U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Problemas para Ondas Electromagnéticas

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

MIEEC

Maria Inês Carvalho
Aníbal Castilho Matos
José Nuno Fidalgo

Abril de 2007

— Conceitos Fundamentais —

1 Determine os fasores das seguintes funções:

(a) $l(t) = 10\cos(10\pi t + \frac{\pi}{4})$

(b) $m(t) = -3\sin(20t - \frac{\pi}{6})$

(c) $n(t) = 3\cos(10\pi t) - 3\sin(10\pi t + \frac{\pi}{2})$

(d) $\vec{r}(t) = 2\cos(5t)\hat{\mathbf{x}} + \sin(5t + 30^o)\hat{\mathbf{z}}$

(e) $s(x,t) = 20e^{-3x}\cos(10^5 t + \frac{\pi}{3})$

(f) $\vec{u}(x,y,t) = 5e^{-10x}\cos(10^5 t - 40y)\hat{\mathbf{z}}$

2 Determine as funções temporais correspondentes aos seguintes fasores:

(a) $A = j5e^{j\frac{\pi}{2}}$

(b) $B = 5 + 3j$

(c) $C = -3 + 2j$

(d) $D = 4e^{-j\frac{\pi}{3}} + e^{j\frac{2\pi}{3}}$

(e) $E(x) = 3e^{3x + j\frac{\pi}{6}}$

(f) $F(y,x) = 5e^{4y - j2x}$

3 Considere o campo vectorial $\vec{E} = x^2y\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} - z^2\hat{\mathbf{z}}$.

(a) Calcule $\nabla \cdot \vec{E}$

(b) Calcule $\nabla \times \vec{E}$

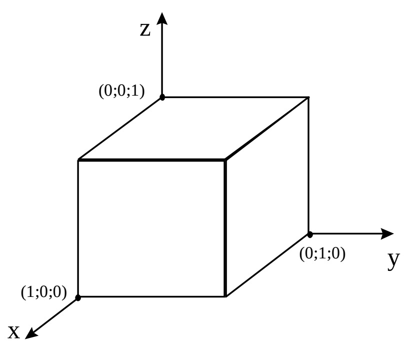
4 Determine o rotacional de cada um dos seguintes campos vectoriais

(a) $\vec{F} = xy\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}$

(b) $\vec{A} = 2\hat{\mathbf{r}} + \sin\phi\,\hat{\phi} - z\hat{\mathbf{z}}$ (coord. cilíndricas)

(c) $\vec{X} = \frac{3}{r}\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\phi\,\hat{\theta}$ (coord. esféricas)

5 Considere o campo vectorial $\vec{A} = 2xy\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + z^2y\hat{\mathbf{z}}$.



(a) Determine o fluxo de $\vec{A}$ através da face superior do cubo.

(b) Determine o fluxo de $\vec{A}$ através de todas as faces do cubo.

(c) Repita a alínea anterior utilizando o teorema da divergência.

6 O campo eléctrico de uma onda que se propaga no vazio é dado por

$$\vec{E}(z,t) = 2\sin(3\cdot 10^8 t + z)\hat{\mathbf{x}} - 3\cos(3\cdot 10^8 t + z)\hat{\mathbf{y}} \quad \text{(V/m)}.$$

Determine o campo magnético desta onda.

7 O campo eléctrico de uma onda que se propaga no vazio é dado por

$$\vec{E}(z,t) = 10\cos(10^9\pi t - kz)\hat{\mathbf{x}} \quad \text{(V/m)}.$$

Determine:

(a) $\vec{H}(z,t)$.

(b) O valor da constante k.

8 O campo magnético de uma onda que se propaga num meio dieléctrico com $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ é caracterizado por

$$\vec{H}(x,t) = 3\cos(20\pi y)\cos(2\pi 10^{10} t - kx)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{(A/m)}.$$

Determine:

(a) O campo eléctrico da onda.

(b) O valor de k.

9 Uma dada onda, propaga-se segundo $-x$ e satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 10^{-4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

(a) Determine a velocidade de propagação.

(b) Sendo $u(x, t=0) = 10\cos(10x)$, determine $u(x,t)$ e a frequência da onda.

(c) Sendo $u(x=1, t) = 2\cos(20t)$, determine $u(x,t)$ e o comprimento de onda.

(d) Repita as duas alíneas anteriores considerando agora que a onda se propaga segundo $+x$.

10 Considere uma onda electromagnética de frequência 1 GHz a propagar-se no vazio. Determine o seu comprimento de onda.

11 O campo eléctrico de uma onda electromagnética é caracterizado por

$$\vec{E}(z,t) = 10\cos(2\pi 10^7 t + 0.2\pi z)\hat{\mathbf{y}} \quad \text{(V/m)}.$$

Determine o comprimento de onda e a velocidade de propagação. Em que sentido se propaga a onda?

12 A tensão ao longo de uma linha é caracterizada por

$$v(x,t) = 3\sin(\omega t - 20\pi x) \quad \text{V}.$$

Sabendo que a velocidade de propagação neste linha é $0.5c$, determine a frequência de operação.

13 A corrente eléctrica numa linha de transmissão com $v = c/3$ é dada por

$$i(x,t) = 2\cos(4\pi 10^9 t - kx) + 0.5\cos(4\pi 10^9 t + kx) \quad \text{mA}.$$

(a) Determine o valor de k.

(b) Identifique as amplitudes das ondas que se propagam segundo $+x$ e $-x$.

— Linhas de Transmissão —

1 Uma linha de transmissão de comprimento l liga uma carga a uma fonte de tensão sinusoidal que opera a uma frequência f. Admitindo que a velocidade de propagação da onda na linha é c, para qual dos seguintes casos é razoável ignorar a presença da linha de transmissão na resolução do circuito.

(a) $l = 20\,\text{cm}$, $f = 10\ \text{KHz}$

(b) $l = 50\,\text{km}$, $f = 60\,\text{Hz}$

(c) $l = 20\,\text{cm}$, $f = 300\ \text{MHz}$

(d) $l = 1\,\text{mm}$, $f = 100\ \text{GHz}$

2 Determine os parâmetros R, L, C e G de uma linha sem perdas com impedância característica $50\,\Omega$ e velocidade de fase 10^8 m/s.

3 Uma linha de transmissão de placas paralelas (tiras) que opera a 1 GHz consiste em duas placas de cobre com 1.5 cm de largura separadas por uma camada de polistireno de 0.2 cm de espessura. Para o cobre, $\mu_c = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m e $\sigma_c = 5.8 \times 10^7$ S/m, e para o polistireno $\varepsilon_r = 2.6$.
Determine os parâmetros da linha (R, L, G e C), admitindo que para o polistireno $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 0$.

4 Uma linha de transmissão coaxial tem o condutor interno com um diâmetro de 0.5 cm e o condutor externo com um diâmetro de 1 cm. O espaço entre os condutores coaxiais está preenchido com um material isolador com $\mu = \mu_0$, $\varepsilon_r = 2.25$ e $\sigma = 10^{-3}$ S/m. Os condutores são de cobre com $\mu = \mu_0$ e $\sigma_c = 5.8 \times 10^7$ S/m. A frequência que opera o linha é de 1 GHz.

(a) Calcule os parâmetros R, L, G e C da linha.

(b) Determine α, β, v_f e Z_0 para esta linha coaxial.

5 Considere uma linha de transmissão sem distorção ($R/L = G/C$.) com $Z_0 = 50\,\Omega$, $\alpha = 40 \times 10^{-3}$ Np/m e $v_f = 2.5 \times 10^8$ m/s.
Determine os parâmetros da linha e o comprimento de onda λ à frequência de 250 MHz.

6 Uma linha de transmissão que opera a 125 MHz tem $Z_0 = 40\,\Omega$, $\alpha = 0.02$ Np/m e $\beta = 0.75$ rad/m.

(a) Determine os parâmetros R, L, G e C da linha.

(b) Ao fim de quantos metros a tensão na linha é atenuada de 30 dB?

7 Uma linha telefónica tem $R = 30\,\Omega/\text{Km}$, $L = 0.1\,\text{H/km}$, $G = 0$ e $C = 20\,\mu\text{F/km}$. À frequência $f = 1\,\text{kHz}$, determine:

(a) A impedância característica da linha.

(b) A constante de propagação.

(c) A velocidade de fase.

(d) A atenuação em dB ao fim de 2 km.

8 Uma linha de transmissão sem perdas operando a 4.5 GHz tem $L = 2.4\,\mu$H/m e $Z_0 = 85\,\Omega$. Calcule a constante de fase, β, e a velocidade de fase.

9 A uma frequência de 300 MHz, uma linha sem perdas de 50 Ω e 2.5 m de comprimento termina com uma impedância $Z_L = (60 + j20)\,\Omega$. Assumindo $v = c$, determine a impedância de entrada.

10 Uma linha de transmissão sem perdas termina em curto-circuito. Que comprimento (em comprimentos de onda) deve ter a linha para que apareça como um circuito aberto aos seus terminais de entrada?

11 Mostre que a impedância de entrada de uma linha muito curta e de baixas perdas ($\alpha l \ll 1$ e $\beta l \ll 1$) é aproximadamente

(a) $Z_{in} = (R + j\omega l)l$, quando terminada em curto-circuito.

(b) $Z_{in} = (G - j\omega C)/((G^2 + (\omega C)^2)l$, quando terminada em circuito aberto.

12 Uma linha de transmissão sem perdas termina numa carga de impedância $Z_L = (30 - j60)\,\Omega$. O comprimento de onda é de 5 cm e a impedância característica da linha é 50 Ω. Determine:

(a) O coeficiente de reflexão na carga.

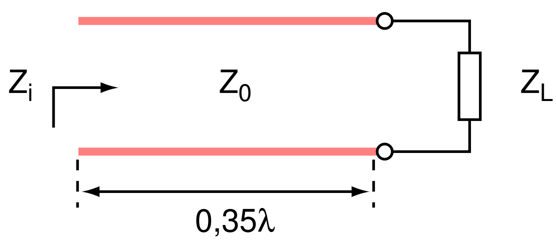
(b) O SWR da linha.

(c) A posição do valor máximo da tensão que se encontra mais próximo da carga.

(d) A posição do valor máximo da corrente que se encontra mais próximo da carga.

13 Utilizando uma linha de transmissão com ranhura, foram obtidos os seguintes resultados: distância do primeiro mínimo à carga igual a 4 cm; distância do segundo mínimo à carga igual a 14 cm; SWR da tensão igual a 2.5. Se a linha não tiver perdas e $Z_0 = 50\,\Omega$, determine a impedância da carga.

14 Uma linha de transmissão sem perdas tem um comprimento $l = 0.35\lambda$ e termina numa carga com impedância $Z_L = (60 + j30)\,\Omega$, tal como mostrado na figura. Determine Γ_L, SWR e Z_i para $Z_0 = 100\,\Omega$.



15 Uma carga de 500 Ω é alimentada por uma linha de 2 km de comprimento a uma frequência de 20 kHz. A amplitude da tensão na carga é 95% da amplitude da tensão à entrada da linha e a diferença de fase entre estas tensões é de 2 rad. Sabendo que nesta situação a linha está adaptada, calcule:

(a) A constante de propagação da linha.

(b) Os seus parâmetros característicos.

16 Numa linha telefónica de comprimento 5 km e à frequência de 1 kHz, sabe-se que a impedância de entrada em circuito aberto vale $535e^{j64^\circ}\ \Omega$ e em curto-circuito $467.5e^{j10^\circ}\ \Omega$.

(a) Determine a impedância característica e a constante de propagação da linha.

(b) Determine os parâmetros R, L, G e C da linha.

(c) Considere que a linha opera a 1 kHz e está ligada a uma carga $Z_L = 400\,\Omega$. Determine a tensão e corrente à entrada da linha, sabendo que a corrente na carga é 0.5 A. Determine ainda a amplitude da onda de tensão incidente na carga.

17 Um gerador sinusoidal, $V_g(t) = 5\cos(2\pi \times 10^9 t)\,(\mathrm{V})$ e impedância interna $Z_g = 50\,\Omega$, está ligado a uma linha sem perdas de $50\,\Omega$. O comprimento da linha é de 5 cm e termina numa carga com impedância $Z_L = (100 - j100)\,\Omega$. Se $v = c$ determine:

(a) O coeficiente de reflexão na carga.

(b) A impedância Z_i à entrada da linha de transmissão.

(c) A tensão de entrada V_i e a corrente de entrada I_i.

18 Uma certa linha de transmissão que opera a $\omega = 10^6\,\mathrm{rad/s}$ tem $\alpha = 8\,\mathrm{dB/m}$, $\beta = 1\,\mathrm{rad/m}$ e $Z_0 = (60 + j40)\,\Omega$ e tem 2 metros de comprimento. Se a linha estiver ligada a um gerador com $V_g = 10e^{j0^\circ}$ V e $Z_g = 40\,\Omega$ e terminar numa carga com impedância $(20 + j50)\,\Omega$, determine:

(a) A impedância de entrada.

