INTRODUÇÃO À MECÂNICA CLÁSSICA

Transparências das aulas teóricas

Maria Inês Barbosa de Carvalho

2001/2002

REFERENCIAIS NÃO INERCIAIS

REFERENCIAL INERCIAL

- Num referencial inercial uma partícula livre desloca-se em linha recta com velocidade constante.

- Nestes referenciais tem-se $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$, onde $\vec{F}$ é o somatório das forças "reais" que actuam sobre a partícula.

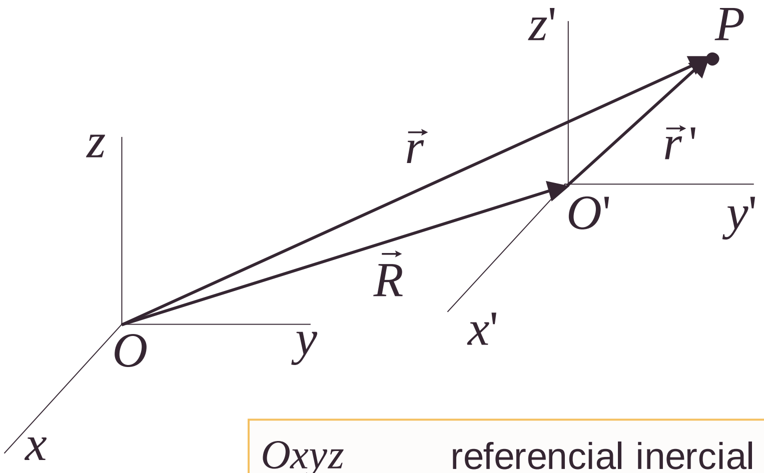
- Todos os referenciais que se desloquem com uma velocidade constante em relação a um referencial inercial são também referenciais inerciais.

Referenciais não inerciais são os que se deslocam com aceleração não nula relativamente aos referenciais inerciais.

- Nestes referenciais, para que a 2ª lei de Newton seja válida, terá que se adicionar à resultante das forças "reais" um termo associado com o movimento acelerado do referencial.

- Este termo designa-se **força fictícia**.

REFERENCIAIS EM TRANSLAÇÃO



$Oxyz$	referencial inercial
$O'x'y'z'$	referencial não inercial

Neste caso é sempre possível escolher os eixos de modo que

$$\hat{i}\,' = \hat{i} \qquad \hat{j}\,' = \hat{j} \qquad \hat{k}\,' = \hat{k}$$

vector posição em *Oxyz*: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

vector posição em *O'x'y'z'*: $\vec{r}\,' = x'\,\hat{i}\,' + y'\,\hat{j}\,' + z'\,\hat{k}\,' = x'\,\hat{i} + y'\,\hat{j} + z'\,\hat{k}$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'}$$

$$\frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'}$$

$$\frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}\,'}$$

- Se $\vec{A} = 0$ tem-se $\vec{a} = \vec{a}'$ $\Longrightarrow$ $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}'$

$\Downarrow$

2ª lei de Newton é válida no referencial $O'x'y'z'$

$\Downarrow$

referencial $O'x'y'z'$ é inercial

- Se $\vec{A} \neq 0$ tem-se $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{A} + m\vec{a}'$ ou $\boxed{\vec{F} - m\vec{A} = m\vec{a}'}$

Definindo $\vec{\mathsf{F}} = -m\vec{A}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{\mathsf{F}}}$

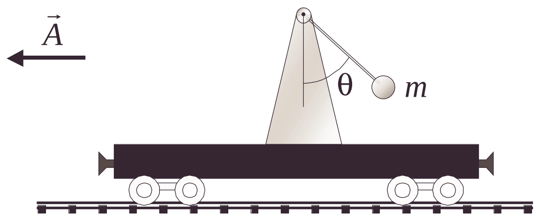
$\Downarrow$

"2ª lei de Newton" no referencial não inercial

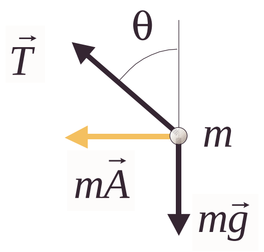
$\vec{\mathsf{F}}$ é a **força fictícia**

EXEMPLO

- pêndulo em equilíbrio num veículo em movimento acelerado



REFERENCIAL INERCIAL



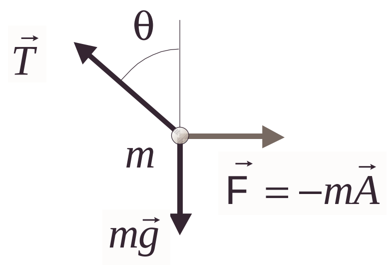
$$\overleftarrow{a} = \vec{A}$$

$$\vec{F} = m\overleftarrow{a}$$

$$\begin{cases} T\cos\theta - mg = 0 \\ T\sin\theta = mA \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{A}{g}$$

REFERENCIAL NÃO INERCIAL



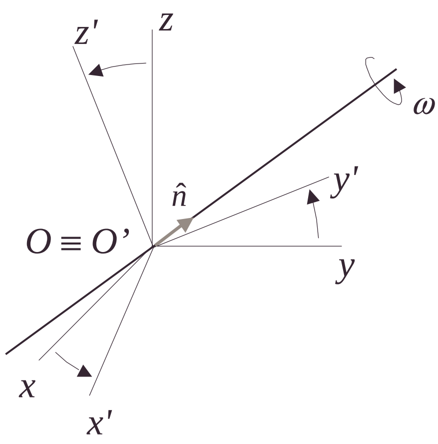
$$\overleftarrow{a}' = 0$$

$$\vec{F} + \vec{\mathsf{F}} = m\overleftarrow{a}'$$

$$\begin{cases} T\cos\theta - mg = 0 \\ T\sin\theta - mA = 0 \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{A}{g}$$

REFERENCIAIS EM ROTAÇÃO

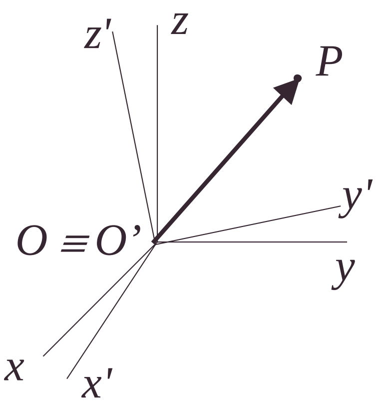


Oxyz	referencial fixo
O'x'y'z'	referencial em rotação

O'x'y'z' roda com velocidade angular ω em torno de um eixo de rotação $\hat{n}$

direcção de $\hat{n}$:	eixo de rotação
sentido de $\hat{n}$:	regra da mão direita

⇒ **vector velocidade angular** $\boxed{\vec{\omega} = \omega\,\hat{n}}$



vector posição em *Oxyz*: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

vector posição em *O'x'y'z'*: $\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$

$$O \equiv O' \Longrightarrow \vec{r} = \vec{r}'$$

$$\Downarrow$$

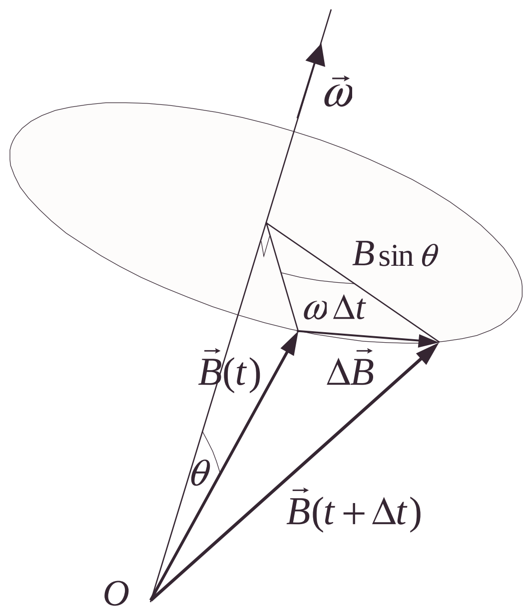
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + x'\frac{d\,\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\,\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\,\hat{k}'}{dt}}$$

$\vec{B}$ → vector constante no referencial *O'x'y'z'*

$$\vec{B} = B_{x'}\,\hat{i}' + B_{y'}\,\hat{j}' + B_{z'}\,\hat{k}'$$

constantes



- $\Delta B = (\omega\,\Delta t)(B\sin\theta)$ ⟹ $\dfrac{dB}{dt} = \left|\vec{\omega}\times\vec{B}\right|$
- $\dfrac{d\vec{B}}{dt}$ é perpendicular a $\vec{\omega}$ e a $\vec{B}$
- sentido de $\dfrac{d\vec{B}}{dt}$: regra da mão direita

⟹ $$\boxed{\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{B}}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{i}' \qquad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{j}' \qquad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{k}'$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}'}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)}$$

- $\vec{a}$ aceleração no referencial fixo
- $\vec{a}'$ aceleração no referencial em rotação
- $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}'$ aceleração transversal
- $2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ aceleração de Coriolis
- $\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$ aceleração centrípeta

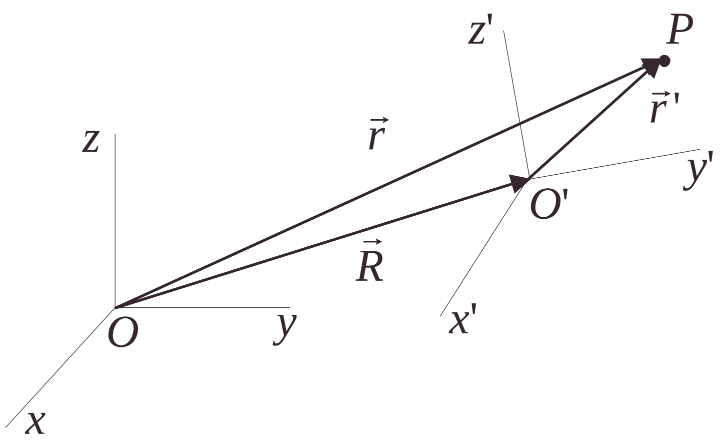
- $$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' + m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$$

- $$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{TRANSVERSAL} + \vec{F}_{CORIOLIS} + \vec{F}_{CENTRÍFUGA}}$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{F}_{TRANSVERSAL} &= -m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' \\
\vec{F}_{CORIOLIS} &= -2m\vec{\omega}\times\vec{v}' \\
\vec{F}_{CENTRÍFUGA} &= -m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)
\end{aligned}\right\} \vec{F}$$

REFERENCIAIS EM MOVIMENTO



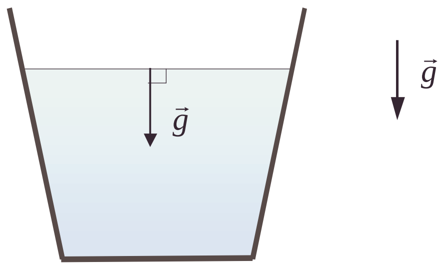
$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

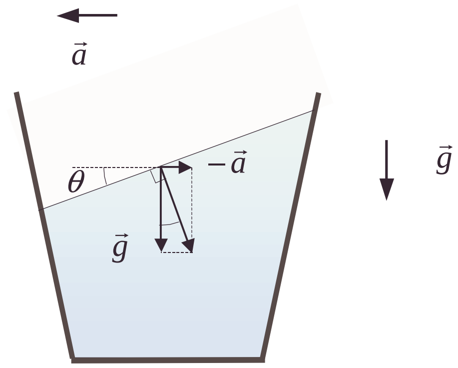
$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}\,' + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{F}\,' = \vec{F} + \underbrace{\vec{F}_{TRANSVERSAL} + \vec{F}_{CORIOLIS} + \vec{F}_{CENTRÍFUGA} - m\vec{A}}_{\vec{\mathsf{F}}}$$

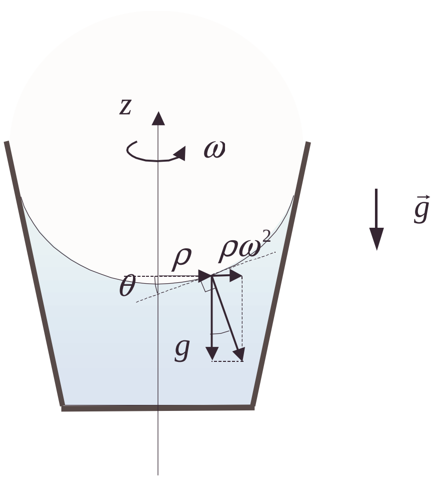
EXEMPLO



superfície horizontal



$$\tan\theta = \frac{a}{g}$$



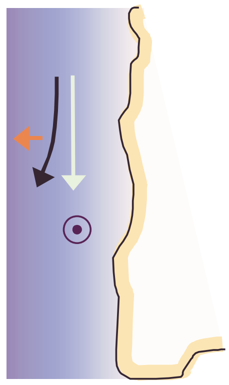
$$z = z_0 + \frac{\omega^2\rho^2}{2g}$$

EFEITOS “NÃO INERCIAIS” DA ROTAÇÃO DA TERRA

- achatamento da Terra (raio polar 21 km menor do que o raio equatorial)

