INTRODUÇÃO À MECÂNICA CLÁSSICA

2001/2002

Folhas de Problemas

Paulo Sá, Maria Inês Carvalho e Aníbal Matos

(recolha de problemas de diversas fontes)

Bibliografia principal

A. Bedford, W. Fowler, “Engineering Mechanics – Statics”, Addison-Wesley, 1995.

A. Bedford, W. Fowler, “Engineering Mechanics – Dynamics”, Addison-Wesley, 1996.

1ª Folha de Problemas

1. A força de atrito de escorregamento, F_a, entre dois materiais pode escrever-se, dentro de certa aproximação, na forma
$$F_a = K_1 v + K_2 v^2,$$
onde v é a velocidade relativa dos dois materiais e K_1 e K_2 são coeficientes de atrito que, em unidades CGS, valem $K_1 = 0,1$ e $K_2 = 0,2 \times 10^{-2}$. Determine:

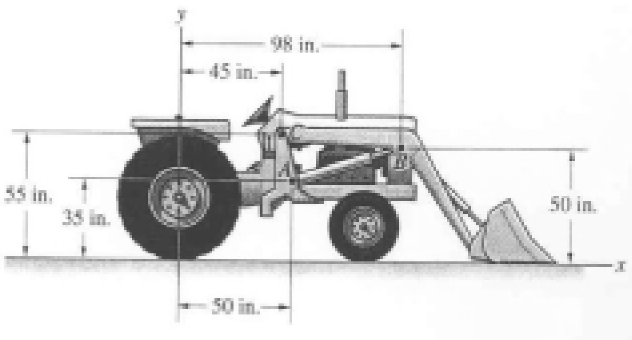
   (a) As dimensões dos coeficientes K_1 e K_2;

   (b) Os respectivos valores no SI.

2. Verifica-se experimentalmente que o período T das oscilações de um pêndulo varia com a aceleração local, g, da gravidade e com o comprimento l, do pêndulo.
Qual é a dependência em g e em l da fórmula que permite calcular o período do pêndulo?

3. Segundo a lei da atracção universal, a força gravítica com que a Terra atrai qualquer corpo de massa m é dada por:
$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{d^2}\hat{u}_r,$$
onde M é a massa da Terra, d a distância entre o centro da Terra e o centro de gravidade do corpo, G é a constante de gravitação universal e $\hat{u}_r$ é um versor que aponta do centro da Terra para o centro de gravidade do corpo.
Mostre que se o corpo estiver colocado na proximidade da superfície da Terra, a uma altura z (muito menor do que o raio da Terra, R), a aceleração da gravidade se pode escrever
$$g \simeq g_o\left(1 - \frac{2z}{R}\right)$$
onde g_o é a aceleração local da gravidade.

4. Na figura está representada uma escavadora e assinalados os pontos A, B e C.



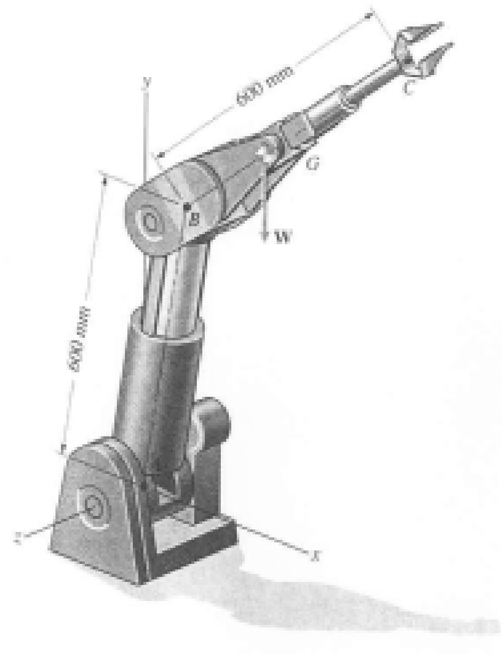
   (a) Escreva as componentes do raio vector de posição do ponto B relativamente ao ponto A.

   (b) Escreva as componentes do raio vector de posição do ponto C relativamente ao ponto B.

(c) Utilize os resultados obtidos para determinar a distância de A a C.

(d) Para levantar a pá da escavadora, o maquinista aumenta o comprimento do cilindro hidráulico AB. A distância entre os pontos B e C mantém-se constante. Se o comprimento AB for de 65 *polegadas*, determine o raio vector de posição de B relativamente a A.

5. Na figura, a força vertical $\vec{W}$ tem uma intensidade de 160 N. Os cossenos directores do raio vector de posição de B em relação a A são $\cos\theta_x = 0,500$, $\cos\theta_y = 0,866$ e $\cos\theta_z = 0$. Os cossenos directores do raio vector de posição de C relativamente a B são $\cos\theta_x = 0,707$, $\cos\theta_y = 0,619$ e $\cos\theta_z = -0,342$. O ponto G está situado a meio da linha que une B a C. Determine o vector $\vec{r}\wedge\vec{W}$, onde $\vec{r}$ é o raio vector de posição de G relativamente a A.

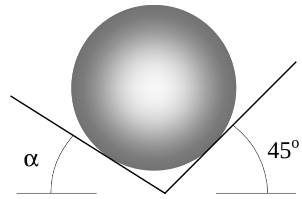


6. O cilindro da figura pesa 220 N e está assente nas duas superfícies lisas inclinadas.

(a) Represente o diagrama de forças que actuam no cilindro.

(b) Se $\alpha = 30^o$, qual é a intensidade das forças exercidas pelas duas superfícies sobre o cilindro?

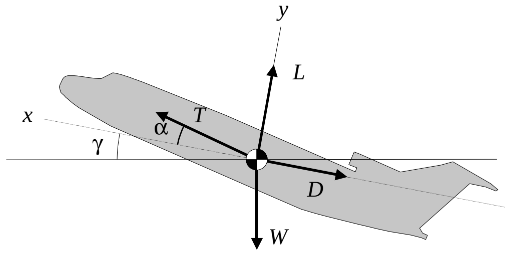
(c) Obtenha, em função do ângulo α, uma expressão para a força exercida sobre o cilindro pela superfície da esquerda, usando dois sistemas de coordenadas diferentes:



i. com o eixo dos yy vertical;

ii. com o eixo dos yy paralelo à superfície da direita.

7. As forças que actuam sobre um avião são o seu peso, $\vec{W}$, a força motora exercida pelos motores, $\vec{T}$, e as forças aerodinâmicas. Na figura, a linha a tracejado indica a direcção seguida pelo avião. As forças aerodinâmicas podem decompor-se numa componente perpendicular, a força da impulsão $\vec{L}$, e numa componente paralela, a força de resistência $\vec{D}$, àquela direcção. O ângulo γ entre a horizontal e a direcção da trajectória é denominado ângulo de voo e α é o ângulo de ataque. O avião pesa $1,3 \times 10^5$ N.



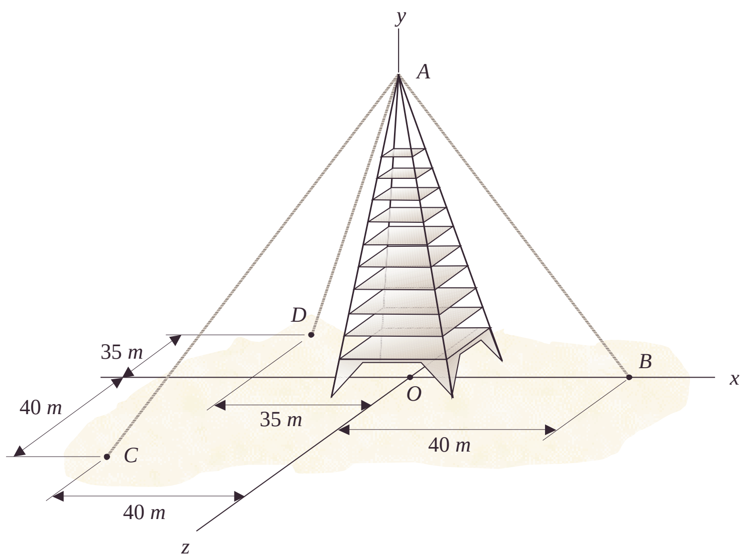
(a) Admitindo que o avião voa a uma altura estável ($\gamma = 0$), o ângulo de ataque $\alpha = 10^o$ e $T = 3,55 \times 10^4 N$, que valores tomam as forças de resistência D e de impulsão L?

(b) Se o ângulo de ataque $\alpha = 0$ e os quocientes $\frac{T}{D} = 2$ e $\frac{L}{D} = 4$, qual é o valor do ângulo γ?

(c) Quando o avião plana em voo estacionário ($T = 0$) com $\frac{L}{D} = 4$, quanto vale γ?

(d) Se na situação da alínea anterior o avião baixar da altitude de 1000 m para zero, que distância horizontal percorrerá?

8. A torre representada na figura tem 70 m de altura. As tensões nos cabos AB, AC e AD são 4 kN, 2 kN e 2 kN, respectivamente.



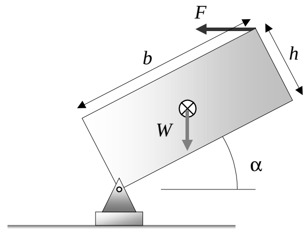
(a) Determine a resultante dos momentos das forças exercidas pelos cabos no ponto A em relação à origem O.

(b) Mantendo em 4 kN a tensão no cabo AB, pretende-se ajustar as tensões nos cabos AC e AD de tal forma que a resultante dos momentos que as tensões nos cabos exercem em A relativamente ao ponto O seja nula. Determine os valores que devem ter as tensões nos outros dois cabos.

2ª Folha de Problemas

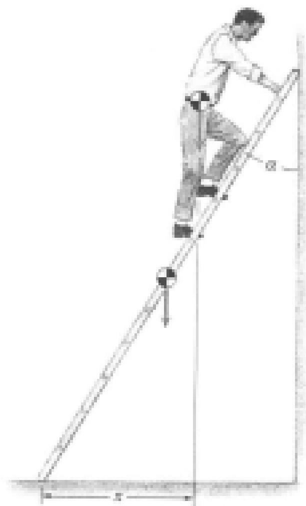
1. A placa rectangular da figura é mantida em equilíbrio pela força horizontal $\vec{F}$. Como a placa é homogénea, o peso $\vec{W}$ actua no seu centro.
   (a) Mostre que F é dada expressão:

$$F = \frac{b\cos\alpha - h\sin\alpha}{2(h\cos\alpha + b\sin\alpha)}W.$$



   (b) Sabendo que $\frac{b}{h} = 4$, determine o ângulo α para o qual a placa estará em equilíbrio para os seguintes 3 valores do quociente $\frac{F}{W}$: 0, 1 e 2.
   (Nota: admita que $0 \leq \alpha \leq 90^o$.)