(b) A corrente à entrada.

(c) A corrente no ponto médio da linha.

19 A onda de tensão numa linha de transmissão sem distorção é dada por

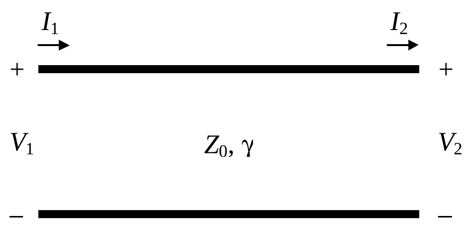
$$V(x,t) = 60e^{0.0025x}\cos(10^8 t + 2x) + 12e^{-0.0025x}\cos(10^8 t - 2x)$$

onde x é a distância medida a partir da carga. Se $Z_L = 300\,\Omega$ determine:

(a) A constante de atenuação (α), a constante de fase (β) e a velocidade de fase.

(b) A impedância característica, Z_0, e a corrente $I(x,t)$.

20 Considere uma secção de comprimento l de uma linha de transmissão de impedância característica Z_0 e constante de propagação γ.



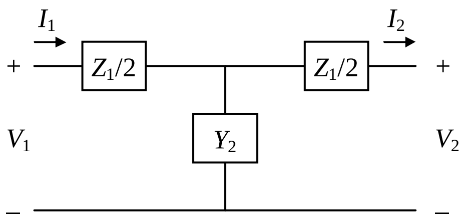
(a) Determine os parâmetros A, B, C, D da relação

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

entre as tensões e correntes nos dois terminais da linha. Mostre ainda que se verificam as seguintes relações entre estes parâmetros

$$A = D$$
$$AD - BC = 1$$

(b) Mostre que a secção da linha tem como equivalente o circuito



quando se verificam as relações

$$Z_1 = 2Z_0 \tanh \frac{\gamma l}{2}$$
$$Y_2 = \frac{\sinh \gamma l}{Z_0}$$

21 Utilize a carta de Smith para encontrar o coeficiente de reflexão correspondente a cada uma das seguintes impedâncias de carga:

(a) $Z_L = 3Z_0$

(b) $Z_L = (2 - j2)Z_0$

(c) $Z_L = -j2Z_0$

(d) $Z_L = 0$.

22 Utilize a carta de Smith para determinar as impedâncias normalizadas das cargas correspondentes aos seguintes coeficientes de reflexão

(a) $\Gamma_L = 0.5$

(b) $\Gamma_L = 0.5\angle 60°$

(c) $\Gamma_L = -1$

(d) $\Gamma_L = 0.3\angle -30°$

(e) $\Gamma_L = 0$

(f) $\Gamma_L = j$

23 Uma linha de transmissão de 30 m de comprimento com $Z_0 = 50\,\Omega$ opera a 2 MHz e termina numa carga $Z_L = 60 + j40\,\Omega$. Se a velocidade de propagação na linha for $v = 0.6c$ determine:

(a) O coeficiente de reflexão na carga.

(b) O SWR.

(c) A impedância de entrada.

Faça os cálculos usando o método analítico e usando o método gráfico recorrendo ao diagrama de Smith.

24 Numa linha de transmissão sem perdas que termina numa carga com impedância $Z_L = 100\,\Omega$, o valor medido de SWR foi de 2.5. Utilize a carga de Smith para determinar os dois possíveis valores de Z_0.

25 Uma linha de transmissão sem perdas, com um comprimento de 1.3λ, apresenta uma impedância característica de $100\,\Omega$ e alimenta uma carga de $(100+j50)\,\Omega$. Usando a carta de Smith, determine:

(a) O coeficiente de reflexão na carga e o SWR

(b) A impedância de entrada da linha;

(c) A posição do máximo de tensão mais próximo da carga;

26 O SWR de uma linha de transmissão sem perdas de $50\,\Omega$ que termina numa carga com uma impedância desconhecida é 4.0. A distância que separa mınimos sucessivos de tensão é 40 cm e o primeiro mínimo está localizado a 5 cm da carga. Utilizando a carta de Smith, determine:

(a) O coeficiente de reflexão.

(b) A impedância de carga, Z_L.

(c) O comprimento equivalente e a resistência terminal da linha de tal forma que a impedância de entrada seja igual a Z_L.

27 Uma linha de transmissão sem perdas de $50\,\Omega$ termina numa carga com $Z_L = (50 + j25)\,\Omega$. Utilize a carta de Smith para calcular:

(a) O coeficiente de reflexão.

(b) O SWR.

(c) A impedância de entrada da linha a uma distância de 0.35λ da carga.

(d) A admitância de entrada da linha a uma distância de 0.35λ da carga.

(e) O menor comprimento que deve ter a linha para que a impedância de entrada seja puramente resistiva.

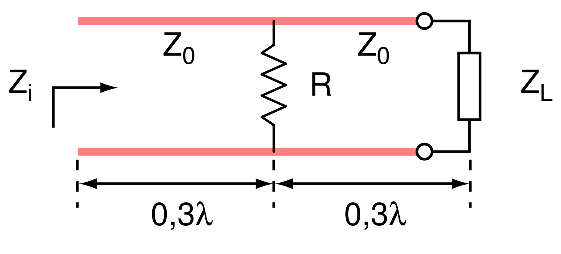
(f) A distância entre a carga e a posição do primeiro máximo da tensão.

28 Uma linha de transmissão sem perdas termina num curto-circuito. Utilize a carta de Smith para determinar:

(a) A impedância de entrada a uma distância de 2.3λ da carga.

(b) A distância da carga ao ponto onde a admitância de entrada é $Y_i = -j0.04S$.

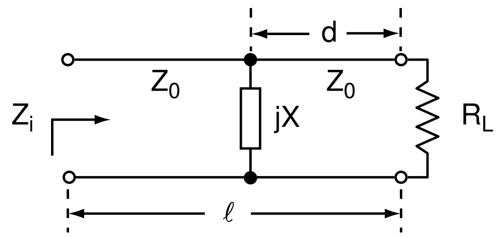
29 Uma linha de transmissão sem perdas de $50\,\Omega$ e com 0.6λ de comprimento termina numa carga $Z_L = (50 + j25)\,\Omega$. A uma distância de 0.3λ da carga é colocada uma resistência $R = 30\,\Omega$, tal como representado na figura. Utilize a carta de Smith para determinar a impedância de entrada, Z_i, deste circuito.



30 Uma linha de transmissão sem perdas de $50\,\Omega$ deve adaptar uma antena com $Z_L = (75 - j20)\,(\Omega)$. Para esse efeito, é utilizado um stub simples. Utilize a carta de Smith para determinar o comprimento do stub e a distância entre a antena e o stub.

31 Uma linha sem perdas, de impedância característica $300\,\Omega$, trabalhando à frequência de 100 MHz é a ligada a uma carga $Z_L = 77.6 - j49.4\,\Omega$. Projecte um stub simples (em curto circuito) para adaptar a linha.

32 Pretende-se adaptar uma antena de impedância $100\,\Omega$ a um cabo coaxial de impedância característica igual a $50\,\Omega$ com $v_f = 2 \times 10^8$, usando um único elemento reactivo em paralelo com a linha, como representado na figura. A frequência de operação é 50 MHz.

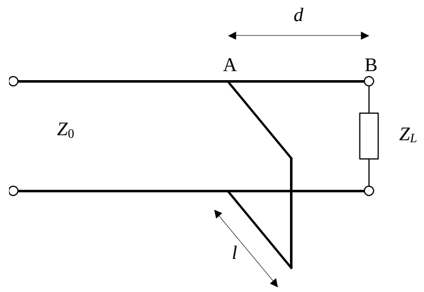


(a) Usando o diagrama de Smith determine o valor do elemento em paralelo (bobine ou condensador) e a sua posição mais próxima da carga.

(b) Qual o valor do parâmetro SWR nos dois troços da linha?

(c) Se o comprimento do cabo for de 1 m, determine a impedância à entrada da linha de transmissão com e sem adaptação.

33 Considere uma linha de transmissão sem perdas de impedância característica 50 Ω e velocidade de fase 10^8 m/s.



(a) Sabendo que a linha opera a uma frequência de 100 MHz e está adaptada por um *stub* simples em curto circuito de comprimento $l = 0.14$ m e colocado a uma distância $d = 0.46$ m da carga Z_L, determine o valor da impedância de carga.

(b) Nas condições da alínea anterior, o valor de pico máximo da tensão no troço AB da linha é 30 V. Esboce o valor de pico da tensão da linha em função da distância à carga, no troço AB, indicando o valor mínimo da tensão e as distâncias à carga dos pontos de tensão mínima e máxima.

34 Duas linhas de transmissão sem perdas e trabalhando à frequência de 40 MHz têm os seguintes parâmetros característicos: $L_1 = L_2 = 0.1$ mH/km e $C_1 = C_2 = 2.5$ nF/km. A primeira linha, com 400 m de comprimento, está ligada a uma carga de $200\,\Omega$, enquanto a segunda linha, com comprimento 501.6 m, está terminada em circuito aberto. As duas linhas são colocadas em paralelo nos seus terminais de entrada, servindo de carga a uma terceira linha também sem perdas.

(a) Qual a impedância característica da terceira linha que evita reflexões na ligação às outras linhas?

(b) Considere agora que a terceira linha tem uma impedância característica de $100\,\Omega$ e uma constante de fase $\frac{\pi}{25}$ rad/m. Dimensione um stub simples em curto circuito que a adapte à sua carga.

35 Uma linha de transmissão sem perdas com 9 m de comprimento alimenta uma carga $Z_L = 15+j30\,\Omega$. Sabendo que $Z_0 = 50\,\Omega$, $v_f = 2c/3$ (onde c é a velocidade da luz) e que a linha opera a 100 MHz, determine

(a) A impedância de entrada da linha.

(b) A posição do mínimo de tensão mais próximo da carga.

(c) Adapte a linha à carga usando a técnica de 2 stubs em curto-circuito e espaçados de $\lambda/8$.

36 O método do stub duplo é usado para efectuar a adaptação de uma impedância de carga, $Z_L = 100 + j100\,\Omega$, a uma linha de transmissão sem perdas de impedância característica $Z_0 = 300\,\Omega$. O espaçamento entre os stubs é $3\lambda/8$, com um dos stubs ligado directamente em paralelo com a carga.

(a) Determine o comprimento dos stubs de modo a efectuar a adaptação de impedâncias, usando para o efeito stubs em circuito-aberto.

(b) Qual o parâmetro SWR na linha principal e na secção entre os dois stubs?

(c) Para a secção entre os dois stubs, determine a distância à carga do primeiro máximo de tensão.

37 O método de stub-duplo é usado para adaptar uma impedância de carga $Z_L = 100 + j100\,(\Omega)$ a uma linha de transmissão sem perdas com impedância caracterıstica $Z_0 = 200\,(\Omega)$. O espaçamento entre os stubs é $3\lambda/8$, com um dos stubs ligado directamente em paralelo com a carga. Determine os comprimentos dos stubs se:

(a) os stubs estão ambos em curto-circuito;

(b) os stubs estão em circuito-aberto.

38 Projecte uma secção de quarto de comprimento de onda para adaptar uma antena de impedância $Z_L = 30\,\Omega$ a uma linha de transmissão de impedância caracterıstica $Z_0 = 100\,\Omega$.

39 Uma linha de transmissão sem perdas, preenchida com ar e de impedância característica $Z_0 = 50\,\Omega$, está terminada numa impedância $Z_L = 40 + j30\,\Omega$. Pretende-se fazer a adaptação desta linha à carga usando uma linha de quarto comprimento de onda, para a frequência de 3 GHz.

(a) Determine o comprimento da linha de quarto comprimento de onda em centrímetros.

(b) Determine a impedância Z_0' da linha $\lambda/4$ e a sua localização d em relação à carga.

(c) Obtenha os valores do parâmetro SWR nas várias secções de linha do sistema.

40 Uma linha de transmissão, de impedância caracterıstica $Z_0 = 50\,\Omega$ e com impedância de carga $Z_L = 72+j96$, encontra-se adaptada usando um transformador de quarto de comprimento de onda. Usando o diagrama de Smith determine:

(a) A distância d_1 da carga à linha $\lambda/4$.

(b) A impedância caracterıstica da linha $\lambda/4$.

(c) O SWR da linha d_1

(d) O SWR da linha $\lambda/4$.

41 Considere uma linha de transmissão sem perdas de 1 m de comprimento, caracterizada por $Z_0 = 50\,\Omega$ e $v = 2c/3$ (onde c é a velocidade da luz no vácuo). A linha termina numa carga $Z_L = 25\,\Omega$ e à sua entrada é aplicada uma tensão em degrau, no instante $t = 0$, por um gerador com $V_g = 60\,\mathrm{V}$ e $R_g = 100\,\Omega$.