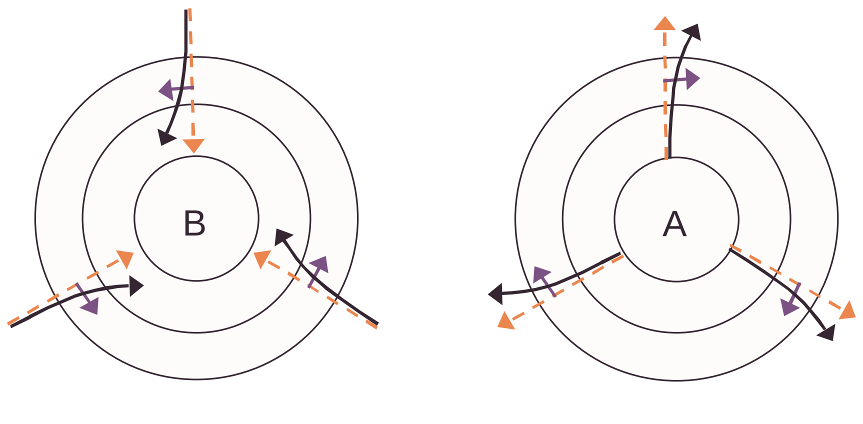
- maior erosão numa das margens dos rios

- “upwelling” da água do mar



- alteração do movimento das massas de ar

hemisfério norte



- rotação da Terra em torno do seu eixo

$$T = 24 \text{ horas} = 8.616\times10^{4}\ s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.29\times10^{-5}\ rad/s$$

$$R_T = 6.37\times10^{6}\ m$$

$$\boxed{\omega^2 R_T = 0.0339\ m/s^2} \quad \leftarrow \quad \text{equador}$$

$$\omega^2 R_T \cos\lambda = 0.0339\cos\lambda\ m/s^2 \quad \leftarrow \quad \text{latitude } \lambda$$

- movimento da Terra em torno do Sol

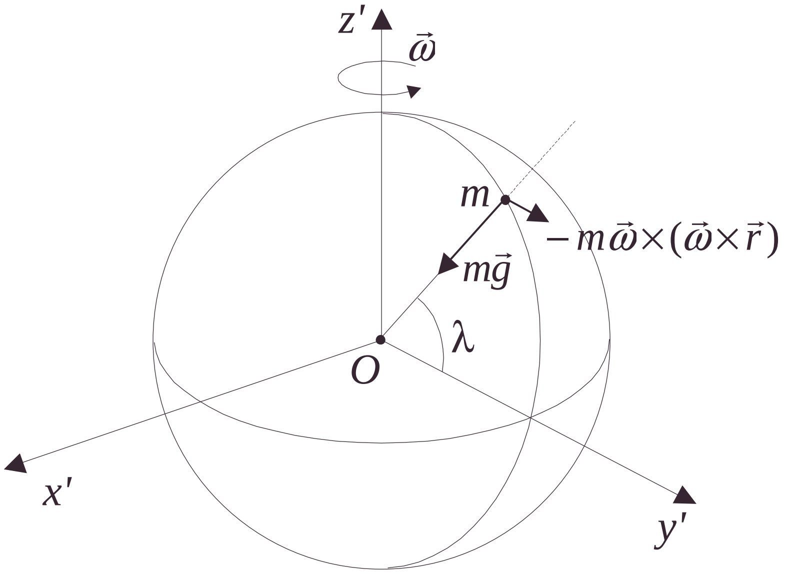
$$T = 1 \text{ ano} = 3.16\times10^{7}\ s$$

$$r = 1.5\times10^{11}\ m$$

$$v = \omega r = 3.0\times10^{4}\ m/s$$

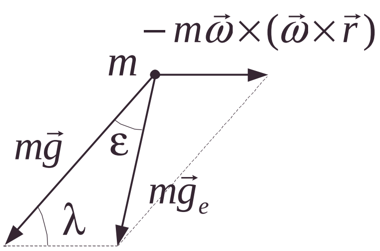
$$\boxed{\frac{v^2}{r} = 0.006\ m/s^2}$$

O FIO DE PRUMO



$$\boxed{\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

ε → ângulo de desvio da vertical



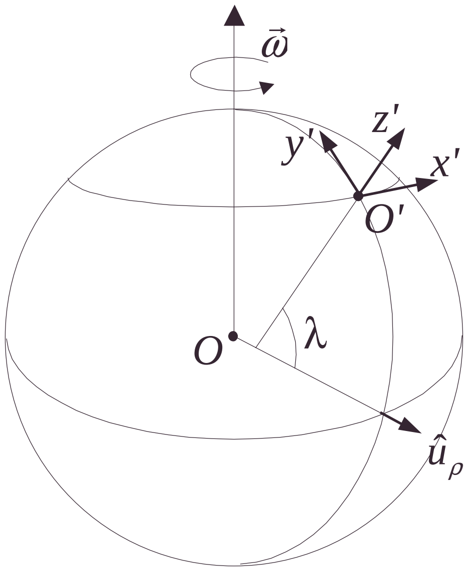
$$\boxed{\frac{\sin\varepsilon}{mR_T\omega^2\cos\lambda} = \frac{\sin\lambda}{mg_e}}$$

$$\varepsilon \cong \sin\varepsilon = \frac{R_T\omega^2}{2g_e}\sin 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\mathrm{MAX}} = \frac{R_T\omega^2}{2g_e} \cong 0.1^{\circ}$$

$\lambda = 45^{\circ}$

EFEITO DA ROTAÇÃO DA TERRA

NO MOVIMENTO DE UM CORPO



$$\boxed{m\vec{a}' = m\vec{g} - m\vec{A} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)}$$

$$\vec{A} = -\omega^2 \rho\, \hat{u}'_\rho \cong -\omega^2 R_T \cos\lambda\ \hat{u}'_\rho$$

$$m\vec{g} - m\vec{A} = m\vec{g}_e$$

$-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$ é muito pequeno!

$$\Rightarrow \qquad \boxed{m\vec{a}' = m\vec{g}_e - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'}$$

$$\vec{g}_e \cong -g\hat{k}'$$

$$\vec{\omega} = \omega\cos\lambda\ \hat{j}' + \omega\sin\lambda\ \hat{k}'$$

$$\vec{v}\,' = v'_x\ \hat{i}\,' + v'_y\ \hat{j}' + v'_z\ \hat{k}'$$

$$\begin{cases} a'_x = 2\omega\left(v'_y \sin\lambda - v'_z \cos\lambda\right) \\ a'_y = -2\omega v'_x \sin\lambda \\ a'_z = -g + 2\omega v'_x \cos\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_y - v'_{y,0} = -2\omega\left(x' - x'_0\right)\sin\lambda \\ v'_z - v'_{z,0} = -gt + 2\omega\left(x' - x'_0\right)\cos\lambda \end{cases}$$

- desprezando os termos com ω^2 :

$$a'_x = 2\omega gt\cos\lambda + 2\omega\left(v'_{y,0}\sin\lambda - v'_{z,0}\cos\lambda\right)$$

$$v'_x - v'_{x,0} = \omega gt^2\cos\lambda + 2\omega\left(v'_{y,0}\sin\lambda - v'_{z,0}\cos\lambda\right)t$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}\omega gt^3\cos\lambda - \omega t^2\left(v'_{z,0}\cos\lambda - v'_{y,0}\sin\lambda\right) + v'_{x,0}t + x'_0 \\ y' &= -\omega t^2 v'_{x,0}\sin\lambda + v'_{y,0}t + y'_0 \\ z' &= -\frac{1}{2}gt^2 + \omega t^2 v'_{x,0}\cos\lambda + v'_{z,0}t + z'_0 \end{aligned}}$$

EXEMPLO 1

- corpo largado de uma altura h acima do solo.

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_0 = y'_0 = 0 \\ z'_0 = h \\ v'_{x,0} = v'_{y,0} = v'_{z,0} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda \\ y' = 0 \\ z' = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$$

$\Rightarrow$ deflexão do corpo (para leste): $X' = \sqrt{\frac{8h^3}{9g}}\,\omega\cos\lambda$

Se:

$h = 100\ m$

$\lambda = 45^{\circ}$

$\Rightarrow \quad X' = 1.55\ cm$

EXEMPLO 2

- projéctil lançado com velocidade v_0 para leste.

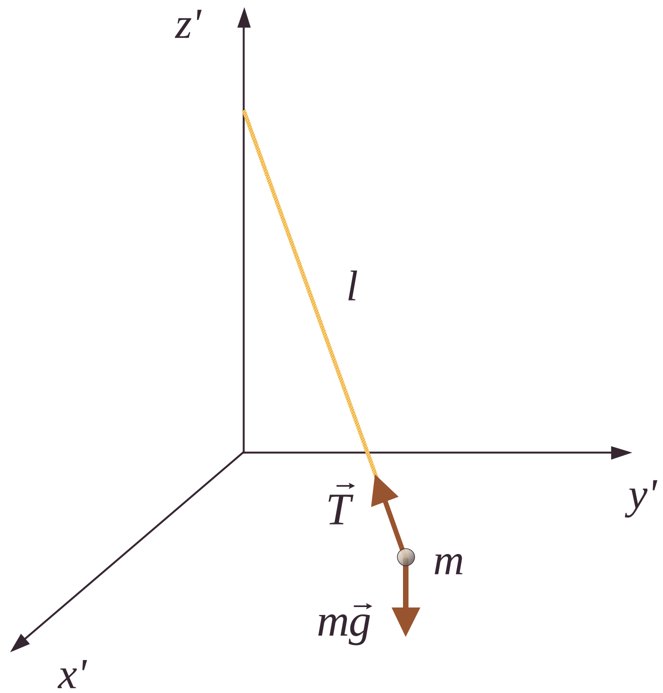
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0 \\ v'_{x,0} = v_0 \\ v'_{y,0} = v'_{z,0} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\omega v_0 t^2 \sin\lambda$$

$$\Downarrow$$

deflexão para sul se $\lambda > 0$ (hemisfério norte)

O PÊNDULO DE FOUCAULT



$$\boxed{m\vec{a}' = m\vec{g}_e + \vec{T} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'}$$

$$\vec{T} = T\left(-\frac{x'}{l}\,\hat{i}' - \frac{y'}{l}\,\hat{j}' + \frac{l-z'}{l}\,\hat{k}'\right)$$

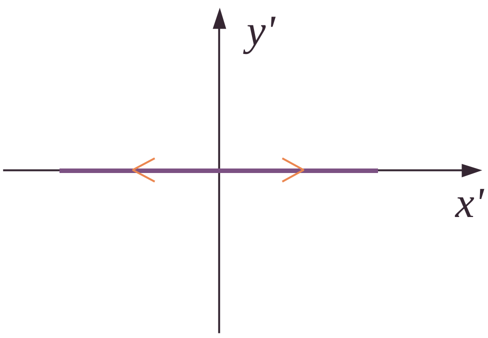
$$\begin{cases} ma'_x = -\dfrac{T}{l}x' - 2m\omega\left(v'_z\cos\lambda - v'_y\sin\lambda\right) \\ ma'_y = -\dfrac{T}{l}y' - 2m\omega v'_x\sin\lambda \\ ma'_z = -mg + \dfrac{T}{l}\left(l - z'\right) + 2m\omega v'_x\cos\lambda \end{cases}$$

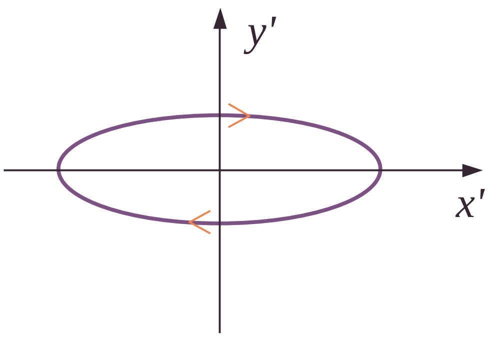
- pequenas oscilações $\Rightarrow$

$$
\begin{cases}
z' \cong 0 \\
v'_z \cong 0 \\
a'_z \cong 0 \\
T' \cong mg
\end{cases}
$$

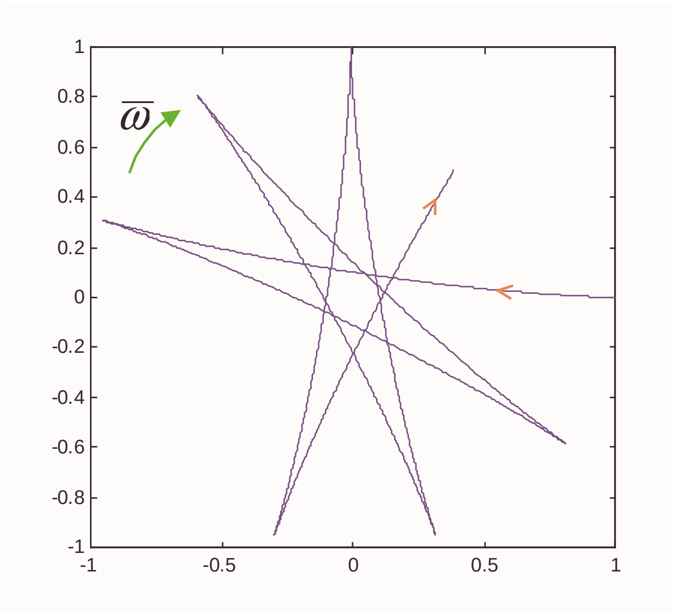
$$
\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a'_x &= -\frac{g}{l}x' + 2v'_y\,\overline{\omega} \\ a'_y &= -\frac{g}{l}y' - 2v'_x\,\overline{\omega} \end{aligned}} \qquad \overline{\omega} = \omega \sin\lambda
$$

