

FOLHAS DE PROBLEMAS

Disciplina de “ELECTROMAGNETISMO”

(2º Ano da L.E.E.C. – Ano Lectivo de 2001 / 2002)

Maria Inês Barbosa de Carvalho

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores (D.E.E.C.)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (F.E.U.P.)

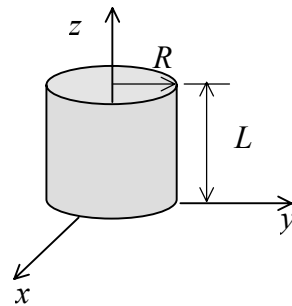
ANÁLISE VECTORIAL

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1. Considere o campo vectorial \vec{A} expresso em coordenadas cilíndricas por

$$\vec{A} = \rho \hat{u}_\rho + \rho \sin \phi \hat{u}_\phi + z \hat{u}_z$$

- a) Calcule a divergência do campo.
b) Calcule o fluxo do campo que atravessa a superfície lateral cilíndrica de raio R e altura L , com o eixo coincidente com o eixo dos zz , tal como mostra a figura.
c) Repita a alínea anterior utilizando o teorema da divergência (teorema de Green-Ostrogradsky).



Resolução:

- a) Em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) a divergência de um campo vectorial é dada pela expressão

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Neste caso tem-se

$$\begin{aligned} A_\rho &= \rho \\ A_\phi &= \rho \sin \phi \\ A_z &= z \end{aligned}$$

e, então,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \sin \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (z) = 3 + \cos \phi$$

- b) O fluxo através da superfície lateral do cilindro é dado por

$$\int_{S_l} \vec{A} \cdot \hat{n} ds$$

onde S_l é a superfície lateral do cilindro, de raio R e altura L , ds é um elemento de superfície pertencente a S_l , e \hat{n} é o versor normal a essa superfície. Nas condições do problema, $ds = ds_\rho = \rho d\phi dz$, $\rho = R$ e $\hat{n} = \hat{u}_\rho$, o que significa que

$$\int_{S_l} \vec{A} \cdot \hat{n} ds = \int_0^L \int_0^{2\pi} R^2 d\phi dz = 2\pi R^2 L$$

- c) De acordo com o teorema da divergência, o fluxo de \vec{A} para fora da superfície cilíndrica fechada pode ser calculado através do integral de volume da divergência de \vec{A} , integral esse estendido ao volume do cilindro:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} ds$$

Em coordenadas cilíndricas, $dv = \rho d\rho d\phi dz$, e então

$$\oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} ds = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dv = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R (3 + \cos\phi) \rho d\rho d\phi dz = 3\pi R^2 L$$

Além disso, é importante não esquecer que

$$\oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} ds = \int_{(lateral)} \vec{A} \cdot \hat{n} ds + \int_{(topo)} \vec{A} \cdot \hat{n} ds + \int_{(base)} \vec{A} \cdot \hat{n} ds$$

onde

$$\int_{(topo)} \vec{A} \cdot \hat{n} ds = \int_{(topo)} \vec{A} \cdot \hat{n}_{topo} ds_{topo} = \int_{(topo)} \vec{A} \cdot (\hat{u}_z) ds_z = \int_0^L \int_0^{2\pi} L \rho d\rho d\phi = \pi R^2 L$$

pois, para a superfície do topo, $z = L$. De forma semelhante, tem-se

$$\int_{(base)} \vec{A} \cdot \hat{n} ds = \int_{(base)} \vec{A} \cdot \hat{n}_{base} ds_{base} = \int_{(base)} \vec{A} \cdot (-\hat{u}_z) ds_z = \int_0^L \int_0^{2\pi} 0 = 0$$

pois neste caso $z = 0$. Note que para esta superfície $\hat{n} = -\hat{u}_z$ (o versor aponta para fora da superfície fechada). Utilizando estes resultados, obtém-se

$$\int_{(lateral)} \vec{A} \cdot \hat{n} ds = 3\pi R^2 L - \pi R^2 L = 2\pi R^2 L$$

como seria de esperar.

2. Considere o campo vectorial \vec{E} expresso em coordenadas cilíndricas por

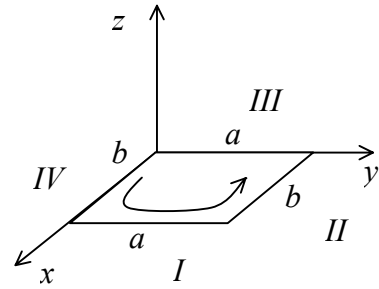
$$\vec{E} = A\hat{u}_\rho + B\hat{u}_z$$

a) Mostre que em coordenadas cartesianas o campo \vec{E} tem como expressão

$$\vec{E} = \frac{Ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{u}_x + \frac{Ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{u}_y + B\hat{u}_z$$

b) Calcule a circulação do campo ao longo do rectângulo da figura, atendendo ao sentido indicado.

c) Verifique o teorema de Stokes para o campo dado e para a geometria indicada.



Resolução:

a) O versor \hat{u}_ρ do sistema de coordenadas cilíndricas pode ser escrito na forma (ver apêndice)

$$\hat{u}_\rho = \cos\phi\hat{u}_x + \sin\phi\hat{u}_y = \frac{x}{\rho}\hat{u}_x + \frac{y}{\rho}\hat{u}_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{u}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{u}_y$$

e, portanto,

$$\vec{E} = A\hat{u}_\rho + B\hat{u}_z = \frac{Ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{u}_x + \frac{Ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{u}_y + B\hat{u}_z$$

b) A circulação do campo vectorial \vec{E} ao longo do rectângulo da figura é dada por

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{(I)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(II)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(III)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(IV)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

onde L é o contorno do rectângulo e $d\vec{l}$ é o vector deslocamento infinitesimal tangente em cada ponto ao percurso considerado e com o sentido indicado na figura.

Como o percurso está assente no plano xy , podemos escrever $d\vec{l} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y$, o que significa que

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Axdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{Aydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Lado I

$$x = b \quad \text{e} \quad dx = 0 \quad \text{e, então, } \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Aydy}{\sqrt{b^2 + y^2}}$$

$$\int_{(I)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^a \frac{Aydy}{\sqrt{b^2 + y^2}} = A(\sqrt{a^2 + b^2} - b)$$

Lado II

$$y = a \quad \text{e} \quad dy = 0 \quad \text{e, então, } \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Axdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\int_{(II)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_b^0 \frac{Axdx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = A(a - \sqrt{a^2 + b^2})$$

Atenção ao sentido de integração, indicado neste caso pelos limites de integração.

É importante referir que o sentido da circulação pode ser indicado de duas formas diferentes: ou através dos limites de integração, ou através do sentido atribuído ao vector $d\vec{l}$. É errado indicar o sentido simultaneamente destas duas formas. Aqui foi escolhido indicar o sentido através dos limites de integração, logo, o vector $d\vec{l}$ apenas indica uma direcção (e não o sentido da circulação).

Lado III

$$x = 0 \quad \text{e} \quad dx = 0 \quad \text{e, então, } \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Aydy}{\sqrt{y^2}} = A dy$$

$$\int_{(III)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^0 A dy = -Aa$$

Lado IV

$$y = 0 \quad \text{e} \quad dy = 0 \quad \text{e, então, } \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Axdx}{\sqrt{x^2}} = A dx$$

$$\int_{(IV)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^b A dx = Ab$$

Utilizando estes resultados pode finalmente calcular-se

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = A(\sqrt{a^2 + b^2} - b + a - \sqrt{a^2 + b^2} - a + b) = 0$$

- c) O teorema de Stokes afirma que o fluxo do rotacional de um campo vectorial através de uma dada superfície aberta é igual à circulação desse campo vectorial ao longo da linha que limita a superfície. Então, devemos ter

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} \, ds = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

onde S é uma superfície limitada pelo rectângulo. Obviamente deverá escolher-se a superfície rectangular assente no plano xy , e então temos $ds = dx \, dy$ e $\hat{n} = \hat{u}_z$ (sentido de \hat{n} está relacionado com o sentido da circulação pela regra da mão-direita). Por outro lado, o rotacional deste campo vectorial é dado por

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} = & \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{Ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{Ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} & B \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) \hat{u}_x + \\ & - \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) \hat{u}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) \hat{u}_z = 0 \end{aligned}$$

e, então, tendo em atenção o resultado da alínea anterior, mostra-se que efectivamente

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} \, ds = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Considere o raio vector de posição \vec{r} de um ponto genérico. Calcule $\nabla \cdot \vec{r}$ nos seguintes sistemas de coordenadas:
 - a) cartesianas;
 - b) cilíndricas;
 - c) esféricas.
2. Considere o campo vectorial $\vec{v} = R^2 \hat{u}_R + R \sin \phi \hat{u}_\theta$.
 - a) Calcule $\nabla \cdot \vec{v}$.

- b) Determine o fluxo de \vec{v} através de uma superfície esférica de raio a centrada na origem.
- c) Utilizando o resultado da alínea anterior, demonstre a validade do teorema da divergência.

3. Considere o seguinte campo vectorial expresso em coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = y\hat{i} + x\hat{j} - \frac{(x+1)}{2z^2}\hat{k}$$

- a) Calcule $\nabla \cdot \vec{V}$ em coordenadas cartesianas.
- b) Mostre que o resultado obtido na alínea anterior, expresso nas variáveis do sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , toma a forma:

$$\frac{r \cos \phi + 1}{z^3}$$

- c) Determine o fluxo de \vec{V} através da superfície do cilindro de raio unitário, centrado no eixo dos zz , que tem as suas bases assentes nos planos $z = 1$ e $z = 2$.

4. Considere a existência de um campo potencial eléctrico V dado por $V = x^2 - zy - 1$.

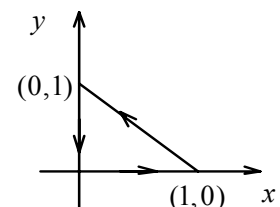
- a) Mostre que o campo eléctrico \vec{E} correspondente ao referido campo potencial ($\vec{E} = -\nabla V$) tem a seguinte expressão:

$$\vec{E} = -2x\hat{u}_x + z\hat{u}_y + y\hat{u}_z$$

- b) Calcule a circulação do campo eléctrico \vec{E} do ponto $P_1 (1,0,1)$ ao ponto $P_2 (0,1,1)$ pelo segmento de recta que os une.
- c) Determine o fluxo de \vec{E} através da superfície lateral do cilindro de raio r , centrado no eixo dos zz , que tem as suas bases assentes nos planos $z = 0$ e $z = h$.

5. Considere o campo vectorial $\vec{F} = xy\hat{i} + 2\hat{j}$.

- a) Determine $\nabla \times \vec{F}$.
- b) Dado o percurso triangular representado na figura, demonstre a validade do teorema de Stokes.



6. Demonstre as seguintes igualdades:

$$\nabla \times (\nabla U) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

SOLUÇÕES

1. 3
2. a) $4R + \operatorname{sen} \phi \cotg \theta$; b) $4\pi a^4$
3. a) $(x+1)/z^3$; c) $3\pi/8$
4. b) 2; c) $-2\pi r^2 h$
5. a) $-x\hat{k}$

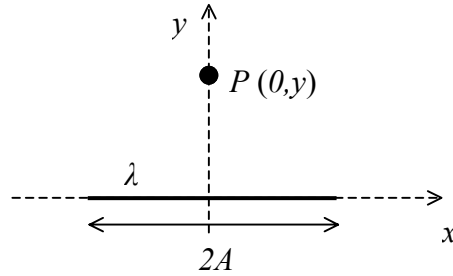
LEI DE COULOMB E PRINCÍPIO DA SOBREPOSIÇÃO

PROBLEMA RESOLVIDO

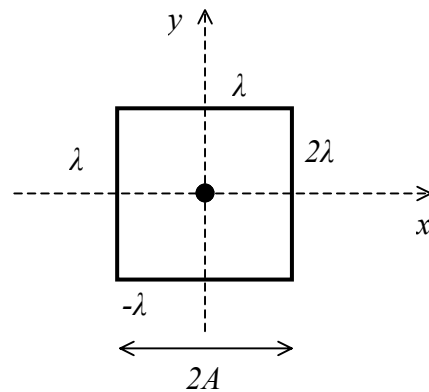
1. Considere um fio finito de comprimento $2A$, centrado na origem das coordenadas e com densidade linear de carga λ .