(a) Represente num diagrama de reflexão a tensão $V(z, t)$.

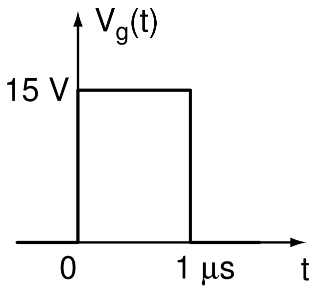
(b) Utilize o diagrama para fazer a representação gráfica de $V(t)$ num ponto situado no meio da linha, entre $t = 0$ e $t = 25\,\mathrm{ns}$.

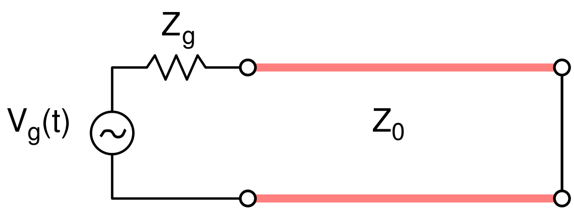
42 Uma linha de transmissão sem perdas, de impedância característica 40 Ω, $\varepsilon_r = 2.25$ e com comprimento 200 m, está terminada em circuito aberto. No instante $t = 0$ é ligada à entrada da linha uma fonte de tensão de 40 V e impedância interna 120 Ω.

(a) Esboce a evolução temporal da tensão no fim da linha para $0 < t < 5\ \mu\mathrm{s}$.

(b) Determine, justificando, o valor final da tensão no fim da linha.

43 Um impulso rectangular de 15 V de amplitude e 1 µs de duração é aplicado, através de uma resistência em série de 25 Ω, aos terminais de entrada de uma linha de transmissão coaxial de 50 Ω. A linha possui 400 m de comprimento e está curto-circuitada na extremidade terminal. Determine a resposta em tensão no ponto médio da linha em função do tempo, desde 0 até 8µs. A constante dielétrica do material isolador no cabo coaxial é de 2.25.



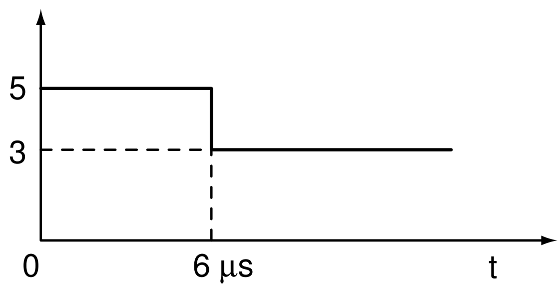


44 Como resposta a uma tensão aplicada em degrau, foi observada à entrada de uma linha de transmissão sem perdas a forma de onda de tensão mostrada na figura. A linha é caracterizada por $Z_0 = 50\,\Omega$, $\varepsilon = 2.25$ e a resistência interna do gerador é $R_g = 50\,\Omega$. Determine:

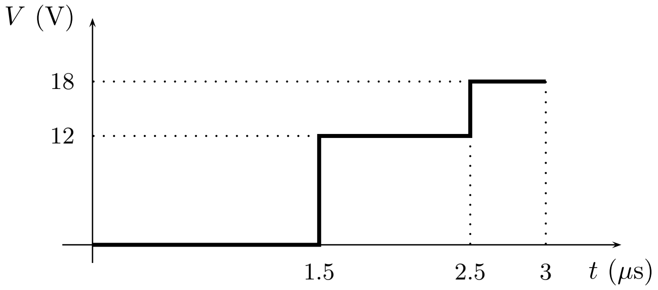
(a) A tensão do gerador.

(b) O comprimento da linha.

(c) A impedância de carga.



45 Uma linha de transmissão sem perdas, de parâmetros $C = 100$ pF/m e $L = 250$ nH/m, alimenta uma carga resistiva R_L e no instante $t = 0$ é-lhe ligado um gerador de tensão $V_g = 18$ V e resistência interna R_g. O gráfico seguinte apresenta a evolução da tensão num ponto intermédio da linha no intervalo de tempo de 0 a 3 μs.



(a) Determine a distância do gerador ao ponto em que foi observada a tensão, e também o comprimento da linha.

(b) Determine R_L e R_g.

(c) Esboce o diagrama de reflexões de tensão no intervalo de tempo de 0 a 8 μs.

(d) Esboce a evolução da tensão na carga no intervalo de tempo de 0 a 8 μs.

(e) Mostre que o valor final ($t \to +\infty$) da tensão na carga é $\frac{R_L}{R_L+R_g}V_g$.

Problemas recolhidos de várias fontes:

- Folhas de problemas de Teoria da Electricidade III, LEEC-FEUP
- Folhas de problemas de Electrotecnia Teórica, LEEC-FEUP
- Exames de Electrotecnia Teórica, LEEC-FEUP
- D. Cheng, "Field and Wave Electromagnetics", Addison-Wesley

— Ondas Electromagnéticas Planas —

1 Escreva as expressões dos vectores campos eléctrico e magnético de uma onda plana sinusoidal de 1 GHz que se propaga segundo $+y$ num meio não magnético e sem perdas e com permitividade relativa $\varepsilon_r = 9$. O campo eléctrico tem polarização segundo $+x$, um valor de pico de 3 V/m e uma intensidade de 2 V/m em $t = 0$ s e $y = 2$ cm.

2 O fasor do campo eléctrico de uma onda electromagnética plana e uniforme é dado por:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}e^{j0.2z} \quad \text{(V/m)}.$$

Se a velocidade de fase da onda é de 1.5×10^8 m/s e a permeabilidade magnética relativa do meio é $\mu_r = 2.4$, determine:

(a) O comprimento de onda;

(b) A frequência da onda;

(c) A permitividade relativa do meio;

(d) O campo magnético $H(z, t)$ associado.

3 O fasor do campo eléctrico de uma onda electromagnética plana e uniforme que se propaga no vácuo é dada por $\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}})20e^{-j\pi z/6}$ (V/m). Especifique o módulo e a direcção do vector campo eléctrico no plano $z = 0$ para $t = 5$ ns e $t = 10$ ns.

4 O campo eléctrico de uma onda plana uniforme que se propaga num meio dieléctrico é dado por

$$\vec{E}(t, z) = 2\cos(10^8 t - z/\sqrt{3})\hat{\mathbf{x}} - \sin(10^8 t - z/\sqrt{3})\hat{\mathbf{y}} \quad \text{(V/m)}.$$

(a) Determine a frequência e o comprimento de onda.

(b) Calcule a constante dieléctrica do meio.

(c) Obtenha o campo magnético desta onda.

5 Numa região do espaço preenchida com um material não magnético propaga-se uma onda plana de frequência 1.5 GHz caracterizada pelo fasor

$$\mathbf{E}(x, y) = \hat{\mathbf{z}}E_0 e^{-j4\pi(4x+3y)} \text{ (V/m)}.$$

(a) Qual a direcção de propagação da onda? Justifique.

(b) Determine a permitividade relativa do meio.

(c) Obtenha o fasor do campo magnético desta onda.

6 Uma onda plana propaga-se no ar e é caracterizada pelo seguinte fasor:

$$\mathbf{H}(x, z) = 0.2e^{-j(3x+4z)}(0.6\hat{\mathbf{z}} - 0.8\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{(A/m)}.$$

(a) Qual a direcção de propagação da onda? Justifique.

(b) Determine a frequência e o comprimento de onda.

(c) Determine o fasor do campo eléctrico da onda.

7 Uma onda plana linearmente polarizada da forma $\mathbf{E} = Ae^{-jkz}\hat{\mathbf{x}}$ pode ser escrita como a soma de uma onda com polarização circular direita e amplitude A_D e de uma onda com polarização circular esquerda e amplitude A_E. Prove esta afirmação encontrando as expressões para A_D e A_E em função de A.

8 Uma onda electromagnética plana com polarização circular direita propaga-se, num meio sem perdas, segundo $+z$ e o seu campo eléctrico tem amplitude 20 V/m. Sabendo que a constante de fase é 20π rad/m e que em $t = 0$ e $z = 0$ o campo eléctrico está orientado segundo $+x$, determine a expressão do fasor do campo eléctrico.

9 Determine o estado de polarização das ondas caracterizadas pelos seguintes campos eléctricos.

(a) $\vec{E}(t,z) = 2\sin(10^9 t - 5z)\hat{\mathbf{x}} + 2\cos(10^9 t - 5z)\hat{\mathbf{y}}$ (V/m).

(b) $\vec{E}(t,z) = 2\sin(10^8 t + z)\hat{\mathbf{x}} + 2\cos(10^8 t + z)\hat{\mathbf{y}}$ (V/m).

(c) $\vec{E}(t,x) = 2\cos(10^9 t - 5x)\hat{\mathbf{y}} + 3\sin(10^9 t - 5x)\hat{\mathbf{z}}$ (V/m).

(d) $\vec{E}(t,y) = 2\cos(10^9 t - 10y)\hat{\mathbf{z}} + 3\cos(10^9 t - 10y)\hat{\mathbf{z}}$ (V/m).

10 À frequência de 2.45 GHz a que opera um forno de micro-ondas, os parâmetros electromagnéticos de um certo tipo de alimento são $\sigma = 2.17\,\mathrm{Sm}^{-1}$, $\varepsilon = 47\varepsilon_0$ e $\mu = \mu_0$. Determine os parâmetros de propagação α (constante de atenuação), β (constante de propagação), λ (comprimento de onda), v_f (velocidade de fase) e η_c (impedância intrínseca complexa do meio).

11 Com base em medidas de atenuação e de reflexão conduzidas a 1 MHz, foi determinado que a impedância intrínseca de um certo meio é de $28.1\angle 45°\,\Omega$ e a profundidade de penetração de 5 m. Determine:

(a) A condutividade do material.

(b) O comprimento de onda no meio.

(c) A velocidade de fase.

12 Uma onda electromagnética propaga-se num meio não magnético com perdas e tem campo eléctrico caracterizado por

$$\vec{E} = \hat{\mathbf{x}}10e^{-17.9z}\cos(1.5\times 10^9 t - 35.8z) \quad \text{(V/m)}.$$

(a) Determine a permitividade e a condutividade do meio.

(b) Calcule a impedância intrínseca do meio.

13 O campo eléctrico de uma onda electromagnética propagando-se no oceano ($\sigma = 4\,\mathrm{Sm}^{-1}$, $\varepsilon_r = 81$ e $\mu_r = 1$), na direcção vertical, é dado por

$$\vec{E}(z,t) = \hat{\mathbf{x}}E_0 e^{-\alpha z}\cos(6\pi\times 10^3 t - \beta z)$$

onde E_0 é a amplitude do campo eléctrico em $z = 0^+$, imediatamente abaixo da interface ar-oceano.

(a) Determine a constante de atenuação e a constante de fase.

(b) Calcule a profundidade de penetração e a impedância intrínseca.

(c) Escreva a expressão instantânea para o campo magnético.

(d) Um submarino localizado a 100 m de profundidade possui uma antena capaz de medir campos eléctricos com amplitudes de 1 μV/m ou superior. Qual o valor mínimo de E_0 necessário para haver comunicação com o submarino? Determine o correspondente valor para H_0.

14 Uma onda plana uniforme com polarização linear e frequência 3 GHz propaga-se segundo $+x$ num meio não magnético de permeabilidade relativa 2.5 e tangente de perdas 10^{-2}.

(a) Determine a distância ao fim da qual a amplitude da onda se reduz para metade.

(b) Determine a impedância intrínseca, o comprimento de onda, a velocidade de fase e a velocidade de grupo da onda neste meio.

(c) Sabendo que $\mathbf{E} = 50\sin(6\pi \times 10^9 t + \pi/3)\hat{\mathbf{y}}$ (V/m) em $x = 0$ obtenha a expressão instantânea do campo magnético num ponto arbitrário.

15 Uma onda plana electromagnética, à frequência de 10 GHz, que se propaga num meio sem perdas com dispersão normal tem uma velocidade de fase de 300 Mm/s. A velocidade de fase varia com o comprimento de onda de acordo com a equação $v(\lambda) = k\lambda^{3/4}$, onde k é uma constante. Determine a velocidade de grupo.

16 Uma onda electromagnética é caracterizada por $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{z}}60\sin(\omega t - \beta y)$ (μA/m). Determine

(a) O campo eléctrico $\mathbf{E}$;

(b) O valor médio do vector de Poynting.

17 Uma onda electromagnética plana, propagando-se no ar, é caracterizada por $\mathbf{E} = 60e^{-j20z}\hat{\mathbf{x}} + 60je^{-j20z}\hat{\mathbf{y}}$ (mV/m). Determine o fasor do campo magnético e o valor médio do vector de Poynting.

