Exercícios de Análise de Sinal

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Setembro 2006

recolha de problemas de diversos autores

edição feita por:
H. Miranda, J. Barbosa (2000)
M. I. Carvalho, A. Matos (2003,2006)

Conteúdo

Folha 1

Complexos

Um número complexo z pode ser expresso de várias formas. As mais habituais são as seguintes:

- forma *cartesiana* ou *rectangular*: $z = x + jy$
- forma *polar*: $z = re^{j\theta}$

em que:

- x e y são, respectivamente, a parte real e imaginária de z: $x = \Re e\{z\}$ e $y = \Im m\{z\}$
- r e θ são, respectivamente, o módulo e fase de z: $r = |z|$ e $\theta = \angle z$
- $j = \sqrt{-1}$

A relação entre estas duas representações é expressa pela *equação de Eu*ler:

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta}$$

1 Para o número complexo $z = x + jy = re^{j\theta}$, exprima:

(**a**) r e θ em função de x e y
(**b**) x e y em função de r e θ

2 Usando a equação de *Euler,* prove as seguintes relações:

(**a**) $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$
(**b**) $\sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$
(**c**) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

3 Seja z_0 um número complexo de coordenadas polares (r_0,θ_0) e coordenadas cartesianas (x_0,y_0). Determine as expressões das coordenadas cartesianas dos números complexos representados a seguir. Represente ainda z_0, z_1, z_2 e z_3 no plano complexo quando $r_0 = 2$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

(**a**) $z_1 = r_0 e^{-j\theta_0}$
(**b**) $z_2 = r_0$
(**c**) $z_3 = r_0 e^{j(\theta_0+\pi)}$

4 Sendo o número complexo $z = x + jy = re^{j\theta}$, o número *complexo conjugado*, representado por z^*, é definido por: $z^* = x - jy = re^{-j\theta}$. Mostre que as seguintes relações são válidas:

(**a**) $zz^* = r^2$

(**b**) $\frac{z}{z^*} = e^{2j\theta}$

(**c**) $z + z^* = 2\,\Re e\{z\}$

(**d**) $z - z^* = 2j\,\Im m\{z\}$

5 Exprima cada um dos seguintes números complexos em coordenadas rectangulares e represente-os no plano complexo:

(**a**) $\frac{3+4j}{1-2j}$

(**b**) $2j\frac{(1+j)^2}{(3-j)}$

(**c**) $je^{1+j\frac{\pi}{2}}$

(**d**) $(1-j)^9$

6 Represente graficamente o módulo e a fase de cada uma das seguintes funções complexas de variável real:

(**a**) $f(x) = \cos(x)$

(**b**) $g(x) = \cos(x)e^{-jx}$

(**c**) $h(t) = \sin(2t)\,e^{jt}$

(**d**) $S(\omega) = (1 + \cos(2\omega))\,e^{-j3\omega}$

7 Prove a validade das seguintes expressões:

(**a**) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & , \quad \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & , \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$

(**b**) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha},\ |\alpha| < 1$

(**c**) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2},\ |\alpha| < 1$

(**d**) $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha},\ |\alpha| < 1$

8 Determine o valor de:

(**a**) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-j}{2}\right)^n$

(**b**) $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty} \left(\frac{1+j}{2}\right)^n$

(**c**) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1+j}{2}\right)^n$

(**d**) $\displaystyle\sum_{n=6}^{20} (1-j)^n$

Folha 2

Sinais

Decomposição em parte par e parte ímpar:

- sinal par: $x_p(t) = x_p(-t) \qquad x_p(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$
- sinal ímpar $x_i(t) = -x_i(-t) \qquad x_i(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$

Decomposição em componente contínua e alternada:

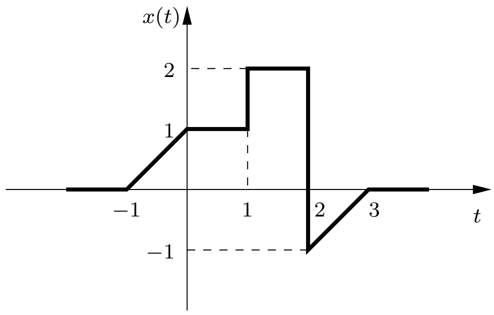
- componente contínua: $x_{\mathrm{DC}} = \langle x(t) \rangle$
- componente alternada: $x_{\mathrm{AC}} = x(t) - \langle x(t) \rangle$

A energia de um sinal é calculada por: $E\{x(t)\} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \qquad \left[E\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \right]$

Características dos sinais periódicos:

- valor médio: $\langle x(t) \rangle_T = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_T x(t) \mathrm{d}t \qquad \left[\langle x[n] \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \right]$
- potência média: $\langle x^2(t) \rangle_T = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_T x^2(t) \mathrm{d}t \qquad \left[\langle x^2[n] \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \right]$
- valor eficaz: $x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle_T}$

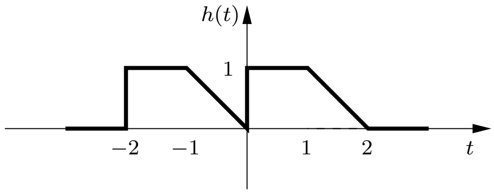
$\boxed{1}$ Considere o sinal $x(t)$ representado a seguir:



(**a**) represente $x(t-2)$

(**b**) represente $x(1-t)$

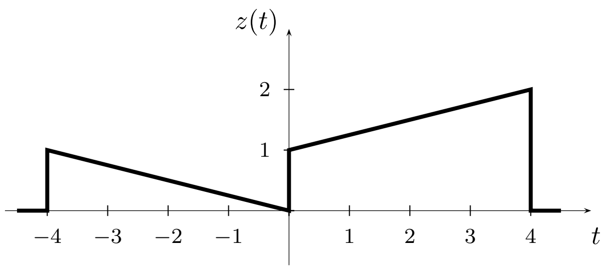
$\boxed{\mathbf{2}}$ O sinal $h(t)$ está representado na seguinte figura:



(**a**) represente $h(2-2t)$

(**b**) calcule a energia de $h(t)$

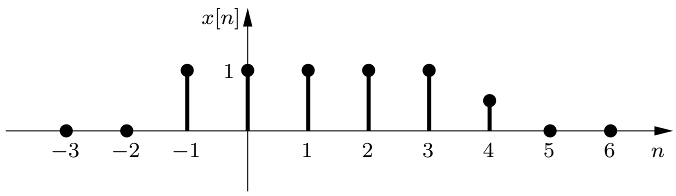
$\boxed{\mathbf{3}}$ Considere o sinal $z(t)$ representado na figura seguinte.



(**a**) Represente o sinal $z\left(2-\frac{t}{2}\right)$.

(**b**) Calcule a energia de $z(t)$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $x[n]$ é um sinal discreto ilustrado a seguir:



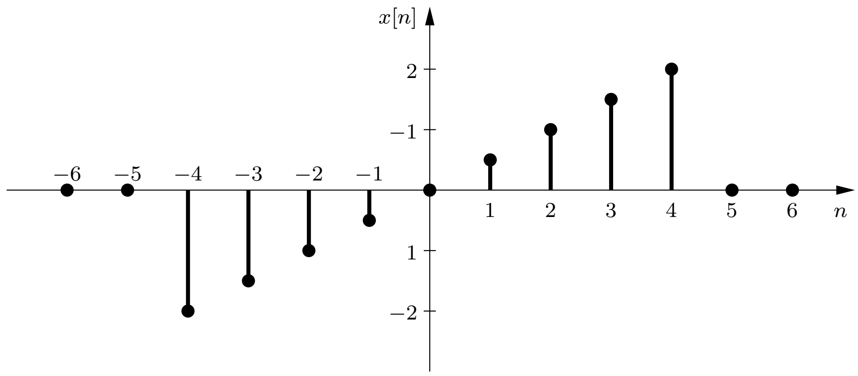
(**a**) represente $x[n-2]$

(**b**) represente $x[2n]$

(**c**) represente $x[2-2n]$

(**d**) calcule a energia de $x[n]$

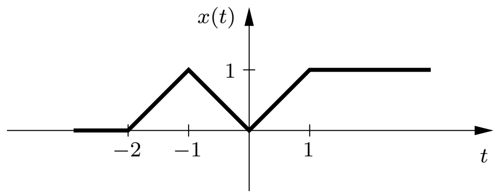
$\boxed{\mathbf{5}}$ Considere o sinal $h[n]$ representado na seguinte figura.



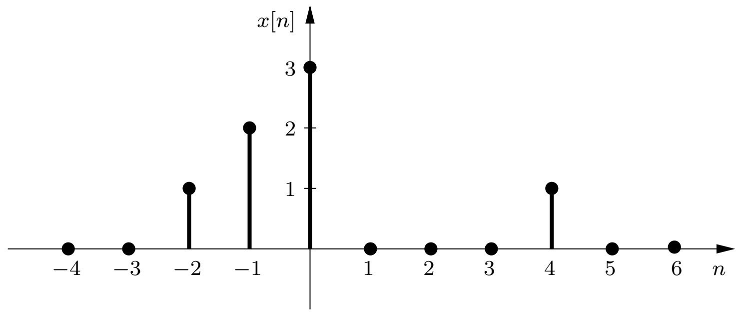
Represente $h[n+1](u[n+3]-u[-n])$ em que $u[n]$ é o degrau unitário discreto.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Faça a decomposição em parte par e parte ímpar dos seguintes sinais:

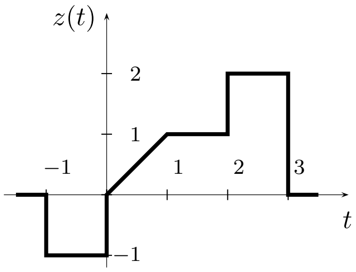
(**a**)



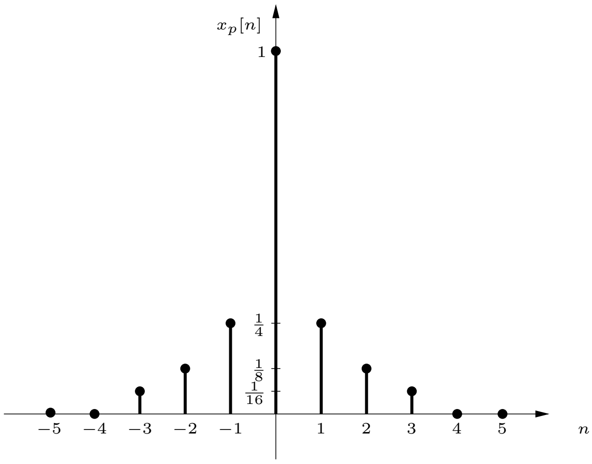
(**b**)



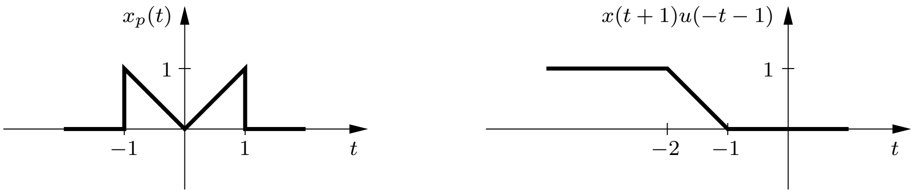
(**c**)