- a) Mostre que no ponto P de coordenadas $(0,y)$ o campo eléctrico é dado por

$$\vec{E} = \frac{A\lambda}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{A^2 + y^2}} \hat{u}_y$$



- b) Determine o campo eléctrico no centro do quadrado de lado $2A$ mostrado na figura.



Resolução:

- a) De acordo com a lei de Coulomb, o campo eléctrico criado por uma linha com uma densidade linear de carga λ é dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl \vec{r}}{r^3}$$

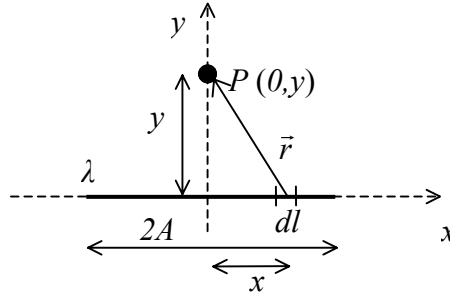
onde \vec{r} é o vector que aponta do elemento dl (pertencente à linha) para o ponto onde se está a calcular o campo.

Considerando o elemento representado na figura seguinte, temos

$$\vec{r} = -x\hat{u}_x + y\hat{u}_y$$

$$dl = dx$$

$$r^3 = (x^2 + y^2)^{3/2}$$



Substituindo estes valores na expressão da lei de Coulomb, vem

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-A}^A \frac{\lambda dx (-x\hat{u}_x + y\hat{u}_y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(-\hat{u}_x \int_{-A}^A \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + y\hat{u}_y \int_{-A}^A \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) = \\ &= 0 + \frac{\lambda A}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{A^2 + y^2}} \hat{u}_y \end{aligned}$$

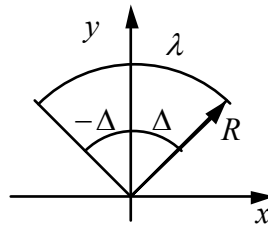
- b) O princípio da sobreposição afirma que $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$, onde \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{E}_3 , e \vec{E}_4 são os campos criados por cada um dos lados do quadrado. Além disso, neste caso verifica-se que o ponto considerado está à mesma distância dos quatro lados, sendo $y = A$. Atendendo à carga que existe em cada lado do quadrado, podemos então escrever

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 A} \hat{u}_y - \frac{\sqrt{2}(2\lambda)}{4\pi\epsilon_0 A} \hat{u}_x - \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 A} \hat{u}_y + \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 A} \hat{u}_x = \\ &= -\frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 A} (2\hat{u}_y + \hat{u}_x) \end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Calcule o campo eléctrico criado por um anel de raio R , com densidade linear de carga λ uniforme, num ponto do seu eixo a uma distância a do centro.

2. Utilizando o resultado do problema anterior e o princípio da sobreposição, calcule o campo eléctrico num ponto do eixo de um disco de raio R , com densidade superficial de carga uniforme σ , a uma distância a do seu centro.
3. Utilizando novamente o princípio da sobreposição, calcule o campo eléctrico num ponto a uma distância a do centro de uma esfera com densidade volumétrica de carga uniforme ρ_V e raio R .
4. Duas cargas pontuais Q_1 e Q_2 estão colocadas simetricamente no eixo dos xx , a uma distância d da origem.
 - a) Determine os campos V e \vec{E} para qualquer ponto no eixo dos yy .
 - b) Sabendo que $Q_1 = -2Q_2$, determine a massa m que uma partícula de carga q , (sujeita à acção do campo gravítico) deve ter para que possa estar em equilíbrio sobre o eixo dos yy , a uma distância h da origem.
5. Um fio com carga linear uniforme λ forma um arco circular de raio R que está centrado no eixo dos yy , tal como mostra a figura. Mostre que o módulo do campo eléctrico criado pelo fio na origem é $E = (2\lambda \text{sen}\Delta)/(4\pi\epsilon_0 R)$, onde Δ é o ângulo medido a partir do eixo dos yy até cada uma das extremidades do fio.



6. Duas cargas pontuais, Q_1 e Q_2 , estão localizadas em $(1, 2, 0)$ e $(2, 0, 0)$, respectivamente. Que relação deve existir entre Q_1 e Q_2 para que a força total sobre uma carga de teste que se encontra em $(-1, 1, 0)$ não tenha
 - a) componente segundo o eixo dos xx ;
 - b) componente segundo o eixo dos yy .

7. Um triângulo equilátero é constituído por três linhas de comprimento L . A densidade linear de carga nas três linhas é uniforme, tendo os valores λ_1 , λ_2 e λ_3 . Admitindo que $\lambda_1 = 2\lambda_2 = 2\lambda_3$, determine a intensidade do campo eléctrico no centro do triângulo.
8. Duas partículas de massa m e carga q estão suspensas do mesmo ponto por dois fios de comprimento l . Mostre que, em equilíbrio, os fios fazem um ângulo θ em relação à vertical dado por $16\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin^3 \theta = q^2 \cos \theta$.

SOLUÇÕES

1. $(\lambda/2\epsilon_0) \left[Ra / (a^2 + R^2)^{3/2} \right] \hat{u}_z$
2. $(\sigma/2\epsilon_0) \left(1 - a / \sqrt{a^2 + R^2} \right) \hat{u}_z$
3. interior: $(\rho_V a / 3\epsilon_0) \hat{u}_R$; exterior: $(\rho_V R^3 / 3\epsilon_0 a^2) \hat{u}_R$
4. a) $\vec{E} = [d(Q_1 - Q_2)\hat{i} + y(Q_1 + Q_2)\hat{j}] / [4\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2)^{3/2}]$
 $V = (Q_1 + Q_2) / (4\pi\epsilon_0 \sqrt{d^2 + y^2})$
- b) $m = \frac{qQ_1 h}{8\pi\epsilon_0 g (d^2 + h^2)^{3/2}}$
6. a) $Q_1/Q_2 = -3\sqrt{2}/8$; b) $Q_1/Q_2 = \sqrt{2}/4$
7. $3\lambda_1 / (4\pi\epsilon_0 L) \hat{j}$

LEI DE GAUSS

PROBLEMA RESOLVIDO

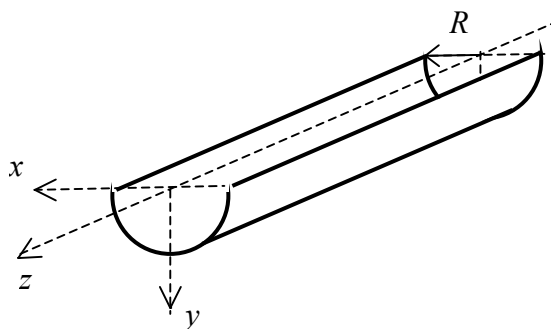
1.

- a) Mostre que o campo eléctrico criado por um fio infinito com densidade linear de carga λ num ponto P a uma distância ρ do fio é dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{u}_\rho$$

onde \hat{u}_ρ é o versor normal ao fio.

- b) Suponha uma calha infinita de raio R com secção semicircular. A calha está carregada com uma densidade de carga superficial uniforme σ . Utilize o resultado da alínea anterior e o princípio da sobreposição para calcular o campo eléctrico num ponto do eixo da calha.



Resolução:

- a) Quando um problema tem simetria plana, cilíndrica ou esférica, a maneira mais simples de calcular o campo eléctrico é usando a lei de Gauss. Apesar de esta lei ser sempre válida, só deve ser usada quando um dado problema exhibe um dos tipos de simetria referidos. A lei de Gauss no vazio afirma que o fluxo do vector campo eléctrico para fora de uma dada superfície fechada é igual à carga total no interior dessa superfície a dividir pela permitividade do vazio:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

A superfície fechada S (também chamada superfície gaussiana) e o sistema de coordenadas a ser utilizado devem ser escolhidos de modo a aproveitar a simetria exibida pelo problema. Neste caso, o problema exhibe simetria cilíndrica, e consequentemente deve ser utilizado o sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , com o eixo dos zz orientado segundo o fio infinito.

Como a carga se distribui ao longo de um fio rectilíneo infinito, espera-se que o módulo do campo eléctrico não dependa de z nem de ϕ , mas apenas de ρ . Além disso, atendendo a que o vector campo eléctrico é sempre perpendicular à superfície de um condutor em equilíbrio, podemos afirmar que o campo eléctrico criado por esta distribuição de carga obedece a $\vec{E} = E(\rho)\hat{u}_\rho$, isto é, o seu módulo depende apenas da distância ao fio e a sua direcção é perpendicular ao fio. Escolhendo para superfície gaussiana uma superfície cilíndrica (fechada) de raio ρ e comprimento l , com o eixo coincidente com o eixo dos zz , temos

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \int_{S_l} \vec{E} \cdot \hat{n}_l ds_l + \int_{S_t} \vec{E} \cdot \hat{n}_t ds_t + \int_{S_b} \vec{E} \cdot \hat{n}_b ds_b = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

onde $\hat{n}_l = \hat{u}_\rho$, $\hat{n}_t = -\hat{n}_b = \hat{u}_z$, $ds_l = ds_\rho = \rho d\phi dz$ e $ds_t = ds_b = ds_z = \rho d\rho d\phi$. Além disso, $Q_{\text{int}} = \lambda l$, o que leva a

$$\int_{S_l} E ds_l + \int_{S_t} 0 ds_t + \int_{S_b} 0 ds_b = \int_0^l \int_0^{2\pi} E \rho d\phi dz = 2\pi\rho l E = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

É importante referir que no integral duplo acima, E e ρ são tratados como constantes (porque as variáveis de integração são ϕ e z), podendo passar para fora do sinal de integração. Da equação anterior pode facilmente concluir-se que

$$\vec{E} = E \hat{u}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{u}_\rho$$

- b) Com o objectivo de estudar o campo eléctrico criado pela calha, pode considerar-se que esta é constituída por um conjunto infinito de fios infinitos, colocados paralelamente uns aos outros e à mesma distância de um determinado eixo. Sabendo o campo criado por um desses fios, pode facilmente calcular-se o campo criado pela calha utilizando o principio da sobreposição: o campo total é igual à soma vectorial dos campos criados pelos diferentes fios.

A carga existente num comprimento l de cada um desses fios é λl . Por outro lado, se admitirmos que cada fio tem uma largura $R d\phi$, a carga existente num comprimento l seria dada por $\sigma R d\phi l$. Como as cargas devem ter o mesmo valor independentemente de considerarmos a largura do fio ou não, podemos imediatamente concluir que $\lambda = \sigma R d\phi$. Este resultado permite-nos aproveitar a expressão obtida na alínea anterior para calcular o campo criado por um dos fios que constitui a calha:

$$d\vec{E} = -\frac{\sigma R d\phi}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{u}_\rho = -\frac{\sigma d\phi}{2\pi\epsilon_0} \hat{u}_\rho$$

(atenção ao sinal negativo!). Como esta expressão é válida para qualquer fio pertencente à calha, o campo criado pela calha é

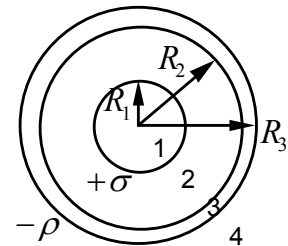
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_0^\pi \left(-\frac{\sigma d\phi}{2\pi\epsilon_0} \hat{u}_\rho \right) = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left(\hat{u}_x \int_0^\pi \cos\phi d\phi + \hat{u}_y \int_0^\pi \sin\phi d\phi \right) = -\frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \hat{u}_y$$

onde se teve em atenção que $\hat{u}_\rho = \cos\phi \hat{u}_x + \sin\phi \hat{u}_y$ varia com a variável de integração ϕ .