18 Uma onda plana polarizada linearmente propaga-se num meio caracterizado por $\sigma = 0$, $\mu_r = 2$ e $\varepsilon_r = 4$. Se o valor médio do vector de Poynting for 5 $\mathrm{Wm^{-2}}$ determine:

(a) A amplitude do campo eléctrico;

(b) A amplitude do campo magnético;

(c) A velocidade de fase;

(d) A impedância do meio.

19 Mostre que o vector de Poynting instantâneo de uma onda plana com polarização circular que se propaga num meio sem perdas é uma constante independente do tempo e do espaço.

20 Uma onda electromagnética plana, que se propaga no ar, é caracterizada por $\vec{E} = 2e^{-j(6x+8y)}\hat{\mathbf{z}}$ (V/m). Determine

(a) O valor médio do vector de Poynting;

(b) A potência média que atravessa um quadrado de 2 m de lado perpendicular ao eixo dos xx.

21 Uma onda a 25 MHz propaga-se num meio LHI ($\mu_r = 1$ e $\varepsilon_r = 20$) e caracteriza-se por

$$\vec{D} = 40\pi\epsilon_0 e^{-j\beta z}\hat{\mathbf{x}} \qquad \text{e} \qquad \vec{B} = \mu_0 H_m e^{-j\beta z}\hat{\mathbf{y}}.$$

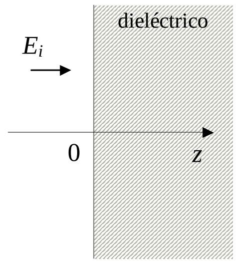
(a) Determine a velocidade de propagação e a impedância do meio.

(b) Determine β e H_m.

(c) Determine o valor médio do vector de Poynting associado.

(d) Calcule a potência dissipada num cubo com 10 mm de aresta centrado na origem.

22 Uma onda electromagnética plana de 200 MHz tem polarização circular esquerda e uma intensidade do campo eléctrico de $10\,\mathrm{Vm}^{-1}$. A onda incide perpendicularmente num meio dieléctrico, com $\varepsilon_r = 4$ e que ocupa a região definida por $z \geq 0$.



(a) Escreva uma expressão para o fasor do campo eléctrico da onda incidente, sabendo que a componente x do campo tem um máximo positivo em $z = 0$ quando $t = 0$.

(b) Calcule os coeficientes de reflexão e de transmissão.

(c) Escreva as expressões dos fasores campo eléctrico das ondas reflectida, transmitida e do campo total na região $z \leq 0$.

(d) Determine a percentagem da potência média incidente que é reflectida pela interface e a que é transmitida para o segundo meio.

23 Repita o problema anterior substituindo o meio dieléctrico por um meio mau condutor caracterizado por $\varepsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$ e $\sigma = 10^{-4}\,\mathrm{Sm}^{-1}$.

24 A 200 MHz um meio tem os seguintes parâmetros $\sigma = 0$, $\mu_r = 15(1 - j3)$ e $\varepsilon_r = 50(1 - j1)$. Determine (o índice zero refere-se aos parâmetros no vazio):

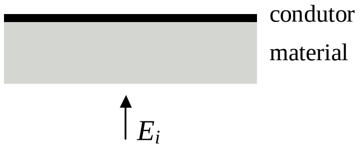
(a) η/η_0, λ/λ_0 e v/v_0, onde η é a impedância intrínseca e v é a velocidade de fase;

(b) A profundidade de penetração δ;

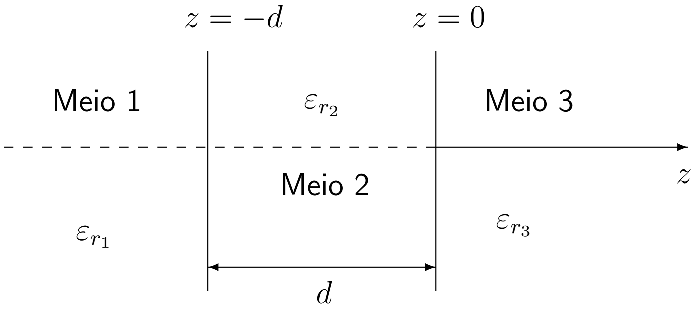
(c) A atenuação em dB para uma espessura de 5 mm;

(d) O coeficiente de reflexão para uma onda no ar incidindo perpendicularmente na superfície do meio.

25 Um material não condutor com constantes $\mu_r = \varepsilon_r = 6 - j6$ é colocado sob uma placa metálica perfeitamente condutora. Para uma onda que se propaga no ar com uma frequência de 500 MHz e incidência normal, qual a espessura do material que reduz a amplitude da onda reflectida de 35 dB?



26 As três regiões mostradas na figura são formadas por dieléctricos perfeitos. Para uma onda que se propaga no meio 1 e que incide perpendicularmente na interface situada em $z = -d$, qual a combinação de ε_{r_2} e d que não origina reflexão? Exprima as suas respostas em função de ε_{r_1}, ε_{r_3} e da frequência f da onda.



27 Considere uma onda electromagnética plana a incidir perpendicularmente numa lente de vidro de uma máquina fotográfica, cuja constante dieléctrica é $\varepsilon_r = 2.5$, como mostra a figura A. Admita que a lente tem uma espessura infinita de modo a poder desprezar as reflexões na interface de saída vidro-ar.

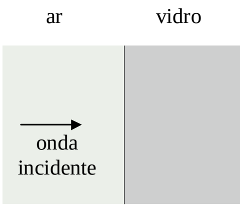


Figura A

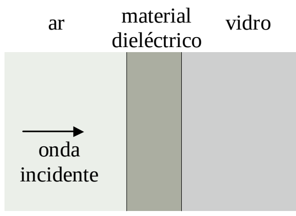


Figura B

(a) Calcule a percentagem de potência que é reflectida pela lente?

(b) A esta lente é aplicada uma camada dieléctrica de quarto de comprimento de onda (figura B), com o objectivo de eliminar reflexões da luz visível correspondente ao amarelo ($\lambda_0 = 560\,\text{nm}$, onde λ_0 é o comprimento de onda no vazio). Determine a constante dieléctrica deste material. Qual a espessura da camada dieléctrica?

(c) Nas condições da alínea anterior, que percentagem de potência de luz azul ($\lambda_0 = 475\,\text{nm}$) incidente é reflectida pela lente?

28 Uma onda plana propaga-se na direcção $+z$ no espaço livre ($z < 0$) e incide perpendicularmente em $z = 0$ num condutor no qual $\sigma = 61.7\,\text{MS/m}$, $\mu_r = 1$. A onda no espaço livre tem uma frequência de $f = 1.5\,\text{MHz}$ e o campo eléctrico na interface $z = 0$ é dado por,

$$\vec{E}(0,t) = 10\sin(2\pi f t)\hat{\mathbf{y}} \quad (\text{V/m}).$$

(a) Obtenha uma expressão para o campo magnético no condutor.

(b) Mostre que o coeficiente de reflexão na interface é dado aproximadamente por $\Gamma \approx (\eta_r - 1)(1 - \eta_r) \approx -1 + 2\eta_r = \sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}(1+j) - 1$, onde $\eta_r = \sqrt{j\omega\varepsilon_0/\sigma}$.

(c) Calcule a percentagem da potência da onda incidente perdida para o condutor após a reflexão.

(d) Determine a profundidade de penetração no material condutor.

29 Uma onda plana e uniforme com polarização linear segundo x, amplitude $10\,\text{V/m}$ e frequência $1.5\,\text{GHz}$, que se propaga no ar, incide perpendicularmente a uma superfície perfeitamente condutora localizada em $z = 0$.

(a) Obtenha as expressões fasoriais e temporais para os campos eléctrico e magnético no ar.

(b) Determine a localização mais próxima da superfície condutora onde o campo magnético é sempre nulo.

(c) Se a superfície condutora tiver agora uma condutividade de $\sigma = 10^5$ S/m (correspondente à grafite), $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\mu = \mu_0$, determine a constante de atenuação em dB/m.

(d) Nas condições da alínea anterior, determine a percentagem de potência que é absorvida pela placa condutora.

(e) Se a onda incidente tivesse polarização circular esquerda, qual o tipo de polarização da onda reflectida? Justifique a sua resposta apresentando os cálculos que achar necessários.

30 Considere uma onda plana no espaço livre ($z < 0$) incidente num bom condutor não magnético ($z > 0$) com impedância intrínseca $6\pi\sqrt{2}e^{j45^\circ}$. O campo eléctrico incidente é dado por

$$\vec{E} = (\hat{\mathbf{x}} - j\hat{\mathbf{y}})10e^{-j20\pi z} \quad \text{(V/m)}.$$

(a) Qual o tipo de polarização da onda incidente? E da onda reflectida?

(b) Determine a constante de propagação e o campo eléctrico na região $z > 0$.

(c) Calcule os campos eléctrico e magnético e o valor médio do vector de Poynting na região $z < 0$.

(d) Calcule o vector de Poynting na região $z < 0$ e na região $z > 0$ e mostre que existe conservação de potência.

31 Considere que a região $z > 0$ está preenchida com ar, enquanto a região $z < 0$ está preenchida com um dieléctrico com índice de refracção 2. No dieléctrico propaga-se uma onda caracterizada por

$$\vec{E} = \hat{\mathbf{x}}E_0 e^{-j\pi(4y+3z)}.$$

(a) Indique a direcção de propagação da onda incidente na interface e determine o correspondente ângulo de incidência.

(b) Determine o fasor do campo magnético da onda incidente.

(c) Determine o coeficiente de reflexão e o fasor do campo eléctrico da onda reflectida.

(d) Determine a expressão do fasor do campo eléctrico no ar.

32 Uma onda com polarização circular esquerda incide numa interface entre dois meios com um ângulo de incidência de 45°.

(a) Se os dois meios forem ar e um condutor perfeito, determine o estado de polarização da onda reflectida.

(b) Para a interface ar-polistireno ($\varepsilon_r = 2.5$) determine o estado de polarização da onda reflectida e transmitida.

33 Uma onda que se propaga no ar com polarização perpendicular incide obliquamente numa interface plana ar-vidro segundo um ângulo de incidência de 30°. A frequência da onda é de 600 THz (1 THz $= 10^{12}$ Hz), o que corresponde à luz verde, e o índice de refracção do vidro é 1.6. Se a amplitude do campo eléctrico da onda incidente for de 50 Vm^{-1}, determine:

(a) Os coeficientes de reflexão e transmissão.

(b) As expressões dos vectores **E** e **H** no vidro.

34 A região do espaço definida por $y < 0$ encontra-se preenchida com um material não magnético (meio 1) e nela propaga-se uma onda plana de frequência 1.5 GHz caracterizada pelo fasor

$$\vec{E}_i(x, y) = \hat{\mathbf{z}} E_0 e^{-j4\pi(4x+3y)} \text{ (V/m)}.$$

Esta onda incide obliquamente na interface com a região $y > 0$, a qual está preenchida com ar.

(a) Classifique o estado de polarização desta onda relativamente ao plano de incidência.

(b) Determine a permitividade relativa do meio 1 e o ângulo de incidência.

(c) Obtenha o fasor do campo magnético desta onda.

(d) Determine os coeficientes de transmissão e de reflexão, e obtenha os fasores dos campos eléctricos da onda reflectida e da onda no ar.

(e) Explique como é possível que a incidência de uma onda de polarização linear numa interface com um meio com menor índice de refracção origine uma onda reflectida com polarização circular. Apresente os cálculos que entender convenientes.

35 Uma onda plana propaga-se no ar e é caracterizada pelo seguinte fasor

$$\vec{H}_i(x, z) = 0.2 e^{-j(3x+4z)}(0.6\hat{\mathbf{z}} - 0.8\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{(A/m)}.$$

Esta onda incide num plano perfeitamente condutor situado em z=0. Determine:

(a) A frequência e o ângulo de incidência;

(b) O fasor $\vec{E}_i$;

(c) Os campos eléctrico e magnético da onda reflectida;

(d) A localização dos pontos de máxima amplitude do campo eléctrico no ar;

(e) O valor médio do vector de Poynting no ar. Qual a direcção do transporte da energia?

36 Uma onda plana propaga-se no ar (meio 1) com polarização perpendicular ao plano de incidência e incide no meio 2 de permitividade $\varepsilon_r = 5$ com um ângulo de 30°.

(a) Determine o coeficiente de reflexão.

(b) Se a onda incidir do meio 2 para o meio 1, determine o ângulo de reflexão total.

Problemas recolhidos de várias fontes:

- Folhas de problemas de Electrotecnia Teórica, LEEC-FEUP
- Exames de Electrotecnia Teórica, LEEC-FEUP
- D. Cheng, "Field and Wave Electromagnetics", Addison-Wesley

— Guias de Onda e Cavidades —

1 Mostre que o modo TM_1 num guia de onda de placas paralelas pode ser interpretado como sendo a sobreposição de duas ondas planas incidindo obliquamente nas placas condutoras.