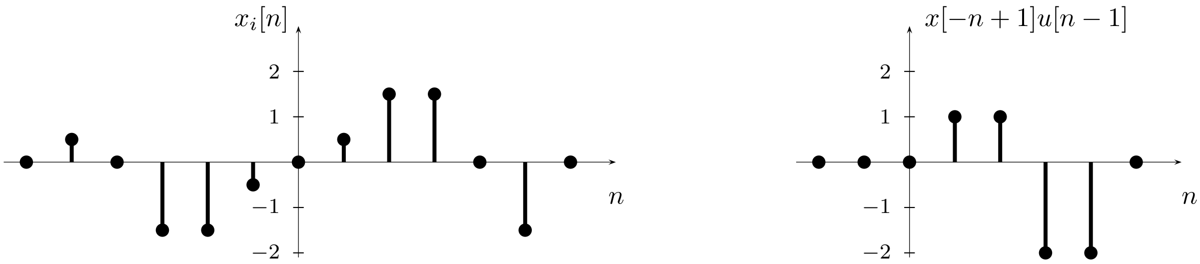
7 Conhecendo a parte par de $x[n]$, $x_P[n]$, e sabendo que $x[n] = 0$ para $n < 0$, determine $x[n]$.



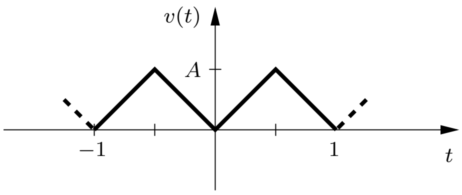
8 Conhecendo a parte par de $x(t)$, $x_P(t)$, e sabendo a forma de $x(t+1)u(-t-1)$, determine $x(t)$.



9 Conhecendo a parte ímpar de $x[n]$, $x_i[n]$, e sabendo a forma de $x[-n+1]u[n-1]$, determine $x[n]$.



10 Calcule, para o sinal periódico $v(t)$ representado a seguir:



(**a**) o valor médio: $\langle v(t) \rangle$

(**b**) a potência: $\langle v^2(t) \rangle$

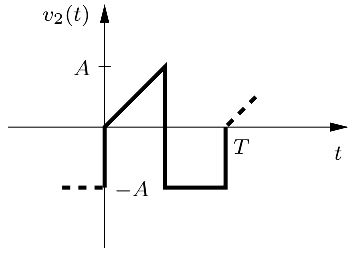
(**c**) o valor eficaz: v_{RMS}

(**d**) a componente alternada: $v_{\mathrm{AC}}(t)$

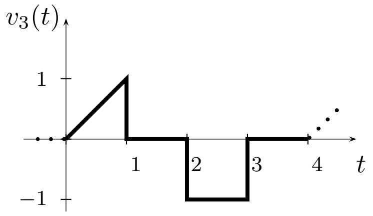
11 Determine o valor médio, a potência, o valor eficaz e a componente alternada dos seguintes sinais periódicos:

(**a**) $v_1(t) = \sin(t)$

(**b**)



(**c**)



Folha 3

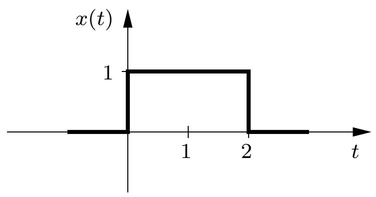
Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

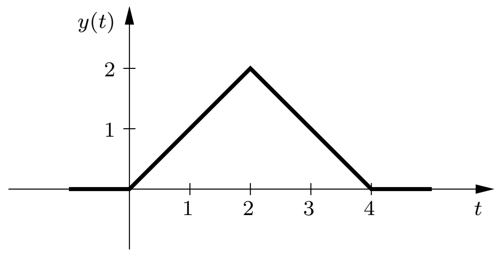
Um sistema diz-se *linear e invariante no tempo* (LTI) se:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x_n(t - t_n) \xrightarrow{\text{LTI}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n(t - t_n)$$

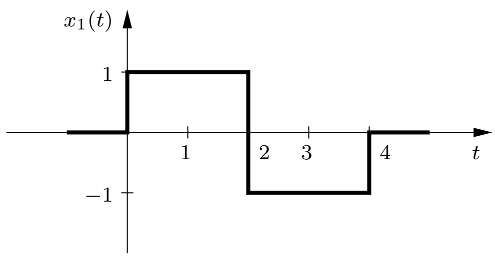
em que $y_n(t)$ é a resposta do sistema a $x_n(t)$.

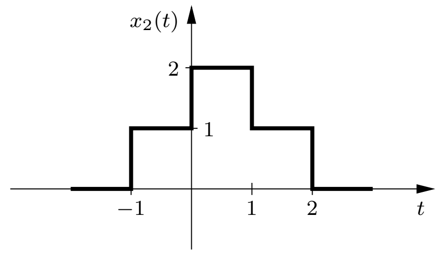
$\boxed{\mathbf{1}}$ Considere um sistema linear e invariante no tempo para o qual a resposta ao sinal $x(t)$ é o sinal $y(t)$.





Calcule as respostas do sistema aos sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$.





$\boxed{\mathbf{2}}$ Classifique os sistemas seguintes relativamente às qualidades de ter ou não memória, invariância no tempo, linearidade, causalidade e estabilidade.