PROBLEMAS PROPOSTOS

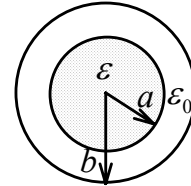
1. Uma coroa esférica limitada por duas superfícies de raios R_2 e R_3 está carregada com uma densidade volumétrica de carga uniforme $-\rho$ e tem permitividade ϵ , tal como mostra a figura. Dentro desta coroa existe uma superfície esférica concêntrica de raio R_1 e densidade superficial de carga $+\sigma$. O sistema encontra-se num meio de permitividade ϵ .

- Sabendo que o campo eléctrico no exterior do sistema (zona 4) é nulo, determine a relação entre ρ e σ .
- Determine \vec{E} nas restantes regiões.
- Admitindo que o potencial eléctrico V é nulo na superfície de raio R_2 , esboce o gráfico de variação de V para as zonas 1 e 2.



2. Um material dielétrico com a forma de uma esfera de raio a , tem permitividade $\varepsilon(r) = kr$, onde k é uma constante e r é a distância ao centro da esfera, e está rodeado por uma casca esférica condutora (de permitividade ε_0) com raio interior a e raio exterior b . Sabendo que no meio dielétrico é embebida uma carga (livre) de valor total Q , a qual se distribui uniformemente pelo volume do dielétrico, determine

- os campos eléctricos \vec{E} e \vec{D} em todo o espaço;
- a distribuição de carga na casca condutora;
- o potencial eléctrico V em todo o espaço, admitindo que o seu valor no infinito é nulo.



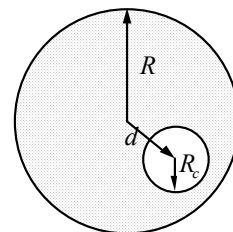
3. Na região $0 \leq R \leq a$, há uma distribuição esférica de carga de densidade $\rho = \rho_0 \left[1 - (R/a)^2 \right]$. Esta distribuição de carga está rodeada por uma casca esférica condutora, concêntrica, de raio interior b ($a < b$) e raio exterior c . Determine \vec{E} em todo o espaço.

4. As densidades superficiais de carga em duas superfícies cilíndricas coaxiais de comprimento infinito e raios $r = a$ e $r = b$ ($b > a$) são uniformes e têm os valores σ_a e σ_b , respectivamente.

- Determine \vec{E} em todo o espaço.
- Que relação deve existir entre σ_a e σ_b para que $\vec{E} = 0$ em $r > b$?

5. Uma esfera de raio R , representada em corte na figura, possui uma cavidade também esférica de raio R_c , cujo centro está a uma distância d ($R > d + R_c$) do centro da esfera. Admitindo que a esfera se encontra carregada com uma densidade volumétrica de carga ρ , uniforme, determine

- a carga total no interior da esfera;
- o campo eléctrico no interior da cavidade.



6. Suponha que o vector campo eléctrico num dado ponto é dado por $\vec{E} = kr^3 \hat{u}_r$, onde k é uma constante e r é a distância à origem no sistema de coordenadas esféricas. Determine

a) a densidade de carga, ρ ;

b) a carga total contida numa esfera de raio R centrada na origem.

SOLUÇÕES

1. a) $\sigma/\rho = (R_3^3 - R_2^3)/(3R_1^2)$; b) $\vec{E}_1 = 0$ $\vec{E}_2 = \sigma R_1^2/(\epsilon R^2) \hat{u}_r$
 $\vec{E}_3 = \rho(R_3^3 - R^3)/(3\epsilon R^2) \hat{u}_r$

2.
$$\left| \begin{array}{ll} r < a & \vec{E} = \frac{Q}{4\pi k a^3} \hat{u}_r \\ a < r < b & \vec{E} = \vec{D} = 0 \\ r > b & \vec{E} = \vec{D}/\epsilon_0 = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{u}_r \\ r = a & \sigma = Q/4\pi a^2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{ll} \vec{D} = \frac{Qr}{4\pi a^3} \hat{u}_r & V = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{a-r}{k a^3} \right) \\ & V = Q/(4\pi\epsilon_0 b) \\ & V = Q/(4\pi\epsilon_0 r) \\ r = b & \sigma = Q/4\pi b^2 \end{array} \right.$$

3. $R < a$: $\rho_0 [R/3 - R^3/(5a^2)] / \epsilon_0 \hat{u}_R$; $b < R < c$: 0;

$a < R < b$ e $R > b$: $2\rho_0 a^3 / (15\epsilon_0 R^2) \hat{u}_R$

4. a) $r < a$: 0; $a < r < b$: $\sigma_a a / (\epsilon_0 r) \hat{u}_r$; $r > b$: $(\sigma_a a + \sigma_b b) / (\epsilon_0 r) \hat{u}_r$;

b) $\sigma_a / \sigma_b = -b/a$

5. a) $4\pi\rho(R^3 - R_c^3)/3$; b) $\rho d / (3\epsilon_0) \hat{u}_r$

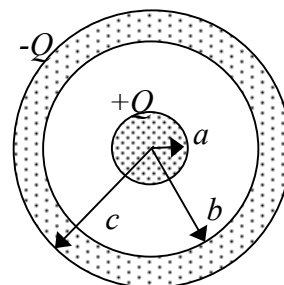
6. a) $5kr^2 \epsilon_0$; b) $4\pi k R^5 \epsilon_0$

CAPACIDADE

PROBLEMA RESOLVIDO

1. Um condensador esférico é constituído por uma esfera condutora de raio a e uma coroa esférica condutora de raios interior e exterior b e c , respectivamente. O espaço entre os dois condutores está vazio. Sabendo que na esfera e na coroa são depositadas cargas de valor total $+Q$ e $-Q$, respectivamente, determine

- a) o campo eléctrico \vec{E} e o potencial V em todo o espaço, admitindo que $V(\infty) = 0$;
- b) a capacidade deste condensador.



Resolução:

- a) Este problema tem simetria esférica, devendo por isso utilizar-se a lei de Gauss para se determinar o campo eléctrico \vec{E} criado pela cargas existentes na esfera e na coroa. Quando \vec{E} for conhecido, pode calcular-se facilmente o potencial V :

$$V(P) = V(\infty) - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

onde $V(P)$ e $V(\infty)$ são o potencial num ponto P e o potencial no infinito, respectivamente. Como neste caso se admite que $V(\infty) = 0$, tem-se simplesmente

$$V(P) = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Obviamente, o sistema de coordenadas a usar é o esférico (R, θ, ϕ) , com a origem no centro do condensador.

A lei de Gauss afirma que

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

onde a superfície gaussiana S deve aproveitar a simetria do problema: S deverá ser uma superfície esférica de raio R centrada na origem do sistema de coordenadas. Nesse caso, $\hat{n} = \hat{u}_R$ e $ds = ds_R = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

Por causa da simetria do problema, podemos também concluir que o módulo do campo eléctrico não depende de θ e ϕ , mas apenas de R , e que a sua direcção é a direcção radial (o campo eléctrico é perpendicular à superfície de um condutor em repouso electrostático), isto é, $\vec{E} = E(R)\hat{u}_R$. Substituindo na expressão da lei de Gauss, obtém-se

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi ER^2 \sin \theta d\theta d\phi = ER^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi R^2 E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

ou seja,

$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_R$$

É importante referir que este resultado ainda não está completo, pois o valor de Q_{int} ainda não foi determinado. Obviamente o seu valor vai depender do raio da superfície gaussiana.

Região 1: $R > c$

A carga que se encontra no interior de uma superfície gaussiana com um raio $R > c$ será toda a carga armazenada no condensador, ou seja, $Q_{\text{int}} = +Q + (-Q) = 0$, o que permite imediatamente concluir que nesta região $\vec{E} = 0$. Por sua vez, este resultado leva também à conclusão que aqui $V=0$.

Região 2: $c \geq R > b$

O campo eléctrico no interior de um condutor em equilíbrio electrostático é sempre igual a zero!. Por essa razão, podemos concluir que quando consideramos uma superfície gaussiana com o raio considerado, o valor da carga total que se encontra no seu interior tem que ser também igual a zero. Como na esfera está depositada uma carga de valor $+Q$, isto permite-nos concluir que a carga depositada na coroa se encontra armazenada na sua superfície interior.

Atendendo aos resultados obtidos na região anterior e a que o campo eléctrico é nulo aqui, podemos afirmar que o potencial também será igual a zero.

Região 3: $b \geq R > a$

Neste caso, a carga no interior da superfície gaussiana é apenas a carga que está depositada na esfera, de valor $+Q$. Isso leva a que o campo eléctrico nesta região seja igual a

$$\vec{E} = +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_R$$

O potencial pode ser agora obtido utilizando a expressão $V(P) = -\int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Neste caso,

$d\vec{l}$ é o vector deslocamento infinitesimal escrito no sistema de coordenadas esféricas $d\vec{l} = dR\hat{u}_R + R d\theta\hat{u}_\theta + R \sin\theta d\phi\hat{u}_\phi$, o que significa que $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dR$. Atendendo aos resultados obtidos para o campo eléctrico nas diferentes regiões, pode afirmar-se que o potencial nesta região é dado por

$$V = -\int_b^R E dR = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^R \frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b} \right)$$

NOTA: $V(b) = 0$.

Região 4: $a \geq R > 0$

Esta região, tal como a região 2, corresponde ao interior de um condutor em equilíbrio electrostático. Por essa razão pode imediatamente afirmar-se que o campo eléctrico nesta região é igual a zero! Por sua vez, isto permite-nos concluir que a carga $+Q$ depositada nesta esfera se encontra localizada na sua superfície.

O potencial será dado por

$$V = -\left(\int_b^a E dR + \int_a^R 0 dR \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

NOTA: O potencial é constante na esfera, como seria de esperar.

b) Por definição, a capacidade de um condensador é dada por

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

onde Q é o valor absoluto da carga depositada numa das armaduras do condensador, e ΔV é a diferença de potencial entre a armadura onde está depositada a carga positiva e

a armadura onde está depositada a carga negativa. Neste caso, a carga positiva está depositada na superfície da esfera e a negativa na coroa, logo

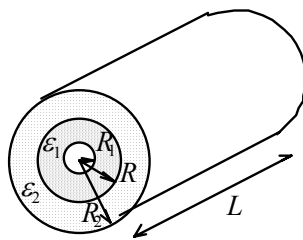
$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - 0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

donde se conclui que

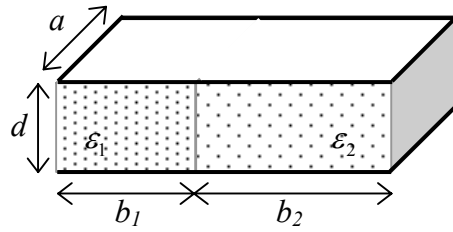
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 a b}{b - a}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

- Suponha um condensador cilíndrico em que as superfícies condutoras têm raios R_1 e R_2 ($R_1 < R_2$), e comprimento L ($L \gg R_1, R_2$). O espaço entre as superfícies condutoras está preenchido por dois dielétricos, tendo a superfície de separação entre eles raio R ($R_1 < R < R_2$). O dielétrico mais próximo da placa interior tem permitividade ϵ_1 e admite um campo máximo E_{M1} , e o outro, respectivamente, ϵ_2 e E_{M2} .
 - Determine a capacidade do condensador assim formado.
 - Qual a diferença de potencial máxima que se pode aplicar às superfícies condutoras? Qual dos dois dielétricos limita essa diferença de potencial?