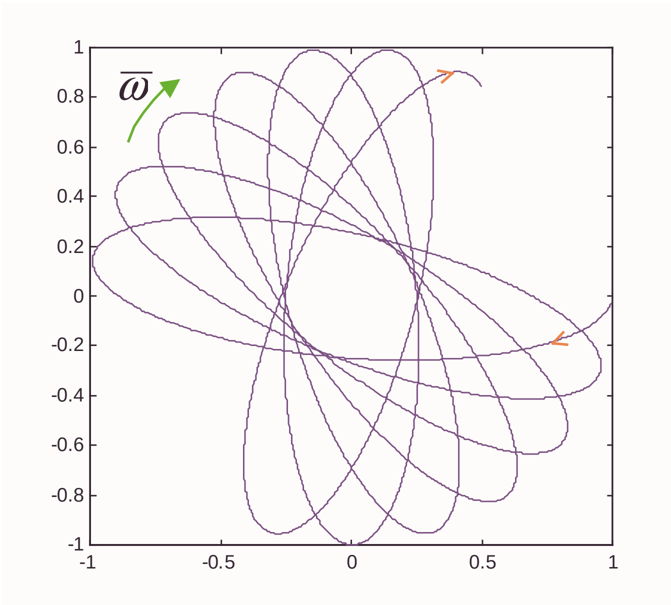
Se $\overline{\omega} = 0$





Se $\overline{\varpi} \neq 0$

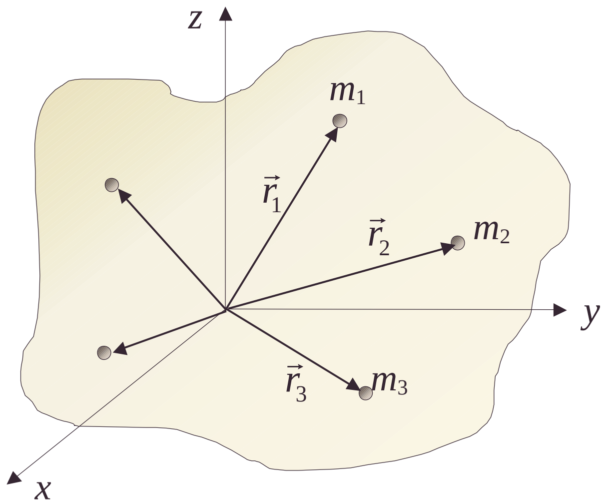




período de precessão $\rightarrow$ $\dfrac{2\pi}{\overline{\varpi}} = \dfrac{2\pi}{\omega \sin\lambda} = \dfrac{24}{\sin\lambda}$ horas

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

SISTEMAS DE PARTÍCULAS



CENTRO DE MASSA

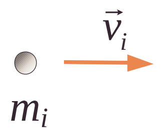
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

QUANTIDADE DE MOVIMENTO

- para uma partícula



$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

- para um sistema de partículas

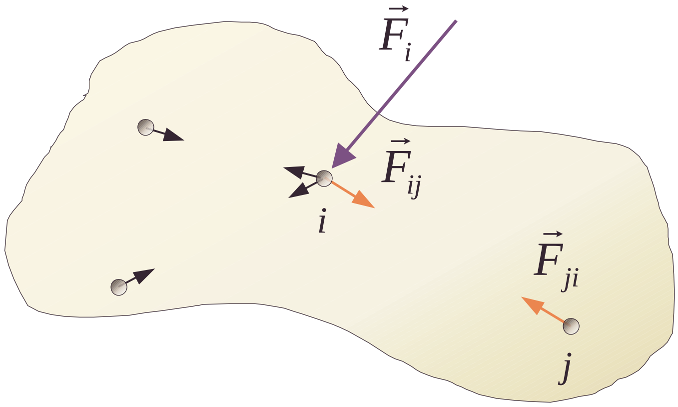
$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{p} = M\, \vec{v}_{CM}}$$

<u>NOTA</u>

$$\boxed{\dot{\vec{p}} = M\, \vec{a}_{CM}}$$

DINÂMICA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS



$\vec{F}_i$ → resultante das forças exteriores que actuam na partícula i

$\vec{F}_{ij}$ → força interior exercida pela partícula j na partícula i

$\vec{F}_{ji}$ → força interior exercida pela partícula i na partícula j

- 3ª lei de Newton ⟹ $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

- 2ª lei de Newton para a partícula i

$$\boxed{\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} = m_i \vec{a}_i}$$

- para o sistema

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = \sum_i m_i \vec{a}_i = M\,\vec{a}_{CM} = \dot{\vec{p}}$$

- resultante das forças exteriores: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

- $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Longrightarrow \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = 0$

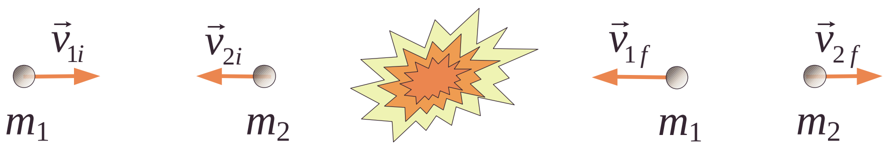
$$\Longrightarrow \boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}} = M\,\vec{a}_{CM}}$$

$\vec{F} = 0 \Longrightarrow \dot{\vec{p}} = 0 \Longrightarrow \vec{p}$ é constante

$\Uparrow$

princípio da conservação da quantidade de movimento

COLISÕES



- Se $\vec{F} = 0$ $\Longrightarrow$ $\vec{p}$ é constante

$\vec{p}_i$ $\rightarrow$ quantidade de movimento antes do choque

$\vec{p}_f$ $\rightarrow$ quantidade de movimento após o choque

$\Longrightarrow$ $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

$\Longrightarrow$ $$\boxed{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}}$$

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

$$\boxed{T_i = T_f + Q}$$

T_i → energia cinética antes da colisão

T_f → energia cinética após a colisão

Q → associado a possíveis ganhos ou perdas de energia cinética

$Q = 0 \iff T_i = T_f$ → COLISÃO ELÁSTICA

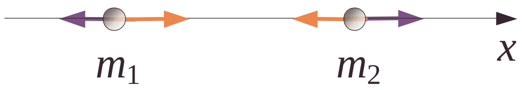
$Q > 0 \iff T_i > T_f$ → perda de energia

$Q < 0 \iff T_i < T_f$ → ganho de energia

COLISÕES NÃO ELÁSTICAS

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 + Q}$$

COLISÕES UNIDIMENSIONAIS



$$\vec{v}_{1i} = v_{1i}\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_{2i} = v_{2i}\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_{1f} = v_{1f}\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_{2f} = v_{2f}\,\hat{i}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} & m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ & \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + Q \end{aligned}}$$

- conhecidos Q, v_{1i} e v_{2i} $\Longrightarrow$ 2 incógnitas

  2 equações

COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}}}$$

$$\begin{aligned} v_{ri} &= \left| v_{2i} - v_{1i} \right| \\ v_{rf} &= \left| v_{2f} - v_{1f} \right| \end{aligned} \Leftarrow$$

velocidades relativas
inicial e final

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_{rf} = \varepsilon v_{ri}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(1 - \varepsilon^2\right) v_{ri}^2}$$

- <u>colisão elástica</u>

$$Q = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1 \Rightarrow v_{rf} = v_{ri}$$

- <u>colisão completamente inelástica</u>

$$v_{rf} = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ v_{2f} - v_{1f} = -\varepsilon\left(v_{2i} - v_{1i}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} v_{1f} = \dfrac{\left(m_1 - \varepsilon m_2\right) v_{1i} + m_2 (1+\varepsilon) v_{2i}}{m_1 + m_2} \\[2ex] v_{2f} = \dfrac{m_1 (1+\varepsilon) v_{1i} + \left(m_2 - \varepsilon m_1\right) v_{2i}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

- $\varepsilon = 1$

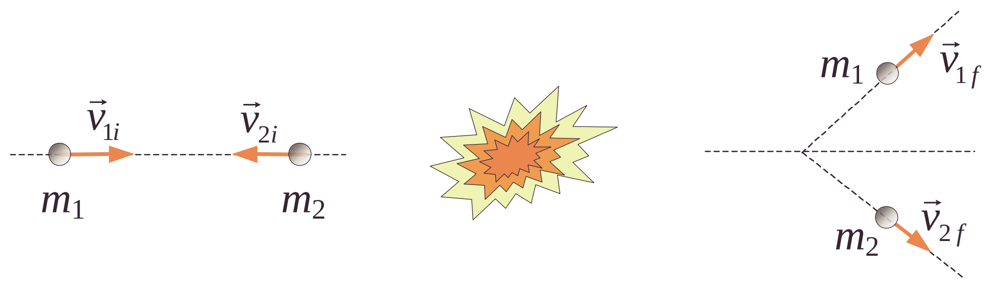
se $m_1 = m_2 = m$

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases}$$

se $m_1 \neq m_2$ **e** $v_{2i} = 0$

$$\begin{cases} v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\[2ex] v_{2f} = \dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{cases}$$

COLISÕES BIDIMENSIONAIS



$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$\frac{p_{1i}^2}{m_1} + \frac{p_{2i}^2}{m_2} = \frac{p_{1f}^2}{m_1} + \frac{p_{2f}^2}{m_2} + 2Q$$

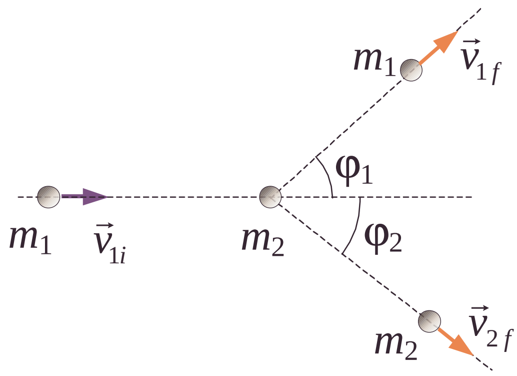
conhecidos Q, $\vec{v}_{1i}$, $\vec{v}_{2i}$ $\Rightarrow$ 4 incógnitas

3 equações

$\Downarrow$

é necessária informação adicional!

- **partícula 2 inicialmente em repouso**



$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} p_{1i} = p_{1f}\cos\varphi_1 + p_{2f}\cos\varphi_2 \\ 0 = p_{1f}\sin\varphi_1 - p_{2f}\sin\varphi_2 \end{cases}$$

$$\frac{p_{1i}^2}{m_1} = \frac{p_{1f}^2}{m_1} + \frac{p_{2f}^2}{m_2} + 2Q$$

- partículas com massa igual $m_1 = m_2 = m$

$$\begin{cases} \vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \\ p_{1i}^2 = p_{1f}^2 + p_{2f}^2 + 2mQ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p_{1i}^2 = (\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}) \bullet (\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}) =$$
$$= p_{1f}^2 + p_{2f}^2 + 2\vec{p}_{1f} \bullet \vec{p}_{2f}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{mQ = \vec{p}_{1f} \bullet \vec{p}_{2f}}$$

colisão elástica → $Q = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{p}_{1f} \bullet \vec{p}_{2f} = 0$

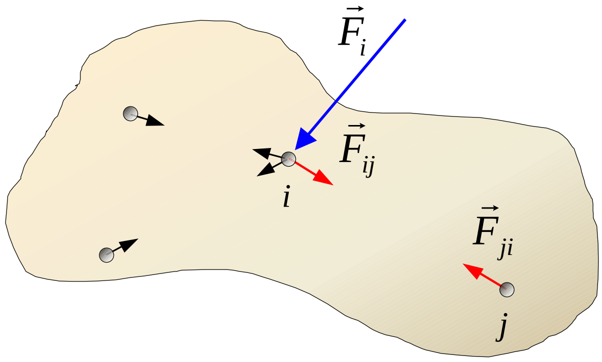
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}}$$

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

- centro de massa → $\vec{r}_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$

- quantidade de movimento → $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{CM}$



- 2ª lei de Newton para a partícula i → $\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} = m_i \vec{a}_i$

$$\Downarrow \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

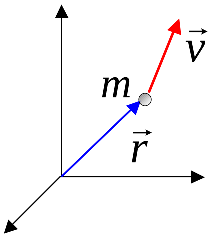
$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}} = M\,\vec{a}_{CM}}$$

- $\vec{F} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{p}} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ é constante

conservação da quantidade de movimento

MOMENTO ANGULAR

- para uma partícula



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

- para um sistema de partículas

$$\boxed{\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i\right)$$

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}$$ (2ª lei de Newton)