(**a**) $y(t) = \mathrm{e}^{x(t)}$

(**b**) $y[n] = x[n]x[n-1]$

(**c**) $y(t) = x(t-1) - x(1-t)$

(**d**) $y[n] = x[2n]$

$\boxed{3}$ Para cada uma das seguintes relações entrada (x) saída(y), classifique o sistema correspondente quanto à linearidade e invariância no tempo

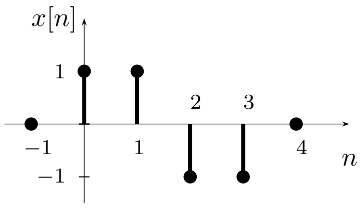
(**a**) $y(t) = t^2\, x(t-1)$

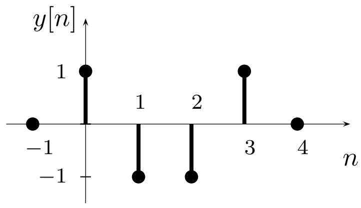
(**b**) $y[n] = x^2[n-2]$

(**c**) $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$

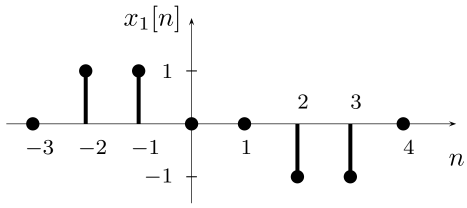
(**d**) $y(t) = x_i(t)$, onde $x_i(t)$ é a parte ímpar de $x(t)$.

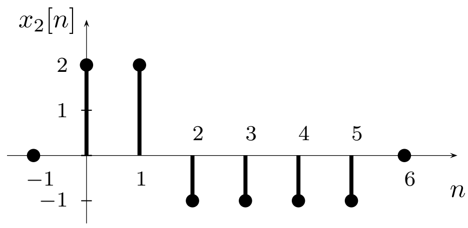
$\boxed{4}$ Considere um sistema linear e invariante no tempo para o qual a resposta ao sinal $x[n]$ é o sinal $y[n]$.





Determine a resposta deste sistema às entradas $x_1[n]$ e $x_2[n]$.





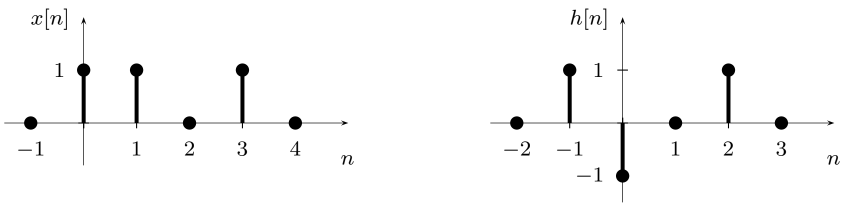
Folha 4

Convolução de Sinais

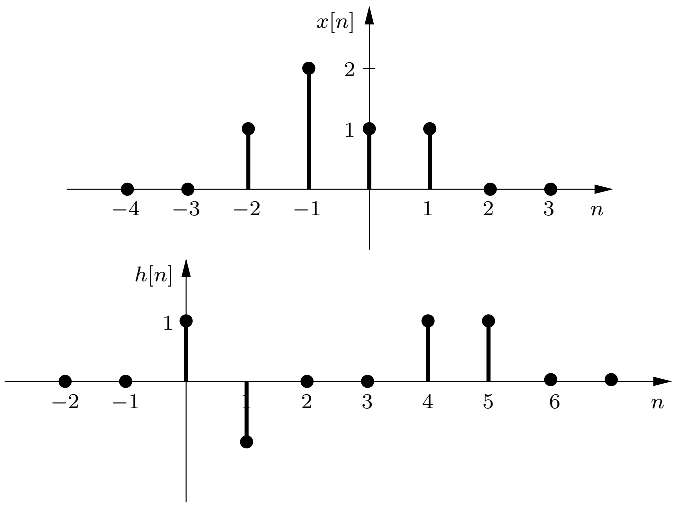
- Convolução discreta: $x[n] * h[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$
- Convolução contínua: $x(t) * h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$\boxed{1}$ Calcule a convolução $y[n]$ entre os sinais $x[n]$ e $h[n]$ representados a seguir:

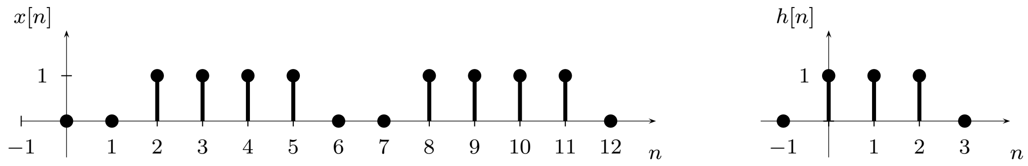
(**a**)



(**b**)

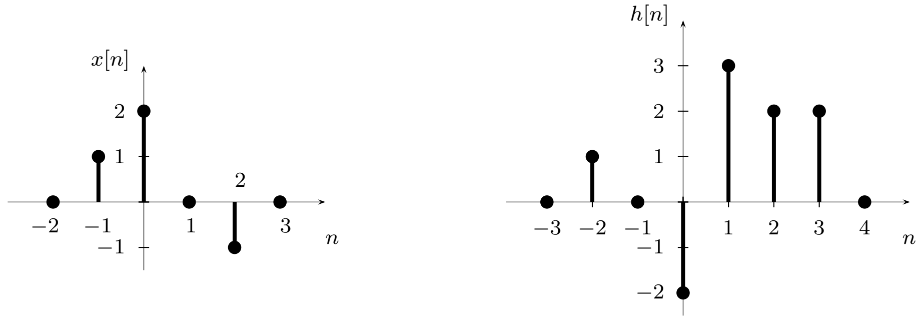


(**c**)



2 Calcule $(\alpha^n u[n]) * (\beta^n u[n])$.

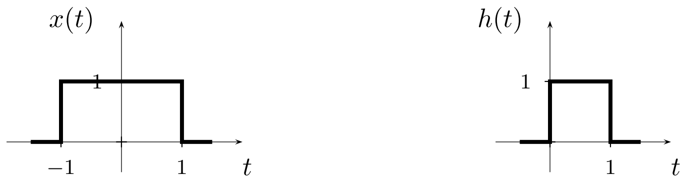
3 Considere os sinais $x[n]$ e $w[n]$ representados a seguir.