- Um condensador de placas paralelas é constituído por duas superfícies condutoras planas, paralelas, de dimensões $a \times (b_1 + b_2)$, separadas por uma distância d ($d \ll a, b_1, b_2$). O espaço entre as placas está preenchido por dois meios dielétricos diferentes, de permitividades ϵ_1 e ϵ_2 , sendo a superfície de separação entre eles perpendicular às placas condutoras. Determine a capacidade deste condensador.



SOLUÇÕES

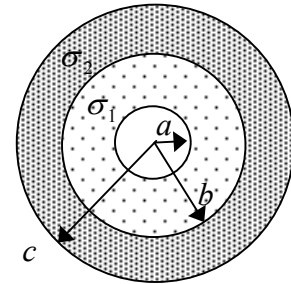
1. a) $2\pi L / [\ln(R_2/R)/\varepsilon_2 + \ln(R/R_1)/\varepsilon_1]$; b) $\min[(E_{M1} 2\pi\varepsilon_1 R_1 L/C), (E_{M2} 2\pi\varepsilon_2 RL/C)]$
2. $C = \varepsilon_1 ab_1/d + \varepsilon_2 ab_2/d = C_1 + C_2$ (paralelo de dois condensadores)

LEI DE OHM E RESISTÊNCIA

PROBLEMA RESOLVIDO

1. O espaço entre duas superfícies esféricas concêntricas condutoras de raios a e c , respectivamente, está preenchido por dois materiais diferentes, de condutividades σ_1 e σ_2 , tendo a superfície de separação entre eles raio b . Sabendo que uma corrente I entra no dispositivo pela superfície condutora interior e sai pela exterior, determine

- a) a densidade de corrente entre as duas superfícies condutoras;
b) a resistência entre os dois condutores do dispositivo.



Resolução:

- a) A densidade de corrente \vec{J} está relacionada com a corrente I que passa através de uma dada superfície S por

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds$$

onde o versor \hat{n} é perpendicular à superfície S . Normalmente aplica-se esta expressão a superfícies perpendiculares à direcção do fluxo de corrente. Neste caso a corrente tem a direcção radial, e portanto deveremos escolher uma superfície esférica de raio R centrada no centro do dispositivo. Além disso, por causa da simetria do problema, não se espera que o módulo da densidade de corrente dependa de θ e de ϕ . Isso significa que $\vec{J} = J(R)\hat{u}_R$. Como para uma superfície esférica $\hat{n} = \hat{u}_R$ e $ds = ds_R = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$, temos

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi JR^2 \sin \theta d\theta d\phi = JR^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi R^2 J$$

e, então,

$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi R^2} \hat{u}_R$$

b) Por definição, a resistência de um dado dispositivo é dada por

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

onde ΔV é a diferença de potencial entre o terminal do dispositivo por onde a corrente eléctrica I entra e o terminal por onde esta sai. Para se calcular esta diferença de potencial, é necessário determinar-se primeiro o campo eléctrico \vec{E} . Este é obtido directamente da lei de Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

onde σ é a condutividade do meio. Utilizando o resultado da alínea anterior, tem-se

$$E = \begin{cases} \frac{I}{4\pi\sigma_1 R^2} \hat{u}_R, & a < R < b \\ \frac{I}{4\pi\sigma_2 R^2} \hat{u}_R, & b < R < c \end{cases}$$

de onde se pode facilmente obter a diferença de potencial pretendida

$$\begin{aligned} \Delta V = V(a) - V(c) &= -\int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{I}{4\pi} \left(\frac{1}{\sigma_2} \int_c^b \frac{dR}{R^2} + \frac{1}{\sigma_1} \int_b^a \frac{dR}{R^2} \right) = \\ &= \frac{I}{4\pi} \left[\frac{1}{\sigma_2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\sigma_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right] \end{aligned}$$

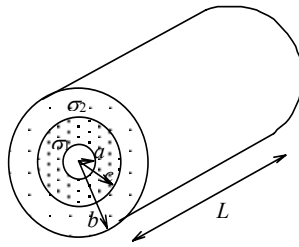
A resistência será então dada pela expressão

$$R = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sigma_2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\sigma_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]$$

o que corresponde à soma de duas resistências (série de duas resistências)! Na expressão acima $d\vec{l}$ é o vector deslocamento infinitesimal escrito no sistema de coordenadas esféricas (ver apêndice).

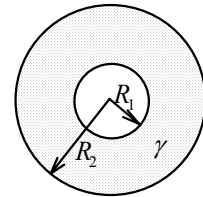
PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Um cabo coaxial é constituído por duas superfícies cilíndricas condutoras de raios a e b ($a < b$) e comprimento L ($L \gg a, b$). O espaço entre as superfícies condutoras está preenchido por dois meios condutores diferentes de condutividades σ_1 e σ_2 . Determine a resistência entre as duas superfícies.



2.

- a) Determine a resistência entre duas superfícies esféricas concêntricas condutoras de raios R_1 e R_2 , sabendo que o espaço entre elas está preenchido por um meio condutor de condutibilidade γ .
- b) Uma esfera condutora perfeita de raio R_1 está mergulhada num meio condutor de condutibilidade γ . Essa situação é a de uma ligação à terra de um circuito. Calcule a resistência entre a esfera e o infinito.



3. Um material homogêneo de condutividade uniforme σ tem a forma de um cone truncado, ocupando a região definida em coordenadas esféricas por $R_1 \leq r \leq R_2$ e $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Determine a resistência entre as superfícies $r = R_1$ e $r = R_2$.
4. Repita o problema anterior, admitindo agora que o material referido não é homogêneo, tendo uma condutividade não uniforme que varia de acordo com a expressão $\sigma(r) = \sigma_0 R_1 / r$.

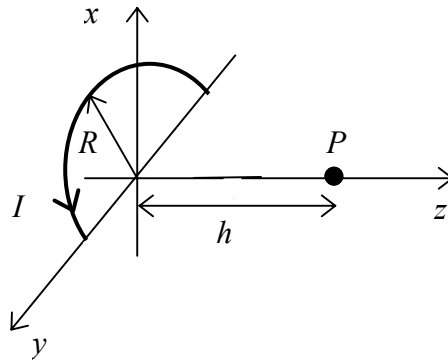
SOLUÇÕES

1. $[\ln(b/c)/\sigma_2 + \ln(c/a)/\sigma_1](2\pi L)$
2. a) $(1/R_1 - 1/R_2)/(4\pi\gamma)$; b) $1/(4\pi\gamma R_1)$
3. $(1/R_1 - 1/R_2)/[2\pi\sigma(1 - \cos\theta_0)]$
4. $\ln(R_2/R_1)/[2\pi\sigma_0 R_1(1 - \cos\theta_0)]$

LEI DE BIOT-SAVART

PROBLEMA RESOLVIDO

1. Considere um semi-anel circular de raio R que transporta uma corrente estacionária de intensidade I . Admitindo que o semi-anel está no plano xy , e que o seu eixo coincide com o eixo dos zz , determine o campo de indução magnética no ponto $P(0, 0, h)$



Resolução:

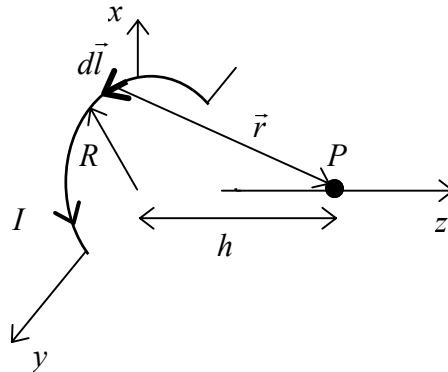
Quando se pretende determinar o campo de indução magnética criado por uma dada distribuição de corrente num problema que não tem simetria, é necessário recorrer à lei de Biot-Savart. Esta tem na magnetostática um papel semelhante ao da lei de Coulomb na electrostática. De acordo com a lei de Biot-Savart, o campo de indução magnética criado por uma distribuição linear de corrente (os enunciados desta lei para distribuições superficiais e volumétricas de corrente são análogos) é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

onde L é o contorno do circuito percorrido pela corrente I , $d\vec{l}$ é um vector elementar tangente a esse contorno em cada ponto e \vec{r} é o vector que aponta desse elemento $d\vec{l}$ para o ponto onde se quer calcular o campo de indução magnética.

Apesar de na figura do problema estarem representados os eixos coordenados cartesianos, deve utilizar-se no cálculo de \vec{B} o sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , o qual se

adapta perfeitamente à geometria do problema. O eixo dos zz é o que aparece representado na figura. Na figura estão também representados o elemento $d\vec{l}$ e o vector \vec{r} .



Da observação desta figura facilmente se conclui que $d\vec{l} = R d\phi \hat{u}_\phi$ e $\vec{r} = -R\hat{u}_\rho + h\hat{u}_z$ e que, portanto, $r^3 = (R^2 + h^2)^{3/2}$ e

$$d\vec{l} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{u}_\rho & \hat{u}_\phi & \hat{u}_z \\ 0 & R d\phi & 0 \\ -R & 0 & h \end{vmatrix} = R h d\phi \hat{u}_\rho + R^2 d\phi \hat{u}_z$$

Substituindo na expressão da lei de Biot-Savart, temos

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} \left(h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{u}_\rho d\phi + R \hat{u}_z \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} (2h \hat{u}_x + \pi R \hat{u}_z) \end{aligned}$$

Na expressão acima, o versor \hat{u}_ρ não passou para fora do sinal de integração porque varia com a variável de integração ϕ (ver apêndice e problema resolvido sobre lei de Gauss).

PROBLEMAS PROPOSTOS

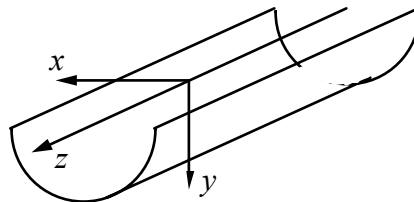
1. Um fio condutor de comprimento L é percorrido por uma corrente estacionária de intensidade I . Determine o campo de indução magnética num ponto P situado no plano bissetor do fio, a uma distância a deste.

2. Mostre que o campo de indução magnética no centro de um polígono regular de N lados, circunscrito por uma circunferência de raio R e percorrido por uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I no sentido anti-horário, é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{N}\right) \hat{a}_n$$

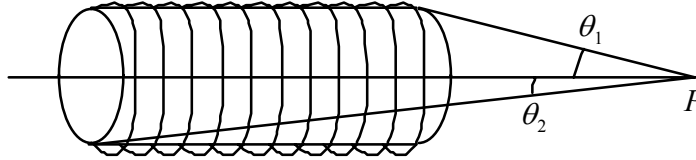
onde \hat{a}_n é o versor normal ao plano do polígono.

3. Uma folha condutora muito fina tem a forma de uma calha de raio R , comprimento infinito e abertura angular de π radianos. Na calha circula uma corrente estacionária de intensidade I no sentido do eixo dos zz . Sabendo que a corrente se distribui uniformemente por toda a calha, determine \vec{B} num ponto do eixo da calha.



4. Uma corrente estacionária de intensidade I percorre uma fina folha condutora de largura w e comprimento infinito. A folha condutora esta colocada no plano xy , com a origem no seu centro. Admitindo que a corrente tem o sentido do eixo dos xx , determine \vec{B} no ponto de coordenadas $(0, 0, z)$.
5. Determine \vec{B} num ponto do eixo de um anel circular de raio R que transporta uma corrente estacionária de intensidade I .