2 Obtenha as expressões para a densidade superficial de carga e densidade superficial de corrente nas placas de um guia de placas paralelas para o modo TM_n. Indique o sentido da corrente nas duas placas.

3 Obtenha as expressões para a densidade superficial de corrente nas placas de um guia de placas paralelas para o modo TE_n. Indique o sentido da corrente nas duas placas.

4 Considere um guia de onda de placas paralelas separadas por uma distância b.

(a) Escreva as expressões temporais dos campos eléctrico e magnético para os modos TM_1 e TE_1.

(b) Para os modos da alínea anterior e para $t = 0$, esboce as linhas do campo eléctrico e do campo magnético no plano yz.

5 Um guia de onda de placas paralelas preenchido com ar tem uma altura de 1 cm.

(a) Determine a frequência de corte dos modos TE_1, TM_1, TE_2 e TM_2.

(b) Sabendo que o guia opera a uma frequência de 40 GHz, indique que modos se irão propagar.

6 Um guia de onda de placas paralelas separadas por uma distância b está preenchido por um material dieléctrico de parâmetros constitutivos (ε, μ).

(a) Esboce os diagramas $\omega - \beta$ para os 3 primeiros modos das ondas TM e TE e para o modo TEM.

(b) Indique como obteria a partir de um diagrama $\omega - \beta$ os valores da velocidade de fase e da velocidade de grupo a uma determinada frequência.

7 Um guia de onda de placas paralelas tem uma altura de 5 cm e está preenchido com ar.

(a) Determine as frequências de corte para os primeiros 5 modos de ondas TE e TM.

(b) Sabendo que o guia opera a uma frequência de 20 GHz, determine a velocidade de fase, o comprimento de onda e a constante de fase, para cada um dos modos da alínea anterior. Calcule também as impedâncias das respectivas ondas TE e TM.

(c) Compare os valores obtidos na alínea anterior com os correspondentes a uma onda TEM de 20 GHz.

(d) Admitindo agora que o guia opera a 2 GHz, determine as constantes de atenuação para os modos considerados na alínea (b).

8 Num guia de onda de placas paralelas com uma altura de 2 cm, preenchido com um material dieléctrico de permitividade relativa de 2.25, tem-se

$$H_z = 50\cos(100\pi y)\cos\left(3\pi \times 10^{10} t - \beta z\right) \qquad \text{(A/m)}.$$

Determine:

(a) o modo que se está a propagar;

(b) a constante de fase (β);

(c) a impedância de onda;

(d) $\vec{E}$ e $\vec{H}$.

9 Num guia de onda de placas paralelas com uma altura de 1 cm, preenchido com um material dieléctrico de permitividade relativa de 4, operando a 12 GHz tem-se

$$E_z = 40 \sin(100\pi y)\, e^{-j\beta z} \qquad \text{(V/m)}.$$

Determine:

(a) o modo que se está a propagar e a sua a frequência de corte;

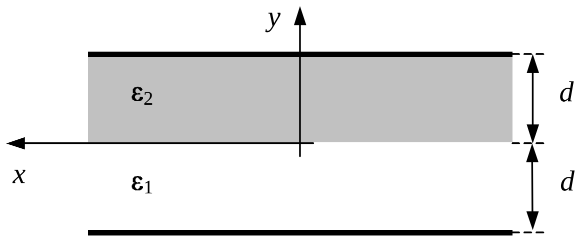
(b) a constante de fase (β);

(c) a velocidade de fase;

(d) $\vec{E}$ e $\vec{H}$;

(e) $\vec{S}_{\text{med}}$.

10 Um guia de placas paralelas está preenchido com dois materiais dieléctricos diferentes, de permitividades ε_1 e ε_2.



(a) Partindo das equações de onda nos dois meios, mostre que para os modos TE a componente longitudinal do campo magnético obedece a

$$H_z^0 = \begin{cases} A\sin(h_1 y) + B\cos(h_1 y) & \text{meio 1} \\ C\sin(h_2 y) + B\cos(h_2 y) & \text{meio 2} \end{cases}$$

onde $h_1^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon_1$ e $h_2^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon_2$, e A, B e C são constantes.

(b) Nas condições da alínea anterior, determine as expressões de $\vec{E}^0$ e $\vec{H}^0$.

(c) A partir do resultado da alínea anterior e aplicando condições fronteira apropriadas, mostre que se verifica a condição

$$h_1 \tan(h_2 d) + h_2 \tan(h_1 d) = 0.$$

(d) Obtenha a equação que permite determinar as frequências de corte dos vários modos TE.

11 Para um guia de onda rectangular com dimensões $a = 2.5$ cm e $b = 1.0$ cm e que possui no seu interior um dieléctrico sem perdas com $\varepsilon_r = 4$, determine a constante de fase, a velocidade de fase e a impedância de onda para os modos TE_{10} e TM_{11} quando a frequência de operação é de 15 GHz.

12 Um guia de onda rectangular preenchido com ar tem as dimensões $a = 1$ cm e $b = 0.6$ cm.

(a) Calcule a frequência de corte dos modos TE_{10} e TE_{20}.

(b) Se este guia de onda operar à frequência de 18 GHz, calcule, para cada modo em propagação, o comprimento de onda do guia e compare-o com o comprimento de onda no espaço livre.

13 Um guia de onda rectangular com dimensões 5 cm × 2 cm, que opera a 15 GHz e está preenchido com ar tem:

$$E_z = 20 \sin(40\pi x) \sin(50\pi y) e^{-j\beta z} \quad \text{V/m}.$$

(a) Que modo se propaga no guia?

(b) Determine β.

(c) Determine o quociente E_y/E_x.

14 Para trabalhar com uma frequência inferior a 15.1 GHz, é utilizado um guia de onda rectangular com dimensões $a = 2.5$ cm e $b = 1$ cm.

(a) Calcule as frequências de corte dos vários modos.

(b) Quantos modos TE e TM podem ser transmitidos se o dielétrico no interior do guia for caracterizado por $\varepsilon_r = 4$ e $\mu_r = 1$?

15 Num guia de onda rectangular com $a = 1.5$ cm, $b = 0.8$ cm, $\mu = \mu_0$ e $\varepsilon = 4\varepsilon_0$,

$$H_x = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \sin(\pi \times 10^{11} t - \beta z) \quad \text{(A/m)}$$

Determine:

(a) O modo em que está a operar.

(b) A frequência de corte.

(c) A constante de propagação.

(d) A impedância da onda.

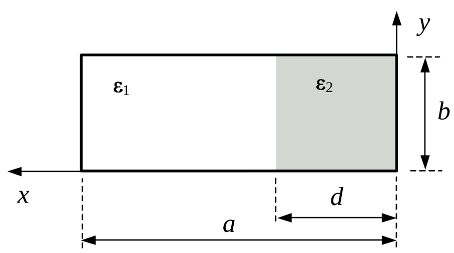
16 Um guia de onda rectangular preenchido com ar tem as dimensoões $a = 8.636$ cm e $b = 4.318$ cm e é excitado por uma portadora de 4 GHz.

(a) Determine se o modo TE_{10} se propaga e, nesse caso, calcule as velocidades de fase e de grupo.

(b) Repita a alínea anterior para o modo TM_{11}.

17 Um guia de onda rectangular preenchido com ar e com dimensões $a = 4$ cm e $b = 2$ cm transporta no modo dominante uma potência média de 2 mW. Se a frequência de operação for de 10 GHz, determine o valor de pico do campo eléctrico no guia de onda.

18 Um guia de onda rectangular está preenchido por dois materiais dieléctricos diferentes, tal como mostra a figura.



(a) Mostre que para os modos TE_{m0} de frequência angular ω se verifica a condição

$$h_1 \tan(h_2 d) + h_2 \tan(h_1(a-d)) = 0,$$

onde $h_1^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon_1$ e $h_2^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon_2$ e γ é a constante de propagação.

(b) Determine a frequência de corte para o modo TE_{10} resolvendo a equação anterior para $\gamma = 0$. Considere que $a = 2.286$cm, $d = a/2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ e $\varepsilon_{r2} = 2.25$.

19 Um guia rectangular ($a = 5$ cm; $b = 2$ cm), preenchido com ar, opera a uma frequência de 1 GHz. Para o modo TM_{21} e considerando que a amplitude máxima de E_z em $z = 0$ é 1 kV/m:

(a) Mostre que não existe propagação a esta frequência (modo evanescente);

(b) Determine a distância da fonte para a qual E_z vale 0.5% da sua amplitude em z=0;

(c) Admita agora que a frequência é de 20 GHz. Determine:

i. A constante de fase e a impedância característica;

ii. A potência média transmitida pelo guia.

20 Num guia de onda rectangular com dimensões $a = 4$ cm e $b = 2$ cm e preenchido com ar, que opera a 18 GHz, tem-se

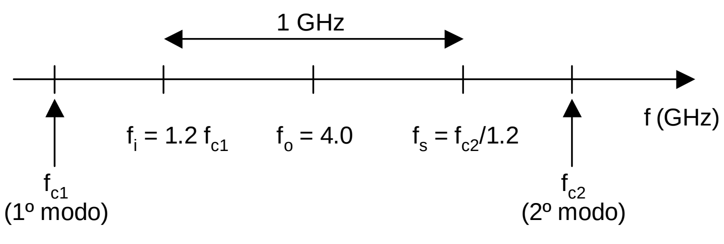
$$E_z = 20 \sin(50\pi x) \sin(100\pi y) e^{-j\beta z}.$$

(a) Que modo se propaga no guia? Qual a sua frequência de corte?

(b) Determine β e v_g.

(c) Calcule a potência média transportada.

21 Pretende-se projectar um guia de ondas rectangular para transmissão de frequências numa banda de 1.0 GHz com uma frequência central de 4.0 GHz. Entre os extremos da banda e as frequências de corte do primeiro e do segundo modos deve incluir-se uma margem de segurança de 20%.



(a) Determine as dimensões a e b do guia, admitindo que o guia está preenchido com ar.

(b) Admita agora que este guia (mesmas dimensões a e b) é preenchido com um dieléctrico com $\epsilon_r = 3.2$. Quais os modos que se propagam na banda especificada?

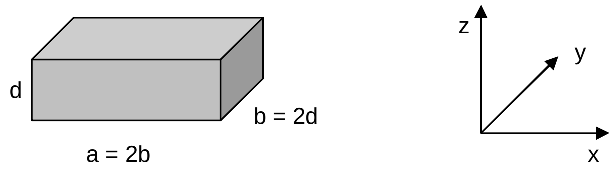
22 Uma cavidade rectangular preenchida com ar tem as seguintes dimensões: $a = 5$ cm, $b = 4$ cm e $d = 10$ cm. Determine os cinco modos mais baixos da cavidade.

23 Uma cavidade rectangular tem as seguintes dimensões: $a = 4$ cm, $b = 3$ cm e $d = 5$ cm. Determine o modo dominante e a sua frequência de ressonância quando

(a) a cavidade estiver preenchida com ar;

(b) a cavidade estiver preenchida com um dieléctrico sem perdas com uma constante dieléctrica igual a 2.5.

24 Uma cavidade rectangular, preenchida com ar, apresenta a seguinte relação entre dimensões: $a = 2b = 4d$.



(a) Dimensione a cavidade para que a frequência de ressonância do modo dominante seja 6 GHz.

(b) Mostre que no modo dominante de uma cavidade rectangular o campo eléctrico se encontra polarizado paralelamente à dimensão mais curta. Considere que a dimensão mais curta se encontra segundo a dimensão z.

25 Partindo das equações $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$ e $\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$ em coordenadas cilíndricas, obtenha as expressões das componentes transversais (segundo r e ϕ) de $\vec{E}$ e $\vec{H}$ em função das componentes longitudinais (segundo z).

26 Uma solução da seguinte equação diferencial de Bessel

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr} + R(r) = 0$$

obtém-se considerando que $R(r)$ é da forma $R(r) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m$. Substituindo esta expressão na equação diferencial, determine a expressão geral dos coeficientes a_m.

27 Mostre que as funções de Bessel de 1^a espécie satisfazem as seguintes condições.

(a) $J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]$.

(b) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Nota: $\frac{1}{(-n)!} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

28 Um guia de onda circular preenchido com ar tem um diâmetro de 90 mm. Determine:

(a) Os modos TE e TM guiados à frequência de 500 MHz.

(b) A velocidade relativa (v/c) de cada um dos modos à frequência de 1.1 vezes a frequência de corte do modo.

29 Um sinal de 10GHz é transmitido num guia de onda circular preenchido com ar.

(a) Sabendo que a frequência de corte mais baixa do guia é 20% inferior à frequência do sinal transmitido, determine o diâmetro do guia.

(b) Se o guia operar agora a 15GHz, determine os modos que se podem propagar.

30 Considere um guia circular de raio 1 cm, preenchido com ar, operando à frequência de 19 GHz.

(a) Determine os modos que se podem propagar a esta frequência.