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) + \sum_i \sum_j \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}\right)$$

- $\sum_i \sum_j \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}\right)$ envolve pares da forma

$$\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}\right) + \left(\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}\right) = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{F}_{ij} = \underline{\vec{r}_{i/j} \times \vec{F}_{ij} = 0}$$

se forças interiores
forem centrais

- $\sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}$

$\vec{M}_i$ → momento da força $\vec{F}_i$ (em relação à origem)

$\vec{M}$ → momento resultante (em relação à origem)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

$$\boxed{\text{Se } \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \text{ é constante!}}$$

**princípio da conservação do
momento angular**

$$\vec{L} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i$$

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times M\,\vec{v}_{CM} + \underbrace{\sum_i \left(\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i\right)}_{\vec{L}'}$$

$\vec{L}'$ → momento angular relativamente a CM

$\boxed{\vec{M}'_i = \vec{r}'_i \times \vec{F}_i}$ → momento da força $\vec{F}_i$ relativamente a CM

$\boxed{\vec{M}' = \sum_i \vec{M}'_i}$ → momento resultante relativamente a CM

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F} + \frac{d\vec{L}'}{dt}$$

$$\vec{M} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \sum_i \left(\vec{r}_{CM} \times \vec{F}_i\right) + \sum_i \left(\vec{r}'_i \times \vec{F}_i\right)$$

$$\boxed{\vec{M}' = \frac{d\vec{L}'}{dt}}$$

ENERGIA CINÉTICA

- para uma partícula

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

- para um sistema de partículas

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i$$

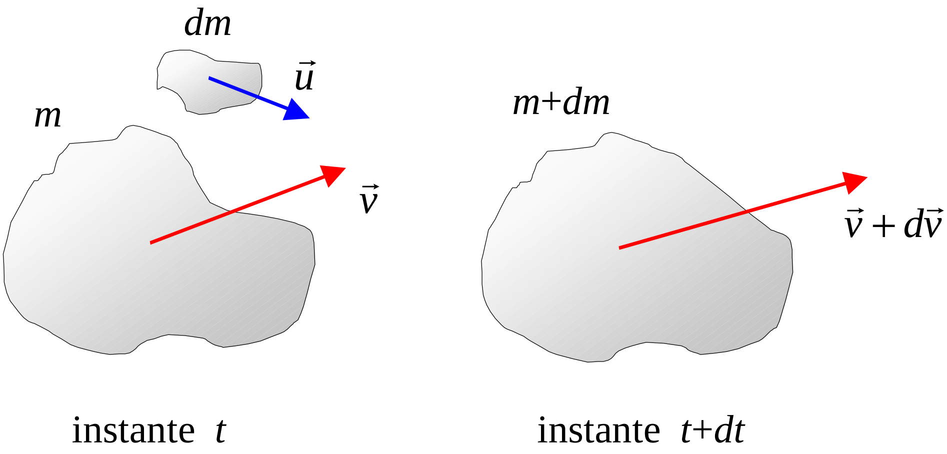
$$\Downarrow$$

$$\boxed{T = \underbrace{\frac{1}{2} M v_{CM}^2}_{T_{CM}} + \underbrace{\sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v'^2_i \right)}_{T'}}$$

T_{CM} → energia cinética associada ao movimento do CM

T' → energia cinética associada ao movimento relativamente ao CM

MASSA VARIÁVEL

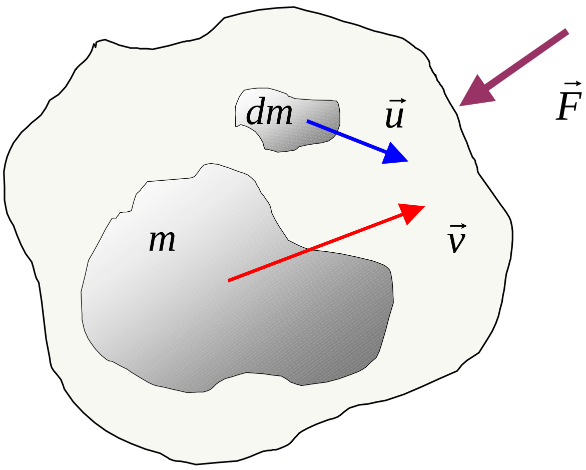


$$d\vec{p} \;=\; \vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)$$

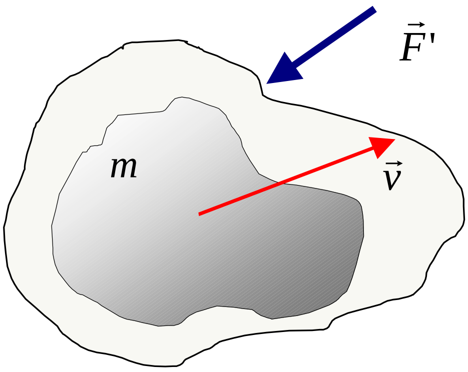
2ª lei de Newton: $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$$\boxed{\vec{F}=m\,\frac{d\vec{v}}{dt}+(\vec{v}-\vec{u})\frac{dm}{dt}}$$

$\vec{F}$ → resultante das forças exteriores



$$\vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} + \left(\vec{v} - \vec{u}\right)\frac{dm}{dt}$$



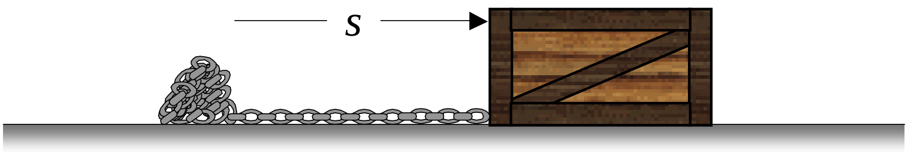
$$\vec{F}' = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

EXERCÍCIO 1

Um foguetão de massa M, move-se no espaço com uma velocidade $\vec{v}$, ejectando combustível a uma velocidade constante $\vec{c}$ (relativamente ao foguetão). Sabendo que o foguetão parte do repouso, e que a massa inicial de combustível é εM, onde $0 < \varepsilon < 1$, determine a velocidade do foguetão quando todo o combustível tiver sido ejectado.

EXERCÍCIO 2

Um caixote de massa m_c desliza sobre uma superfície puxando pela extremidade de uma cadeia amontoada em repouso. A massa por unidade de comprimento da cadeia é ρ_l e a velocidade do caixote é v_0 quando $s = 0$.



a) Determine a velocidade do caixote em função de s se a força de atrito entre o caixote e a superfície for proporcional ao quadrado da velocidade.

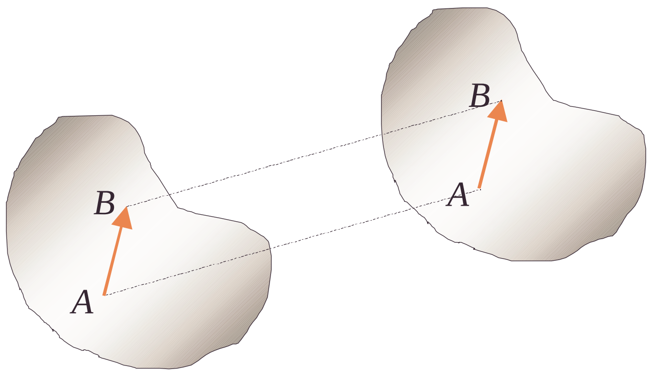
b) Mostre que quando não existe atrito o resultado anterior pode ser obtido partindo do princípio da conservação da quantidade de movimento.

INTRODUÇÃO À MECÂNICA DO CORPO RÍGIDO

CORPO RÍGIDO

- distância entre quaisquer duas partículas do corpo é invariável

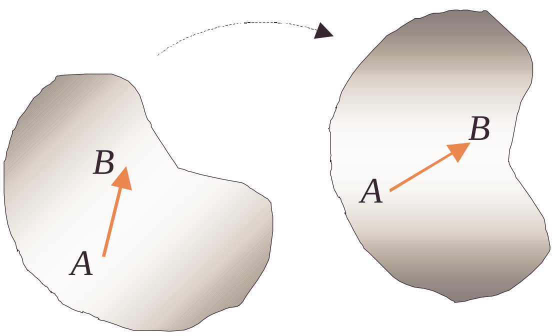
MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO



- todos os pontos têm em cada instante a mesma velocidade

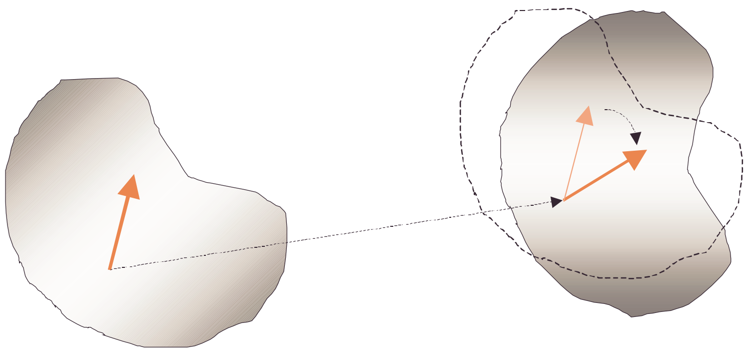
⇨ basta estudar o movimento de um ponto

MOVIMENTO DE ROTAÇÃO



TEOREMA DE CHASLES

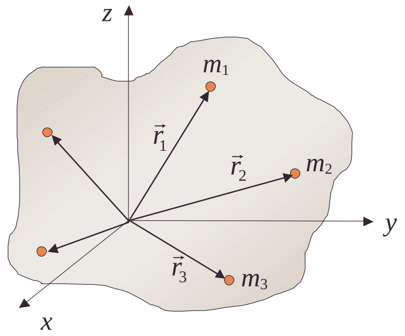
- movimento mais geral de um corpo é composto por uma translação e uma rotação



CENTRO DE MASSA

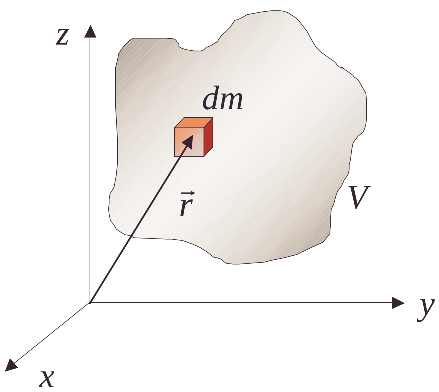
- sistema de partículas

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}}$$



- corpo tridimensional

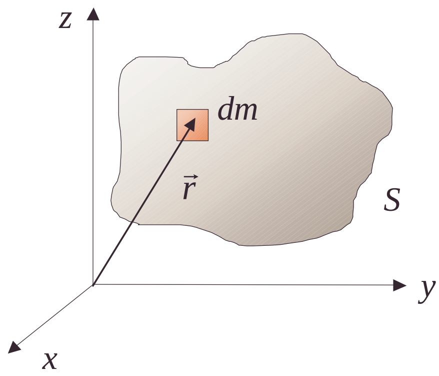
$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \rho\, \vec{r}\, dV}{\int_V \rho\, dV}}$$



ρ → massa por unidade de volume

- corpo bidimensional

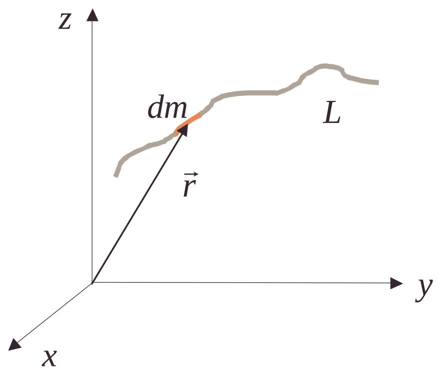
$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\int_S \sigma \vec{r}\, ds}{\int_S \sigma\, ds}}$$



σ → massa por unidade de superfície

- corpo unidimensional

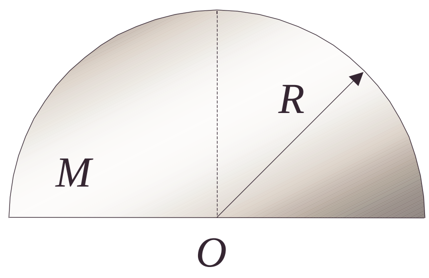
$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\int_L \lambda \vec{r}\, dl}{\int_L \lambda\, dl}}$$



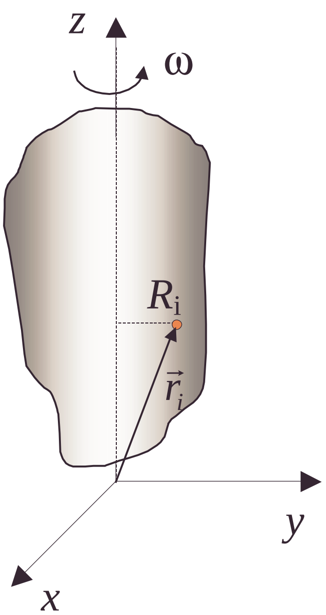
λ → massa por unidade de comprimento

EXEMPLO

1. Determine a posição do centro de massa de um semi-disco de raio R e massa M se a densidade superficial de massa for
   a) uniforme;
   b) proporcional à distância ao ponto O.



ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO



$$\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$$

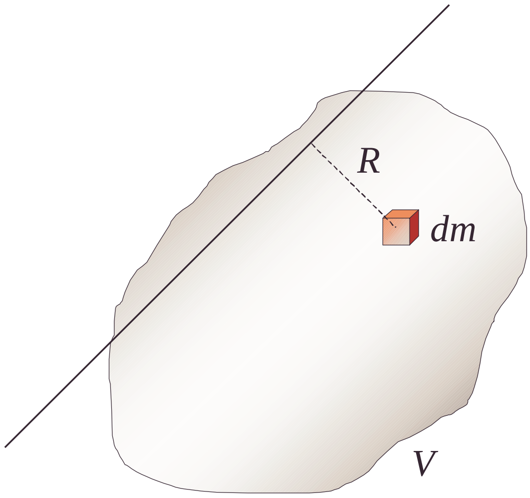
$$\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\,\omega^2 \underbrace{\left(x_i^2 + y_i^2\right)}_{R_i^2} = \frac{1}{2} I_z\,\omega^2}$$

$$\boxed{I_z = \sum_i m_i R_i^2}$$ → momento de inércia do corpo em relação ao eixo dos *z*

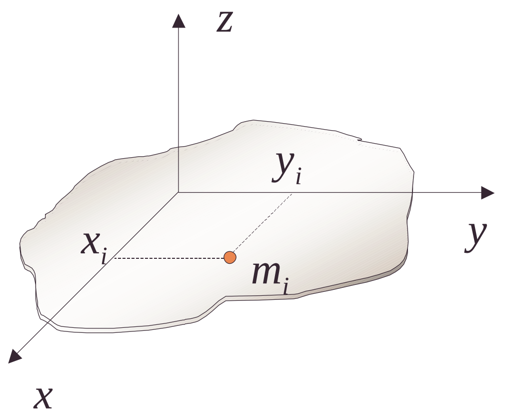
CÁLCULO DE MOMENTOS DE INÉRCIA

$$\boxed{I = \int_V dm\, R^2 = \int_V \rho\, R^2\, dV}$$



$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} I = \int_S \sigma\, R^2\, ds \\ I = \int_L \lambda\, R^2\, dl \end{array} \right.$$

O TEOREMA DOS EIXOS PERPENDICULARES



$$I_z = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \underbrace{\sum_i m_i x_i^2}_{I_y} + \underbrace{\sum_i m_i y_i^2}_{I_x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_z = I_x + I_y}$$

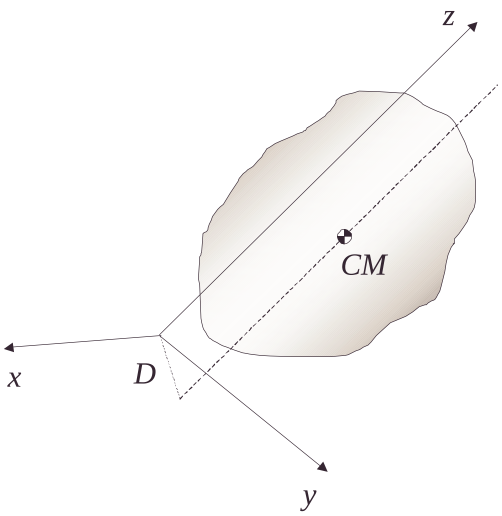
EXEMPLO

1. Calcule o momento de inércia de um disco circular de raio a e massa M em relação ao eixo perpendicular que passa pelo seu centro quando
   a) a densidade superficial de massa é uniforme;
   b) a densidade superficial de massa é proporcional ao quadrado da distância ao centro do disco.

2. Calcule o momento de inércia do disco anterior relativamente a um eixo paralelo ao disco que passe pelo seu centro.

O TEOREMA DE STEINER

- teorema dos eixos paralelos



$$\boxed{I_z = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)}$$

$$x_i = x_{CM} + x'_i$$

$$y_i = y_{CM} + y'_i$$

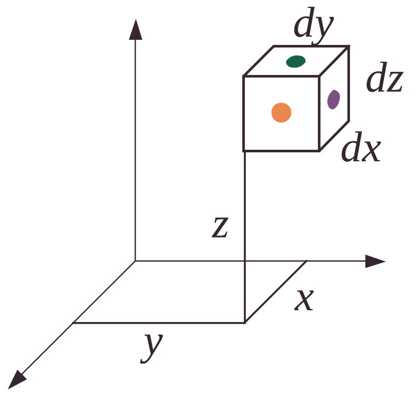
$$D^2 = x_{CM}^2 + y_{CM}^2$$

$$\boxed{I_z = I_{CM} + MD^2}$$

$$I_{CM} = \sum_i m_i \left(x'^2_i + y'^2_i \right)$$ → momento de inércia relativamente ao eixo paralelo a z que passa pelo CM

SISTEMAS DE COORDENADAS

- coordenadas cartesianas



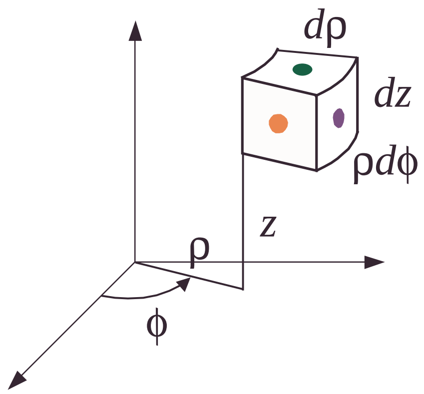
$$dV = dx\,dy\,dz$$

$$ds_x = dy\,dz$$

$$ds_y = dx\,dz$$

$$ds_z = dx\,dy$$

- coordenadas cilíndricas



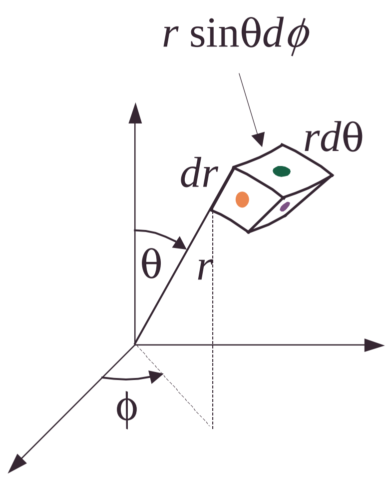
$$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

$$ds_z = \rho\,d\rho\,d\phi$$

$$ds_\rho = \rho\,d\phi\,dz$$

$$ds_\phi = d\rho\,dz$$

- coordenadas esféricas



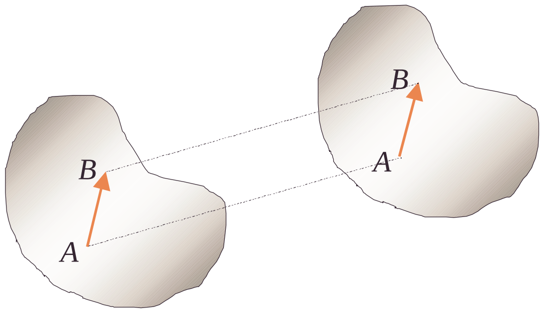
$$dV = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$ds_r = r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$ds_\theta = r\sin\theta\,dr\,d\phi$$

$$ds_\phi = r\,dr\,d\theta$$

MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO



- todos os pontos têm em cada instante a mesma velocidade

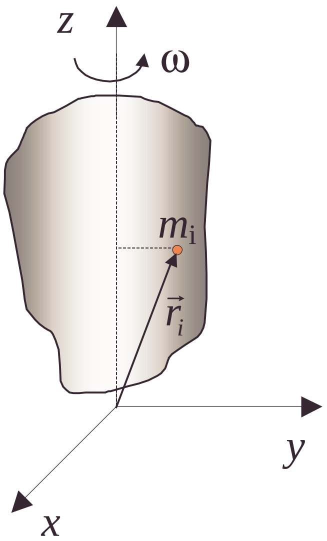
$\Rightarrow$ basta estudar o movimento de um ponto

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\,\vec{a}_{CM}}$$

$\vec{F}$ → força resultante

MOVIMENTO DE ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO



$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$\Downarrow$

$$\vec{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k}$$

$$\boxed{L_z = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega = I_z \omega}$$

$\Downarrow$

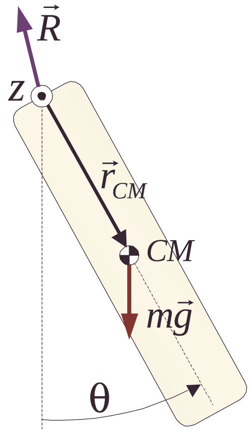
$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \dot{\omega}$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{M_z = I_z \dot{\omega}}$$

M_z → componente de $\vec{M}$ segundo z

O PÊNDULO

- corpo rígido livre de oscilar em torno de um eixo horizontal



$$\boxed{M_z = I_z\,\dot{\omega}}$$

$$\vec{M} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{g} = -r_{CM}\, mg \sin\theta\, \hat{u}_z$$

$$\Downarrow$$

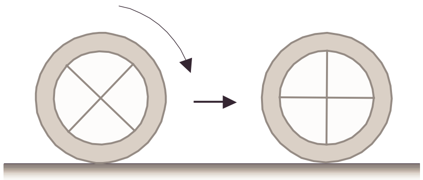
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{r_{CM}\, mg}{I_z} \sin\theta = 0}$$ ← equação de um pêndulo

---

- pêndulo simples → $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$

MOVIMENTO PLANO DE UM CORPO RÍGIDO

- partículas movem-se paralelamente a um dado plano fixo



translação + rotação

- <u>translação</u> → $\boxed{\vec{F} = M\,\vec{a}_{CM}}$ $\boxed{T_{TRANS,CM} = \frac{1}{2} M\, v_{CM}^2}$

- <u>rotação</u> → $\boxed{M'_e = I_{CM}\,\dot{\omega}}$ $\boxed{T_{ROT,CM} = \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2}$

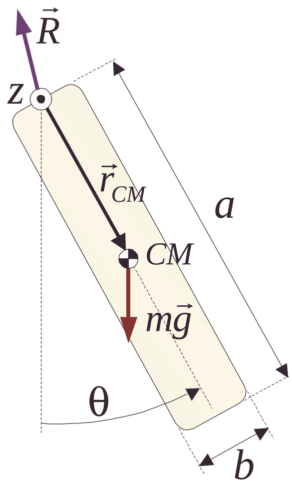
M'_e → componente segundo o eixo de rotação (e) do momento resultante relativamente ao CM

I_{CM} → momento de inércia relativamente a eixo paralelo a e que passa no CM

$T_{TRANS,CM} + T_{ROT,CM}$ → energia cinética do corpo

EXERCÍCIO 1

Um pêndulo é constituído por uma régua homogénea muito fina de largura b, comprimento a e massa m, a qual pode oscilar livremente em torno de uma das suas extremidades. Determine a força de reacção $\vec{R}$ no ponto de apoio.



EXERCÍCIO 2

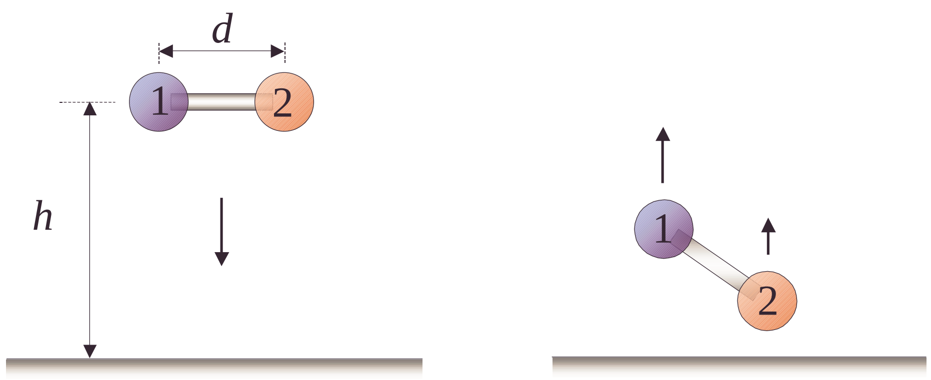
Um corpo é formado por duas pequenas bolas, de igual tamanho e massa, mas de materiais diferentes, as quais estão ligadas por uma haste fina de comprimento d e massa desprezável. Sabendo que o corpo é largado do repouso na posição horizontal, a uma altura h do solo, e que o coeficiente de restituição entre o solo e cada uma das massas é, respectivamente, ε_1 e ε_2, onde $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, determine

a) a velocidade de cada bola imediatamente após o choque do corpo com o solo;

b) a velocidade angular de rotação do corpo nesse instante;

c) a velocidade do centro de massa também nesse instante;

d) as equações do movimento do corpo.

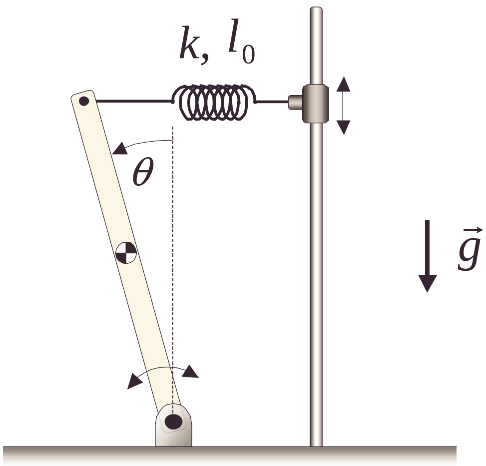


EXERCÍCIO 3

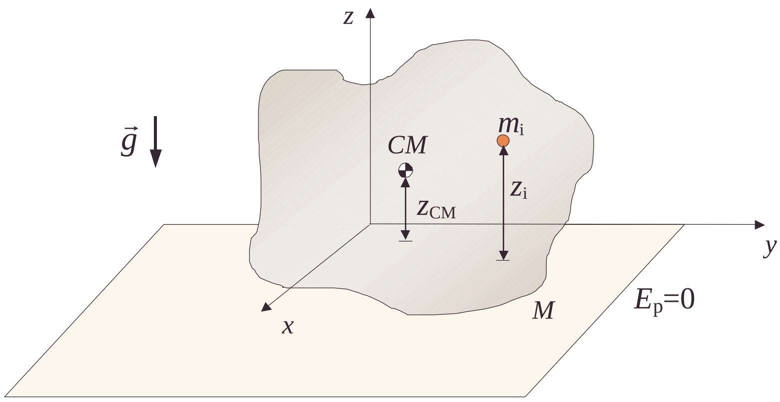
Uma barra homogénea fina de comprimento l e massa m pode oscilar em torno da sua extremidade inferior. A outra extremidade está ligada a uma mola de massa desprezável, constante de elasticidade k e comprimento natural l_0. Sabendo que a mola está sempre na horizontal, determine

a) as equações do movimento da barra;

b) a força de reacção no ponto de apoio.



ENERGIA POTENCIAL GRAVÍTICA

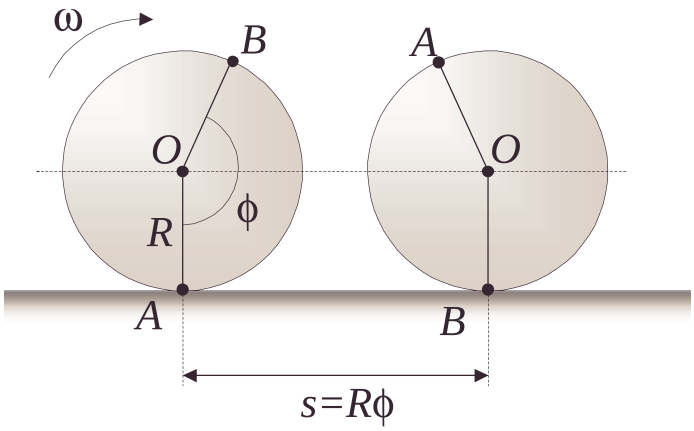


$$E_{pi} = m_i\, g\, z_i$$

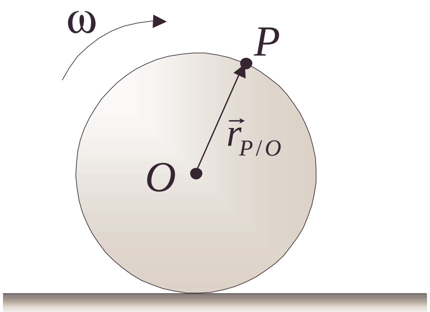
g constante

$$\boxed{E_p = M\, g\, z_{CM}}$$

O ROLAMENTO SEM DESLIZAMENTO

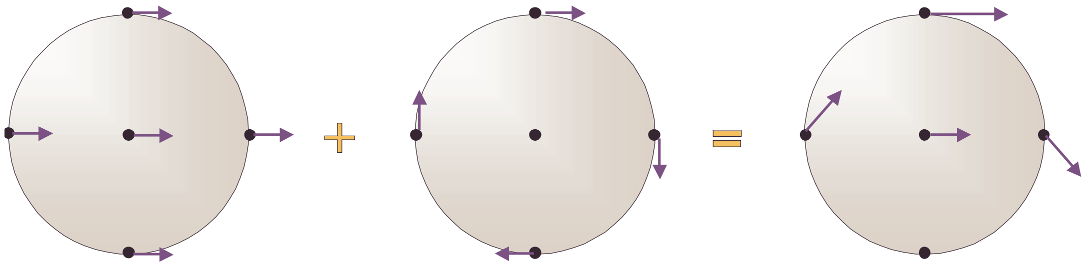


$$v_O = \dot{s} = R\dot{\phi} \implies \boxed{v_O = R\omega}$$



$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O}}$$

$$\left|\vec{v}_O\right| = \left|\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O}\right| = \omega\, R$$



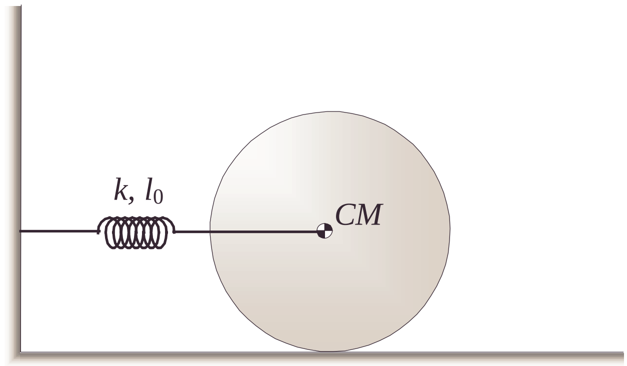
translação rotação

⇒ não há deslizamento ⇔ ponto de contacto tem velocidade nula

⇒ eixo perpendicular ao plano do movimento que passa pelo ponto de contacto é **eixo instantâneo de rotação.**

EXEMPLO

→ rolamento sem deslizamento



- Determine o valor mínimo do coeficiente de atrito estático, sabendo que o disco é largado do repouso quando a mola tem um comprimento $3l_0/2$.

- Existe dissipação de energia? Porquê?

E constante $\Rightarrow$ não há dissipação de energia

$\Downarrow$

atrito não realiza trabalho

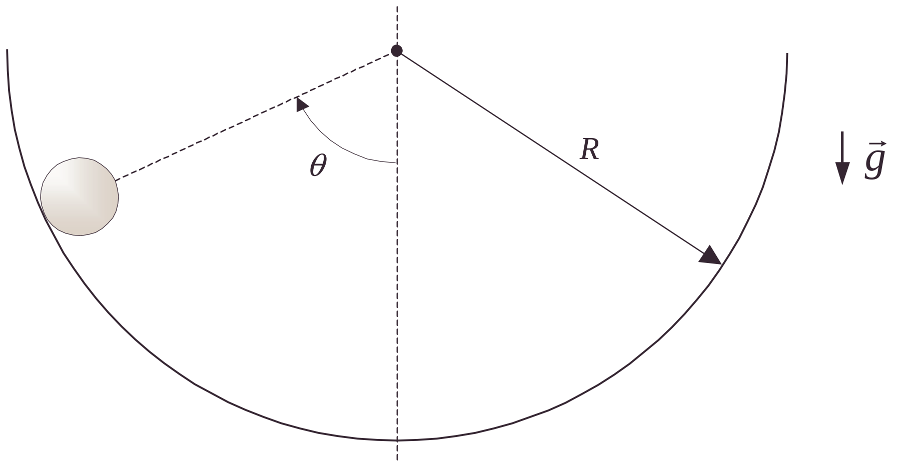
$\Uparrow$

ponto de aplicação de $\vec{F}_a$

tem velocidade nula

EXERCÍCIO

Um disco homogéneo de massa *m* e raio *r* rola sem deslizar sobre uma superfície cilíndrica

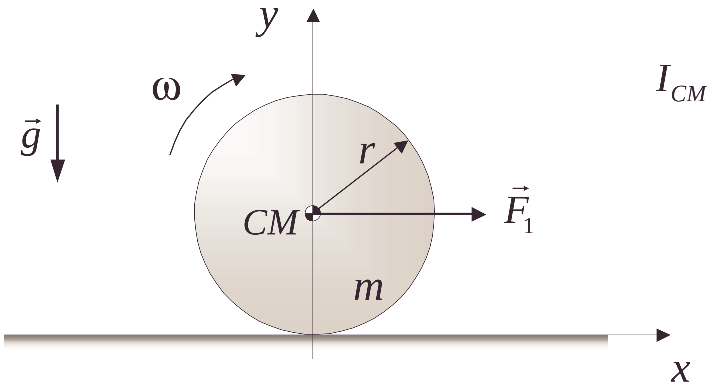


Determine

a) as equações do movimento do disco;

b) a força que a superfície exerce sobre o disco.

ROLAMENTO COM DESLIZAMENTO



$$I_{CM} = \frac{1}{2} m r^2$$

<u>translação</u>

$$\begin{cases} \ddot{x}_{CM} = \dfrac{1}{m}\left(F_1 - F_a\right) \\ N = mg \end{cases}$$

<u>rotação</u>

$$\dot{\omega} = \frac{2F_a}{mr}$$

---

sem deslizamento

$$\ddot{x}_{CM} = r\dot{\omega}$$

$$F_a \le \mu_e N$$

com deslizamento

$$F_a = \mu_c N$$

$$\ddot{x}_{CM} = \frac{F_1}{m} - \mu_c g$$

$$\dot{\omega} = \frac{2\mu_c g}{r}$$

IMPULSOS EM CORPOS RÍGIDOS

TRANSLAÇÃO

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \vec{F}\, dt = \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}_{CM} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\vec{v}_{CM} = \frac{\hat{\vec{\mathscr{P}}}}{m}$$

$$\boxed{\hat{\vec{\mathscr{P}}} = \int \vec{F}\, dt \quad \rightarrow \quad \text{impulso}}$$

ROTAÇÃO

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \int \vec{M}\, dt = \Delta\vec{L}$$

$$\Downarrow$$

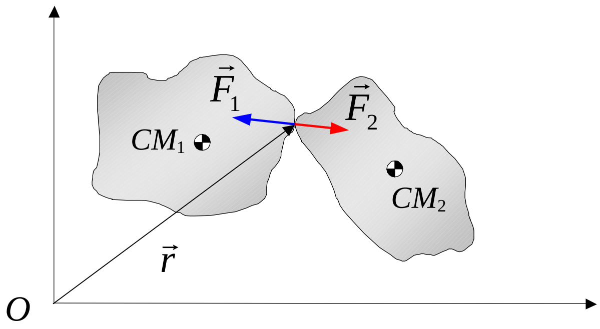
$$M_e = \frac{dL_e}{dt} = I_e\,\dot{\omega}$$

$$\int M_e\, dt = I_e\,\Delta\omega \quad \Longrightarrow \quad \Delta\omega = \frac{\mathscr{L}_e}{I_e}$$

$$\boxed{\mathscr{L}_e = \int M_e\, dt \quad \rightarrow \quad \text{impulso de rotação}}$$

COLISÕES ENTRE DOIS CORPOS RÍGIDOS

- movimento plano livre



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$
$$\vec{M}_1 = -\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_1$$

$$\int \vec{F}_1\, dt = \Delta\vec{p}_1 \qquad \int \vec{M}_1\, dt = \Delta\vec{L}_1$$

$$\int \vec{F}_2\, dt = \Delta\vec{p}_2 \qquad \int \vec{M}_2\, dt = \Delta\vec{L}_2$$

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \qquad \Delta\vec{L}_1 = -\Delta\vec{L}_2$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

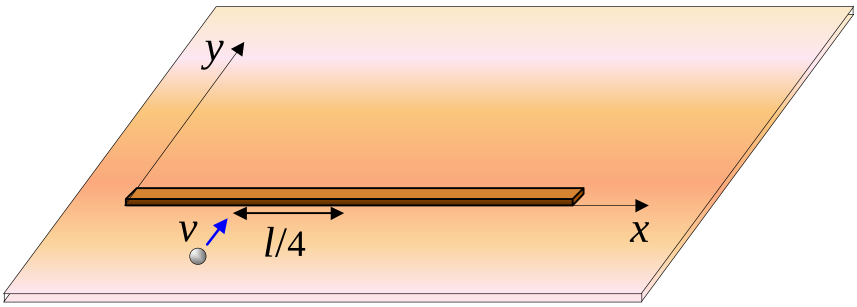
$\vec{p}$ é constante

$\vec{L}$ é constante

EXEMPLO

Uma barra fina homogénea de comprimento l e massa m, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal, é atingida por uma pequena bola, também de massa m, com velocidade v, num ponto que dista $l/4$ do seu centro. Sabendo que após a colisão a bola fica encastrada na barra, determine

a) a posição do centro de massa do sistema mesmo após a colisão;
b) o momento de inércia do sistema relativamente ao eixo perpendicular que passa no seu centro de massa;
c) a velocidade do centro de massa do sistema nesse instante;
d) a velocidade angular de rotação do sistema após a colisão;
e) o impulso fornecido à barra pela colisão;
f) a energia dissipada durante a colisão.



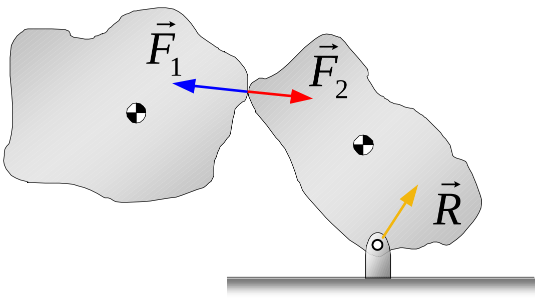
- <u>movimento plano constrangido</u>

⇓

aparecimento de forças impulsionais

⇓

não há conservação da quantidade de movimento!



EXEMPLO

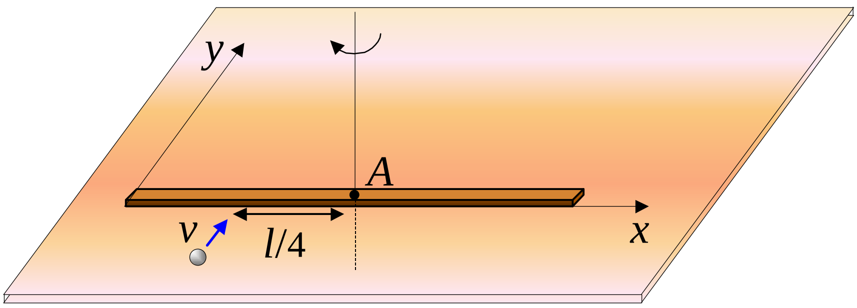
Uma barra fina homogénea de comprimento l e massa m, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal, pode rodar em torno do eixo perpendicular que passa pelo seu centro A. A barra é atingida por uma pequena bola, também de massa m, com velocidade v, num ponto que dista $l/4$ do seu centro. Sabendo que após a colisão a bola fica encastrada na barra, determine

a) a velocidade angular de rotação do sistema após a colisão;

b) a quantidade de movimento do sistema antes e após a colisão;

c) a energia dissipada durante a colisão;

d) o impulso da força de reacção no ponto A.



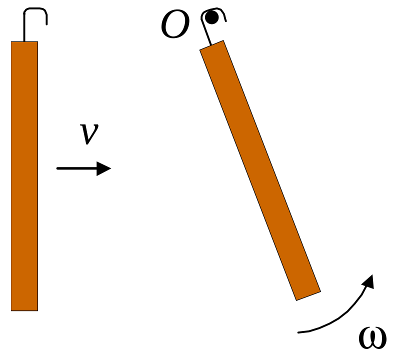
EXERCÍCIO

Uma barra de massa m e comprimento l possui numa das suas extremidades um pequeno gancho de massa desprezável. A barra desloca-se em linha recta com uma velocidade v, até passar por um pino O onde o seu gancho fica preso. Determine

a) a velocidade angular da barra imediatamente após o gancho ficar preso;

b) a quantidade de movimento imediatamente antes e após o choque;

c) a velocidade v necessária para que a barra após o choque possa efectuar voltas completas sem que o seu gancho se desprenda do pino.



MECÂNICA LAGRANGEANA

COORDENADAS GENERALIZADAS

- a posição de uma partícula é definida pelo seu raio vector de posição $\vec{r}$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\textbf{3} \text{ coordenadas!}}$

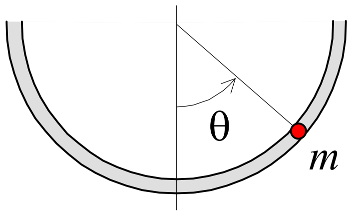
- a posição de um sistema de *N* partículas é definida por *N* raios vectores de posição

$$\Downarrow$$

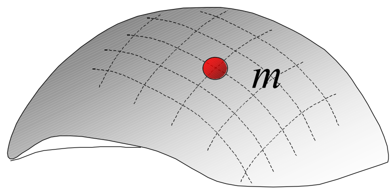
$\boxed{\mathbf{3}\boldsymbol{N} \text{ coordenadas!}}$

- <u>restrições</u> → diminuição do número de coordenadas necessárias

- partícula que se move ao longo de uma linha ⟹ 1 coordenada



- partícula obrigada a mover-se sobre superfície ⟹ bastam 2 parâmetros



- posição de corpo rígido

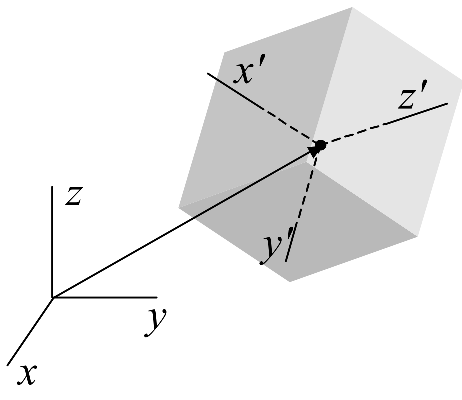
  ⇓

  posição de um ponto

  +

  orientação do corpo

  ⟹ 6 coordenadas



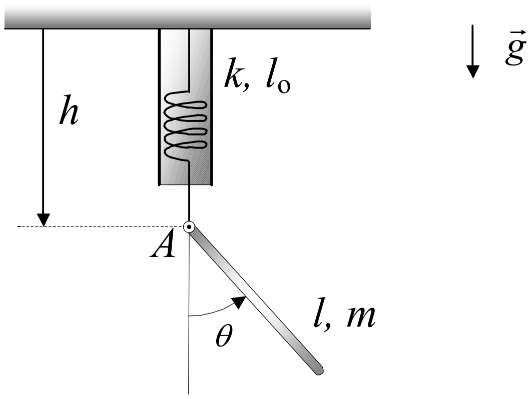
- sistema com s graus de liberdade $\Longrightarrow$ são necessárias s variáveis independentes

- **coordenadas generalizadas** q_1, q_2, ..., q_s → quaisquer s variáveis que definam completamente a posição de um sistema com s graus de liberdade

- selecção das coordenadas generalizadas → **parametrização**

EXEMPLO

A mola da figura, colocada no interior de uma calha, está suspensa pela sua extremidade superior. Na outra extremidade encontra-se uma barra homogénea muito fina que pode oscilar em torno desse ponto.



Parametrização

- ponto *A* move-se na vertical
- localização da barra → orientação no plano e posição de *A*

- coordenadas generalizadas:

  distância de *A* à plataforma → h

  ângulo da barra com a vertical → θ

LAGRANGEANA

- mecânica lagrangeana → cada sistema mecânico é caracterizado por uma determinada função - a **lagrangeana**

$$\boxed{L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)}$$

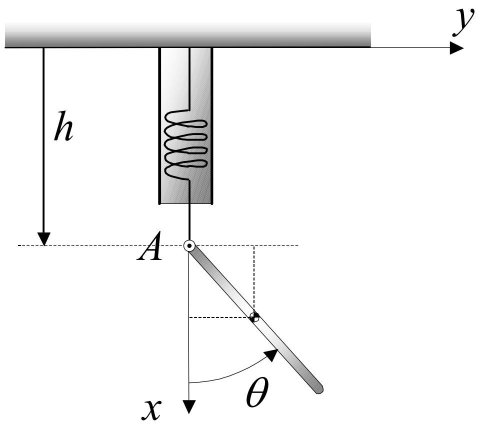
onde

$$\boxed{L = T - U}$$

T → energia cinética do sistema

U → energia potencial

EXEMPLO



Lagrangeana

$$L = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\theta}^2$$

$$U = U_g + U_e$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{h}^2 - \frac{1}{2} ml\dot{\theta}\,\dot{h}\sin\theta + \frac{1}{6} ml^2\dot{\theta}^2 + $$
$$+ mg\left(h + \frac{l}{2}\cos\theta\right) - \frac{1}{2}k(h - l_0)^2$$

PRINCÍPIO DA ACÇÃO MÍNIMA

- evolução do sistema é tal que a **acção**

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, dt}$$

toma o mínimo valor possível

EQUAÇÕES DE LAGRANGE

- minimização da acção conduz a

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \qquad i = 1, 2, \ldots, s$$

$\Uparrow$

equações diferenciais de movimento

- determinação de $\boldsymbol{q}(t)$ requer 2s condições fronteira

EXEMPLO

- $L = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - \frac{1}{2}ml\dot{\theta}\dot{h}\sin\theta + \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + mg\left(h + \frac{l}{2}\cos\theta\right) - \frac{1}{2}k(h - l_0)^2$
- coordenadas generalizadas → *h* e θ

Equações de movimento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

- segundo h

$$\boxed{m\ddot{h} = \frac{ml}{2}\ddot{\theta}\sin\theta + \frac{ml}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + mg - k(h - l_0)}$$

- segundo θ

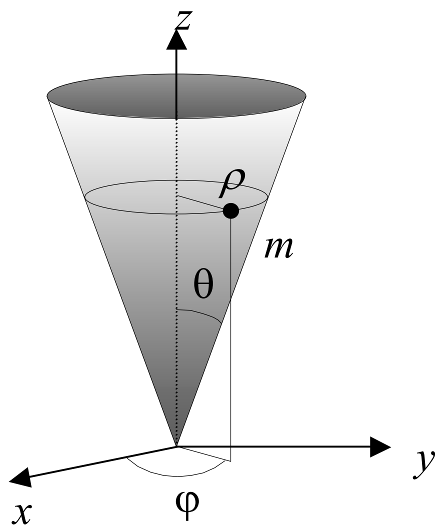
$$\boxed{\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} = \frac{ml}{2}\ddot{h}\sin\theta - \frac{mgl}{2}\sin\theta}$$

EXERCÍCIO

Uma partícula de massa m move-se sobre a superfície de um cone de semi-ângulo θ, tal como é mostrado na figura, estando apenas sujeita à acção da gravidade.

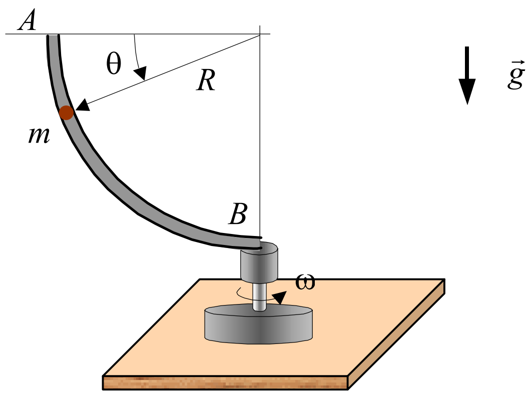
a) Escreva a lagrangeana da partícula

b) Obtenha as equações do movimento da partícula e mostre que o momento angular desta em torno do eixo de simetria do cone se conserva.



EXERCÍCIO

Uma calha, com a forma indicada na figura, roda em torno do eixo vertical com uma velocidade angular ω constante. No interior da calha encontra-se uma pequena bola de massa m.



Sabendo que a bola inicialmente está em repouso (em relação à calha) na posição A, e que chega a B com velocidade nula, determine a velocidade angular ω.

Nota: Despreze o atrito entre a bola e a calha.

EXERCÍCIO 1

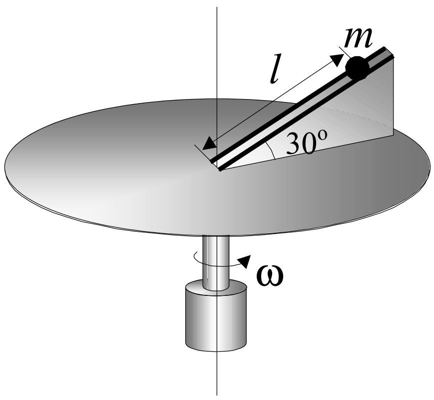
O esquema da figura representa um disco que roda em torno do eixo vertical com uma velocidade angular ω constante. Sobre o disco está colocada uma rampa, solidária com ele, que possui uma ranhura por onde é livre de deslizar (sem atrito) uma partícula de massa m.

a) Escreva a lagrangeana da partícula e mostre que a equação do movimento desta se pode escrever na forma:

$$4\ddot{l} - 3\omega^2 l = -2g \ ,$$

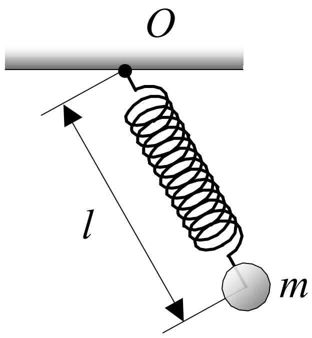
onde g é a aceleração da gravidade.

b) Determine, em função de l, a velocidade da partícula.



EXERCÍCIO 2

Na figura está representado um pêndulo simples em que a haste foi substituída por uma mola de constante elástica k e comprimento natural l_0. Suponha que não há forças de atrito aplicadas. Escreva a lagrangeana deste pêndulo e obtenha as suas equações de movimento.