6. Utilizando o resultado do problema anterior, determine \vec{B} no eixo de um solenóide formado por um enrolamento de N espiras por unidade de comprimento em torno um tubo cilíndrico de raio R , percorrido por uma corrente estacionária de intensidade I . Qual o valor de \vec{B} no eixo de um solenóide infinito?



SOLUÇÕES

1. $(\mu_0 I L) / (4\pi a \sqrt{a^2 + L^2/4}) \hat{u}_\phi$

3. $-\mu_0 I / (\pi^2 R) \hat{i}$

4. $-\mu_0 I \operatorname{arctg}(w/2z) / (\pi w) \hat{j}$

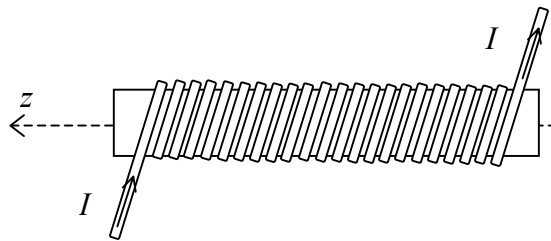
5. $\mu_0 I R^2 / [2(R^2 + z^2)^{3/2}] \hat{k}$

6. $\mu_0 I N (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) / 2 \hat{k}$; solenóide infinito: $\mu_0 I N \hat{k}$

LEI DE AMPERE

PROBLEMA RESOLVIDO

1. N voltas de um fio condutor percorrido por uma corrente estacionária de intensidade I estão enroladas de forma compacta em torno de um núcleo cilíndrico de raio R e comprimento l (muito longo). Sabendo que o núcleo é feito de um material não magnético, determine o campo de indução magnética em todo o espaço.



Resolução:

Na resolução deste problema é conveniente utilizar-se o sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) .

A simetria presente neste problema permite aplicar a lei de Ampère na determinação do campo de indução magnética. No vazio (ou para um material não magnético), esta lei afirma que a circulação do campo de indução magnética ao longo de um dado percurso fechado é igual à corrente que atravessa a superfície limitada por esse percurso a multiplicar pela permeabilidade magnética do vazio:

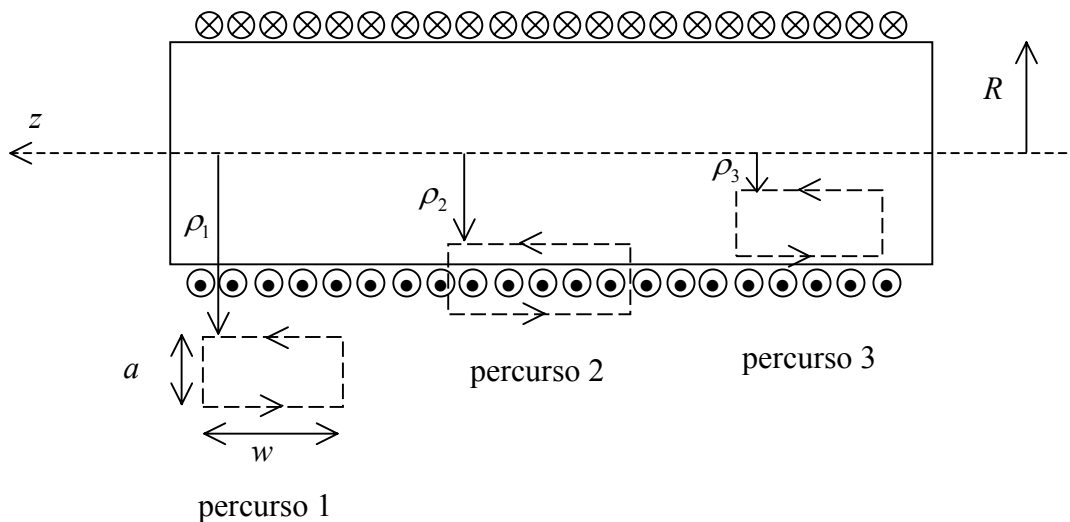
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

É importante referir que apesar de a lei de Ampère ser sempre válida, deve ser utilizada apenas quando o problema tem simetria (plana, solenoidal, toroidal ou cilíndrica).

Na expressão anterior, Γ é o percurso fechado, $d\vec{l}$ é um elemento desse percurso e I_{int} é a corrente que atravessa a superfície limitada pelo percurso. No cálculo da circulação de \vec{B} ao longo do referido percurso, o sentido é muito importante. Como regra geral, o sentido

de integração está relacionado com o sentido considerado positivo para a corrente eléctrica pela regra da mão-direita. Este sentido de integração pode ser indicado matematicamente de duas formas diferentes: ou através do sentido escolhido para o vector $d\vec{l}$ ou através dos limites de integração. No entanto, não se deve indicar o sentido de integração simultaneamente destes dois modos.

Por causa da simetria deste problema, espera-se que o módulo do campo de indução magnética não dependa de z (porque se admite que o solenóide é praticamente infinito) e de ϕ , mas apenas da distância ao fio condutor, a qual depende de ρ , isto é, $B = B(\rho)$. Por outro lado, a simetria e a regra da mão-direita permitem-nos afirmar que \vec{B} tem a direcção e o sentido do versor \hat{u}_z . Assim, por simples inspecção do problema sabe-se que $\vec{B} = B(\rho)\hat{u}_z$. Esta informação vai condicionar a escolha do percurso fechado a utilizar na lei de Ampère. Obviamente, deve escolher-se o percurso que torne mais simples o cálculo da circulação de \vec{B} . Neste caso, esse percurso será um percurso rectangular, assente num plano correspondente a um valor de ϕ constante, e com dois lados paralelos ao eixo dos zz . Na figura seguinte, que representa uma secção transversal do solenóide, estão desenhados a tracejado três percursos possíveis.



Nesta figura está indicado por setas o sentido de circulação que corresponde a considerar-se como positiva a corrente que aponta para nós. Cada percurso tem uma largura w , uma

altura a , e está a uma distância mínima ρ_i do eixo dos zz . Consideremos os três percursos separadamente.

Percurso 1

Atendendo a que $\vec{B} = B(\rho)\hat{u}_z$, pode facilmente mostrar-se que $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(\rho)dz$ e que

$$\oint_{\text{percurso1}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B(\rho_1) - B(\rho_1 + a)]w. \text{ Por outro lado, observando a figura conclui-se que}$$

nenhuma corrente atravessa a superfície limitada por este percurso. Isso significa que I_{int} é igual a zero. Como $w \neq 0$, devemos ter $B(\rho_1) = B(\rho_1 + a)$, ou seja, o campo de indução magnética é constante no exterior do solenóide. Além disso, é de esperar que a uma distância infinita do solenóide não exista campo de indução magnética ($B(\rho = \infty) = 0$). Isto leva-nos a concluir que $\vec{B} = 0$ no exterior do solenóide.

Percurso 2

Neste caso verifica-se que $\oint_{\text{percurso2}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B(\rho_2) - B(\rho_2 + a)]w = B(\rho_2)w$ (note que $\vec{B} = 0$

no exterior do solenóide). Além disso, a corrente que atravessa a superfície limitada por este percurso é igual a I vezes o número de vezes que o fio condutor atravessa a superfície. Como N voltas de fio estão enroladas ao longo de um comprimento l do solenóide, o número de voltas por unidade de comprimento é igual a N/l e, portanto, para este percurso, $I_{int} = (N/l)wI$. Substituindo na expressão da lei de Ampère, obtém-se $B(\rho_2) = \mu_0 nI$, onde $n = N/l$ é o número de voltas do fio por unidade de comprimento. É interessante verificar que o resultado obtido não depende do valor de ρ_2 , o que leva a pensar que B terá o mesmo valor em qualquer ponto do interior do solenóide. Essa hipótese é facilmente verificável considerando a aplicação da lei de Ampère ao percurso 3.

Percurso 3

À semelhança do que acontecia com o percurso 1, também aqui se verifica que $I_{int} = 0$.

Como neste caso a circulação de \vec{B} é dada pela expressão

$$\oint_{\text{percurso3}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B(\rho_3) - B(\rho_3 + a)]w, \text{ podemos concluir que } B(\rho_3) = B(\rho_3 + a), \text{ ou seja, o}$$

campo de indução magnética é constante no interior do solenóide.

Tem-se então

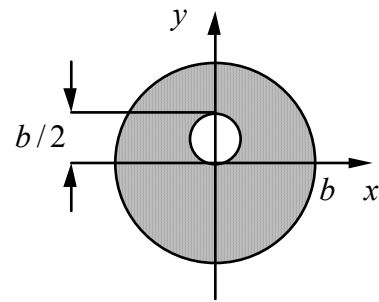
$$\begin{aligned}\vec{B}_{\text{interior}} &= \mu_0 n I \hat{u}_z \\ \vec{B}_{\text{exterior}} &= 0\end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Um condutor cilíndrico de raio b e comprimento infinito transporta uma corrente estacionária de intensidade I .

a) Mostre que o módulo do vector de indução magnética para todo o espaço é dado por $B = \mu_0 I r / (2\pi b^2)$, para $0 < r < b$, e $B = \mu_0 I / (2\pi r)$, para $r > b$.

b) Do condutor referido é removido um cilindro de diâmetro $b/2$ e comprimento infinito. O eixo deste vazio é paralelo ao eixo do condutor (eixo dos zz), e intersecta o plano xy no ponto $(x = 0, y = b/4)$. Determine \vec{B} num ponto qualquer da cavidade.



NOTA: Use o princípio da sobreposição.

2. Uma superfície plana infinita condutora assente no plano xy é percorrida por uma corrente eléctrica estacionária de densidade superficial uniforme de valor K segundo a direcção do eixo dos xx . Determine o campo de indução magnética em qualquer ponto do espaço.

SOLUÇÕES

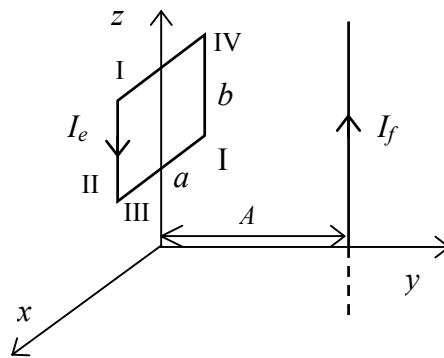
1. b) $-2\mu_0 I / (15\pi b) \hat{i}$

2. $z > 0$: $\vec{B} = -\mu_0 K / 2 \hat{u}_y$ $z < 0$: $\vec{B} = \mu_0 K / 2 \hat{u}_y$

FORÇA MAGNÉTICA

PROBLEMA RESOLVIDO

1. Uma espira rectangular de lados a e b , colocada no plano xz , é percorrida por uma corrente constante de intensidade I_e , com o sentido indicado na figura. Um fio infinito, localizado no plano yz e paralelo ao eixo dos zz é também percorrido por uma corrente constante de intensidade I_f . Sabendo que a distância entre o fio e a espira é A , determine a força magnética que é exercida sobre cada lado da espira.