(b) Determine a expressão do vector médio de Poynting para o modo TM_{01}.

(c) Determine a largura de banda máxima de um sinal que apenas se propague no modo dominante.

31 Considere um guia circular de raio 2 cm, preenchido com um dieléctrico de parâmetros $(4\varepsilon_0, \mu_0)$.

(a) Supondo que o guia opera a 4 GHz, determine os modos que se podem propagar.

(b) Nas condições da alínea anterior, determine o vector médio de Poynting para o modo TE_{11}.

(c) Determine a gama de frequências $[f_{\text{mín}}, f_{\text{máx}}]$ em que o guia deverá operar se se pretender que apenas se propague o modo dominante e que a atenuação dos outros modos seja sempre superior a 200 dB/m.

32 Uma cavidade cilíndrica circular tem um comprimento igual ao seu diâmetro. Sabendo que a cavidade oscila à frequência de 10 GHz no modo TM_{010}, determine o comprimento da cavidade.

33 Uma cavidade cilíndrica circular tem um comprimento igual ao seu raio e está preenchida com ar. Determine os sete modos mais baixos da cavidade.

34 Uma cavidade cilíndrica circular tem um comprimento igual ao raio e está preenchida com ar.

(a) Sabendo que o modo TE_{211} oscila à frequência de 6 GHz determine as dimensões da cavidade.

(b) Determine a frequência de ressonância mais baixa da cavidade, indicando o modo que lhe corresponde.

35 Mostre que a velocidade de propagação de uma onda electromagnética num guia dieléctrico está compreendida entre a de uma onda plana no meio dieléctrico e a de uma onda plana no meio exterior ao guia.

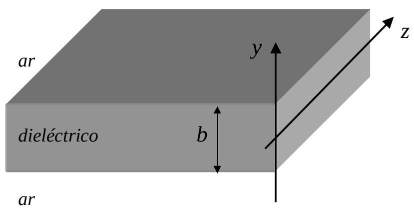
36 Um guia de onda dieléctrico planar com parâmetros constitutivos $\mu = \mu_0$ e $\varepsilon = 2.5\varepsilon_0$ encontra-se no ar. Determine a espessura mínima do dieléctrico para que um modo TM ou TE do tipo par se possa propagar à frequência de 20 GHz.

37 Considere um guia dieléctrico planar com uma espessura b e parâmetros (μ, ε) localizado no ar.

(a) Determine a densidade de potência média propagada ao longo do guia pelo modo TM dominante.

(b) Determine a potência média transmitida na direcção transversal.

38 Considere um guia dieléctrico planar constituído por um dieléctrico com $\varepsilon_r = 2$ e espessura 2 cm colocado no ar. Neste guia propaga-se um modo TM par de frequência 12 GHz. A componente longitudinal do campo eléctrico no interior do dieléctrico é dada por $E_z = 10\cos(h_d y)e^{-j\beta z}$ (V/m).

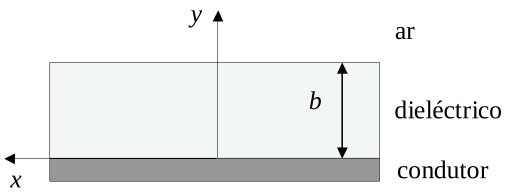


(a) Determine as restantes componentes do vector campo eléctrico no dieléctrico.

(b) Sabendo que $h_d = 229.7\ \mathrm{m}^{-1}$, calcule o coeficiente de decaimento ν dos campos no ar e a constante de fase β.

(c) Nas condições da alínea anterior, obtenha a expressão da componente longitudinal do campo eléctrico no ar.

39 Considere um guia de onda dieléctrico planar constituído por uma placa dieléctrica de parâmetros (μ, ε) e espessura b e uma base condutora perfeita.



Sabendo que o guia está colocado no ar, determine, para os modos TE,

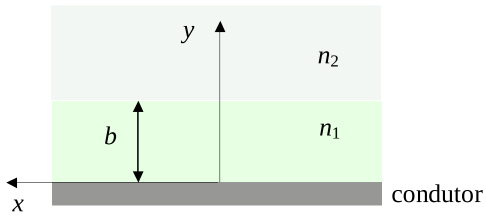
(a) as expressões dos fasores dos campos eléctrico e magnético;

(b) a equação característica para estes modos;

(c) a frequência de corte dos diferentes modos.

40 Determine, para o guia do problema anterior, as expressões dos fasores das densidades superficiais de carga e de corrente na base condutora do guia.

41 Considere um guia de onda dieléctrico planar constituído por uma placa dieléctrica com índice de refracção n_1 e espessura b e uma base condutora perfeita.



Sabendo que o guia está situado no interior de um meio infinito com índice de refracção n_2 ($n_2 < n_1$), determine, para os modos TM,

(a) a equação característica;

(b) a frequência de corte dos diferentes modos.

42 Um tubo cilíndrico de um material dielétrico transparente pode ser usado para guiar luz como resultado do fenómeno de reflexão interna total. Determine a constante dielétrica mínima do meio de modo que uma onda incidente num dos extremos, com um ângulo θ_i, seja guiada no tubo até emergir no outro extremo.

43 Considere uma fibra óptica com um índice de refracção do núcleo e bainha igual a 1.48 e 1.46 respectivamente. Determine:

(a) A abertura numérica da fibra.

(b) O valor máximo do núcleo que garante propagação de um só modo (monomodo) para o comprimento de onda de operação de $1.3\,\mu$m.

44 Os índices de refracção do núcleo e da bainha de uma fibra óptica são, respectivamente, $n_1 = 1.5$ e $n_2 = 1.45$.

(a) Determine o raio máximo do núcleo que garante a propagação de um só modo para uma frequência de 2×10^{14} Hz.

(b) Explique a razão pela qual as fibras monomodo são preferidas na transmissão de informação a grandes distâncias.

Problemas recolhidos de várias fontes:

- Folhas de problemas de Electrotecnia Teórica, LEEC-FEUP
- Exames de Electrotecnia Teórica, LEEC-FEUP
- D. Cheng, "Field and Wave Electromagnetics", Addison-Wesley

— Antenas e Radiação —

1 O vector potencial magnético de um dipolo eléctrico elementar é dado por

$$\vec{\mathbf{A}}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \cdot \frac{e^{-j\beta r}}{r}\,\hat{\mathbf{z}}.$$

(a) Determine o campos eléctrico e magnético correspondentes.

(b) Obtenha as aproximações para o campo distante ($\beta r \gg 1$).

2 O vector potencial magnético de um dipolo magnético elementar é dado por

$$\vec{\mathbf{A}}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I b^2}{4} \cdot \frac{\sin\theta e^{-j\beta r}(1 + j\beta r)}{r^2}\,\hat{\phi}.$$

(a) Determine o campos eléctrico e magnético correspondentes.

(b) Obtenha as aproximações para o campo distante ($\beta r \gg 1$).

3 Usando os resultados do exercício anterior determine:

(a) a potência média radiada;

(b) a resistência de radiação;

(c) a intensidade de radiação.

4 Esboce os diagramas de radiação no plano-E e no plano-H para o dipolo magnético elementar.

5 Determine o ganho direccional e a directividade de um dipolo magnético elementar.

6 A intensidade de radiação de uma antena é $5|\cos\theta|$ W/sr.

(a) Determine a potência radiada pela antena.

(b) Determine o ganho direccional da antena

(c) Determine a densidade máxima de potência radiada à distância de 500 m. Considerando que para esta distância é válida a aproximação de onda plana, determine a amplitude do campo eléctrico.

7 O campo distante de uma antena é caracterizado pelo seguinte campo eléctrico

$$\vec{\mathbf{E}} = \begin{cases} 4\cos(2\theta)\hat{\theta} & 0 \le \theta \le \pi/4 \\ \cos(2\theta)\hat{\theta} & \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4 \\ 0 & 3\pi/4 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Determine:

(a) a potência total radiada;

(b) o ganho direccional;

(c) a directividade.

8 Considerando que a radiação no plano-H de uma antena é caracterizada por

$$|A(\phi)| = \left|\frac{\sin(5\phi/2)}{5\sin(\phi/2)}\right|,$$

(a) esboce o diagrama de plano-H;

(b) determine a largura do feixe principal entre os primeiros zeros.

9 O fasor da distribuição espacial de corrente numa antena dipolar curta de comprimento $2h$ ($h \ll \lambda$), alimentada no ponto central, é dado por

$$I(z) = I_0\left(1 - \frac{|z|}{h}\right).$$

Determine:

(a) os campos eléctrico e magnético na região distante;

(b) a resistência de radiação;

(c) a directividade.

10 Esboce o diagrama de plano-H para uma antena constituída por dois dipolos eléctricos elementares, separados de d e com diferença de fase ξ, quando:

(a) $d = \lambda/4$, $\xi = \pi/2$;

(b) $d = 3\lambda/4$, $\xi = \pi/2$.

11 Considere um agregado linear de 12 dipolos eléctricos elementares idênticos, separados de $\lambda/2$.

(a) Esboce o factor de grupo normalizado.

(b) Determine a direcção e a largura do feixe principal entre os primeiros zeros, quando $\xi = -\pi$.

Os problemas 9, 10 e 11 foram adaptados de:

- D. Cheng, "Field and Wave Electromagnetics", Addison-Wesley

— Conceitos Fundamentais —

1 **(a)** $L = 10e^{j\frac{\pi}{4}}$

(b) $M = 3e^{j\frac{\pi}{3}}$

(c) $N = 0$

(d) $\vec{R} = 2\hat{\mathbf{x}} + e^{-j60^o}\hat{\mathbf{z}}$

(e) $S(x) = 20e^{-3x}e^{j\frac{\pi}{3}}$

(f) $\vec{U}(x, y) = 5e^{-10x}e^{-j40y}\hat{\mathbf{z}}$

2 **(a)** $a(t) = -5\cos(\omega t)$

(b) $b(t) = \sqrt{34}\cos(\omega t + \tan^{-1}(\frac{3}{5}))$

(c) $c(t) = \sqrt{13}\cos(\omega t + \pi - \tan^{-1}(\frac{2}{3}))$

(d) $d(t) = 3\cos(\omega t - \frac{\pi}{3}))$

(e) $e(x, t) = 3e^{3x}\cos(\omega t + \frac{\pi}{6}))$

(f) $f(y, x, t) = 5e^{4y}\cos(\omega t - 2x))$

3 —

4 —

5 —

6 —

7 —

8 —

9 **(a)** $v = 10^2$ m/s

(b) $u(x, t) = 10\cos(10x + 10^3 t)$
$f = \frac{500}{\pi}$ Hz

(c) $u(x, t) = 2\cos(0.2x - 0.2 + 20t)$
$\lambda = 10\pi$ m

10 $\lambda = 0.3$ m

11 $\lambda = 10$ m
$v = 10^8$ m/s

12 $f = 1.5$ GHz

13 **(a)** $k = 40\pi$ m^{-1}

(b) segundo $+x$: 2 mA
segundo $-x$: 0.5 mA

— Linhas de Transmissão —

1 $l/\lambda \leq 0.01$

- **(a)** $l/\lambda = 6.67 \times 10^{-6}$ desprezável
- **(b)** $l/\lambda = 0.01$ desprezável
- **(c)** $l/\lambda = 0.2$ não desprezável
- **(d)** $l/\lambda = 0.33$ não desprezável

2 —

3 $R = 1.0\,\Omega/\text{m}$, $L = 1.67 \times 10^{-7}\,\text{H/m}$, $G = 0$, $C = 1.72 \times 10^{-10}\,\text{F/m}$

4
- **(a)** $R = 0.788\,\Omega/\text{m}$, $L = 139\,\text{nH/m}$, $G = 9.1\,\text{mS/m}$, $C = 181\,\text{pF/m}$
- **(b)** $\alpha = 0.143\,\text{Np/m}$, $\beta = 31.5\,\text{rad/m}$, $Z_0 = 27.7 + j0.098\,\Omega$, $v_f = 2 \times 10^8\,\text{m/s}$

5 $R = 2\,\Omega/\text{m}$, $L = 200\,\text{nH/m}$, $G = 0.8\,\text{mS/m}$, $C = 80\,\text{pF/m}$, $\lambda = 1\,\text{m}$

6
- **(a)** $R = 0.8\,\Omega/\text{m}$, $L = 38.2\,\text{nH/m}$, $G = 0.5\,\text{mS/m}$, $C = 23.9\,\text{pF/m}$
- **(b)** $l = 172.7\,\text{m}$

7
- **(a)** $Z_0 = 70.75\angle -1.37^\circ = 70.73 - j1.69\,\Omega$
- **(b)** $\gamma = 2.12 \times 10^{-4} + j8.89 \times 10^{-3}\,\text{m}^{-1}$
- **(c)** $v_f = 7.07 \times 10^5\,\text{m/s}$
- **(d)** $3.68\,\text{dB}$

8 $\beta = 798\,\text{rad/m}$, $v_f = 3.54 \times 10^7\,\text{m/s}$

9 $Z_i = 60 + j20\,\Omega$

10 $\lambda/4$

11 —

12
- **(a)** $\Gamma = 0.632e^{-j71.6^\circ}$
- **(b)** $\text{SWR} = 4.43$
- **(c)** $z'_{\max}(1) = 2\,\text{cm}$
- **(d)** $z'_{\min}(1) = 0.75\,\text{cm}$

13 $Z_L = 83.24 - j51.27\,\Omega$

14 $\Gamma = 0.307e^{132.5^\circ}$, $\text{SWR} = 1.886$, $Z_i = 64.8 - j38.3\,\Omega$

15 —

16 —

17
- **(a)** $\Gamma_L = 0.620e^{-j29.74^\circ}$
- **(b)** $Z_i = 17.855e^{45.44^\circ} = 12.53 - j12.72\,\Omega$
- **(c)** $V_i = 1.4e^{-j34.0^\circ}$, $I_i = 78.4e^{11.4^\circ}$ (mA)

18
- **(a)** $Z_i = 60.25 + j38.79\,\Omega$
- **(b)** $I(z = 0) = 93.03\angle -21.15^\circ$ (mA)
- **(c)** $I(z = l/2) = 35.10\angle 281^\circ$ (mA)

19 **(a)** $\alpha = 0.0025\,\text{Np/m}$, $\beta = 2\,\text{rad/m}$, $v_f = 0.5 \times 10^8\,\text{m/s}$

(b) $Z_0 = 200\,\Omega$
$I(x,t) = 0.3e^{2.5\times10^{-3}x}\cos(10^8 t + 2x) - 0.06e^{-2.5\times10^{-3}x}\cos(10^8 t - 2x)\,\text{A}$

20 —

21 —

22 —

23 **(a)** $\Gamma_L = 0.352\angle 56°$

(b) $\text{SWR} = 2.088$

(c) $Z_i = 23.97 + j1.35\,\Omega$

24 $Z_0 = 40\,\Omega$, $Z_0' = 250\,\Omega$

25 —

26 **(a)** $\Gamma_L = 0.6\angle -135°$

(b) $Z_L = 14.25 - j19\,\Omega$

(c) $l_{\min} = 0.35\,\text{m}$, $R_{\min} = 12.5\,\Omega$

27 **(a)** $\Gamma_L = 0.24\angle 75°$

(b) $\text{SWR} = 1.65$

(c) $Z(l = 0.35\lambda) = 30 - j\,(\Omega)$

(d) $y(l = 0.35\lambda) = 1.7/50 + j0.08/50\,(\text{S})$

(e) 0.105λ

(f) 0.105λ

28 **(a)** $Z_{\text{in}} = -j154\,\Omega$

(b) 0.074λ

29 $Z_i = 95 - j70\,\Omega$

30 $d_1 = 0.104\lambda$, $l_1 = 0.173\lambda$; $d_2 = 0.314\lambda$, $l_2 = 0.327\lambda$

31 —

32 —

33 —

34 —

35 —

36 —

37 **(a)** $l_{A_1} = 0.375\lambda$, $l_{B_1} = 0.25\lambda$, $l_{A_2} = 0.125\lambda$, $l_{B_2} = 0.074\lambda$

(b) $l_{A_1} = 0.125\lambda$, $l_{B_1} = 0$, $l_{A_2} = 0.375\lambda$, $l_{B_2} = 0.324\lambda$

38 $Z_0' = 54.77\,\Omega$

39 —

40 **(a)** $d_1 = 0.053\lambda$

(b) $Z_0' = 106.07$

(c) $\mathrm{SWR} = 4.5$

(d) $\mathrm{SWR} = 2.1$

41 **(a)** $\Gamma_g = 1/3$, $\Gamma_L = -1/3$, $T = 5\,\mathrm{ns}$, $V_1^+ = 20\,\mathrm{V}$, $V_1^- = -6.67\,\mathrm{V}$, $V_2^+ = -2.22\,\mathrm{V}$, $V_2^- = 0.74\,\mathrm{V}$

(b) $V(0.5,t) = 0,\ 0 \le t < T/2$; $V(0.5,t) = 20\,\mathrm{V},\ T/2 \le t < 3T/2$
$V(0.5,t) = 13.33\,\mathrm{V},\ 3T/2 \le t < 5T/2$, $V(0.5,t) = 11.11\,\mathrm{V},\ 5T/2 \le t < 7T/2$
$V(0.5,t) = 11.85\,\mathrm{V},\ 7T/2 \le t < 9T/2$

42 —

43 $V(200,t) = 0\,\mathrm{V},\ 0\,\mu\mathrm{s} \le t < 1\,\mu\mathrm{s}$; $V(200,t) = 10\,\mathrm{V},\ 1\,\mu\mathrm{s} \le t < 2\,\mu\mathrm{s}$
$V(200,t) = 0\,\mathrm{V},\ 2\,\mu\mathrm{s} \le t < 3\,\mu\mathrm{s}$; $V(200,t) = -10\,\mathrm{V},\ 3\,\mu\mathrm{s} \le t < 4\,\mu\mathrm{s}$
$V(200,t) = 0\,\mathrm{V},\ 4\,\mu\mathrm{s} \le t < 5\,\mu\mathrm{s}$; $V(200,t) = 10/3\,\mathrm{V},\ 5\,\mu\mathrm{s} \le t < 6\,\mu\mathrm{s}$
$V(200,t) = 0\,\mathrm{V},\ 6\,\mu\mathrm{s} \le t < 7\,\mu\mathrm{s}$; $V(200,t) = -10/3\,\mathrm{V},\ 7\,\mu\mathrm{s} \le t < 8\,\mu\mathrm{s}$

44 **(a)** $V_g = 10\,\mathrm{V}$

(b) $l = 100\,\mathrm{m}$

(c) $R_L = 21.43\,\Omega$

45 —

— Ondas Electromagnéticas Planas—

1 $\vec{E}(y,t) = 3\cos(2\pi \cdot 10^9 t - 20\pi y + 2.098)\hat{\mathbf{x}} \quad (\mathrm{V/m})$
$\vec{H}(y,t) = \frac{3}{40\pi}\cos(2\pi \cdot 10^9 t - 20\pi y + 2.098 + \pi)\hat{\mathbf{z}} \quad (\mathrm{A/m})$

2 **(a)** $\lambda = 10\pi$ m

(b) $f = \frac{1.5}{\pi} \cdot 10^7$ Hz

(c) $\varepsilon_r = 1.67$

(d) $\vec{H}(z,t) = \frac{1}{144\pi}\cos(3 \cdot 10^7 t + 0.2z)\hat{\mathbf{x}} \quad (\mathrm{A/m})$

3 $\vec{E}(z=0,\ t=5\,\mathrm{ns}) = 10\sqrt{2}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (\mathrm{V/m})$
$\vec{E}(z=0,\ t=10\,\mathrm{ns}) = -20\hat{\mathbf{y}} \quad (\mathrm{V/m})$

4 **(a)** $f = \frac{10^8}{2\pi}$ Hz
$\lambda = 2\pi\sqrt{3}$ m

(b) $\varepsilon_r = 3$

(c) $\vec{H}(t,z) = \frac{1}{40\pi\sqrt{3}}\cos\left(10^8 t - \frac{z}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{20\pi\sqrt{3}}\cos\left(10^8 t - \frac{z}{\sqrt{3}}\right)\hat{\mathbf{y}} \quad (\mathrm{A/m})$

5 **(a)** $\hat{\mathbf{a}}_n = 0.8\hat{\mathbf{x}} + 0.6\hat{\mathbf{y}}$

(b) $\varepsilon_r = 4$

(c) $\vec{H} = \frac{E_0}{60\pi}e^{-j4\pi(4x+3y)}(0.6\hat{\mathbf{x}} - 0.8\hat{\mathbf{y}}) \quad (\mathrm{A/m})$

6 —

7 $A_D = A_E = A/2$

8 —

9 —

10 $\alpha = 58.84$ Np/m
$\beta = 356.7$ rad/m
$\lambda = 0.0176$ m
$v_f = 4.316 \times 10^7$ m/s
$\eta = 53.51 e^{j\,0.1635}$ (Ω)

11 **(a)** $\sigma = 1.007 \times 10^{-2}$ S/m

(b) $\lambda = 10\pi$ m

(c) $v_f = \pi \times 10^7$ m/s

12 —

13 —

14 —

15 $v_g = 0.75 \times 10^8$ m/s

16 **(a)** $\vec{E} = -\frac{60\beta}{\omega\varepsilon} \sin(\omega t - \beta y)\hat{\mathbf{x}} \quad (\mu\text{V/m})$

(b) $\vec{S}_{med} = \frac{1.8\beta}{\omega\varepsilon}\hat{\mathbf{y}} \quad (\text{nW/m}^2)$

17 $\vec{H} = \frac{1}{2\pi} e^{-j20z}(\hat{\mathbf{y}} - j\hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{A/m})$
$\vec{S}_{\text{med}} = \frac{60}{\pi}\,\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{W/m}^2)$

18 **(a)** $E_0 = 51.6$ V/m

(b) $H_0 = 0.194$ A/m

(c) $v = 1.06 \times 10^8$ m/s

(d) $\eta = 267\ \Omega$

19 —

20 —

21 **(a)** $v = 6.7 \times 10^7$ m/s
$\eta = 84.3\ \Omega$

(b) $\beta = 2.34\ \text{m}^{-1}$
$H_m = 0.0745$ A/m

(c) $\vec{S}_{\text{med}} = 0.4683\hat{\mathbf{z}}$ W/m^2

(d) $P_{\text{diss}} = 0$

22 **(a)** $\vec{E}_i(z) = 10 e^{-j\frac{4\pi}{3}z}(\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}}) \quad \text{V/m}$

(b) $\Gamma = -1/3 \qquad \tau = 2/3$

(c) $\vec{E}_r(z) = -\frac{10}{3} e^{j\frac{4\pi}{3}z}(\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}}) \quad \text{V/m}$
$\vec{E}_t(z) = \frac{20}{3} e^{-j\frac{8\pi}{3}z}(\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}}) \quad \text{V/m}$
$\vec{E}_{\text{ar}}(z) = \frac{20}{3}\left[e^{-j\frac{4\pi}{3}z} - j\sin\left(\frac{4\pi}{3}z\right)\right](\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}}) \quad \text{V/m}$

(d) $\frac{P_{\text{med,r}}}{P_{\text{med,i}}} = 1/9$
$\frac{P_{\text{med,t}}}{P_{\text{med,i}}} = 8/9$

23 **(a)** $\vec{E}_i(z) = 10e^{-j\frac{4\pi}{3}z}(\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}}) \quad \text{V/m}$

(b) $\Gamma = -0.2e^{-j0.0048}$
$\tau = 0.8e^{j0.0028}$

(c) $\vec{E}_r(z) = -2e^{j\left(-0.0048+\frac{4\pi}{3}z\right)}(\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}}) \quad \text{V/m}$
$\vec{E}_t(z) = 8e^{-0.012z}e^{-j(6.283z-0.0028)}(\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}}) \quad \text{V/m}$
$\vec{E}_{\text{ar}}(z) = \left[10e^{-j\frac{4\pi}{3}z} - 2e^{j\left(\frac{4\pi}{3}z-0.0048\right)}\right](\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}}) \quad \text{V/m}$

(d) $\frac{P_{\text{med,r}}}{P_{\text{med,i}}} = 0.04$
$\frac{P_{\text{med,t}}}{P_{\text{med,i}}} = 0.96$

24 **(a)** $\frac{Z}{Z_0} = 0.797 - j0.188$
$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{v_0} = 32.8 \times 10^{-3}$

(b) $\delta = 4.85$ mm

(c) -8.96 dB

(d) $\Gamma = -0.101 - j0.115 = 0.153e^{-j2.29}$

25 $d = 3.21$ cm

26 $\varepsilon_{r_2} = \sqrt{\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_3}}, \quad d = n\frac{\lambda_2}{4}$ (n ímpar)

27 —

28 —

29 —

30 —

31 **(a)** $\hat{\mathbf{a}}_{ni} = 0.8\hat{\mathbf{y}} + 0.6\hat{\mathbf{z}}$
$\theta_i = 53.1^{\text{o}}$

(b) $\vec{H}_i = \frac{E_0}{60\pi}e^{-j\pi(4y+3z)}(0.6\hat{\mathbf{y}} - 0.8\hat{\mathbf{z}}) \quad \text{(A/m)}$

(c) $\Gamma_\perp = e^{j153^{\text{o}}}$
$\vec{E}_r = E_0e^{j153^{\text{o}}}e^{-j\pi(4y-3z)}\hat{\mathbf{x}} \quad \text{(V/m)}$

(d) $\vec{E}_{\text{ar}} = 0.47E_0e^{j76.5^{\text{o}}}e^{-9.8z}e^{-j4\pi y}\hat{\mathbf{x}} \quad \text{(V/m)}$

32 **(a)** polarização circular direita

(b) reflectida: polarização elíptica direita
transmitida: polarização elíptica esquerda

33 **(a)** $\Gamma_\perp = -0.274$
$\tau_\perp = 0.726$

(b) $\vec{E}(x, z, t) = 36.3\cos\left[12\pi \times 10^{14}t - 6.4\pi \times 10^6(0.950z + 0.313x)\right]\hat{\mathbf{y}} \quad \text{(V/m)}$
$\vec{H}(x, z, t) = 0.154\cos\left[12\pi \times 10^{14}t - 6.4\pi \times 10^6(0.950z + 0.313x)\right](0.313\hat{\mathbf{z}} - 0.950\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{(A/m)}$

34 —

35 —

36 **(a)** $\Gamma_\perp = -0.431$

(b) 0.464 rad

— Guias de Onda e Cavidades —

1 —

2 Placa superior: $\rho_s = (-1)^n \frac{\gamma}{h} A_n e^{-\gamma z}$, $\vec{J}_s = (-1)^n \frac{j\omega\varepsilon}{h} A_n e^{-\gamma z}\hat{\mathbf{z}}$
Placa inferior: $\rho_s = -\frac{\gamma}{h} A_n e^{-\gamma z}$, $\vec{J}_s = -\frac{j\omega\varepsilon}{h} A_n e^{-\gamma z}\hat{\mathbf{z}}$

3 Placa superior: $\vec{J}_s = (-1)^{n+1} B_n e^{-\gamma z}\hat{\mathbf{x}}$
Placa inferior: $\vec{J}_s = B_n e^{-\gamma z}\hat{\mathbf{x}}$

4 **(a)** modo TM_1:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = A_1 \{\sin(\pi y/b)\cos(\omega t - \beta z)\hat{\mathbf{z}} + \beta b/\pi \cos(\pi y/b)\cos(\omega t - \beta z - \pi/2)\hat{\mathbf{y}}\}$$
$$\vec{H}(x,y,z,t) = \omega\varepsilon b/\pi A_1 \cos(\pi y/b)\cos(\omega t - \beta z + \pi/2)\hat{\mathbf{x}}$$

modo TE_1:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \omega\mu b/\pi B_1 \sin(\pi y/b)\cos(\omega t - \beta z + \pi/2)\hat{\mathbf{x}}$$
$$\vec{H}(x,y,z,t) = B_1 \{\cos(\pi y/b)\cos(\omega t - \beta z)\hat{\mathbf{z}} + \beta b/\pi \sin(\pi y/b)\cos(\omega t - \beta z + \pi/2)\hat{\mathbf{y}}\}$$

(b) —

5 **(a)** $(f_c)_{\mathrm{TE}_1} = (f_c)_{\mathrm{TM}_1} = 15$ GHz
$(f_c)_{\mathrm{TE}_2} = (f_c)_{\mathrm{TM}_2} = 30$ GHz

(b) TEM, TM_1, TE_1, TM_2, TE_2.

6 —

7 **(a)** TE_1 e TM_1: $(f_c)_1 = 3\,\mathrm{GHz}$
TE_2 e TM_2: $(f_c)_2 = 6\,\mathrm{GHz}$
TE_3 e TM_3: $(f_c)_3 = 9\,\mathrm{GHz}$
TE_4 e TM_4: $(f_c)_4 = 12\,\mathrm{GHz}$
TE_5 e TM_5: $(f_c)_5 = 15\,\mathrm{GHz}$

(b) TE_n e TM_n:

n	f_c (GHz)	v_f (m/s)	λ (m)	β (rad/m)	Z_{TE} (Ω)	Z_{TM} (Ω)
1	3	3.03×10^8	0.015	131.8π	381.3	372.7
2	6	3.14×10^8	0.016	127.2π	395.2	359.6
3	9	3.36×10^8	0.017	119.0π	422.2	336.7
4	12	3.75×10^8	0.0187	106.7π	471.3	301.6
5	15	4.53×10^8	0.0227	88.19π	570.0	249.4

(c) $v_f = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$, $\beta = 133.3\pi\,\mathrm{rad/m}$, $\lambda = 0.015\,\mathrm{m}$, $Z_{\mathrm{TEM}} = 377\,\Omega$

(d) TE_n e TM_n:

n	α (Np/m)
1	14.9π
2	37.7π
3	58.5π
4	78.9π
5	99.1π

8 **(a)** TE_2

(b) $\beta = 111.8\pi\,(\mathrm{rad/m})$

(c) $107.3\pi\,(\Omega)$

(d) $\vec{E} = -6000\pi \sin(100\pi y) \sin(3\pi \times 10^{10}t - \beta z)\hat{\mathbf{x}}$ (V/m)
$\vec{H} = 25\sqrt{5} \sin(100\pi y) \sin(3\pi \times 10^{10}t - \beta z)\hat{\mathbf{y}} + 50 \cos(100\pi y) \cos(3\pi \times 10^{10}t - \beta z)\hat{\mathbf{z}}$ (A/m)

9 **(a)** TM_1, $f_c = 7.5$ GHz

(b) $\beta = 392.4$ rad/m

(c) $v_f = 1.92 \times 10^8$ m/s

(d) $\vec{E} = 40\,[-j1.25 \cos(100\pi y)\hat{\mathbf{y}} + \sin(100\pi y)\hat{\mathbf{z}}]\, e^{-j392.4z}$ (V/m)
$\vec{H} = j0.34 \cos(100\pi y) e^{-j392.4z}\hat{\mathbf{x}}$ (A/m)

(e) $\vec{S}_{\text{med}} = 8.5 \cos^2(100\pi y)\hat{\mathbf{z}}$ (W/m^2)

10 —

11 TE_{10}: $(f_c)_{10} = 3\,\text{GHz}$, $\beta = 615.75\,\text{rad/m}$, $v_f = 1.53 \times 10^8$ m/s, $Z_{\mathrm{TE}} = 192.34\,(\Omega)$
TM_{11} : $(f_c)_{11} = 8.078\,\text{GHz}$, $\beta = 529.67\,(\text{rad/m})$, $v_f = 1.78 \times 10^8$ m/s, $Z_{\mathrm{TM}} = 158.9\,(\Omega)$.

12 **(a)** $(f_c)_{10} = 15\,\text{GHz}$, $(f_c)_{20} = 30\,\text{GHz}$

(b) $\lambda = 1.67\,\text{cm}$, $\lambda_g = 3.02\,\text{cm}$

13 **(a)** TM_{21}

(b) $\beta = 241.4\,(\text{rad/m})$

(c) $E_y/E_x = (50/40)\tan(40\pi x)\cot(50\pi y)$

14 $(f_c)_{01} = 7.5\,\text{GHz}$, $(f_c)_{02} = 15\,\text{GHz}$,
$(f_c)_{10} = 3\,\text{GHz}$, $(f_c)_{20} = 6\,\text{GHz}$, $(f_c)_{30} = 9\,\text{GHz}$, $(f_c)_{40} = 12\,\text{GHz}$, $(f_c)_{50} = 15\,\text{GHz}$,
$(f_c)_{11} = 8.08\,\text{GHz}$, $(f_c)_{21} = 9.6\,\text{GHz}$, $(f_c)_{31} = 11.72\,\text{GHz}$, $(f_c)_{41} = 14.15\,\text{GHz}$.
Modos:
$\mathrm{TE}_{10}, \mathrm{TE}_{20}, \mathrm{TE}_{01}, \mathrm{TE}_{11}, \mathrm{TM}_{11}$, $\mathrm{TE}_{30}, \mathrm{TE}_{21}, \mathrm{TM}_{21}, \mathrm{TE}_{31}, \mathrm{TM}_{31}$,
$\mathrm{TE}_{40}, \mathrm{TE}_{41}, \mathrm{TM}_{41}, \mathrm{TE}_{02}, \mathrm{TE}_{50}$.

15 **(a)** TM_{13} ou TE_{13}

(b) $(f_c)_{13} = 28.57\,\text{GHz}$

(c) $\gamma = j\beta$, $\beta = 1.72 \times 10^3\,(\text{rad/m})$

(d) $(Z_{\mathrm{TE}})_{13} = 229.7\,(\Omega)$, $(Z_{\mathrm{TM}})_{13} = 154.6\,(\Omega)$

16 **(a)** $(f_c)_{10} = 1.74\,\text{GHz} < f$, $v_f = 3.33 \times 10^8\,(\text{m/s}) > c$, $v_g = 2.702 \times 10^8\,(\text{m/s})$

(b) $(f_c)_{10} = 3.88\,\text{GHz} < f$, $v_f = 12.3 \times 10^8\,(\text{m/s}) > c$, $v_g = 7.32 \times 10^7\,(\text{m/s})$

17 $E_0 = 63.77\,(\text{V/m})$

18 **(a)** —

(b) $(f_c)_{\mathrm{TE}_{10}} = 5.06\,\text{GHz}$

19 —

20 —

21 —

22 TE_{101}, TE_{011}, TE_{102}, TE_{012}, TM_{110}

23 **(a)** TE_{101}; $f_{\mathrm{TE}_{101}} = 4.80\,\text{GHz}$

(b) TE_{101}; $f_{\mathrm{TE}_{101}} = 3.04\,\text{GHz}$

24 —

25

$$H_r^0 = -\tfrac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z^0}{\partial r} - \frac{j\omega\epsilon}{r}\frac{\partial E_z^0}{\partial \phi}\right) \qquad H_\phi^0 = -\tfrac{1}{h^2}\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial H_z^0}{\partial \phi} + j\omega\epsilon\frac{\partial E_z^0}{\partial r}\right)$$

$$E_r^0 = -\tfrac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^0}{\partial r} + \frac{j\omega\mu}{r}\frac{\partial H_z^0}{\partial \phi}\right) \qquad E_\phi^0 = -\tfrac{1}{h^2}\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial E_z^0}{\partial \phi} - j\omega\mu\frac{\partial H_z^0}{\partial r}\right)$$

26 $a_m = 0,\ m$ ímpar; $\quad a_m = \frac{(-1)^{m/2}}{2^m[(m/2)!]^2},\ m$ par

27 —

28 —

29 **(a)** diâmetro $= 2.2\,\mathrm{cm}$

(b) $\mathrm{TM}_{01}, \mathrm{TE}_{11}, \mathrm{TE}_{21}$

30 —

31 —

32 $d = 23\,\mathrm{mm}$

33 TM_{010}, TE_{111}, TM_{110}, TM_{011}, TE_{211}, TM_{111}, TE_{011}

34 —

35 —

36 $d_{\min} = 6.1\,\mathrm{mm}$

37 **(a)** $\vec{S}_{\mathrm{med}} = \frac{\beta\omega\varepsilon A^2}{h_1^2}\cos^2(h_1 y)\hat{\mathbf{z}}$

(b) 0

38 —

39 **(a)** No interior do guia $(0 < y < b)$

$\vec{E} = \frac{j\omega\mu}{h_1} B\sin(h_1 y)e^{-j\beta z}\hat{\mathbf{x}}$

$\vec{H} = Be^{-j\beta z}\left(\cos(h_1 y)\hat{\mathbf{z}} + \frac{j\beta}{h_1}\sin(h_1 y)\hat{\mathbf{y}}\right)$

No ar $(0 < y < b)$

$\vec{E} = -\frac{j\omega\mu_0}{\nu} B\cos(h_1 b)e^{-\nu(y-b)}e^{-j\beta z}\hat{\mathbf{x}}$

$\vec{H} = B\cos(h_1 b)e^{-\nu(y-b)}e^{-j\beta z}\left(\hat{\mathbf{z}} - \frac{j\beta}{\nu}\hat{\mathbf{y}}\right)$

(b) $\nu = -\frac{\mu_0}{\mu}h_1\cot(h_1 b)$

(c) $f_c = \frac{(n-1/2)}{2b\sqrt{\mu\varepsilon - \mu_0\varepsilon_0}}, \quad n = 1, 2, \ldots$

40 $\rho_S = 0; \qquad \vec{J}_S = Be^{-j\beta z}\hat{\mathbf{x}}$

41 **(a)** $\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2(n_1^2 - n_2^2) - h_1^2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 h_1\tan(h_1 b)$

(b) $f_c = \frac{(n-1)c}{2b\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}, \quad n = 1, 2, \ldots$

42 $\varepsilon_r > 1 + \sin^2\theta_i$

43 **(a)** $N.A. = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\,; \qquad \theta_a = \arcsin\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

(b) $N.A. = 0.986\,; \qquad \theta_a = 1.404\,\mathrm{rad}$

44 **(a)** $N.A. = 0.2425$

(b) $a < 2.05\,\mu\mathrm{m}$