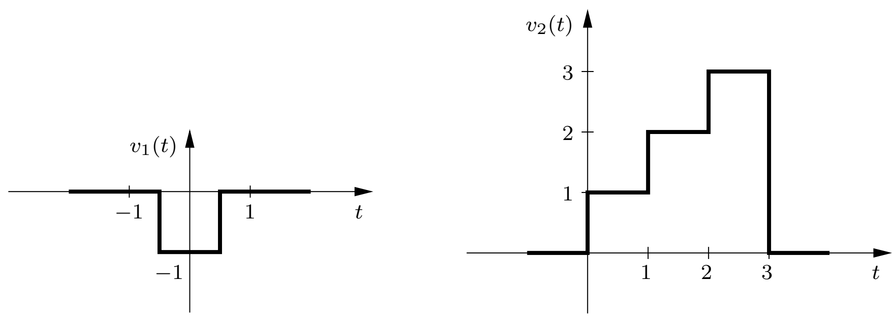
Sabendo que $w[n] = x[n] * y[n]$, determine o sinal $y[n]$.

4 Em cada um dos casos, determine a convolução entre os sinais indicados.

(**a**)

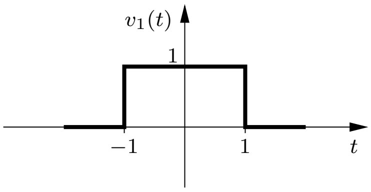


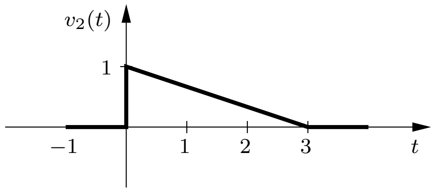
(**b**)



(**c**)

(d)





5 Calcule $\left(e^{-2t}u(t)\right) * \left(e^{-3t}u(t)\right)$.

Folha 5

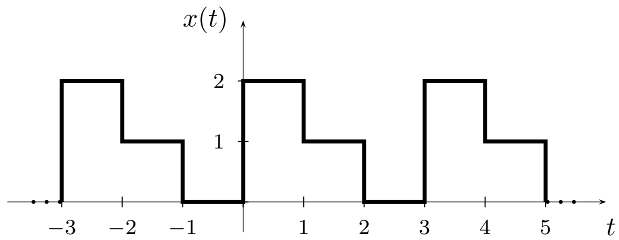
Série de Fourier para Sinais Contínuos

A *série de Fourier* de um sinal contínuo de período T_0 é expressa por:

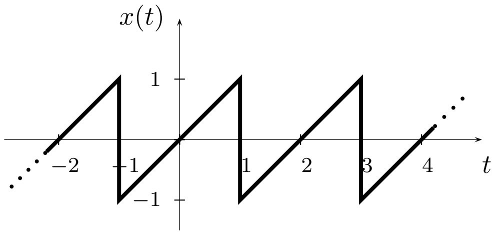
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\,, \qquad a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t\,, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$\boxed{1}$ Calcule os coeficientes da série de Fourier dos seguintes sinais.

(**a**)



(**b**)



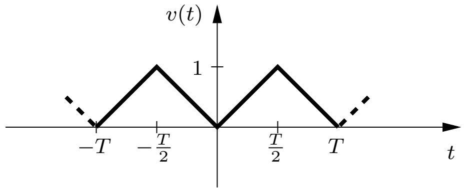
$\boxed{2}$ Calcule os coeficientes da série de Fourier do sinal $v(t) = \left|\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right|$.

$\boxed{3}$ Os coeficientes da série de Fourier de um sinal periódico $x(t)$ com período 4 são

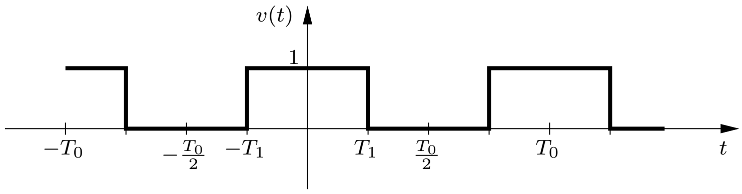
$$a_k = \begin{cases} j\,k, & |k| < 3 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

Determine $x(t)$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Calcule a série de Fourier de $v(t)$, representada a seguir:



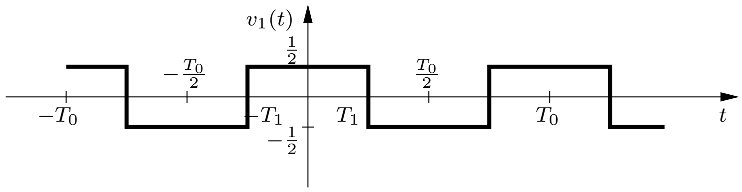
$\boxed{\mathbf{5}}$ (**a**) Mostre que o sinal $v(t)$



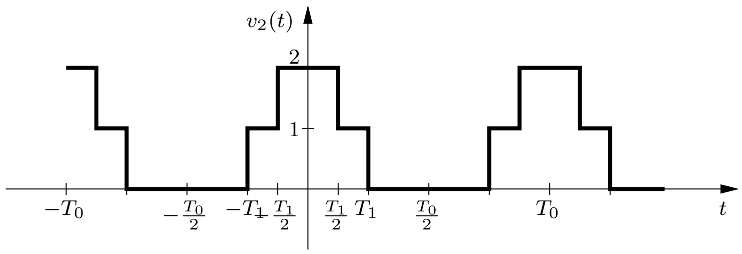
tem como série de Fourier $v(t) = \dfrac{2T_1}{T_0} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \cos(k\omega_0 t),\ \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$.

(**b**) Atendendo à série de Fourier de $v(t)$, determine a série de Fourier de:

i.



ii.



Folha 6

Transformada de Fourier para Sinais Contínuos

A *transformada de Fourier* de um sinal contínuo $x(t)$, representada por $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$, é expressa por:

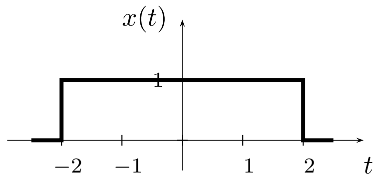
$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(\omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

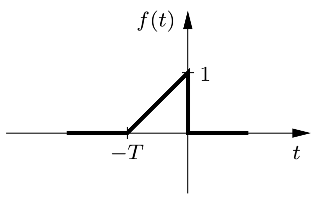
$\boxed{\mathbf{1}}$ Calcule a transformada de Fourier dos seguintes sinais:

(**a**) $x(t) = \delta(t-4)$.

(**b**)



(**c**)



(**d**) $f(t) = A$

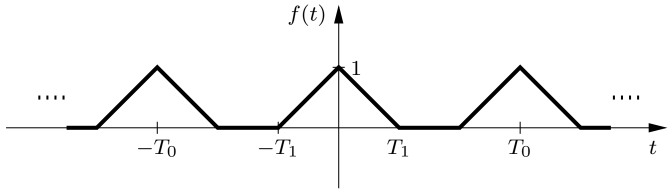
(**e**) $f(t) = e^{j\omega_0 t}$

(**f**) $f(t) = u(t)$

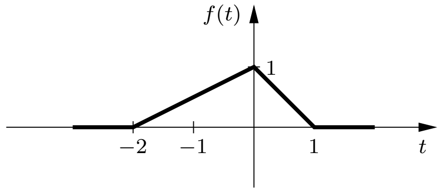
(**g**) $f(t) = u(t-1) - u(t-3)$

(**h**) $f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)[u(t+T) - u(t-T)]$

(**i**) $f(t)$ é periódica (período T_0)



(**j**)



2 Sendo $X(\omega)$ a transformada de Fourier de $x(t)$, exprima em função de $X(\omega)$ as transformadas dos seguintes sinais:

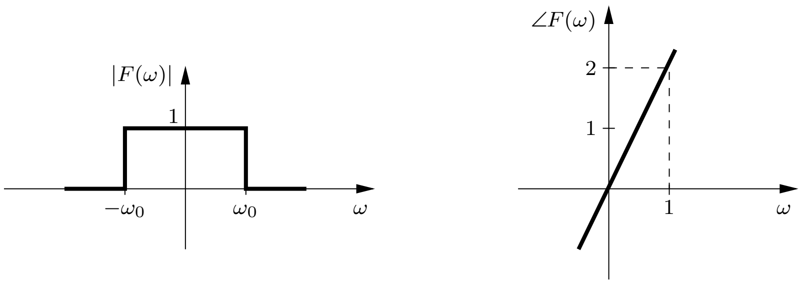
(**a**) $x_0(t) = x(2t)$

(**b**) $x_1(t) = x(3t-6)$

(**c**) $x_2(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t-1)$

(**d**) $x_3(t) = 2\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\,\frac{dx(t)}{dt} - 5x(t)$

3 O sinal $f(t)$ tem a transformada de Fourier da figura:



Obtenha $f(t)$ recorrendo às propriedades da transformada de Fourier.

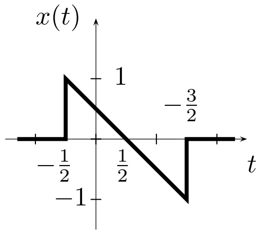
4 Diga, com base na respectiva transformada de Fourier, se os sinais seguintes são reais e pares:

(**a**) $X_1(\omega) = u(\omega) - u(\omega - 2)$

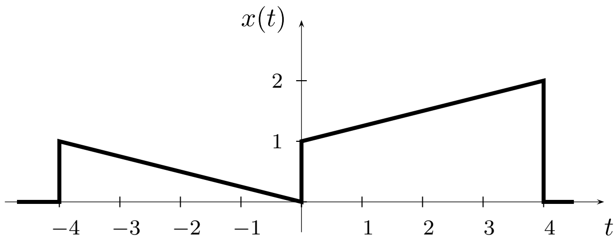
(**b**) $X_2(\omega) = A(\omega)e^{jB(\omega)}$, em que $A(\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$ e $B(\omega) = 2\omega + \frac{\pi}{2}$

5 Sabendo que $X(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ é a transformada de Fourier do sinal $x(t) = e^{-|t|}$, calcule a transformada de Fourier do sinal $te^{-|t|}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Determine a fase da transformada de Fourier do sinal representado na figura.



$\boxed{\mathbf{7}}$ Determine a parte imaginária da transformada de Fourier do sinal da figura. (Sugestão: utilize as propriedades da transformada de Fourier.)