Resolução:

Um condutor percorrido por uma corrente eléctrica I que esteja colocado numa região do espaço onde exista um campo de indução magnética \vec{B} sofre a acção de uma força magnética dada por

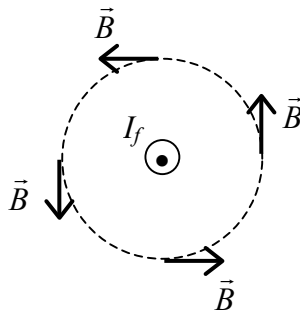
$$\vec{F}_{mag} = I \int_C d\vec{l} \times \vec{B}$$

onde C é o contorno do circuito e $d\vec{l}$ é um vector tangente em cada ponto a esse contorno. Deve ser referido que o sentido de integração é muito importante no cálculo acima. Esse sentido de integração, que corresponde ao sentido da corrente no circuito, pode ser indicado matematicamente de duas formas diferentes: ou associando ao vector $d\vec{l}$ o sentido da corrente I , ou através dos limites de integração. É, no entanto, necessário ter cuidado com este passo, uma vez que estes dois processos não podem ser utilizados

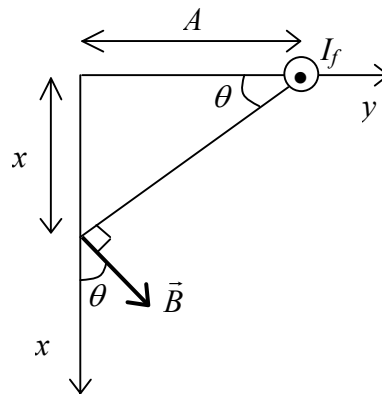
simultaneamente. NOTA: Nesta resolução, o sentido de integração será indicado pelos limites de integração.

Neste problema pretende-se calcular a força magnética que é exercida sobre cada lado da espira. A espira sofre a acção de uma força magnética porque está colocada numa região onde existe um campo de indução magnética. Esse campo é o criado pela corrente que atravessa o fio infinito.

Aplicando a lei de Ampère, pode facilmente verificar-se que o campo de indução magnética criado pelo fio infinito num ponto a uma distância r do fio tem módulo $B = \mu_0 I_f / 2\pi r$ e direcção e sentido dados pela regra da mão-direita:



Como queremos calcular a força magnética que se exerce sobre a espira, e esta está colocada no plano xz , temos que determinar a expressão de \vec{B} para um ponto qualquer do plano xz . Além disso, por causa da geometria deste problema, a distância de um qualquer ponto $P(x, \theta, z)$, pertencente ao plano xz , ao fio infinito não depende de z , mas apenas de x , sendo dada por $\sqrt{x^2 + A^2}$:



No ponto considerado, o campo de indução magnética criado pela corrente I_f toma a forma

$$\vec{B} = B(\cos \theta \hat{u}_x + \sin \theta \hat{u}_y) = \mu_0 I / (2\pi \sqrt{x^2 + A^2}) (\cos \theta \hat{u}_x + \sin \theta \hat{u}_y), \quad \text{onde}$$

$$\cos \theta = A / \sqrt{x^2 + A^2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = x / \sqrt{x^2 + A^2} .$$

Tendo em atenção que a espira se localiza no plano xz , podemos escrever para qualquer lado da espira $d\vec{l} = dx\hat{u}_x + dz\hat{u}_z$ e

$$d\vec{l} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ dx & 0 & dz \\ B \cos \theta & B \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = -B(\sin \theta \hat{u}_x + \cos \theta \hat{u}_y)dz + B \sin \theta dx \hat{u}_z$$

Calculemos agora a força que actua em cada lado da espira.

Lado I

Para este lado $z=\text{constante}$, o que significa que $dz=0$. Então, $d\vec{l} \times \vec{B} = B \sin \theta dx \hat{u}_z$ e temos

$$\vec{F}_I = I_e \int_{-a/2}^{a/2} B \sin \theta \hat{u}_z dx = \frac{\mu_0 I_e I_f}{2\pi} \hat{u}_z \int_{-a/2}^{a/2} \frac{x}{x^2 + A^2} dx = 0$$

Lado II

Neste caso $x=a/2$, o que significa que $dx=0$. Então,

$d\vec{l} \times \vec{B} = -B(\sin \theta \hat{u}_x + \cos \theta \hat{u}_y)dz = -\mu_0 I_f / 2\pi (a^2/4 + A^2)(a/2 \hat{u}_x + A \hat{u}_y)$ e temos

$$\vec{F}_{II} = -\frac{\mu_0 I_e I_f}{2\pi \left(\frac{a^2}{4} + A^2 \right)} \left(\frac{a}{2} \hat{u}_x + A \hat{u}_y \right) \int_{z_0+b}^{z_0} dz = -\frac{\mu_0 I_e I_f b}{2\pi \left(\frac{a^2}{4} + A^2 \right)} \left(\frac{a}{2} \hat{u}_x + A \hat{u}_y \right)$$

onde z_0 representa a altura do lado da espira mais próximo da origem.

Lado III

Tal como acontecia com o lado I, também neste caso $d\vec{l} \times \vec{B} = B \sin \theta dx \hat{u}_z$ e

$$\vec{F}_{III} = I_e \int_{a/2}^{-a/2} B \sin \theta \hat{u}_z dx = \frac{\mu_0 I_e I_f}{2\pi} \hat{u}_z \int_{a/2}^{-a/2} \frac{x}{x^2 + A^2} dx = 0$$

Lado IV

Neste caso $x=-a/2$, o que significa que $dx=0$. Então,

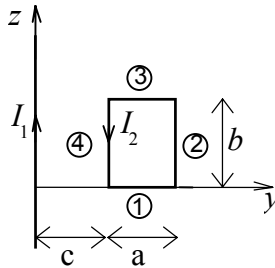
$d\vec{l} \times \vec{B} = -B(\sin \theta \hat{u}_x + \cos \theta \hat{u}_y)dz = -\mu_0 I_f / 2\pi (a^2/4 + A^2)(-a/2 \hat{u}_x + A \hat{u}_y)$ e temos

$$\vec{F}_{IV} = -\frac{\mu_0 I_e I_f}{2\pi \left(\frac{a^2}{4} + A^2 \right)} \left(-\frac{a}{2} \hat{u}_x + A \hat{u}_y \right) \int_{z_0}^{z_0+b} dz = -\frac{\mu_0 I_e I_f b}{2\pi \left(\frac{a^2}{4} + A^2 \right)} \left(-\frac{a}{2} \hat{u}_x + A \hat{u}_y \right)$$

NOTA: Compare os limites de integração para os diferentes lados.

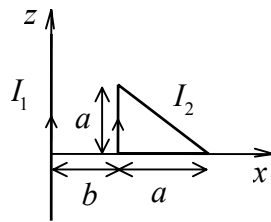
PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Um fio infinito e uma espira quadrada estão no mesmo plano. O fio é percorrido por uma corrente I_1 e a espira por uma corrente I_2 com os sentidos mostrados na figura. Determine as forças exercidas sobre os lados da espira, indicando as suas direcções e sentidos.



2. Uma espira triangular, com as dimensões indicadas na figura, está colocada a uma distância b de um fio infinito percorrido por uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I_1 . Determine

- o campo de indução magnética criado pelo fio infinito, \vec{B}_1 ;
- a força resultante que actua sobre a espira, quando esta é percorrida pela corrente estacionária de intensidade I_2 no sentido horário.



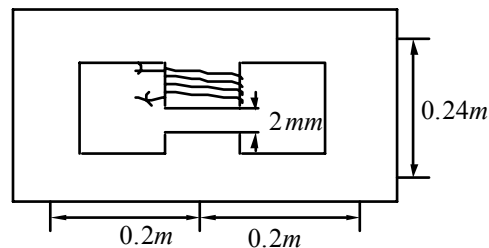
SOLUÇÕES

1. $\vec{F}_1 = \mu_0 I_1 I_2 \ln(1 + a/c) / (2\pi) \hat{k} = -\vec{F}_3$; $\vec{F}_2 = -\mu_0 I_1 I_2 b / [2\pi(c + a)] \hat{j}$;
 $\vec{F}_4 = \mu_0 I_1 I_2 b / (2\pi c) \hat{j}$

2. a) $\mu_0 I_1 / (2\pi r) \hat{u}_\phi$; b) $-\mu_0 I_1 I_2 [a/b - \ln(1 + a/b)] / (2\pi) \hat{i}$

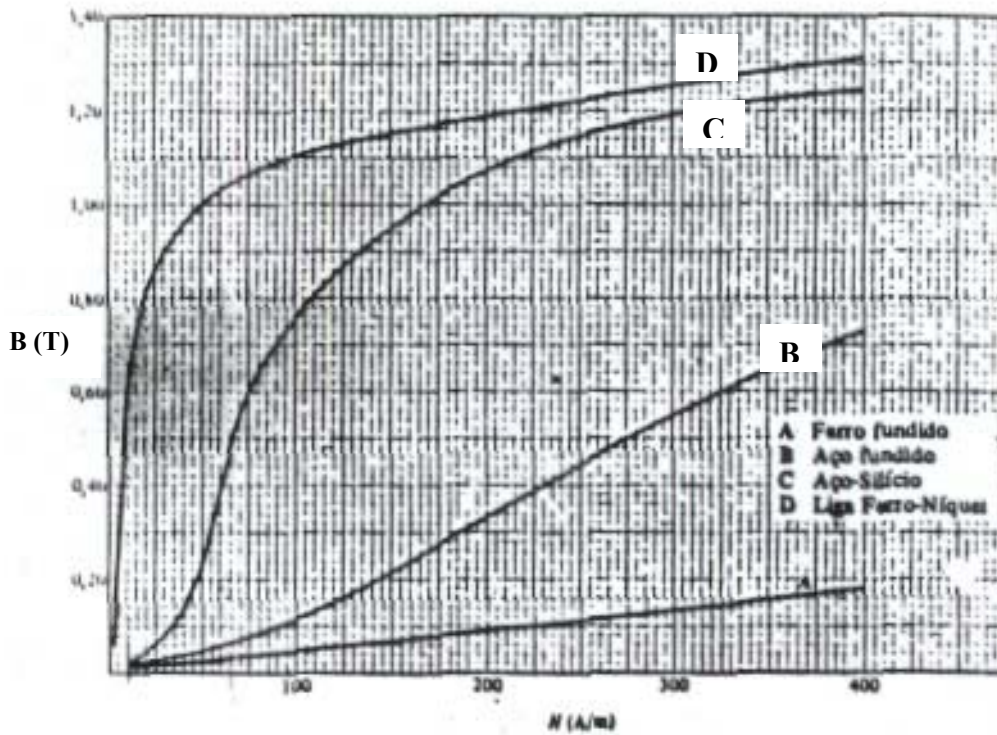
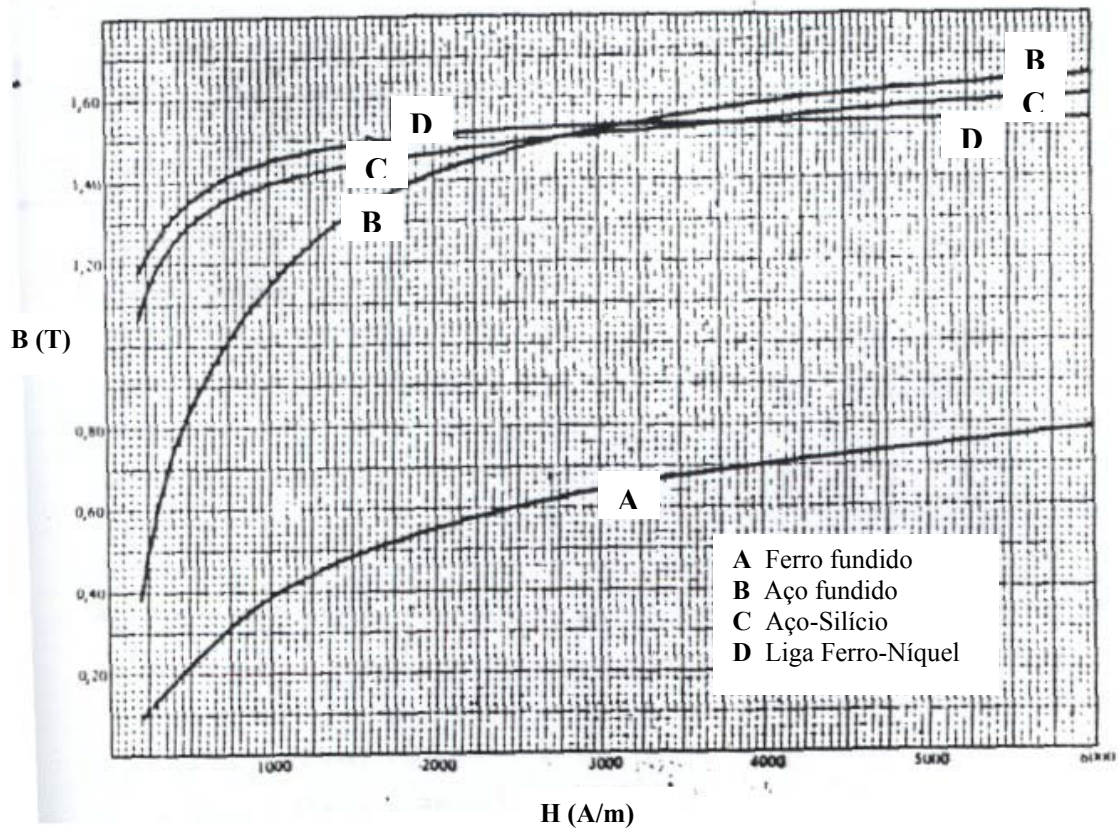
CIRCUITOS MAGNÉTICOS