2. A escada representada na figura tem 4 m de comprimento, uma massa de 18 kg e o seu centro de massa encontra-se no seu centro geométrico. Considere desprezável o atrito entre a escada e a parede.



   (a) A pessoa que sobe a escada tem uma massa de 90 kg. Se $\alpha = 30^o$, qual é o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre a escada e o chão para que a pessoa possa subir até ao cimo da escada?

   (b) Se a pessoa tiver 100 kg de massa e $\mu_e = 0,6$, determine o valor máximo admissível de α para que possa subir a escada até ao topo.

   (c) Admita agora que $\mu_e = 0,6$ e $\alpha = 35^o$ e que um jogador de *rugby* de 140 kg de massa a vai subir. Qual é o valor máximo de x que consegue atingir?

   (d) Nas condições da alínea anterior, qual deverá ser o valor mínimo do coeficiente de atrito estático para que o jogador possa subir toda a escada?

3. Uma partícula move-se ao longo de uma curva cujas equações paramétricas são:

$$x = 3e^{-2t}, \quad y = 4\sin 3t, \quad z = 5\cos 3t,$$

   escritas em unidades SI.

   (a) Escreva os vectores velocidade e aceleração da partícula no instante t.

   (b) Qual é o valor da velocidade da partícula quando $t = 0$ s?

   (c) Determine a aceleração tangencial e a aceleração normal da partícula em função do tempo.

4. Uma partícula move-se com uma aceleração dada por:

$$\vec{a} = 2e^{-t}\,\hat{\imath} + 5\cos t\,\hat{\jmath} - 3\sin t\,\hat{k},$$

escrita em unidades SI. Sabe-se que no instante $t = 0\ s$ a partícula se encontra no ponto $(1, -3, 2)\ m$ e tem velocidade $\vec{v}_o\ (ms^{-1}) = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$. Determine:

   (a) o vector velocidade instantânea da partícula;

   (b) A lei horária do movimento.

5. Prende-se uma pequena bola na extremidade de um elástico que é posto a rodar de tal forma que o raio vector de posição da bola é dado pela equação:

$$\vec{r}(t) = b\cos\omega t\,\hat{i} + 2b\sin\omega t\,\hat{j},$$

onde b e ω são constantes.

   (a) Mostre que a trajectória da bola é uma elipse.

   (b) Determine a velocidade da bola em função do tempo.

   (c) Em que instantes é que é máximo e mínimo o afastamento da bola relativamente à origem? Qual o valor da velocidade da bola nesses instantes?

6. Uma mosca zumbidora move-se seguindo um percurso helicoidal dado pela equação:

$$\vec{r}(t) = b\sin\omega t\,\hat{\imath} + b\cos\omega t\,\hat{\jmath} + ct^2\,\hat{k}.$$

   (a) Mostre que a aceleração da mosca é constante desde que b, ω e c sejam constantes.

   (b) Determine as componentes tangencial e normal da aceleração da mosca em função do tempo.

7. Um abelha deixa o cortiço seguindo um percurso em espiral que em coordenadas polares é dado por:

$$r = be^{kt} \quad \text{e} \quad \theta = ct,$$

onde b, k e c são constantes positivas.

   (a) Mostre que o ângulo entre o vector velocidade e o vector aceleração se mantém constante à medida que a abelha se move.

   (b) Determine as componentes tangencial e normal da aceleração da abelha em função do tempo.

8. O raio vector de posição de uma partícula que descreve uma dada curva em espiral é:

$$\vec{r}(t) = 3\cos 2t\,\hat{\imath} + 3\sin 2t\,\hat{\jmath} + (8t - 4)\,\hat{k}.$$

   (a) Utilizando coordenadas cilíndricas, escreva:

      i. O raio vector posição;

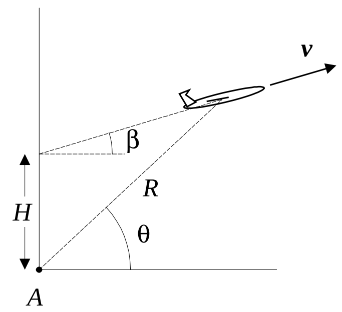
      ii. O vector velocidade da partícula e mostre que a velocidade é constante;

      iii. O vector aceleração da partícula

   (b) Calcule o raio de curvatura desta trajectória.

3ª Folha de Problemas

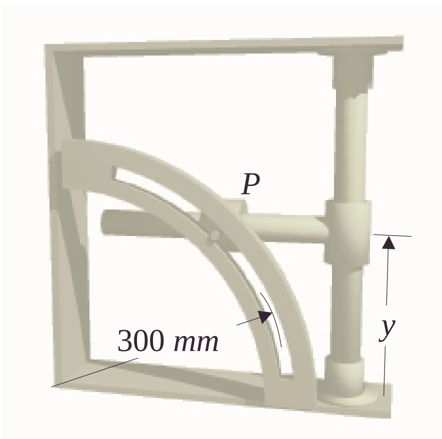
1. Um avião sobe com um ângulo β constante e com uma velocidade v também constante. O avião está a ser seguido do solo por uma estação de radar, situada em A.
Determine as velocidades radiais $\dot{R}$ e angular $\dot{\theta}$ como funções do ângulo θ, por dois processos distintos:



   (a) utilizando uma abordagem trigonométrica;

   (b) utilizando coordenadas polares e uma abordagem cinemática;

2. Considere o sistema representado na figura.



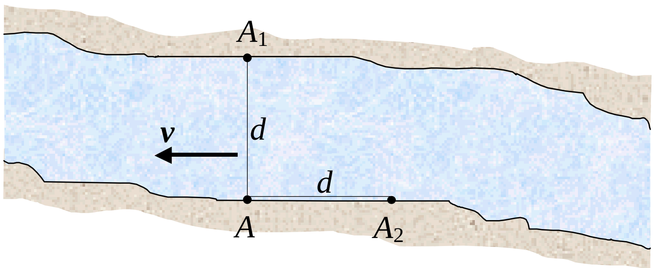
   (a) Se $y = 100\ mm$, $\frac{dy}{dt} = 200\ mm/s$ e $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, quais são os valores da velocidade e da aceleração do ponto P?

   (b) Escreva a velocidade e a aceleração do ponto P à custa das suas componentes normais e tangenciais.

   (c) Suponha que o ponto P se move para cima na calha com velocidade $\vec{v} = 300\hat{u}_t\ (mm/s)$. Quando $y = 150\ mm$, quais são os valores de $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$?

3. A um ciclista que se desloca para norte, numa recta, à velocidade de 16 km/h, o vento parece soprar de oeste. Se ele aumenta a sua velocidade para 30 km/h, parece soprar de noroeste. Determine a velocidade e a direcção do vento.

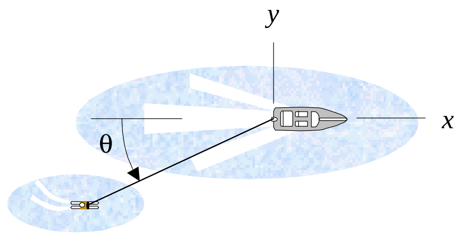
4. Um nadador parte de um ponto A na margem de um rio e desloca-se com velocidade constante, $\vec{v}$, relativamente à água. O rio tem largura d e as suas águas estão animadas de uma corrente com velocidade $\vec{V}$ $(V < v)$ relativamente às margens.



   (a) O nadador efectua os trajectos de ida e volta AA_1A num tempo t_1 e AA_2A num tempo t_2. Determine t_1 e t_2 e indique qual dos trajectos leva menos tempo a percorrer.

(b) Sabendo que $t_2 = 2t_1$, determine a direcção da velocidade $\vec{v}$ do nadador que se desloca contra a corrente para chegar a A, e o tempo t_0 que o nadador precisaria para percorrer o trajecto de ida e volta ($2d$) num lago ($V = 0$).

5. A velocidade da lancha relativamente a um sistema de coordenadas fixo à Terra é $40\hat{\imath}$ (SI). O comprimento da corda esticada onde se agarra o esquiador é de 50 m. O ângulo θ é de 30^o e aumenta a uma taxa constante de $10^o s^{-1}$.

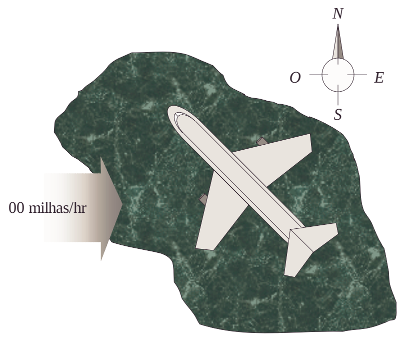


Determine:

(a) a velocidade e a aceleração do esquiador relativamente à lancha.

(b) a velocidade e a aceleração do esquiador relativamente à Terra.

6. Um avião atravessa uma corrente de ar que se desloca para este com uma velocidade de 100 milhas/hora. A velocidade do avião relativamente à massa de ar é de 500 milhas/hora em direcção a NW.



(a) Qual é o valor e o sentido da velocidade do avião relativamente à Terra?

(b) Se o piloto pretender voar para uma cidade que se encontra a NW da sua posição actual, em que direcção deve apontar o avião e qual será o valor da sua velocidade relativamente à Terra?

7. Um projéctil é lançado verticalmente. Suponha que a resistência do ar ao movimento do projéctil varia com o quadrado da velocidade deste.

(a) Mostre que a variação da velocidade do projéctil com a altura é dada pelas equações:

$$v^2(z) = Ae^{-2kz} - \frac{g}{k} \qquad \text{(movimento ascendente)}$$

e

$$v^2(z) = \frac{g}{k} - Be^{2kz} \qquad \text{(movimento descendente)}$$

onde A e B são constantes de integração, g é a aceleração da gravidade e $k = \frac{c_2}{m}$, onde c_2 é a constante de atrito e m é a massa do projéctil.

Nota: Considera-se que z é positivo para cima e que a aceleração da gravidade é constante.

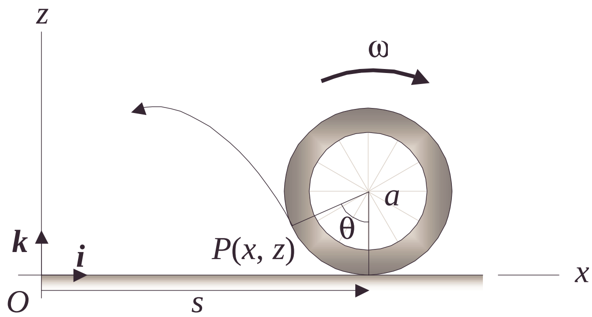
(b) Mostre que quando o projéctil atinge o solo a sua velocidade é dada por

$$\frac{v_o v_L}{(v_o^2 + v_L^2)^{\frac{1}{2}}} \,,$$

onde v_o é a velocidade inicial com que foi lançado e v_L é a velocidade limite.

8. Um partícula de lama é lançada da periferia de um pneu de raio a, de um automóvel que se desloca com velocidade v. Se $v^2 \geq ga$, mostre que a lama não pode ser lançada a uma altura superior a

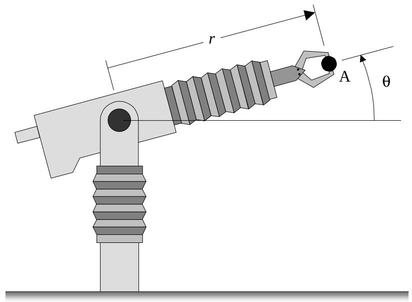
$$a + \frac{v^2}{2g} + \frac{ga^2}{2v_o^2} \,.$$



4ª Folha de Problemas

1. O robot esquematizado na figura ao lado, está programado para que a trajectória da partícula A, de massa m, seja descrita pelas equações:

$$r = 1 - 0,5\cos 2\pi t \quad (m)$$
$$\theta = 0,5 - 0,2\sin[2\pi(t - 0,1)] \quad (rad).$$

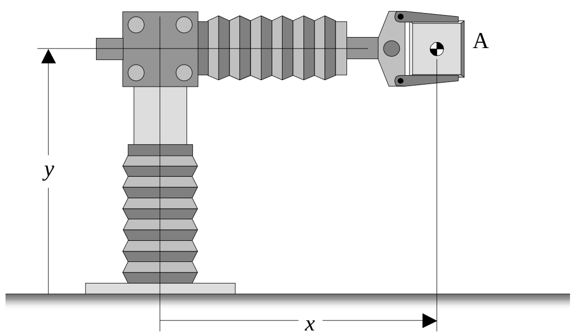


   (a) Determine os valores de r e de θ para os quais a velocidade de A é máxima.

   (b) Determine os valores de r e de θ para os quais a aceleração de A é máxima.

   (c) No instante $t = 2s$, determine as componentes radial e transversal da força que as garras do robot exercem sobre a partícula A.

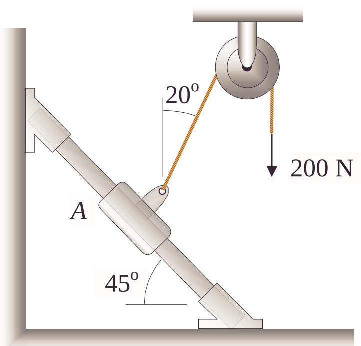
2. O manipulador do robot está programado para que $x = 4 + t^2$ (cm), $y = \frac{1}{4}x^2$ (cm) e $z = 0$, durante o intervalo entre $t = 0$ e $t = 4$ s.



   (a) Determine, no instante $t = 2$ s, as componentes x e y da força total exercida pelas garras do manipulador sobre o objecto A de 45 N de peso.

   (b) Se o manipulador estiver parado em $t = 0$ e for programado para que $a_x = 2 - 0,4v_x$ (cm/s^2), $a_y = 1 - 0,2v_y$ (cm/s^2) e $a_z = 0$ durante o intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 4$ s, quais são as componentes x e y da força total exercida pela garra sobre A no instante $t = 2$ s?

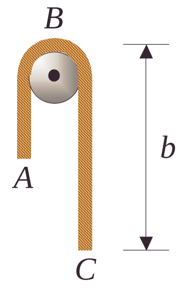
3. A corrediça A representada na figura tem 8 kg de massa.



   (a) Qual é a sua aceleração relativamente à barra lisa onde se move?

   (b) Determine a aceleração de A relativamente à barra se entre esta e a corrediça o coeficiente de atrito cinético for $\mu_c = 0,1$.

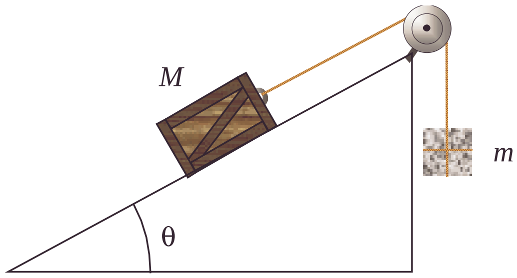
4. Uma corda uniforme de massa M e comprimento L passa por um pino sem atrito e de raio muito pequeno. No início do movimento, $\overline{BC} = b$. Mostre que a aceleração e a velocidade da corda quando $\overline{BC} = \frac{2L}{3}$, são:



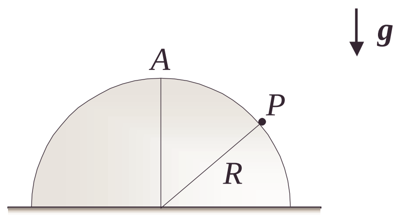
$$a = \frac{g}{3} \qquad \text{e} \qquad v = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(-\frac{2}{9}L^2 + bL - b^2\right)}\ ,$$

respectivamente.

5. Dois blocos de massas m e M estão ligados por um fio inextensível que passa numa roldana sem atrito. A massa m está suspensa verticalmente e massa M move-se sobre um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal (ver figura). Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco de massa M e o plano inclinado é μ_c, calcule o ângulo θ para que o bloco se mova com velocidade uniforme. Discuta o caso especial em que $m = M$. Neste caso, se $\mu_c = 0,3$, qual deve ser o valor do ângulo θ?



6. Uma partícula P de massa m repousa, inicialmente, no topo A de uma calote esférica fixa, de raio R. A partícula é deslocada ligeiramente e, assim, desliza sem atrito sobre a esfera até cair.



(a) Mostre que as componentes normal e tangencial da força que actua na partícula são dadas por

$$-mR\dot{\theta}^2 = N - mg\sin\theta$$
$$mR\ddot{\theta} = -mg\cos\theta\ ,$$

respectivamente, onde g é a aceleração da gravidade e N é o módulo da reacção da superfície da esfera sobre a partícula.

(b) Por integração destas equações, mostre que a normal à esfera é

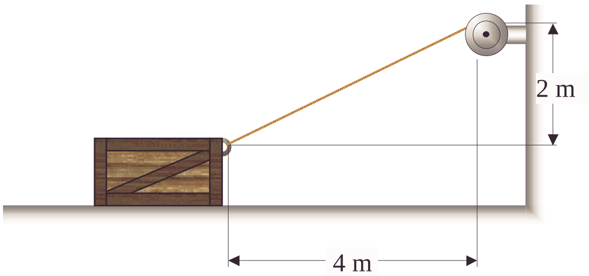
$$N = mg(3\sin\theta - 2)\ .$$

(c) Em que posição deixará a partícula de estar em contacto com a esfera?

(d) Qual será a sua velocidade, em módulo, nessa posição?

(e) Recorrendo ao princípio da conservação da energia, determine a posição em que a partícula deixa a esfera e calcule o módulo da sua velocidade.

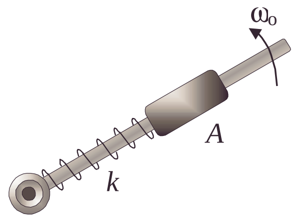
7. Um caixote é arrastado pelo chão pela força exercida por um guincho que vai enrolando o cabo com uma taxa constante de $0,2\ m/s$. A massa do caixote é de $120\ kg$ e o coeficiente de atrito cinético entre o caixote e o chão é $\mu_c = 0,24$.



(a) No instante representado na figura, qual é a tensão no cabo?

(b) Desprezando a aceleração do caixote, obtenha uma solução "quase-estática" para a tensão e compare o resultado com o da alínea a).

8. A barra representada na figura roda no plano horizontal com uma velocidade angular constante, ω_o. O comprimento livre da mola linear é r_o. A corrediça A tem massa m e é largada da posição $r = r_o$ sem velocidade radial.
Determine:



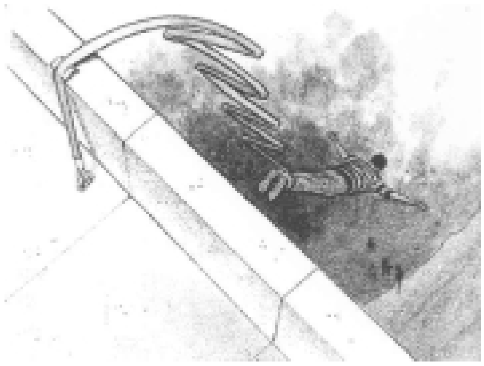
(a) a velocidade radial da corrediça como função de r;

(b) a força horizontal exercida sobre a corrediça pela barra, igualmente em função de r;

(c) a máxima distância radial atingida pela corrediça.

5ª Folha de Problemas

1. Um estudante de 70 kg de massa salta no abismo do cimo de uma ponte com altura $h = 40\ m$. A corda que o agarra pelas pernas tem um comprimento livre de 18 m e uma constante de elasticidade $K = 205\ N/m$.



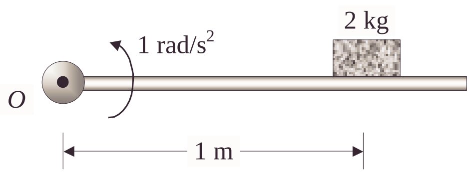
   (a) A que altura acima do rio se encontra o estudante quando a corda o faz parar?

   (b) Qual é o valor máximo da força que a corda exerce sobre o estudante?

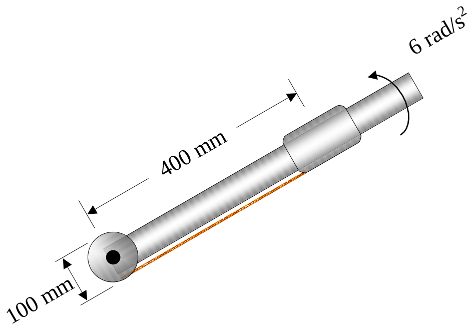
   (c) Qual é o valor da velocidade máxima que o estudante saltador atinge?

   (d) A que altura acima do rio é que é atingida essa velocidade máxima?

2. Uma massa $m = 2\ kg$ está colocada sobre uma barra horizontal plana, inicialmente em repouso. A barra é posta a rodar no plano vertical em torno do ponto O com uma aceleração angular constante $\alpha = 1\ rad/s^2$. Verifica-se que a massa começa a deslizar relativamente à barra quando esta faz um ângulo de 30^o com a horizontal. Qual é o valor do coeficiente de atrito estático entre a massa e barra? A massa desliza em direcção a O ou em sentido contrário?



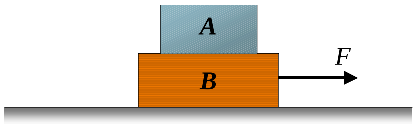
3. À medida que a barra representada na figura roda no plano horizontal, o cabo que prende a corrediça A vai sendo enrolado no cilindro fixo puxando assim a corrediça para baixo. No instante $t = 0$, a barra está em repouso na posição mostrada e começa a rodar com uma aceleração angular constante de 6 rad/s^2. A corrediça tem um 1 kg de massa.



   (a) Supondo que a corrediça desliza sem atrito com a barra, determine a tensão no cabo quando $t = 1\ s$.

   (b) Admitindo agora que o coeficiente de atrito cinético entre a corrediça e a barra é $\mu_c = 0,2$, qual é a tensão no cabo no instante $t = 1\ s$?

4. Um bloco (A) de massa m está colocado sobre um tijolo (B) de massa M, que se encontra num plano horizontal sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre as superfícies do bloco e do tijolo é f. O tijolo está sujeito à acção de uma força horizontal com a forma $F = ct$, onde c é uma constante.

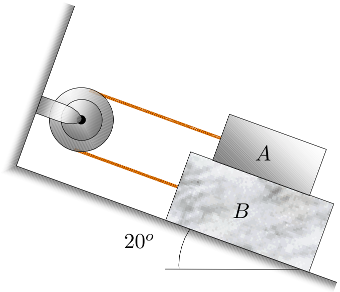


Determine:

(a) O instante t_o em que o tijolo começa a deslizar sobre o bloco;

(b) As acelerações do bloco e do tijolo no decorrer dos seus movimentos.

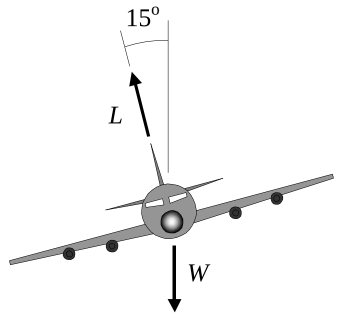
5. As massas dos blocos A e B são, respectivamente, 10 kg e 40 kg. O coeficiente de atrito cinético entre todas as superfícies é $\mu_c = 0,11$.



(a) Qual é a aceleração de B ao descer o plano inclinado?

(b) Calcule a tensão no cabo.

6. Um avião pesa $W = 9 \times 10^5$ N e, a uma dada altitude, executa uma volta com uma velocidade constante de 180 m/s. O ângulo de rotação ("bank") é de 15^o.



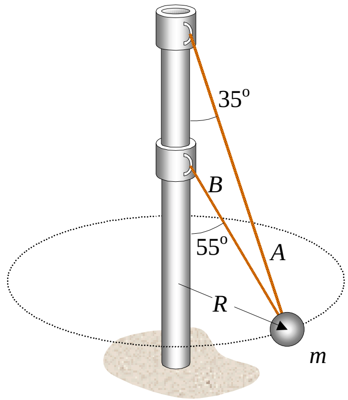
(a) Determine o valor da força de impulsão, L.

(b) Qual é o raio de curvatura da trajectória do avião?

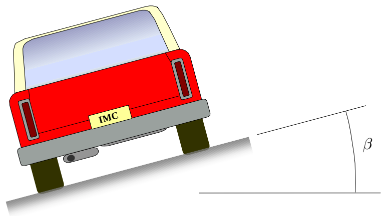
7. A figura mostra uma massa de 10 kg que roda num plano horizontal em torno da barra vertical, à qual está presa pelos cabos A e B, segundo uma trajectória circular de raio $R = 1$ m.

(a) Se a sua velocidade for de 3 m/s, quais são os valores das tensões nos cabos A e B?

(b) Determine a gama de valores da velocidade v para a qual a massa se mantém na trajectória circular descrita.



8. A rampa de acesso a uma auto-estrada é circular com raio R. O seu pavimento tem uma inclinação segundo o ângulo β, tal como indicado na figura.



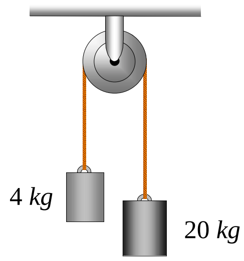
Mostre que a máxima velocidade constante a que um automóvel se pode deslocar nessa rampa sem perder o contacto com o pavimento é:

$$v = \sqrt{gR\left(\frac{\sin\beta + \mu_e \cos\beta}{\cos\beta - \mu_e \sin\beta}\right)}\,,$$

onde μ_e é o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o asfalto.

6ª Folha de Problemas

1. O sistema representado na figura é largado do repouso.

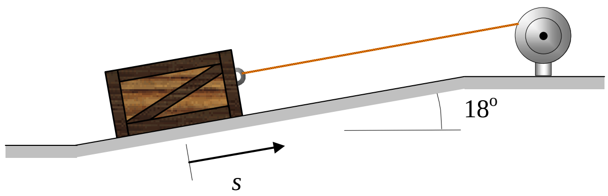


   (a) Aplique o teorema trabalho-energia cinética a cada massa para calcular a velocidade das massas quando se deslocam 30 cm.

   (b) Qual é a tensão na corda durante o movimento do sistema?

   (c) Resolva a alínea a) aplicando o teorema trabalho-energia cinética ao sistema formado pelas duas massas, a corda e a roldana.

2. Um guincho puxa um caixote com uma massa de 160 kg ao longo de uma rampa. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o caixote e a rampa são $\mu_e = 0,3$ e $\mu_c = 0,28$, respectivamente.

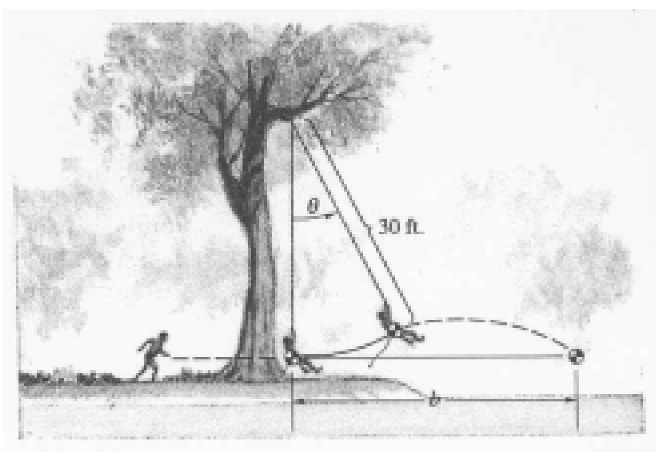


   (a) Qual é o valor da tensão T_o que o guincho deve exercer para que o caixote inicie o seu movimento ascendente ao longo da rampa?

   (b) Se a tensão se mantiver com o valor T_o após o caixote ter começado a deslizar, calcule o trabalho total realizado sobre o caixote quando ele se desloca de 3 m. Qual é então a sua velocidade?

   (c) Se após o início do movimento do caixote o guincho exercer uma tensão $T = T_o(1 + 0,1s)$, qual é o trabalho total realizado sobre o caixote quando ele se desloca de 3 m? Determine a sua velocidade.

3. Um estudante que pesa 800 N corre com uma velocidade de 4,5 m/s, agarra uma corda e balança sobre um lago.



(a) Sabendo que larga a corda quando a sua velocidade é nula, qual é o ângulo θ nesse instante?

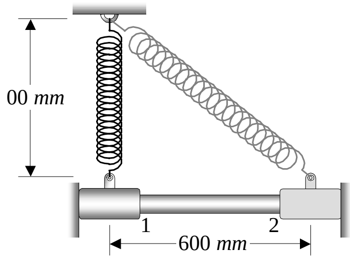
(b) Determine a tensão na corda imediatamente antes de o estudante a largar.

(c) Qual é o valor máximo da tensão na corda?

(d) Se o estudante largar a corda quando $\theta = 25^o$, qual a altura máxima que atinge relativamente à sua posição quando agarra a corda?

(e) Determine o valor do ângulo θ para o qual o estudante deve largar a corda de forma a maximizar a distância horizontal b. Quanto vale b?

4. Quando a corrediça com uma massa de 1 kg se encontra na posição 1, a tensão na mola é de 50 N e o comprimento da mola é de 260 mm.



(a) Se a corrediça for levada para a posição 2 e largada do repouso, qual é a sua velocidade quando retorna a 1?

(b) Suponha que as tensões na mola, nas posições 1 e 2 são, respectivamente, de 100 N e 400 N.

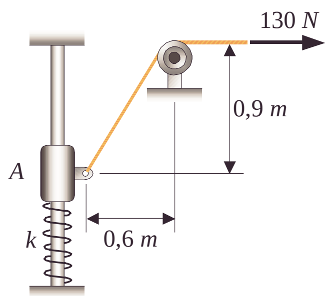
i. Qual é a constante elástica da mola, k?

ii. Se à corrediça for dada uma velocidade de 15 m/s quando se encontra em 1, determine com que velocidade chega à posição 2.

5. Na posição mostrada na figura, o sistema esquematizado encontra-se em repouso. A corrediça A pesa 55 N e a constante elástica da mola é de 30 N/m. Num dado instante é aplicada ao cabo uma força constante de 130 N.

(a) Qual é a velocidade da corrediça quando sobe $0,5$ m?

(b) Determine a altura atingida por A relativamente à sua posição inicial.



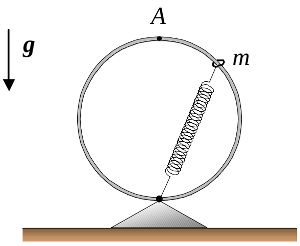
6. No modelo do potencial $6-12$ de Lennard-Jones, a energia potencial de interacção entre duas moléculas de um gás pode ser escrita na forma aproximada:

$$U(r) = -U_o \left[2\left(\frac{r_o}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^{12} \right] ,$$

onde U_o e r_o são constantes positivas e r é a distância entre as duas moléculas.

Esboce o gráfico de $U(r)$ e discuta os movimentos possíveis das duas moléculas para diferentes valores da sua energia total.

7. Um anel de massa m desliza sem atrito sobre um aro vertical de raio R. Presa ao anel e à parte inferior do aro está uma mola de constante elástica K e comprimento natural l_o.



(a) Trace um gráfico da energia potencial do anel em função do comprimento l da mola numa dada posição do anel.

(b) Supondo que há conservação da energia mecânica, analise o movimento do anel em função da sua velocidade e de possíveis zonas do aro interditas ao movimento.

(c) Suponha que o anel, inicialmente colocado no topo A do aro, é deslocado ligeiramente dessa posição de forma a que a sua velocidade inicial possa ser considerada nula. Mostre que a velocidade do anel em qualquer ponto do seu movimento é dada por

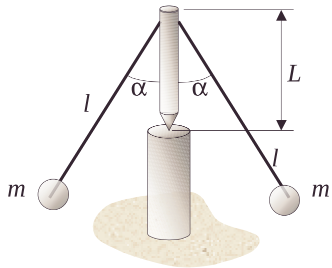
$$v(\theta) = \sqrt{4R\left[\left(g + \frac{kR}{m}\right)\cos^2\theta - \frac{kl_o}{m}(1-\sin\theta)\right]}\,,$$

onde θ é o ângulo entre a horizontal e a direcção instantânea da mola.

8. Um "sempre-em-pé" consiste num corpo de massa desprezável ligado através de dois braços, também de massa desprezável, a duas pequenas bolas, de massa m cada uma, tal como é mostrado na figura. Este brinquedo é extraordinariamente estável — pode ser balanceado à vontade porque o risco de tombar é pequeno.

(a) Estudando a energia potencial do brinquedo, analise a estabilidade do seu comportamento.

(b) Supondo que ele é balanceado de um lado para o outro, qual é a frequência angular das suas oscilações de pequena amplitude?



7ª Folha de Problemas

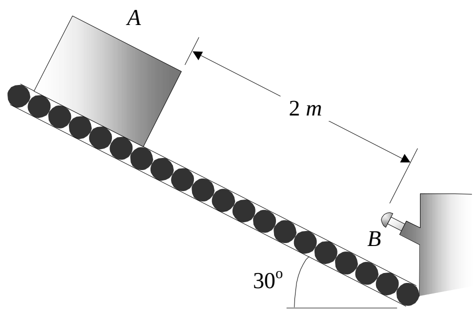
1. Um pequeno automóvel de massa m e velocidade inicial v_o colide frontalmente, numa estrada gelada, com um camião de massa $4m$ que se dirige em direcção ao automóvel com uma velocidade inicial $\frac{v_o}{2}$. Se o coeficiente de restituição da colisão for de $\frac{1}{4}$, determine o sentido e a velocidade de cada veículo logo após a colisão.

2. Dois automóveis munidos com bons pára-choques colidem frontalmente com velocidades $v_A = v_B = 25\ km/h$. As suas massas são $M_A = 1250\ kg$ e $M_B = 2000\ kg$. O coeficiente de restituição é $e = 0.,2$.

   (a) Determine a velocidade dos automóveis após a colisão.

   (b) Admitindo que o tempo de colisão é de $0,1\ s$, qual é o valor da aceleração média a que os ocupantes dos dois automóveis ficam sujeitos?

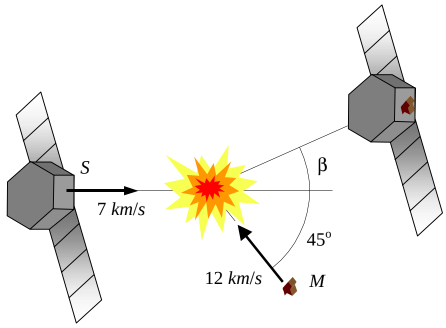
3. Numa linha de montagem, uma pacote de $20\ kg$ parte do repouso e desloca-se sobre um plano inclinado até atingir o dispositivo hidráulico B. Suponha que pretende projectar este dispositivo de forma a que exerça uma força, com intensidade F, sobre o pacote para o imobilizar.



   (a) Se a força tiver uma intensidade constante e for necessário que o pacote fique em repouso ao fim de $2\ s$, que valor deve ter F?

   (b) Se o dispositivo hidráulico exercer uma força com intensidade $F = 540(1 + 0,4t)\ (N)$ sobre o pacote, onde t é medido em segundos a partir do instante do primeiro contacto, que tempo é necessário para que o pacote se imobilize?

4. Um satélite que se desloca com uma velocidade de $7\ km/s$ é atingido por um meteoro com $1\ kg$ de massa e animado de uma velocidade de $12\ km/s$. Depois do impacto, o meteoro fica agarrado ao satélite.



Determine:

(a) o valor da velocidade do centro de massa do sistema satélite+meteoro depois do choque;

(b) o valor do ângulo β entre o percurso seguido pelo centro de massa do sistema e a trajectória inicial do satélite.

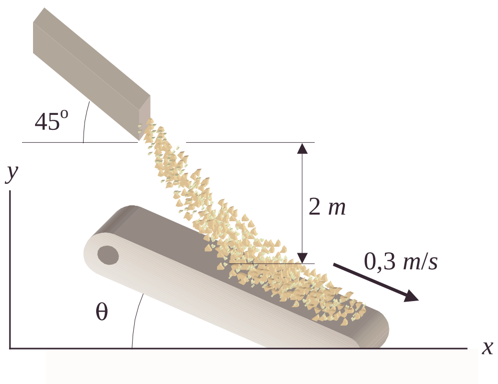
5. Um partícula de mass m_1 colide elasticamente com uma partícula alvo, de massa m_2, que está inicialmente em repouso. Se a colisão for frontal, mostre que a partícula incidente perde uma fracção da sua energia cinética inicial igual a $\frac{4\mu}{m}$, onde μ é a massa reduzida do sistema e $m = m_1 + m_2$.

6. Um protão de massa m_p que se desloca com velocidade $\vec{v}_o$ colide com um átomo de hélio, de massa $4m_p$, que está inicialmente em repouso. A direcção em que o protão deixa o ponto de impacto faz um ângulo de 45^o com a sua direcção inicial de movimento.

   (a) Supondo que a colisão é perfeitamente elástica, quais são as velocidades finais de cada uma das partículas? Em que direcção se move o átomo de hélio?

   (b) Sabendo que a colisão é inelástica e que tem um Q igual a $\frac{1}{4}$ da energia inicial do protão, determine as velocidades finais de cada uma das partículas e direcção em que se move o átomo de hélio.

7. Um fluxo de 45 kg/s de gravilha deixa o cano esquematizado na figura, com uma velocidade de 2 m/s, indo cair num tapete rolante que se move com uma velocidade de 0,3 m/s.

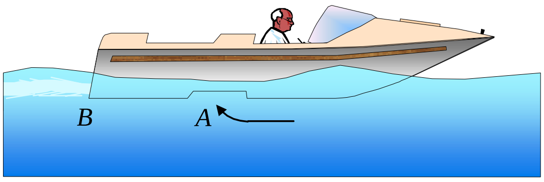


Determine as componentes da força exercida sobre o tapete rolante pela gravilha quando

   (a) $\theta = 0^o$;

   (b) $\theta = 30^o$.

8. A água entra no sistema de propulsão de uma lancha no ponto A e deixa-o em B a 25 km/h relativamente à lancha. Admita que a velocidade da água ao entrar não tem componente horizontal relativamente à restante massa de água. O fluxo mássico de água no motor é de 35 kg/s. A força de resistência hidrodinâmica ao movimento da lancha é de $6v$ (SI), onde v é a velocidade da lancha.

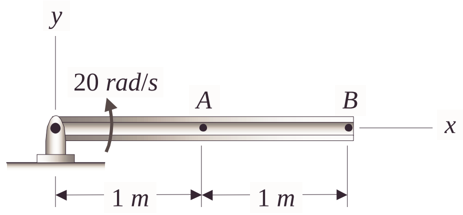


(a) Qual é a velocidade máxima atingida pela lancha?

(b) A lancha tem uma massa de 1300 kg e parte do repouso em $t = 0$. Determine a velocidade da lancha quando $t = 20$ s.

8ª Folha de Problemas

1. Na figura está representada uma barra, com um comprimento de 2 m, que pode rodar em torno do ponto O com uma velocidade angular de 20 rad/s.



   (a) Escreva o vector velocidade angular da barra.

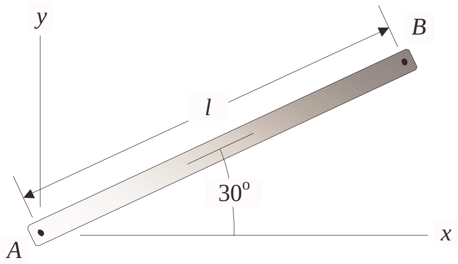
   (b) Determine a velocidade do ponto B relativamente ao ponto O.

   (c) Determine a velocidade do ponto A relativamente ao ponto B.

2. A barra esquematizada na figura executa um movimento bidimensional no plano xy. O ponto A tem uma velocidade $\vec{v}_A = v_A\hat{\imath}$. A componente segundo x do vector velocidade do ponto B é v.

   (a) Determine o vector velocidade angular da barra.

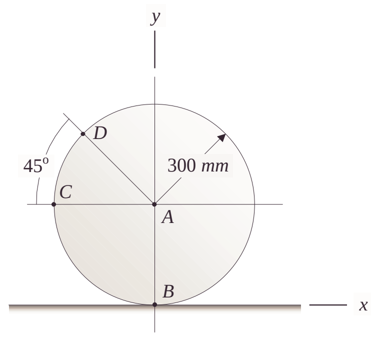
   (b) Escreva o vector velocidade do ponto B.



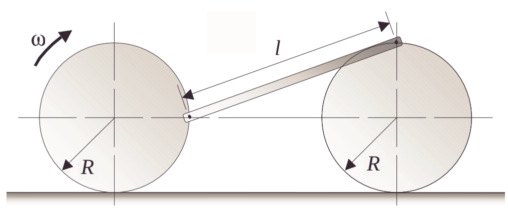
3. O disco indicado na figura rola numa superfície plana. O ponto A move-se para a direita com uma velocidade v.

   (a) Escreva o vector velocidade angular do disco.

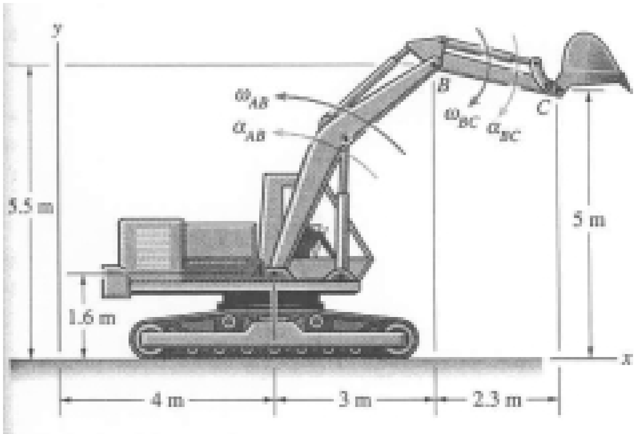
   (b) Determine os vectores velocidade dos pontos B, C, e D.



4. Os dois discos representados na figura rolam sobre uma superfície plana. A velocidade angular do disco da esquerda é ω e tem o sentido dos ponteiros do relógio. Determine o vector velocidade angular do disco da direita.



5. Considere a escavadora esquematizada na figura.



(a) Se $\omega_{AB} = 2\ rad/s$ e $\omega_{BC} = 4\ rad/s$, qual é a velocidade do ponto C, onde é feita a ligação da pá da escavadora.

(b) Se $\omega_{AB} = 2\ rad/s$ qual deve ser o valor da velocidade angular, no sentido dos ponteiros do relógio, ω_{BC}, que dá origem a uma componente vertical nula da velocidade do ponto C? Qual é, nessa situação, a velocidade do ponto C?

(c) Se o vector velocidade do ponto C for

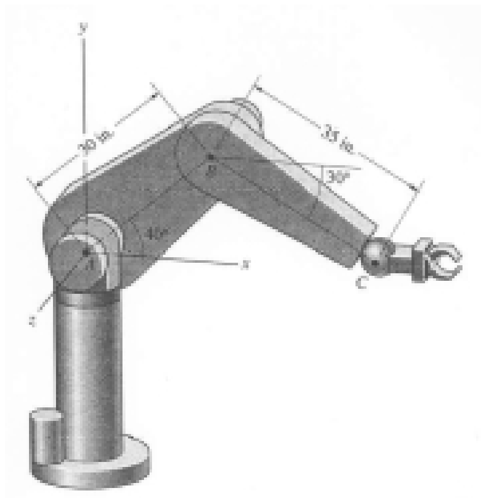
$$\vec{v}_C = -6\hat{\imath} - 4\hat{\jmath},$$

quais são os valores das velocidades angulares ω_{AB} e ω_{BC}?

6. Os pontos B e C do robot mostrado na figura estão situados no plano xy do referencial indicado.

(a) Sabendo que os vectores velocidade angular dos braços AB e BC são, respectivamente, $\vec{\omega}_{AB} = -0,2\hat{k}\ (rad/s)$ e $\vec{\omega}_{BC} = 0,4\hat{k}\ (rad/s)$, determine a velocidade do ponto C.

(b) Se a velocidade do ponto C for $\vec{v}_C = 10\hat{\jmath}\ (m/s)$ determine os vectores velocidade angular dos braços AB e BC.



7. Os pontos A e B da barra de 1 m de comprimento esquematizada na figura deslizam pelas superfícies planas vertical e horizontal, respectivamente. A velocidade do ponto B é $2\hat{\imath}\ (m/s)$.

(a) Escreva o vector velocidade angular da barra.

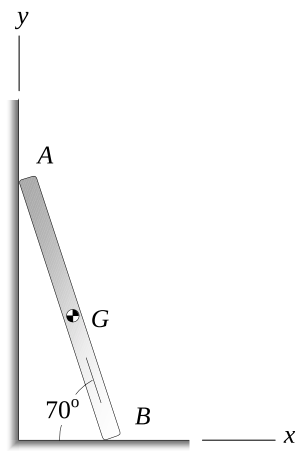
(b) Qual é a expressão do vector velocidade do ponto A?

(c) Encontre o vector velocidade do ponto médio, G, da barra.

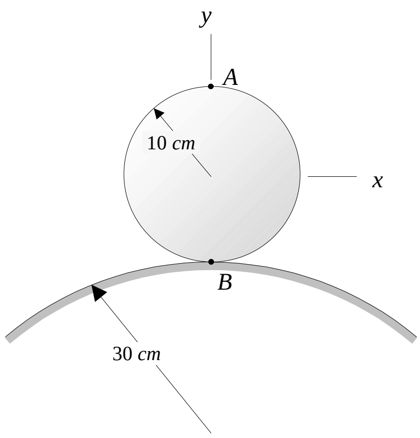
(d) Determine as coordenadas do centro instantâneo de rotação.

(e) Utilize o centro instantâneo para determinar a velocidade do ponto A.

(f) Utilize o centro instantâneo para determinar a velocidade do ponto G.

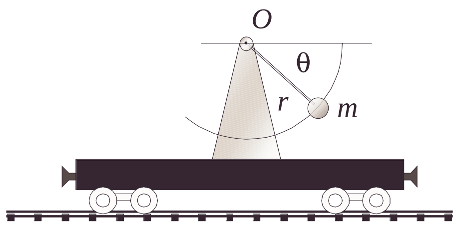


8. Na figura está esquematizado um disco que roda no sentido dos ponteiros do relógio sobre uma superfície circular com uma velocidade angular constante de 1 rad/s. Determine os vectores aceleração dos pontos A e B.

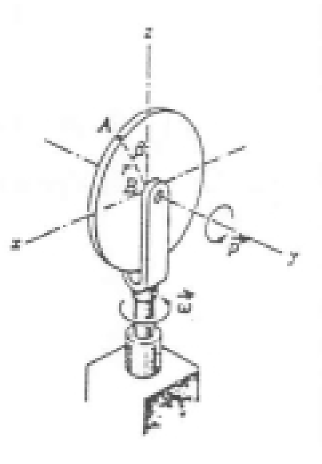


9ª Folha de Problemas

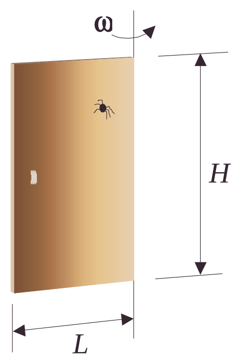
1. Um pêndulo simples de massa m e comprimento r está montado num vagão plano que se move com uma aceleração horizontal constante, a_o. Se o pêndulo for largado do repouso relativamente ao vagão na posição $\theta = 0$, determine a expressão da tensão, T, na barra, muito leve, de suporte para qualquer valor de θ. Particularize para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \pi$.



2. Um disco circular de raio r roda com uma velocidade angular constante, $\dot{\beta} = p$, segundo o eixo dos yy, conforme indicado na figura. Simultaneamente, todo o sistema roda em torno do seu suporte (eixo dos zz) com velocidade angular ω constante. Determine a aceleração de um ponto, A, da periferia do disco em função do ângulo β (contado a partir da vertical) e particularize a aceleração para os casos $\beta = 0^o$ e $\beta = 90^o$.
   [Nota: Os eixos x, y, z representados estão fixos ao suporte.]



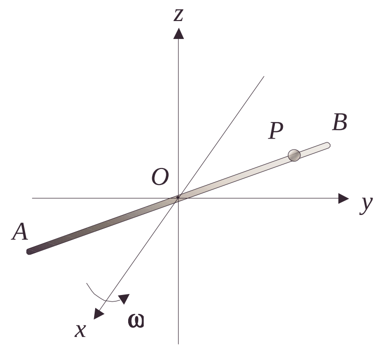
3. Uma aranha de massa m desloca-se sem atrito sobre a superfície de uma porta que roda com velocidade angular constante, ω, como mostra a figura ao lado.
   (a) Escreva as equações do movimento da aranha no referencial da porta.
   (b) Sabendo que a aranha inicia o seu movimento no meio da porta, sem velocidade inicial, obtenha as equações que descrevem a trajectória da aranha sobre a porta.



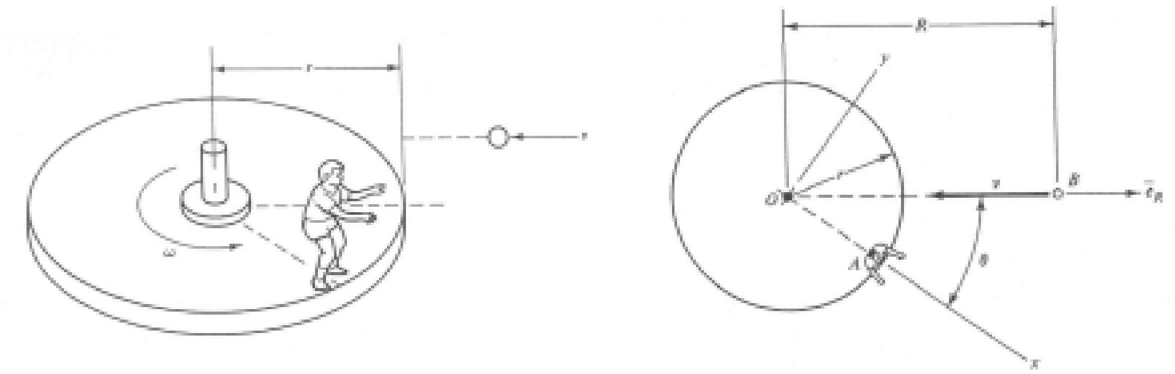
4. Uma haste AOB gira no plano vertical (o plano yz) em torno de um eixo horizontal (o eixo dos xx) passando por O e perpendicular àquele plano, com uma velocidade angular, ω, constante — ver figura.

(a) Admitindo que não existem forças de atrito, determine o movimento de uma partícula, P, de massa m que é constrangida a mover-se ao longo da haste.

(b) Mostre que, sob condições favoráveis, a partícula pode oscilar ao longo da haste com movimento harmónico simples (M.H.S.). Determine estas condições. O que acontece à partícula se essas condições não são satisfeitas?



5. Um criança que se encontra na periferia de um carrocel que roda com velocidade angular ω constante em torno da vertical (ver figura), tenta agarrar uma bola que se aproxima horizontalmente e segundo uma direcção radial com velocidade v. Determine a velocidade e a aceleração da bola tal como vistas pela criança.

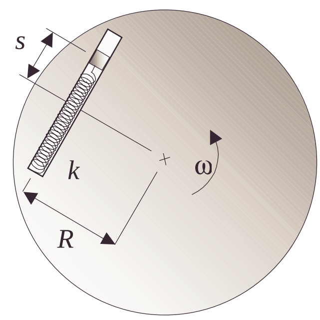


6. Um regulador de velocidades de um disco consiste num bloco de massa m que desliza sobre uma calha e se encontra preso por uma mola a um suporte. O comprimento natural da mola, de constante elástica k, é tal que o bloco se encontra em $s = 0$ quando não há rotação. O sistema roda em torno do eixo vertical com velocidade angular ω.

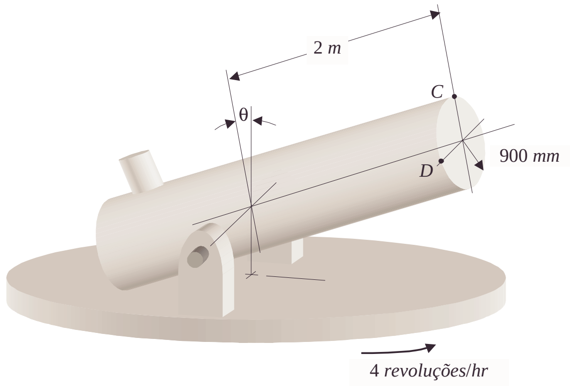
(a) Derive a equação diferencial que governa s como função do tempo quando ω é uma função arbitrária de t.

(b) Obtenha uma expressão para a força normal exercida pelas paredes da calha sobre o bloco em função de ω e de s.

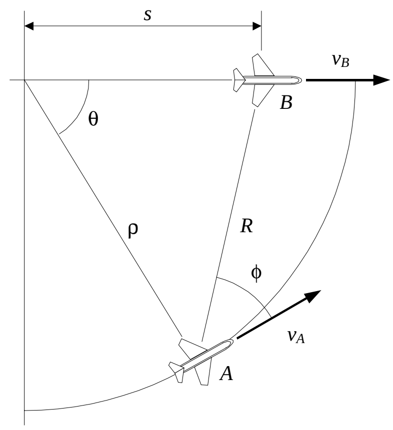
(c) Determine a frequência natural de oscilação da massa quando ω é constante e explique como é que o resultado pode ser utilizado para monitorizar a rotação do disco quando ω excede um valor crítico.



7. O telescópio representado na figura roda em torno do eixo vertical com uma velocidade de 4 *revoluções/hora* enquanto o ângulo θ oscila como $\theta = \frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{7200}\right)$ *rad*, onde t é medido em segundos. Determinar a velocidade e a aceleração dos pontos C e D como função do tempo.

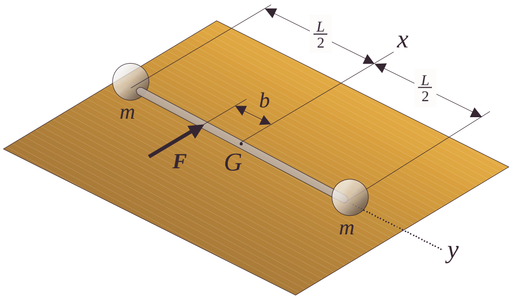


8. O avião B desloca-se para ocidente com velocidade v_B constante, enquanto que o avião A executa uma volta circular com raio constante e velocidade v_A constante. Num dado instante, o ângulo θ e a distância s que localizam os dois aviões são conhecidos. O equipamento de radar do avião A pode medir a distância R que separa os aviões, o ângulo φ, assim como as variações temporais desse dois parâmetros. Obtenha as expressões de $\dot{R}$, $\ddot{R}$, $\dot{\varphi}$ e $\ddot{\varphi}$.



10ª Folha de Problemas

1. Duas bolas de aço, cada uma com uma massa m, estão colocadas nas extremidades de uma barra muito leve de comprimento L, tal como está esquematizado na figura.

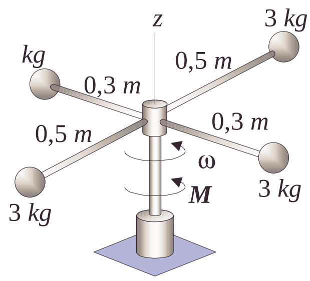


Inicialmente, as bolas encontram-se em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Uma força horizontal com intensidade F é subitamente aplicada à barra. Determine:

   (a) a aceleração instantânea, a, do centro de massa (G) do sistema;

   (b) a aceleração angular, $\ddot{\theta}$, de rotação do sistema.

2. As quatro massas de 3 kg cada uma esquematizadas na figura estão rigidamente ligadas ao veio vertical. Inicialmente, o sistema roda livremente em torno do eixo vertical, o eixo dos zz, com uma velocidade angular de 20 rad/s no sentido dos ponteiros do relógio quando visto de cima. Se um momento constante, $M = 30\ Nm$, for aplicado ao veio, determine o tempo t necessário para inverter o sentido de rotação do sistema e atingir-se uma velocidade angular $\omega = 20\ rad/s$ no mesmo sentido de $\vec{M}$.



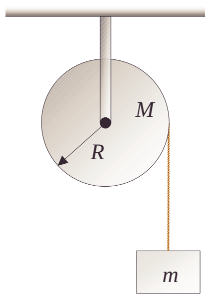
3. No extremo livre de um fio leve, enrolado num cilindro maciço e homogéneo de massa M e raio R, é atado um corpo de massa m. No instante $t = 0$ o sistema entra em movimento. Desprezando o atrito no eixo do cilindro, determine:

   (a) a dependência no tempo da

      i. velocidade angular do cilindro;

      ii. energia cinética do sistema;

   (b) a tensão no fio.



4. Uma régua de massa M, comprimento L, largura l e espessura desprezável possui vários furos ao longo de todo o seu comprimento, tal como é mostrado na figura ao lado. Um pêndulo físico é realizado pendurando-se a régua num prego horizontal através de um dos orifícios.

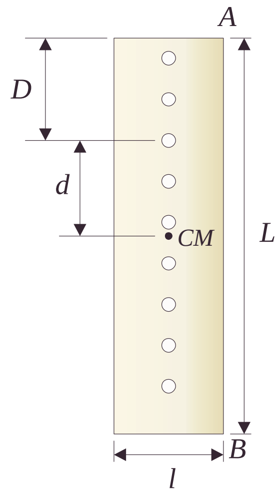
(a) Sabendo que o prego é introduzido num orifício que dista d do centro de massa da régua, determine o momento de inércia desta relativamente ao eixo definido pelo prego.

(b) A régua é afastada da posição vertical de um pequeno ângulo e, então, largada. Obtenha a equação do movimento da régua. Que tipo de movimento executa a régua?

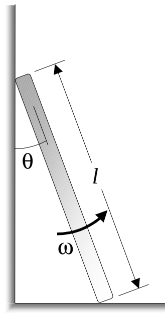
(c) Qual é o período de oscilação da régua?

(d) Determine o comprimento l_o que deverá ter o fio de um pêndulo simples que, para pequenas oscilações, tem o mesmo período da régua.

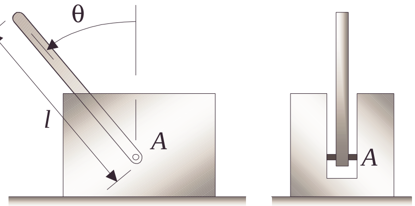
(e) Mostre que se suspender a régua de um ponto que diste l_o abaixo do ponto em que está suspensa, o seu período de oscilação é o mesmo.



5. A barra delgada representada na figura tem massa m e as suas extremidades deslizam sobre o chão e a parede. No seu movimento de deslizamento, a barra roda com velocidade angular ω no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Determine a aceleração angular da barra.



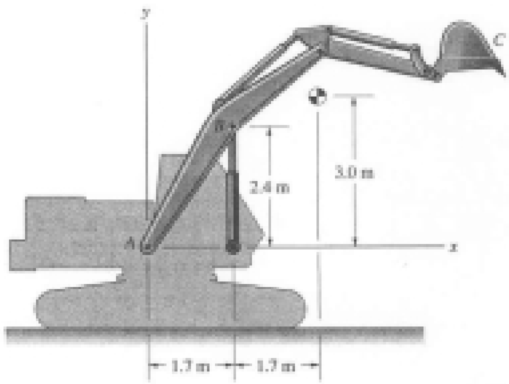
6. A barra delgada esquematizada na figura tem massa m e está encaixada no eixo A ligado ao bloco metálico de massa m_B. Este bloco assenta numa superfície plana horizontal. O sistema é largado do repouso na posição mostrada. Determine a aceleração angular da barra no instante em que é largada.



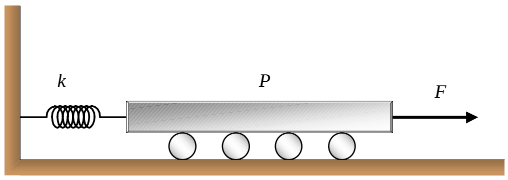
7. A figura representa uma escavadora. O seu braço ABC pode ser modelizado como um corpo rígido único com uma massa de 1200 kg e um momento de inércia em torno do seu centro de massa $I = 3600\ kg \cdot m^2$.

(a) Se o ponto A estiver estacionário e a aceleração angular do braço for de $1,0\ rad/s^2$ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, que força deverá o cilindro hidráulico vertical exercer no ponto B?

(b) Nas condições da alínea anterior, se a velocidade angular do braço for de $2,0\ rad/s$, quais são as componentes da força exercida sobre o braço da escavador no ponto A?



8. O vagão plano P representado na figura tem 22 kg de massa e assenta sobre 4 rolamentos cilíndricos homogéneos de 1 kg cada e com um raio de 30 mm. O vagão está parado e a mola ($k = 900\ N/m$) não está sob tensão quando uma força constante horizontal $F = 100\ N$ lhe é aplicada.



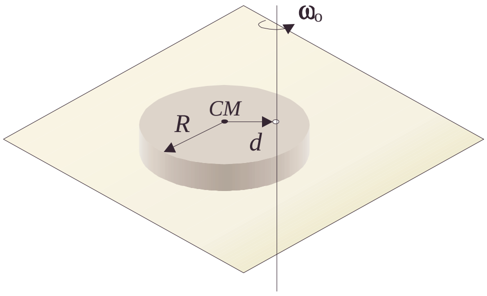
(a) Qual é a velocidade do vagão quando se move 200 mm para a direita?

(b) Determine a distância máxima de que o vagão se move para a direita sob a acção de F.

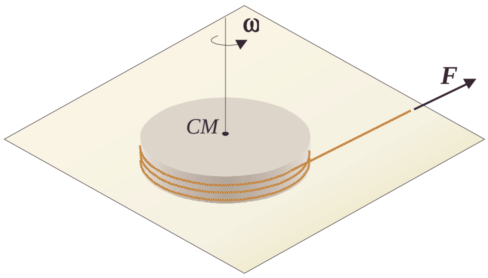
(c) Calcule a velocidade máxima atingida pelo vagão e indique qual é a sua posição nesse instante.

$11^{\underline{a}}$ Folha de Problemas

1. Um disco homogéneo de massa M e raio R gira sem atrito sobre uma superfície horizontal, em torno de um eixo vertical situado a uma distância d do seu centro, com velocidade angular, ω_o, constante.



I



II

   (a) Determine a expressão do momento angular do disco no seu movimento em torno do eixo de rotação.

   (b) Num certo instante o disco deixa de estar submetido ao eixo. Mostre que o disco passa a rodar em torno do seu centro de massa, CM, com velocidade angular ω_o e que o CM tem uma velocidade de translação $\omega_o d$.

   (c) Suponha que nesse instante uma força $\vec{F}$, constante em grandeza, direcção e sentido, é aplicada ao disco através de um fio inextensível que está enrolado na sua periferia, conforme esquematizado na figura II. Determine a expressão da velocidade angular do disco ao fim de um tempo T.

   (d) Qual é a velocidade de translação do CM do disco quando este tiver percorrido uma distância X sob a acção da força $\vec{F}$?

   (e) Mostre que nessa altura a velocidade angular, ω, do disco é

$$\omega = \omega_o + \frac{2\omega_o d}{R}\left(\sqrt{1 + \frac{2FX}{M\omega_o^2 d^2}} - 1\right).$$

2. Uma régua fina de comprimento L e massa M pode girar livremente em torno de um pino colocado na sua extremidade superior (A). Um bola adesiva de massa m e velocidade horizontal v atinge a régua, em ângulo recto, num ponto que dista a do pino A, e cola-se-lhe (colisão perfeitamente inelástica).

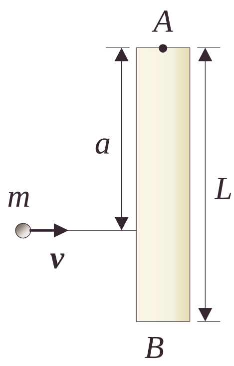
(a) Determine o momento angular do sistema imediatamente antes e após o projéctil atingir a régua.

(b) Determine a quantidade de movimento do sistema imediatamente antes e após a colisão.

(c) Mostre que a diferença entre a energia cinética após e antes da colisão é

$$\frac{-\left(\frac{1}{2}mv^2\right)ML^2}{ML^2+3ma^2}.$$

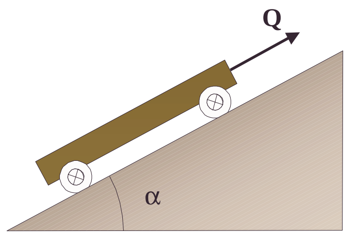
(d) A que altura subirá a extremidade inferior (B) da régua depois da colisão?



3. Um vagão é puxado com uma força constante, Q, sobre um plano inclinado que faz um ângulo α com a horizontal, tal como esquematizado na figura. A carroçaria do vagão tem uma massa M e a massa de cada uma das suas 4 rodas é m. Suponha que o vagão parte do repouso e que as rodas rolam sem escorregar.

(a) Mostre que quando o vagão tiver percorrido uma distância l a sua velocidade linear, v, é dada por:

$$v=\sqrt{\frac{2l\ [Q-(M+4m)g\sin\alpha]}{M+6m}}.$$



(b) Determine a aceleração do vagão.

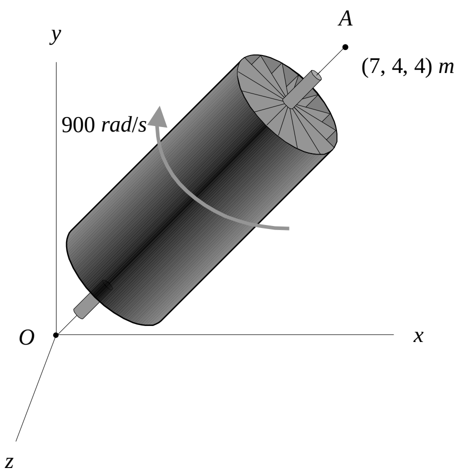
4. A turbina roda em torno do eixo fixo OA.

(a) Escreva o vector velocidade angular de rotação da turbina.

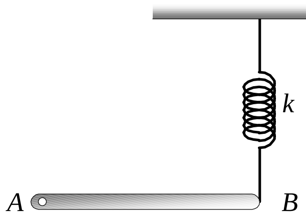
(b) Qual é a velocidade do ponto da turbina de coordenadas $(3, 2, 2)\ m$?

(c) Sabendo que a velocidade angular da turbina está a diminuir à taxa de 100 rad/s^2, escreva o vector aceleração angular da turbina.

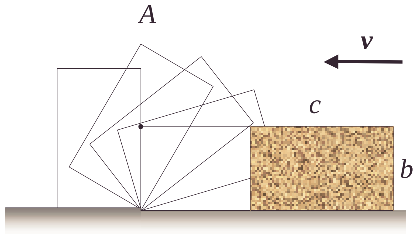
(d) Nas condições da alínea anterior, determine a aceleração do ponto da turbina com coordenadas $(3, 2, 2)\ m$.



5. O dispositivo esquematizado na figura ao lado consiste numa barra, $\overline{AB}$, de secção desprezável, de comprimento $2l$ e de massa M, móvel em torno de um eixo horizontal que passa pela sua extremidade A. A outra extremidade, B, está fixada a uma mola de constante elástica K. A mola, por seu turno, é suportada por um apoio fixo. Na posição de equilíbrio do sistema, $\overline{AB}$ está na horizontal e a mola está na vertical. Afasta-se ligeiramente a barra da sua posição de equilíbrio. Admitindo que B se desloca na vertical, determine o período das pequenas oscilações do sistema.



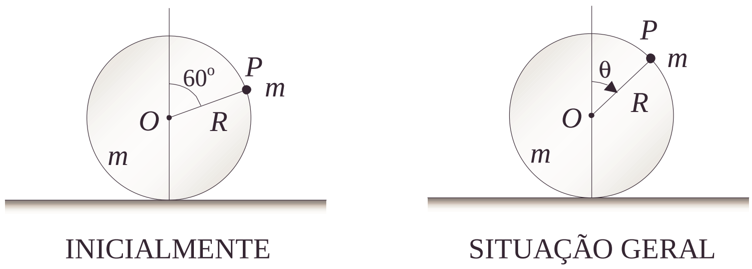
6. Um bloco rectangular uniforme, com as dimensões indicadas na figura, desliza, sobre uma superfície horizontal, para a esquerda com velocidade v. A certa altura, embate numa pequena saliência existente na superfície. Suponha que o ricochete é desprezável.



   (a) Determine o valor mínimo da velocidade v que permite ao bloco rodar em torno da saliência e atingir a posição estacionária A sem velocidade.

   (b) Calcule a fracção de energia dissipada, $\frac{\Delta E}{E}$, quando $b = c$.

7. Uma partícula de massa m está fixada num ponto P da periferia de um disco homogéneo, que tem centro em O, de massa m e raio R. O disco, colocado na vertical, é largado do repouso em contacto com uma superfície horizontal, onde pode rodar sem escorregar, fazendo inicialmente a direcção $\overline{OP}$ um ângulo de 60^o com a vertical.



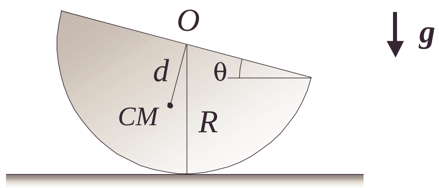
   (a) Onde se situa o centro de massa do sistema? Determine o momento de inércia do sistema em relação ao centro de massa.

   (b) Escreva as expressões das energias cinética e potencial do sistema.

   (c) Recorrendo ao princípio da conservação da energia, mostre que o ângulo θ entre $\overline{OP}$ e a vertical satisfaz a equação:

$$R(7 + 4\cos\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(1 - 2\cos\theta).$$

8. Um semi-disco homogéneo de massa M e raio R pode rodar sem deslizar sobre a superfície plana horizontal onde está colocado.



(a) Mostre que a posição do centro de massa (CM) do semi-disco se situa a uma distância $d = \frac{4R}{3\pi}$ do centro de curvatura do corpo.

(b) Escreva a expressão da energia potencial do semi-disco.

(c) Qual é a condição de equilíbrio estável deste corpo?

(d) Mostre que o momento de inércia do semi-disco em relação ao seu centro de massa é dado por

$$I_{CM} = MR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right).$$

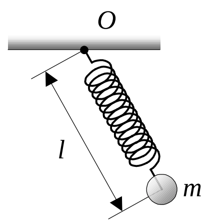
(e) Prove que a energia cinética do semi-disco é dada pela expressão

$$T = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 \left(1 - \frac{16}{9\pi} \cos\theta \right).$$

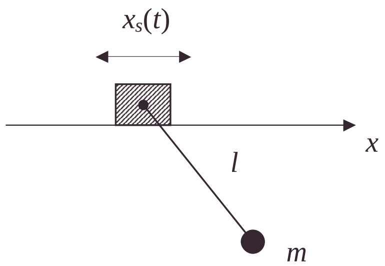
(f) Admita que o semi-disco é apenas afastado ligeiramente da sua posição de equilíbrio. Recorrendo ao princípio da conservação de energia, mostre que o semi-disco oscilará então com um movimento harmónico simples (MHS) e determine a frequência angular e o período desse movimento.

$12^{\underline{a}}$ Folha de Problemas

1. Na figura está representado um pêndulo simples em que a haste foi substituída por uma mola de constante elástica K e comprimento em repouso l_o. Suponha que não há forças de atrito aplicadas. Escreva a lagrangeana deste pêndulo e obtenha as suas equações de movimento.



2. Escreva a equação de movimento de um pêndulo que tem o seu suporte, de massa desprezável, a deslocar-se num plano horizontal, conforme esquematizado na figura.



   Trate, em primeiro lugar, o caso geral em que a posição do suporte é uma qualquer função do tempo, $x_s = x_s(t)$, e aplique de seguida ao caso $x_s(t) = x_o \cos \omega t$, onde x_o e ω são constantes.

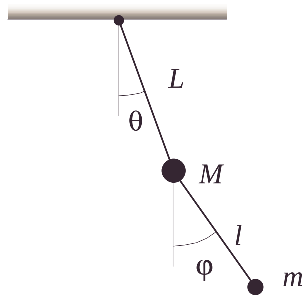
3. (a) Encontrar a função de Lagrange de um pêndulo duplo colocado num campo gravítico uniforme, onde a aceleração da gravidade é g, tal como é mostrado na figura.

   (b) Escreva as equações do movimento do pêndulo duplo.

   (c) Considerando a aproximação das oscilações de pequeno ângulo e a mudança de variáveis:

$$x = L\theta, \qquad y = L\theta + l\phi,$$

   refaça as duas alíneas anteriores.

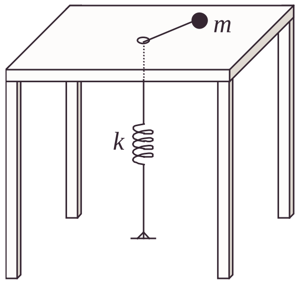


4. Uma partícula de massa m move-se sobre uma mesa horizontal sem atrito. Uma corda inextensível, de comprimento l, que passa no orifício aberto no centro da mesa liga a partícula a uma mola de constante elástica K, presa ao solo de tal forma que quando a massa se encontra no orifício a mola não experimenta qualquer alongamento.

(a) Escreva a lagrangeana da partícula.

(b) Obtenha as equações do movimento da partícula.

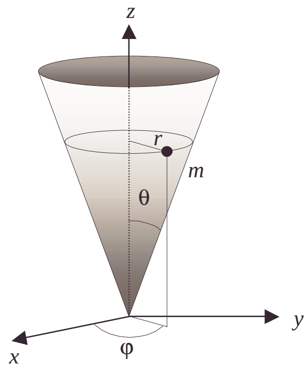
(c) Mostre que o momento angular da partícula se conserva. Como se interpreta fisicamente este resultado?



5. Uma partícula de massa m move-se sobre a superfície de um cone de semi-ângulo θ, tal como é mostrado na figura, estando apenas sujeita à acção da gravidade.

   (a) Escreva a lagrangeana da partícula.

   (b) Obtenha as equações de movimento da partícula e mostre que o momento angular desta em torno do eixo de simetria do cone se conserva.



6. O esquema da figura representa um disco que roda em torno do eixo vertical com uma velocidade angular, $\vec{w}$, constante. Sobre o disco está colocada uma rampa, solidária com ele, que possui uma ranhura por onde é livre de deslizar (sem atrito) uma partícula de massa m.

   (a) Escreva a lagrangeana da partícula e mostre que a equação do movimento desta se pode escrever na forma:

   $$4\ddot{l} - 3\omega^2 l = -2g,$$

   onde g é a aceleração da gravidade.

   (b) Determine, em função de l, a velocidade da partícula.