valores α_{ij} a partir das expressões para as diferentes funções base. Por exemplo, o valor α_{11} obtém-se a partir de

$$\alpha_{11} = \iint_{T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_7 \cup T_8 \cup T_9} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy,$$

uma vez que a função ϕ_1 apenas é não nula nestes triângulos. Utilizando as expressões desta função já obtidas no exemplo 5, resulta

$$\alpha_{11} = \iint_{T_2} 2dxdy + \iint_{T_3} dxdy + \iint_{T_4} dxdy + \iint_{T_7} dxdy + \iint_{T_8} dxdy + \iint_{T_9} 2dxdy = \frac{1}{2} \times 8 = 4.$$

Já o valor α_{12} se obtém a partir de

$$\alpha_{12} = \iint_{T_4 \cup T_9} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right] dxdy,$$

pois as funções ϕ_1 e ϕ_2 são simultaneamente não nulas apenas nestes dois triângulos. Substituindo as expressões destas funções (já obtidas no referido exemplo), resulta também

$$\alpha_{12} = \iint_{T_4} (-1)dxdy + \iint_{T_9} (-1)dxdy = \frac{1}{2} \times (-2) = -1.$$

Todos os restantes coeficientes α_{ij} , com $i=1,\dots,4$ e $j=1,\dots,16$, podem determinar-se de uma forma análoga. A matriz seguinte apresenta os seus valores para este exemplo.

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Também no cálculo de cada um dos valores

$$\beta_i = \iint_D \frac{\rho}{\varepsilon} \phi_i dx dy - \sum_{j=n+1}^m \alpha_{ij} \gamma_j$$

se deverá ter em consideração que sendo a função ϕ_i apenas não nula nos triângulos a que pertence o vértice N_i , a integração em causa será somente estendida a esses triângulos.

Exemplo 8

Considere-se ainda a mesma região dos exemplos anteriores, e suponha-se que $\rho=0$ no seu interior. Utilizando os valores α_{ij} , para $i=1,\dots,4$ e $j=5,\dots,16$, bem como os valores γ_j , para $j=5,\dots,16$, já calculados, obtêm-se facilmente os valores

$$\beta_1 = 10, \quad \beta_2 = 11, \quad \beta_3 = 13, \quad \beta_4 = 16.$$

Após a determinação de todos estes coeficientes, obtém-se o sistema de equações que permite determinar os parâmetros $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, associados a todos os vértices interiores. Uma vez resolvido este sistema, determina-se finalmente a solução procurada.

Tal como no método das diferenças finitas, este sistema de equações pode ser resolvido de forma directa ou utilizando um método iterativo. Em ambas as situações, a natureza esparsa da matriz de coeficientes do sistema pode ser utilizada de um modo vantajoso.

Exemplo 9

No exemplo em análise, o sistema de equações que permite determinar $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ fica

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

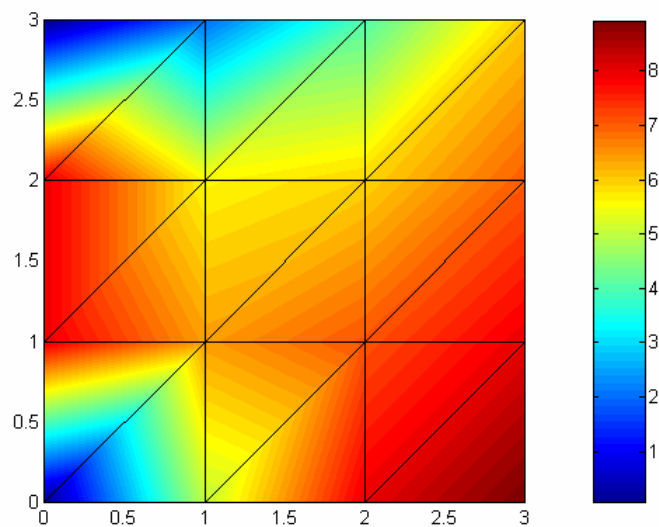
Resolvendo este sistema obtém-se então

$$\gamma_1 = 5.5833, \quad \gamma_2 = 5.9167, \quad \gamma_3 = 6.4167, \quad \gamma_4 = 7.0833.$$

os quais, conjuntamente com os restantes parâmetros $\gamma_5, \dots, \gamma_{16}$ já obtidos, definem totalmente a solução aproximada da equação diferencial, ou seja,

$$V(x, y) = \sum_{j=1}^{16} \gamma_j \phi_j(x, y).$$

A figura seguinte ilustra esta solução.



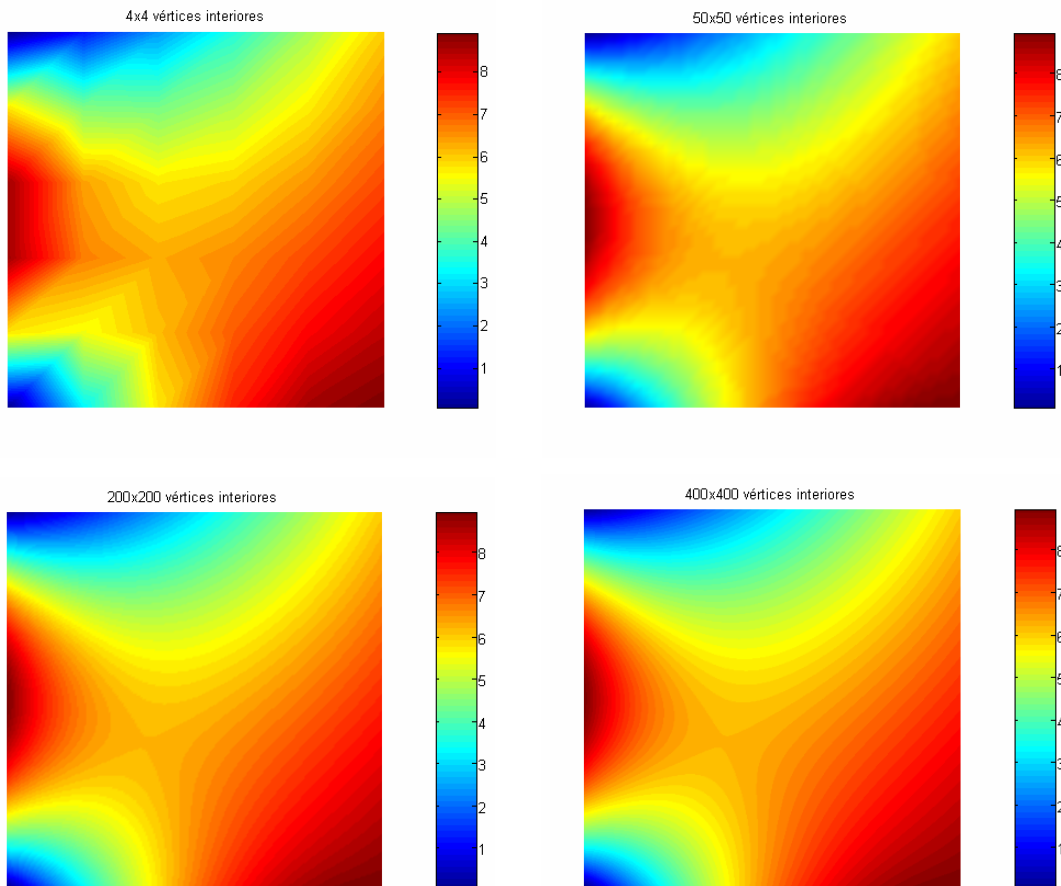
Resumindo, a determinação de uma solução aproximada da equação diferencial utilizando o método dos elementos finitos pode ser obtida de acordo com os seguintes passos.

1. DIVISÃO DA REGIÃO EM ELEMENTOS (TRIÂNGULOS).
2. NUMERAÇÃO DOS VÉRTICES (INTERIORES DE 1 ATÉ n , NA FRONTEIRA DE $n+1$ ATÉ m).
3. DETERMINAÇÃO DAS EXPRESSÕES DAS FUNÇÕES BASE (ϕ_j) EM CADA ELEMENTO.
4. DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS $\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_m$ A PARTIR DAS CONDIÇÕES FRONTEIRA.
5. OBTENÇÃO DAS CONSTANTES α_{ij} E β_i .
6. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA OBTER $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.
7. OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO $V(x, y) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \phi_j(x, y)$.

À semelhança do que acontece com o método das diferenças finitas, também este método produz resultados mais próximos da solução exacta à medida que diminui o tamanho dos elementos (triângulos) em que se divide a região D . Embora não seja simples obter, para o caso geral, uma expressão de majoração do erro de aproximação das soluções obtidas por este método, é possível afirmar-se que este erro varia com o quadrado da maior distância entre dois vértices do mesmo triângulo.

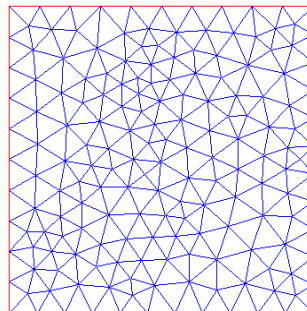
Exemplo 10

Apresentam-se em seguida as soluções aproximadas do problema tratado nos exemplos anteriores, para diferentes subdivisões da região D . Em todos os casos, é utilizada uma grelha regular, estando os triângulos dispostos de uma forma análoga ao caso já determinado.



Como seria de esperar, a solução obtida torna-se mais suave à medida que o número de triângulos, ou seja, de vértices, aumenta, aproximando-se assim da solução exacta.

Importa ainda referir que nos exemplos analisados, a região D tem sido sempre dividida em triângulos de uma forma regular. É, no entanto, possível considerar divisões não uniformes, como se mostra na figura, as quais permitem obter melhores soluções para o mesmo número de triângulos considerados.



4 Conclusão

Comparado com o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos apresenta uma complexidade superior, produzindo contudo resultados mais próximos da solução exacta para o mesmo número de pontos. Este facto é consequência da solução obtida por este método ser, por construção, uma função contínua. Efectivamente, o método das diferenças finitas produz apenas valores da função num conjunto finito de pontos, sendo necessário efectuar interpolações para obter valores noutros pontos.

Ambos os métodos podem ser aplicados à resolução de uma grande variedade de problemas traduzidos por diferentes equações diferenciais. A grande vantagem do método das diferenças finitas reside na sua extrema simplicidade. Por outro lado, o método dos elementos finitos adapta-se facilmente a situações mais complexas do que a aqui considerada, nomeadamente, regiões com fronteiras irregulares ou divisões da região em triângulos de tamanhos e orientações não uniformes.

Finalmente, salienta-se o facto de ambos os métodos se encontrarem implementados em variadas bibliotecas de funções para diferentes ambientes computacionais, pelo que na prática o esforço de aplicação destes métodos é normalmente concentrado na formatação dos dados do problema para estas funções.

5 Bibliografia

R. Burden, J. Faires, "Numerical analysis", PWS-Kent Publishing Company, 1988.

M. Sadiku, "Elements of electromagnetics", Oxford University Press, 2001.

J. Kraus, D. Fleisch, "Electromagnetics with applications", McGraw-Hill, 1999.

"MATLAB Partial Differential Equation Toolbox", The MathWorks, Inc., 2002.