- Um circuito magnético é constituído por um núcleo em forma de anel, com um raio médio de 30 cm e secção recta quadrada de 2 cm de lado, e por um entreferro de ar de 2 mm. O enrolamento uniforme em torno do anel tem 1000 espiras. Supondo que a secção recta do entreferro é 10% superior à secção recta do material ferromagnético nas proximidades, determine
 - a corrente eléctrica necessária para obter no entreferro uma indução magnética de 0.8 T, quando o núcleo é formado por uma liga de ferro-níquel;
 - o valor da indução magnética no entreferro quando a corrente é de 0.7 A e o núcleo é constituído por aço-silício.
- Considere o circuito magnético representado na figura seguinte. Uma corrente eléctrica estacionária de 3 A percorre as 200 voltas de fio enrolado em torno do braço central. Admitindo que o núcleo tem uma secção transversal constante de área 10^{-3} m^2 e uma permitividade relativa de 5000, determine
 - o fluxo magnético em cada braço;
 - a intensidade do campo magnético em cada braço e no entreferro.



SOLUÇÕES

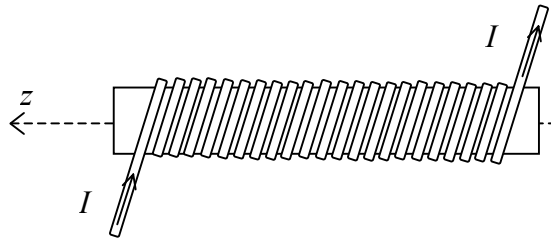
- 1.33 A; b) 0.364 T
- $\Phi_{lat} = \Phi_{cent}/2 = 1.785 \times 10^{-4} \text{ Wb};$
 - $H_{ent} = 10^4 H_{lat} = 5000 H_{cent} = 2.84 \times 10^5 \text{ A/m}$



COEFICIENTE DE AUTO-INDUÇÃO

PROBLEMA RESOLVIDO

1. Determine o coeficiente de auto-indução de um solenóide de raio a , comprimento l , muito longo, constituído por N voltas de um fio condutor, percorrido por uma corrente I , enrolado de forma compacta em torno de um núcleo não magnético.



Resolução:

Método 1

O coeficiente de auto-indução L é dado por $L = \Lambda/I$, onde $\Lambda = N\Phi$ é o fluxo de ligação, N é o número de espiras do circuito e Φ é o fluxo magnético que atravessa uma espira. Para se poder calcular o coeficiente de auto-indução a partir da expressão acima, é necessário calcular o fluxo magnético que atravessa uma espira. Por definição, o fluxo magnético que atravessa uma espira é dado por

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} ds$$

onde \vec{B} é o campo de indução magnética criado pela corrente I que atravessa o circuito e S é a superfície limitada pela espira.

Neste caso, o campo de indução magnética no interior do solenóide é $\vec{B} = (\mu_0 NI/l)\hat{u}_z$ (ver problema resolvido sobre a lei de Ampère). Além disso, escolhendo S como a superfície correspondente à secção transversal do solenóide ($S = \pi a^2$), vem $\hat{n} = \hat{u}_z$, o que significa que $\vec{B} \cdot \vec{n} = \mu_0 NI/l$ e $\Phi = \pi\mu_0 NIa^2/l$. A partir deste resultado facilmente se obtém $L = \pi\mu_0 N^2 a^2/l$.

Método 2

Para materiais não magnéticos, a energia magnética é dada por

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{todo o espaço}} B^2 dv$$

Neste caso, como o campo de indução magnética toma valores não nulos apenas no interior do solenóide, pode escrever-se que a energia magnética armazenada é

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{solenóide}} B^2 dv$$

Utilizando os resultados obtidos para B e o sistema de coordenadas cilíndricas, temos

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a (\mu_0 NI/l)^2 \rho d\rho d\phi dz = \frac{\pi\mu_0 N^2 I^2 a^2}{2l}$$

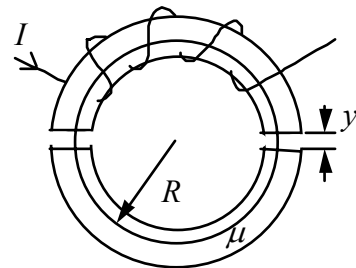
Por outro lado, a energia magnética armazenada num sistema com um coeficiente de auto-indução L é dada por $W_m = LI^2/2$, o que significa que

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\pi\mu_0 N^2 a^2}{l}$$

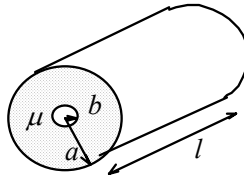
PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Um circuito magnético é formado por duas metades de um toroide de raio médio R , área de secção transversal S e por dois entreferros de ar de comprimento y . O material magnético que constitui as duas metades do toroide tem permeabilidade μ . Em torno deste circuito magnético enrolam-se de forma compacta N voltas de um fio condutor percorrido por uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I . Determine

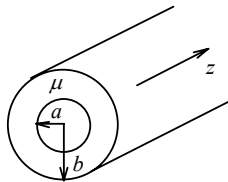
- o fluxo magnético, Φ , que atravessa este circuito;
- o coeficiente de auto-indução, L , deste circuito;
- a energia magnética, W_m , armazenada neste circuito.



2. Um cabo coaxial de comprimento l é constituído por duas superfícies cilíndricas condutoras coaxiais de raios a e b ($a > b$, $l \gg a, b$). Os cilindros estão curto-circuitados numa extremidade e o espaço entre eles está preenchido por material magnético de permeabilidade μ . Sabendo que o cabo coaxial transporta uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I , determine o seu coeficiente de auto-indução
- usando o método dos fluxos de ligação;
 - usando a energia magnética.



3. Um cabo coaxial de comprimento l , muito longo, é constituído por um condutor interior sólido de raio a (e permeabilidade μ_0) e uma superfície condutora exterior de raio b ($b > a$ e $l \gg a, b$). O espaço entre os dois condutores está preenchido por material magnético de permeabilidade μ . A distribuição de corrente no condutor interior não é uniforme e a densidade de corrente pode ser aproximada por $J = kr^2$, onde k é uma constante e r é a distância ao eixo do cabo. A corrente eléctrica total, de intensidade I , retorna através do condutor exterior.
- Determine k em função de I e a .
 - Determine \vec{B} em todo o espaço.
 - Determine a energia magnética armazenada neste sistema.
 - Utilizando o resultado da alínea anterior, obtenha uma expressão para o coeficiente de auto-indução do cabo coaxial.



SOLUÇÕES

1. a) $NIS/[2(\pi R/\mu + y/\mu_0)]$; b) $N^2S/[2(\pi R/\mu + y/\mu_0)]$;

c) $N^2I^2S/[4(\pi R/\mu + y/\mu_0)]$

2. $\mu l \ln(a/b)/(2\pi)$

3. a) $k = 2I/(\pi a^4)$; b) $r < a: \mu_0 I r^3 / (2\pi a^4) \hat{u}_\phi$; $a < r < b: \mu I / (2\pi r) \hat{u}_\phi$

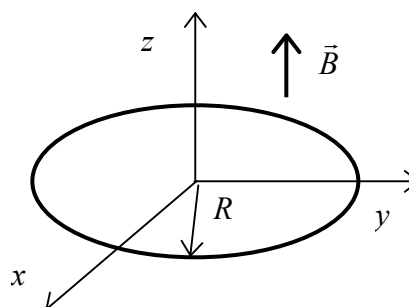
$r > b: 0$; c) $I^2 l [\mu_0/8 + \mu \ln(b/a)] / (4\pi)$; d) $l [\mu_0/8 + \mu \ln(b/a)] / (2\pi)$

LEI DE INDUÇÃO DE FARADAY

PROBLEMA RESOLVIDO

1. Uma espira condutora circular de raio R está assente no plano xy , numa região do espaço onde existe um campo de indução magnética \vec{B} variável no tempo e no espaço, $\vec{B} = B_0(x^2 + y^2)\sin(\omega t)\hat{u}_z$, onde B_0 e ω são constantes. Determine

- o fluxo magnético Φ que atravessa a espira;
- a força electromotriz \mathcal{E} induzida na espira;
- o sentido de circulação da corrente induzida no instante $t = \pi/(4\omega)$.



Resolução:

- a) Por definição, o fluxo magnético que atravessa uma superfície S é dado por

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} ds$$

onde o versor \hat{n} é perpendicular à superfície considerada e tem o sentido que aponta segundo o campo de indução magnética. Neste caso, a superfície S é a superfície plana limitada pela espira, $\hat{n} = \hat{u}_z$ e $ds = ds_z = \rho d\rho d\phi$ (o sistema de coordenadas cilíndricas deve ser escolhido por se adaptar perfeitamente à geometria do problema). Substituindo estas expressões na definição acima, temos

$$\Phi = B_0 \sin(\omega t) \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 d\rho d\phi = \frac{\pi R^4 B_0 \sin(\omega t)}{2}$$

Na obtenção deste resultado, usou-se $x^2 + y^2 = \rho^2$ (ver apêndice).

- b) De acordo com a lei de indução de Faraday, sempre que o fluxo magnético que atravessa um dado circuito é não estacionário, surge nesse circuito uma força electromotriz \mathcal{E} induzida a qual é dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Utilizando o resultado obtido na alínea anterior, chega-se a

$$\mathcal{E} = -\frac{\pi R^4 B_0 \omega \cos(\omega t)}{2}$$

- c) A lei de Lenz afirma que a corrente associada com a força electromotriz induzida (corrente induzida) tende a opor-se à variação de fluxo que lhe deu origem. Assim, se o fluxo estiver a aumentar, a corrente induzida originará um campo de indução magnética induzido com o sentido contrário ao que lhe deu origem. Se, pelo contrário, o fluxo magnético estiver a diminuir, a corrente induzida irá originar um campo de indução magnética com o mesmo sentido do que lhe deu origem.

Observando a expressão do fluxo magnético que atravessa a espira, verifica-se que ele varia sinusoidalmente, o que significa que durante certos intervalos de tempo o fluxo aumenta, enquanto que para outros intervalos diminui. Assim, o sentido da corrente induzida não será constante, variando também sinusoidalmente à medida que o tempo passa. Na verdade, se \mathfrak{R} representar a resistência da espira, podemos afirmar que a intensidade da corrente induzida é $I_{ind} = \mathcal{E}/\mathfrak{R} = -\pi R^4 B_0 \omega \cos(\omega t)/(2\mathfrak{R})$.