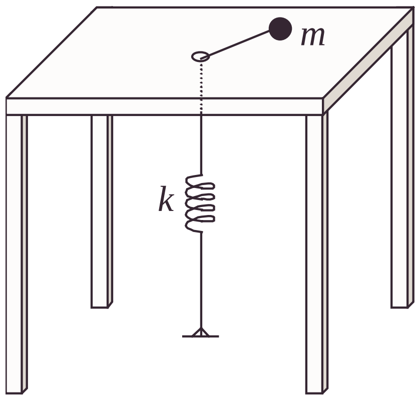
EXERCÍCIO 1

Uma partícula de massa m move-se sobre uma mesa horizontal sem atrito. Uma corda inextensível, que passa no orifício aberto no centro da mesa, liga a partícula a uma mola de constante elástica k. A mola está presa ao solo de forma a não experimentar qualquer alongamento quando a massa se encontra no orifício.

a) Escreva a lagrangeana da partícula.

b) Obtenha as equações do movimento da partícula.

c) Mostre que o momento angular da partícula se conserva. Como interpreta fisicamente este resultado?

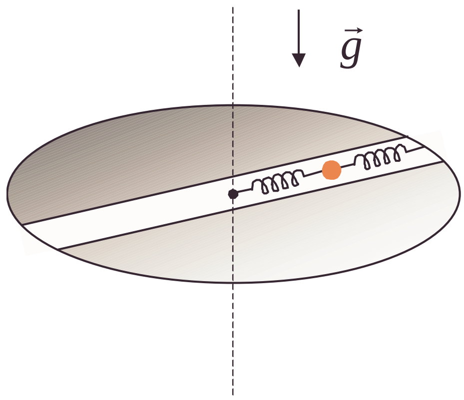


EXERCÍCIO 2

Uma partícula de massa m pode deslocar-se ao longo de uma calha que passa pelo centro de um disco sem massa. A massa está ligada por duas molas iguais de comprimento livre $R/2$ e constante de rigidez k ao centro do disco e a um extremo da calha. O disco, de raio R, está colocado horizontalmente e pode rodar em torno do eixo vertical que passa pelo seu centro.

a) Determine as equações diferenciais do movimento.

b) Admita agora que o disco roda com velocidade angular ω constante. Que valor deve ter ω para que o movimento da partícula ao longo da calha seja harmónico simples?



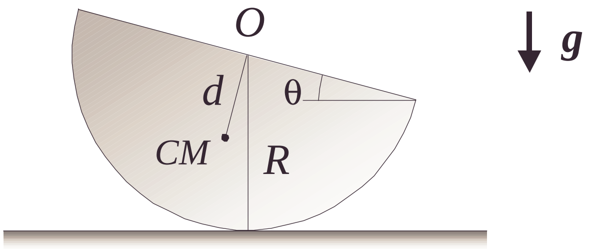
EXERCÍCIO 3

Um semi-disco homogéneo de massa m e raio R pode rodar sem deslizar sobre a superfície plana horizontal onde está colocado.

a) Mostre que $d = \dfrac{4R}{3\pi}$.

b) Mostre que o momento de inércia do semi-disco em relação ao eixo perpendicular que passa pelo seu centro de massa é dado por $I_{CM} = mR^2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{16}{9\pi^2}\right)$.

c) Determine as equações do movimento do semi-disco.

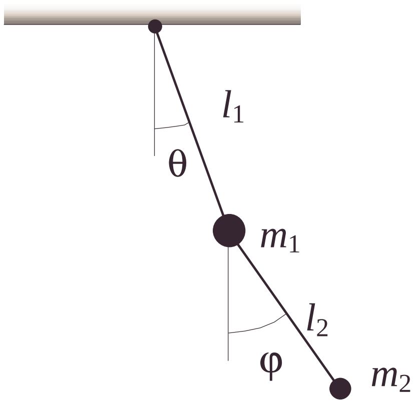


EXERCÍCIO 4

Um pêndulo duplo é formado por duas massas, m_1 e m_2, suspensas por fios de comprimento l_1 e l_2, tal como mostra a figura.

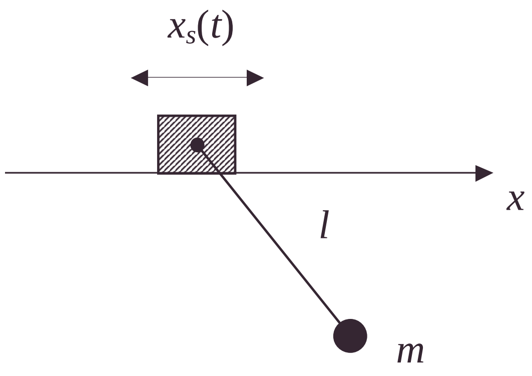
d) Escreva a lagrangeana deste sistema.

e) Encontre as equações do movimento do pêndulo duplo.



EXERCÍCIO 5

Escreva a equação de movimento de um pêndulo que tem o seu suporte, de massa desprezável, a deslocar-se num plano horizontal, conforme esquematizado na figura.



INTRODUÇÃO À MECÂNICA CLÁSSICA

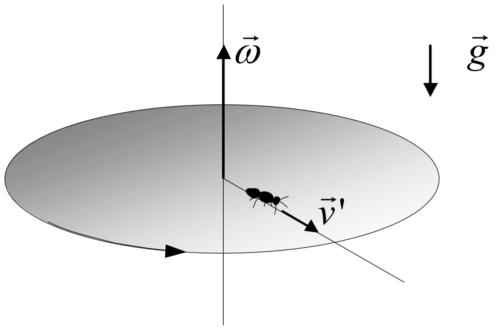
Transparências das aulas teórico-práticas

Maria Inês Barbosa de Carvalho

2001/2002

EXERCÍCIO 1

Uma formiga desloca-se com uma velocidade constante v' ao longo de um diâmetro de um disco horizontal que roda com uma velocidade angular constante ω em torno da vertical.

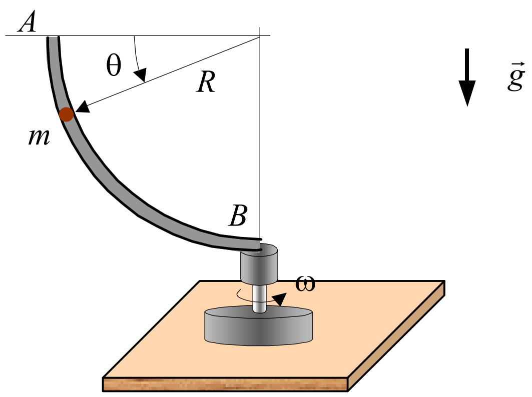


a) Determinar todas as forças fictícias ou inerciais que a mosca sente.

b) Que distância é que a formiga pode percorrer antes de começar a escorregar, sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a formiga e o disco é μ_e ?

EXERCÍCIO 2

Uma calha, com a forma indicada na figura, roda em torno do eixo vertical com uma velocidade angular ω constante. No interior da calha encontra-se uma pequena bola de massa m.



Sabendo que a bola inicialmente está em repouso (em relação à calha) na posição A, e que chega a B com velocidade nula, determine

a) a velocidade angular ω;

b) as forças exercidas pela calha sobre a bola.

Nota: Despreze o atrito entre a bola e a calha.

EXERCÍCIO

Uma partícula de massa $m_1 = 2m$ com velocidade $\vec{v}$ colide com uma partícula de massa $m_2 = m$, inicialmente em repouso.

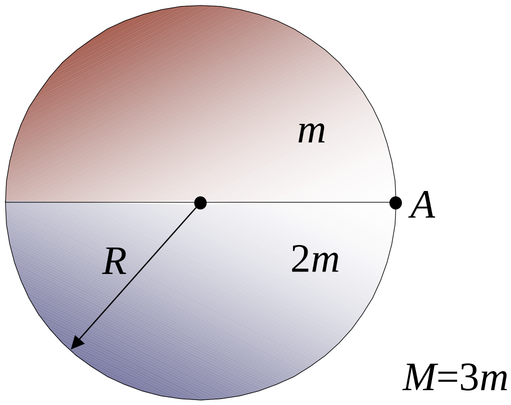
a) Supondo que a colisão é unidimensional, e que $\varepsilon = \frac{3}{4}$, determine
   i) as velocidades das partículas após o choque;
   ii) a energia dissipada no choque.

b) Considerando que a colisão é bidimensional e elástica, e que a partícula incidente é deflectida segundo um ângulo φ_1, mostre que
   i) $\tan\varphi_2 = \dfrac{v_{1f}\sin\varphi_1}{v - v_{1f}\cos\varphi_1}$;
   ii) $\dfrac{v_{1f}}{v} = \dfrac{2\cos\varphi_1 \pm \sqrt{4\cos^2\varphi_1 - 3}}{3}$;
   iii) o valor máximo de φ_1 é 30°.

c) Nas condições da alínea anterior, e para φ_1 = 30°, determine $\vec{v}_{1f}$ e $\vec{v}_{2f}$.

EXERCÍCIO

Considere um disco circular de raio R e massa M constituído por dois semi-discos de materiais diferentes.



Sabendo que a massa de um dos semi-discos é o dobro da massa do outro, determine

a) a posição do centro de massa do disco;

b) o momento de inércia do disco relativamente ao eixo perpendicular que passa pelo seu centro;

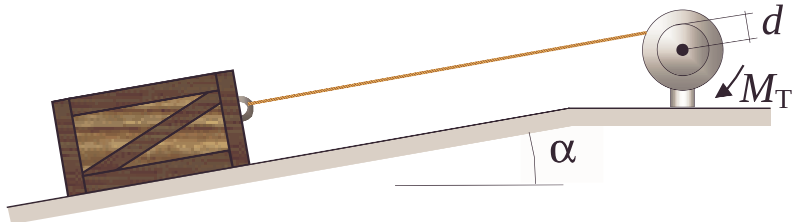
c) o momento de inércia do disco relativamente ao eixo perpendicular que passa pelo seu centro de massa;

d) a energia cinética do disco quando ele roda em torno do eixo perpendicular que passa pelo ponto A com uma velocidade angular ω.

e) Mostre que o resultado anterior pode ser obtido calculando a energia cinética de translação e de rotação relativamente ao centro de massa.

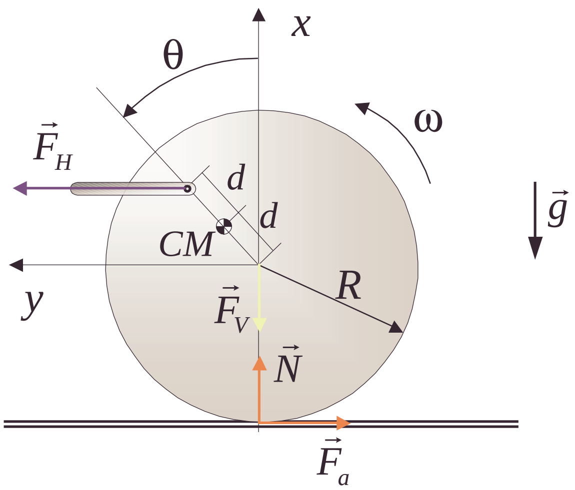
EXERCÍCIO 1

Um caixote de massa m sobe uma superfície inclinada, puxado por um guincho. O coeficiente de atrito cinético entre o caixote e a superfície é μ_C . O momento de inércia da roldana em relação ao seu eixo é I_{CM} . Sabendo que o motor exerce um momento M_T na roldana, determine a aceleração do caixote.



EXERCÍCIO 2

Uma roda de um comboio rola sem escorregar num carril horizontal. A roda está sujeita a uma força vertical $\vec{F}_V$, aplicada no seu centro, e a uma força horizontal $\vec{F}_H$, aplicada no ponto de contacto com a barra de ligação. A massa da roda é m e o seu momento de inércia relativamente ao eixo perpendicular que passa no seu centro de massa é I_{CM}. Sabendo que o CM da roda está a uma distância d do seu centro, como mostra a figura, determine a aceleração angular da roda.



EXERCÍCIO 1

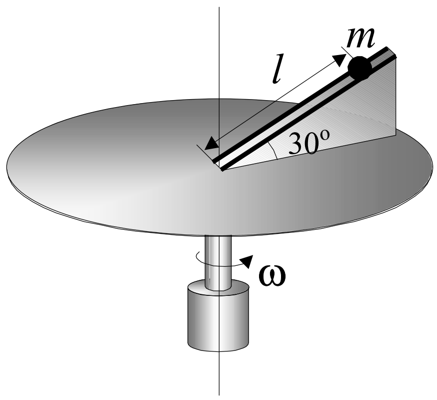
O esquema da figura representa um disco que roda em torno do eixo vertical com uma velocidade angular ω constante. Sobre o disco está colocada uma rampa, solidária com ele, que possui uma ranhura por onde é livre de deslizar (sem atrito) uma partícula de massa m.

a) Escreva a lagrangeana da partícula e mostre que a equação do movimento desta se pode escrever na forma:

$$4\ddot{l} - 3\omega^2 l = -2g \ ,$$

onde g é a aceleração da gravidade.

b) Determine, em função de l, a velocidade da partícula.



EXERCÍCIO 2

Na figura está representado um pêndulo simples em que a haste foi substituída por uma mola de constante elástica k e comprimento natural l_0. Suponha que não há forças de atrito aplicadas. Escreva a lagrangeana deste pêndulo e obtenha as suas equações de movimento.