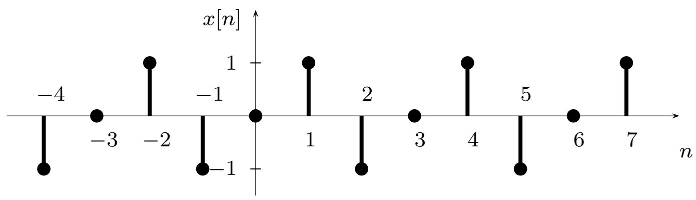
Folha 7

Série de Fourier para Sinais Discretos

A *série de Fourier* de um sinal discreto $x[n]$ de período N é expressa por:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, \qquad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

1 Considere o sinal periódico representado na figura.



(**a**) Calcule os coeficientes da série de Fourier do sinal.

(**b**) Determine o desenvolvimento em série de Fourier de $x[n]$.

2 Calcule os coeficientes da série de Fourier do sinal $x[n]$:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(4\delta[n-4m] + 8\delta[n-1-4m]\right)$$

3 Considere um sinal $x[n]$ real e ímpar de período $N = 7$. Sabendo que os coeficientes de Fourier a_{15}, a_{16}, a_{17} tem os seguintes valores:

$$a_{15} = j; \quad a_{16} = 2j; \quad a_{17} = 3j$$

Determine os coeficientes a_0, a_{-1}, a_{-2} e a_{-3}.

Folha 8

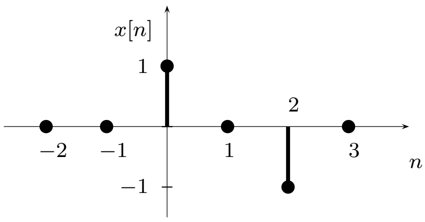
Transformada de Fourier para Sinais Discretos

A *transformada de Fourier* de um sinal discreto $x[n]$, representada for $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$, é expressa por:

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$X(\Omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Considere o sinal discreto da figura.



(**a**) $X(\Omega)$.

(**b**) Represente graficamente $|X(\Omega)|$ e $\angle X(\Omega)$.

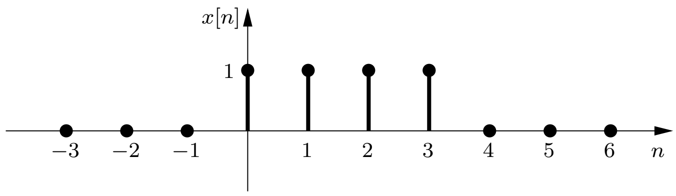
(**c**) Obtenha $x[n]$ a partir de $X(\Omega)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Calcule a transformada de Fourier dos seguintes sinais:

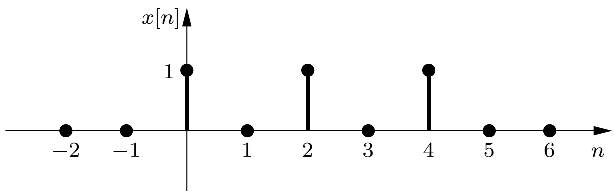
(**a**) $x_1[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$

(**b**) $x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Calcule a transformada de Fourier do sinal da seguinte figura:



$\boxed{\mathbf{4}}$ Calcule a transformada de Fourier do sinal da figura e represente-a em módulo e fase.



$\boxed{\mathbf{5}}$ Calcule a transformada inversa de $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 2j & , \quad 0 < \Omega \leq \pi \\ -2j & , \quad -\pi < \Omega \leq 0 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sabendo que $x[n]$ tem como transformada de Fourier $X(\Omega)$, calcule as transformadas dos seguintes sinais em função de $X(\Omega)$:

(**a**) $x_1[n] = x[1-n] + x[-1-n]$

(**b**) $x_2[n] = (n-1)^2 x[n]$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Considere um sistema discreto descrito pela seguinte equação às diferenças:

$$y[n] = x[n] - x[n-8]$$

Represente graficamente a sua resposta em frequência.

Folha 9

Decomposição em Fracções Simples

Dada uma função $G(x)$, fracção própria de dois polinómios, e supondo que o denominador tem raízes ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r, distintas, e de multiplicidade σ_1, σ_2, ..., σ_r, respectivamente, ou seja,

$$G(x) = \frac{P(x)}{(x-\rho_1)^{\sigma_1}(x-\rho_2)^{\sigma_2}\cdots(x-\rho_r)^{\sigma_r}},$$

é possível escrevê-la como uma soma de fracções, na forma

$$G(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{A_{i,k}}{(x-\rho_i)^k},$$

isto é,

$$\begin{aligned} G(x) = & \frac{A_{1,1}}{x-\rho_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-\rho_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,\sigma_1}}{(x-\rho_1)^{\sigma_1}} + \\ & + \frac{A_{2,1}}{x-\rho_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-\rho_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,\sigma_2}}{(x-\rho_2)^{\sigma_2}} + \\ & + \cdots + \\ & \frac{A_{r,1}}{x-\rho_r} + \frac{A_{r,2}}{(x-\rho_r)^2} + \cdots + \frac{A_{r,\sigma_r}}{(x-\rho_r)^{\sigma_r}}, \end{aligned}$$

sendo os coeficientes $A_{i,k}$ determinados pela expressão

$$A_{i,k} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} \left[\frac{d^{\sigma_i - k}}{dx^{\sigma_i - k}}\left[(x-\rho_i)^{\sigma_i}\, G(x)\right]\right]\Big|_{x=\rho_i}.$$

$\boxed{1}$ Decomponha as seguintes funções em fracções simples.

(a) $H(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$

(b) $F(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+4}$

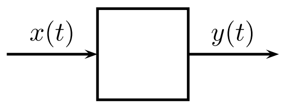
(c) $F(x) = \frac{1}{(x-3)^2(x-1)}$

(d) $G(x) = \frac{1}{(x-1)^3(x+2)}$

Folha 10

Sistemas Contínuos LTI

A entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ de um sistema contínuo LTI



estão relacionadas por

$$y(t) = h(t) * x(t),$$

onde $h(t)$ é a resposta impulsional do sistema. Pode ainda escrever-se

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega),$$

onde $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, $Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$, e $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ é a resposta em frequência do sistema.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Um dado sistema é caracterizado pela equação diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\,\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

onde $x(t)$ é a entrada do sistema e $y(t)$ a saída. Determine

(**a**) a resposta em frequência do sistema;

(**b**) a resposta impulsional do sistema;

(**c**) a saída do sistema quando $x(t) = e^{-2t}\,u(t)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Dois sistemas contínuos LTI, com respostas impulsionais $h_1(t) = e^{-2t}u(t)$ e $h_2(t) = e^{-3t}u(t)$, são ligados em série para constituírem um sistema composto, de resposta impulsional $h(t)$.

(**a**) Determine a resposta impulsional $h(t)$.

(**b**) O sistema composto pode ser descrito por uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Determine-a.

(**c**) Determine o sinal de saída do sistema composto quando o sinal de entrada é $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Considere um sistema contínuo LTI com resposta em frequência

$$H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2\sqrt{2}(j\omega) + 1} + \frac{1}{(2 + j\omega)^2}.$$

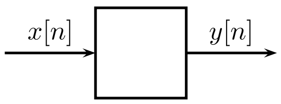
(**a**) Determine a resposta impulsional do sistema.

(**b**) Determine um equação diferencial linear de coeficientes constantes que relaciona a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ deste sistema.

Folha 11

Sistemas Discretos LTI

A entrada $x[n]$ e a saída $y[n]$ de um sistema contínuo LTI



estão relacionadas por

$$y[n] = h[n] * x[n],$$

onde $h[n]$ é a resposta impulsional do sistema. Pode ainda escrever-se

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega),$$

onde $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$, $Y(\Omega) = \mathcal{F}\{y[n])\}$, e $H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\}$ é a resposta em frequência do sistema.

1 Um sistema discreto LTI é caracterizado pela equação

$$8y[n] - 6y[n-1] + y[n-2] = 3x[n] - x[n-1]$$

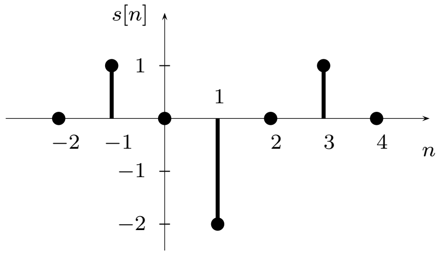
onde $x[n]$ é a entrada do sistema e $y[n]$ a saída. Determine

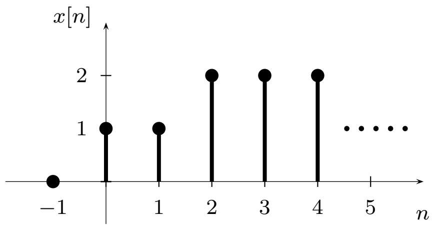
(**a**) a resposta em frequência do sistema;

(**b**) a resposta impulsional do sistema;

(**c**) a saída do sistema quando a entrada é $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$.

2 Considere os sinais





(**a**) Sabendo que $s[n]$ é a resposta indicial de um sistema discreto LTI, determine a sua resposta impulsional.

(**b**) Admitindo que $x[n]$ é a entrada do referido sistema, determine a sua saída.

$\boxed{\mathbf{3}}$ A resposta em frequência de um sistema discreto LTI é

$$H(\Omega) = \frac{6\left(5 - 2e^{-j\Omega}\right)}{e^{-j2\Omega} - 5e^{-j\Omega} + 6}.$$

Determine

(**a**) uma equação às diferenças que relacione a entrada e a saída do sistema;

(**b**) a resposta impulsional do sistema;

(**c**) a resposta indicial do sistema;

(**d**) a saída $y[n]$ quando a entrada é $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$.

Folha 12

Transformada de Laplace

A *transformada de Laplace* (bilateral) de um sinal contínuo $x(t)$, representada for $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, é expressa por:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Diga qual é a região de convergência da transformada de Laplace dos seguintes sinais:

(**a**) $x_1(t) = e^{-5t}u(t)$

(**b**) $x_2(t) = e^{-5t}u(-t)$

(**c**) $x_3(t) = e^{-5t}[u(t+5) - u(t-5)]$

(**d**) $x_4(t) = e^{-5t}$

(**e**) $x_5(t) = e^{-5|t|}$

(**f**) $x_6(t) = e^{-5|t|}u(-t)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Considere o sinal

$$x(t) = e^{-5t}u(t) + e^{-\beta t}u(t)$$

que tem a transformada de Laplace $X(s)$. Quais deverão ser as restrições impostas à parte real e à parte imaginária de β para que a região de convergência de $X(s)$ seja $\Re e\{s\} > -3$?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Quantos sinais têm uma transformada de Laplace que pode ser expressa por:

$$X(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)} \text{ ?}$$

Folha 13

Transformada Z

A *transformada Z* (bilateral) de um sinal discreto $x[n]$, representada for $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$, é expressa por:

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Calcule a transformada Z do seguinte sinal:

$$x[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n-3].$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Considere a seguinte transformada Z:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4} z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{4} z^{-2}\right)\left(1 + \frac{5}{4} z^{-1} + \frac{3}{8} z^{-2}\right)}.$$

Represente os pólos e os zeros no plano z e diga quantas regiões de convergência se podem definir.