No instante considerado, $d\Phi/dt = \pi R^4 B_0 \omega \cos(\pi/4)/2 = \sqrt{2} \pi R^4 B_0 \omega /4 > 0$, o que significa que o fluxo está a aumentar. Por essa razão, o fluxo induzido (criado pela corrente induzida) deverá apontar no sentido contrário ao de \vec{B} , ou seja, deverá apontar segundo $-\hat{u}_z$. Pela regra da mão-direita, a corrente que dá origem a esse fluxo magnético tem o sentido de $-\hat{u}_\phi$:



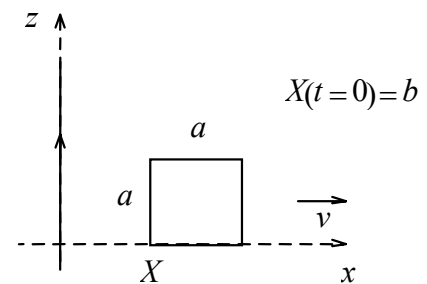
NOTA: O sentido da corrente induzida pode ser determinado utilizando a seguinte regra prática:

\hat{n}	\otimes	\odot
$\frac{d\Phi}{dt}$		
+		
-		

PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Uma espira quadrada de lado a está colocada no mesmo plano de um fio condutor infinito que é percorrido por uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I . Sabendo que a espira, inicialmente a uma distância b do fio infinito, se afasta deste com uma velocidade v , determine

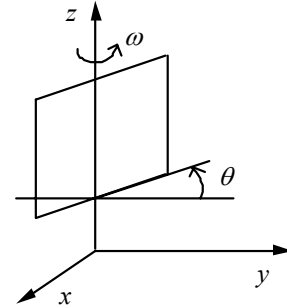
- o fluxo magnético que atravessa a espira (num instante de tempo t);
- a força electromotriz induzida na espira;
- o sentido de circulação da corrente induzida na espira.



2. Uma espira quadrada de lado a e resistência R roda em torno do eixo dos zz (que está no mesmo plano da espira e passa pelo seu centro) com uma velocidade angular

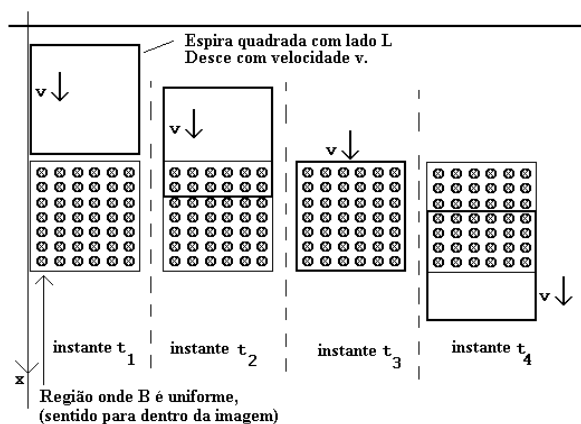
constante ω no sentido indicado na figura. A espira está colocada numa região onde o campo de indução magnética é dado por $\vec{B} = -B_0 \hat{u}_y$, onde B_0 é uma constante. Sabendo que no instante inicial a espira se encontra no plano yz ($\theta = 0$), determine

- o fluxo magnético Φ que atravessa a espira em função de θ ;
- a expressão da corrente que atravessa a espira.

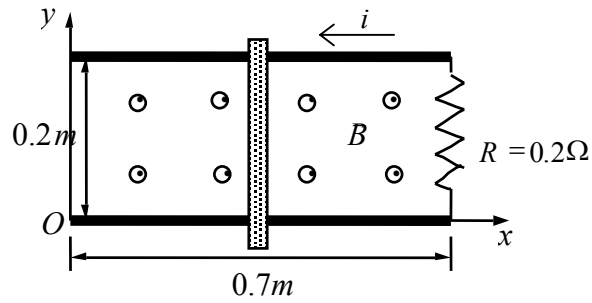


3. Um espira quadrada de lado L desloca-se a velocidade constante v mesmo em frente de uma bobine de secção quadrada de lado L percorrida por uma corrente eléctrica estacionária. O campo magnético criado pela bobine pode ser considerado uniforme, com valor absoluto B e sentido e direcção indicados na figura, em todos os pontos à saída da bobine e nulo em qualquer outro ponto. A figura seguinte mostra a título de exemplo algumas posições da espira no seu movimento.

- Determine a expressão da força electromotriz induzida na espira e esboce um gráfico da variação dessa força electromotriz com o tempo.
- Mostre que a lei de Lenz é também aqui válida, isto é que a força electromotriz induzida tende a criar uma corrente que interactua com o campo magnético de forma a contrariar o movimento da espira.

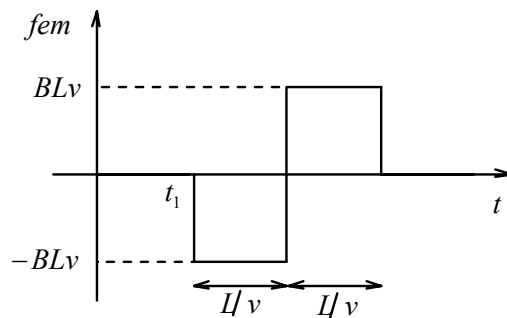


4. Uma barra condutora desliza sem atrito sobre dois sobre o circuito representado na figura. Sabendo que o campo de indução magnética na região varia de acordo com $\vec{B} = 5 \cos(\omega t) \hat{u}_z$ (mT) e que a posição da barra é dada por $x = 0.35[1 - \cos(\omega t)]$ (m), determine a corrente i que atravessa o circuito.



SOLUÇÕES

1. a) $\mu_0 I a \ln[1 + a/(b + vt)] / (2\pi)$; b) $\mu_0 I a^2 v / [2\pi(b + vt)(a + b + vt)]$;
c) sentido horário
2. a) $B_0 a^2 \sin \theta$; b) $-B_0 a^2 \omega \cos \theta / R$
3. a)

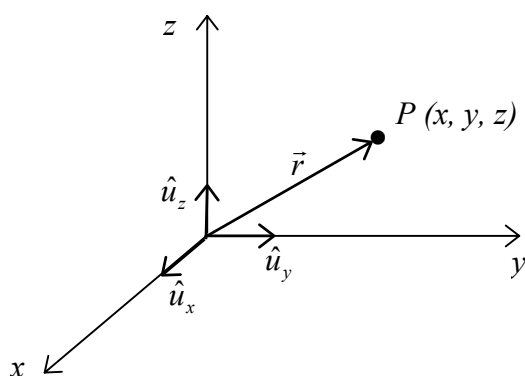


4. $1.75\omega \sin \omega t (1 + 2 \cos \omega t)$ (mA)

APÊNDICE

SISTEMAS DE COORDENADAS

Coordenadas cartesianas (x, y, z)



$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$$

$$d\vec{l} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z$$

$$ds_x = dydz \quad - \text{ elemento de superficie perpendicular a } \hat{u}_x$$

$$ds_y = dx dz$$

$$ds_z = dx dy$$

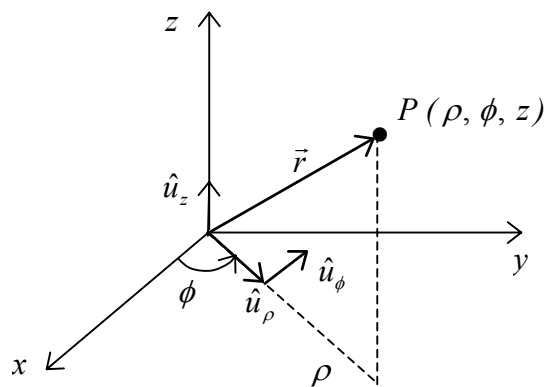
$$dv = dx dy dz$$

$$\text{grad } V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{u}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{u}_z$$

Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)



$$\vec{r} = \rho \hat{u}_\rho + z \hat{u}_z$$

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$\hat{u}_\rho = \cos \phi \hat{u}_x + \sin \phi \hat{u}_y$$

$$\hat{u}_\phi = -\sin \phi \hat{u}_x + \cos \phi \hat{u}_y$$

$$d\vec{l} = d\rho \hat{u}_\rho + \rho d\phi \hat{u}_\phi + dz \hat{u}_z$$

$$ds_\rho = \rho d\phi dz$$

$$ds_\phi = d\rho dz$$

$$ds_z = \rho d\rho d\phi$$

$$dv = \rho d\rho d\phi dz$$

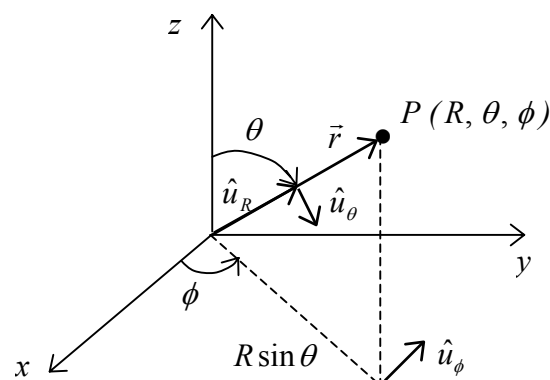
$$\text{grad} V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{u}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{u}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{u}_\rho & \rho \hat{u}_\phi & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{u}_z \end{aligned}$$

NOTA: $0 \leq \phi \leq 2\pi$

Coordenadas esféricas (R, θ, ϕ)



$$\vec{r} = R \hat{u}_R$$

$$x = R \sin \theta \cos \phi$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi$$

$$z = R \cos \theta$$

$$\hat{u}_R = \sin \theta \cos \phi \hat{u}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{u}_y + \cos \theta \hat{u}_z$$

$$\hat{u}_\theta = \cos \theta \cos \phi \hat{u}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{u}_y - \sin \theta \hat{u}_z$$

$$\hat{u}_\phi = -\sin \phi \hat{u}_x + \cos \phi \hat{u}_y$$

$$d\vec{l} = dR \hat{u}_R + R d\theta \hat{u}_\theta + R \sin \theta d\phi \hat{u}_\phi$$

$$ds_R = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$ds_\theta = R \sin \theta dR d\phi$$

$$ds_\phi = R dR d\theta$$

$$dv = R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$$

$$\text{grad } V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial R} \hat{u}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{u}_\phi$$

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{u}_R & R \hat{u}_\theta & R \sin \theta \hat{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & R A_\theta & R \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{u}_R + \\ &+ \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial R} (R A_\phi) \right) \hat{u}_\theta + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} (R A_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right) \hat{u}_\phi \end{aligned}$$

NOTA: $0 \leq \theta \leq \pi$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

TEOREMAS IMPORTANTES

Teorema da divergência

O integral de volume da divergência de um campo vectorial estendido a um dado volume é igual ao fluxo do campo vectorial para fora da superfície que limita esse volume.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dv = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} \, ds$$

onde

- \vec{A} - campo vectorial
- V - volume em causa
- dv - elemento de volume
- S - superfície (fechada) que limita o volume V
- ds - elemento de superfície pertencente a S
- \hat{n} - versor normal a S , que aponta para fora de V (normal exterior)

Teorema de Stokes

O fluxo do rotacional de um campo vectorial através de uma dada superfície aberta é igual à circulação desse campo vectorial ao longo da linha que limita a superfície.

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} \, ds = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

onde

- \vec{A} - campo vectorial
- S - superfície aberta considerada
- ds - elemento de superfície pertencente a S
- \hat{n} - versor normal a S

- C - linha que limita a superfície aberta S
 $d\vec{l}$ - vector infinitesimal tangente em cada ponto a S

Importante:

- sentido de \hat{n} e sentido de circulação (ou seja, sentido de $d\vec{l}$) relacionados pela regra da mão-direita:

