

Óptica e Electromagnetismo

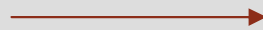
MIB 2007/2008

- **Teórico-práticas**

- 1 turma
- 2 X 1.5h por semana

- **Práticas**

- 3 turmas
- 1 X 1h por semana



agrupadas de forma a permitir a realização dos trabalhos laboratoriais

- **Teórico-práticas**

- exposição e discussão da matéria
- resolução de exercícios
- realização de micro-testes



preparação prévia da matéria

- **Práticas**

- realização de 3 trabalhos laboratoriais específicos
- realização de 3 trabalhos laboratoriais integrados

	Teórico-práticas	Práticas	Atendimento
Inês Carvalho gab 313 mines@fe.up.pt	(aprox. 2/3 das aulas)		5ª feira, das 9h00 às 10h00
Abel Costa gab 326 ajcosta@fe.up.pt	(aprox. 1/3 das aulas)	todas as turmas	2ª feira, das 11h30 às 12h30 5ª feira, das 14h00 às 15h00

- **Exame final**

- 50% da nota final
- consulta de formulário fornecido

- **Microtestes**

- 20% da nota final
- realizados nas aulas práticas sem aviso prévio
- curta duração (aprox 15 min)
- entre 6 a 9 durante o semestre
- 2 piores não contam para nota

nota de frequência

```
graph LR; A[Microtestes] --> B[nota de frequência]; C[Laboratórios] --> B;
```

- **Laboratórios**

- 30% da nota final
- 3 trabalhos específicos
- 2 trabalhos integrados propostos
- 1 trabalho integrado tipo projecto
- relatórios dos trabalhos

- **Classificação de frequência - AD (0 – 20 valores)**

$$AD = 0.4 \cdot M + 0.6 \cdot L$$

- $M \rightarrow$ média dos microtestes, excluindo os 2 piores
- $L \rightarrow$ classificação dos laboratórios

- **Condições para obtenção de frequência**

- Não exceder limite de faltas às aulas TP e às aulas P (25% das previstas \rightarrow 6 faltas às aulas TP e 3 faltas às aulas P)
- Classificação mínima de 30% nos microtestes e nos laboratórios
- Realização de 2 trabalhos específicos e 2 trabalhos integrados

Exame final – E (0 – 20 valores)

Nota de frequência – AD (0 – 20 valores)

$$CF = 0.5 \cdot E + 0.5 \cdot AD$$

- **Análise Vectorial**
 - Sistemas de coordenadas. Operadores diferenciais. Teoremas da divergência e de Stokes.
- **Electrostática e Magnetostática**
 - Leis de Coulomb e de Gauss. Leis de Biot-Savart e de Ampère. Corrente eléctrica.
- **Campos e Ondas Electromagnéticas**
 - Eq. de Maxwell. Ondas electromagnéticas. Incidência em interfaces. Interferência. Difracção.
- **Óptica Geométrica**
 - Lentes, espelhos, prismas. Formação de imagens. Sistemas ópticos em bioengenharia.
- **Fibras Ópticas**
 - Tipos de fibras. Aplicações em biomedicina. Biosensores.
- **Lasers**
 - Princípio de funcionamento. Lasers aplicados em bioengenharia.

	Aulas Teórico-práticas
Apresentação	1
Análise vectorial (revisão)	2
Electrostática e magnetostática	7
Campos e ondas electromagnéticas	7
Óptica geométrica	3
Fibras ópticas	3
Lasers	3

← 26 aulas

- **Livros recomendados**

- D. Cheng, "Field and Wave Electromagnetics", Addison Wesley, 1989.
- P. Tipler e G. Mosca, "Física para cientistas e engenheiros – vol. 2", Livros Técnicos e Científicos Editora, 2004 .
- E. Hecht, "Óptica", Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

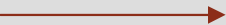
- **Material fornecido**

- Acetatos das aulas teóricas
- Folhas de problemas
- Formulário



disponível na página da disciplina:

<http://www.fe.up.pt/~mines/OpE/>

- **Álgebra**
 - Números complexos
- **Análise Matemática**
 - Derivação
 - Integração
 - Análise vectorial  próximas 2 aulas

- **Análise Vectorial**
 - Sistemas de coordenadas
 - cartesianas
 - cilíndricas
 - esféricas
 - Operadores diferenciais
 - gradiente
 - divergência
 - rotacional
 - Integração de funções escalares e vectoriais
 - integrais de linha
 - integrais de fluxo

Análise Vectorial (revisão)

OpE - MIB 2007/2008

→ **Análise Vectorial (revisão) → 2 aulas**

Electrostática e Magnetostática → 7 aulas

Campos e Ondas Electromagnéticas → 7 aulas

Óptica Geométrica → 3 aulas

Fibras Ópticas → 3 aulas

Lasers → 3 aulas



Sistemas de coordenadas

cartesianas, cilíndricas e esféricas

Operadores diferenciais

gradiente, divergência e rotacional

Integração de funções escalares e vectoriais

integrais de linha e de fluxo

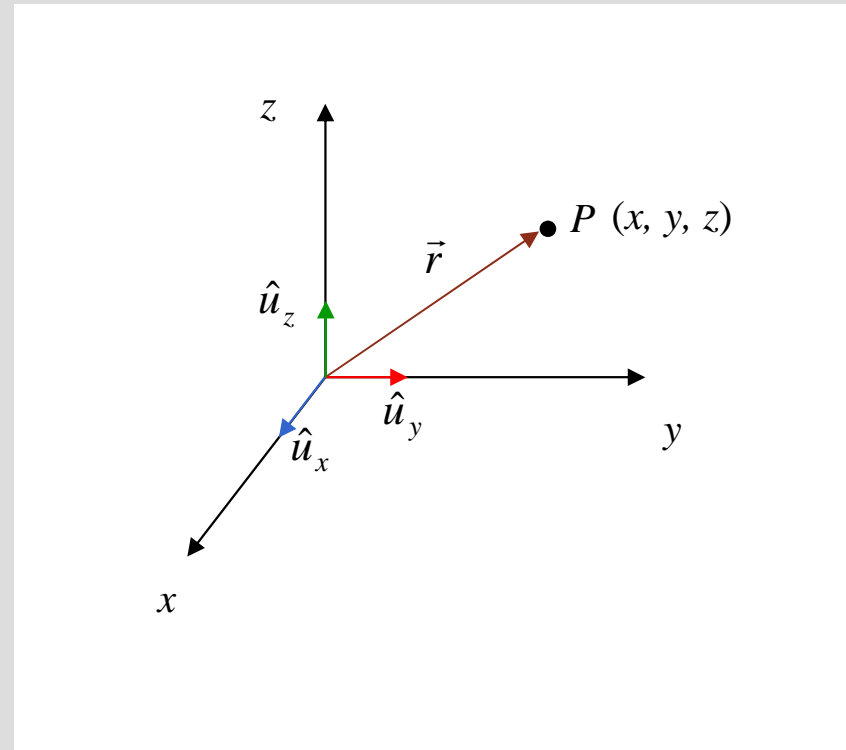
Teoremas

teoremas da divergência e de Stokes

coordenadas cartesianas $\rightarrow x, y, z$

vector de posição

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$$



elemento de comprimento

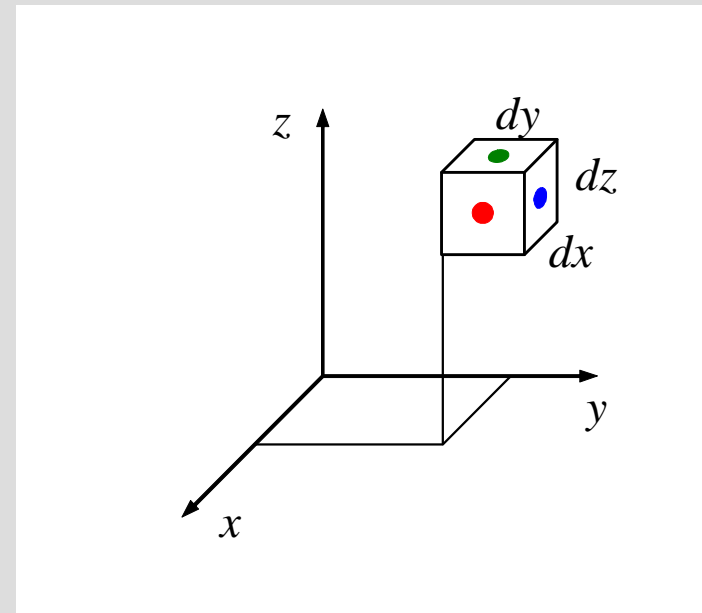
$$d\vec{l} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z$$

elementos de superfície

- $ds_x = dydz$ (sup. perpendicular a xx)
- $ds_y = dxdz$
- $ds_z = dxdy$

elemento de volume

$$dv = dxdydz$$



gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{u}_z$$

divergência

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

rotacional

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

nota:

$f = f(x, y, z) \rightarrow$ **campo escalar**

$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) \rightarrow$ **campo vectorial**

coordenadas cilíndricas $\rightarrow r, f, z$

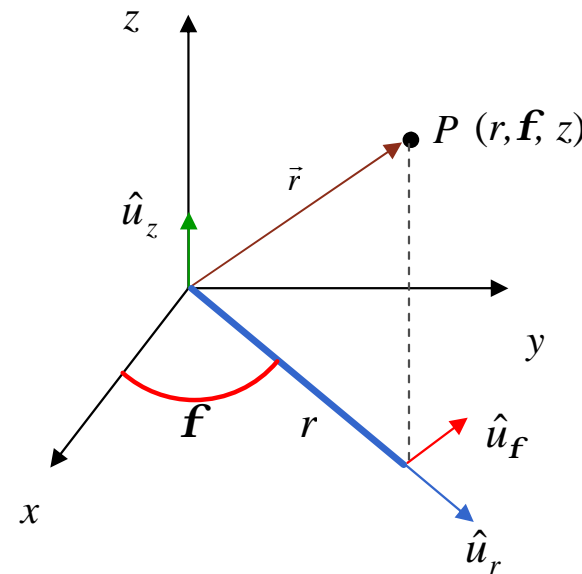
versores

$$\hat{u}_r = \cos f \hat{u}_x + \sin f \hat{u}_y$$

$$\hat{u}_f = -\sin f \hat{u}_x + \cos f \hat{u}_y$$

vector de posição

$$\vec{r} = r \hat{u}_r + z \hat{u}_z$$



$$\begin{aligned} x &= r \cos f \\ y &= r \sin f \end{aligned}$$

$$f \in [0, 2\pi]$$

elemento de comprimento

$$d\vec{l} = dr \hat{u}_r + r d\mathbf{f} \hat{u}_f + dz \hat{u}_z$$

elementos de superfície

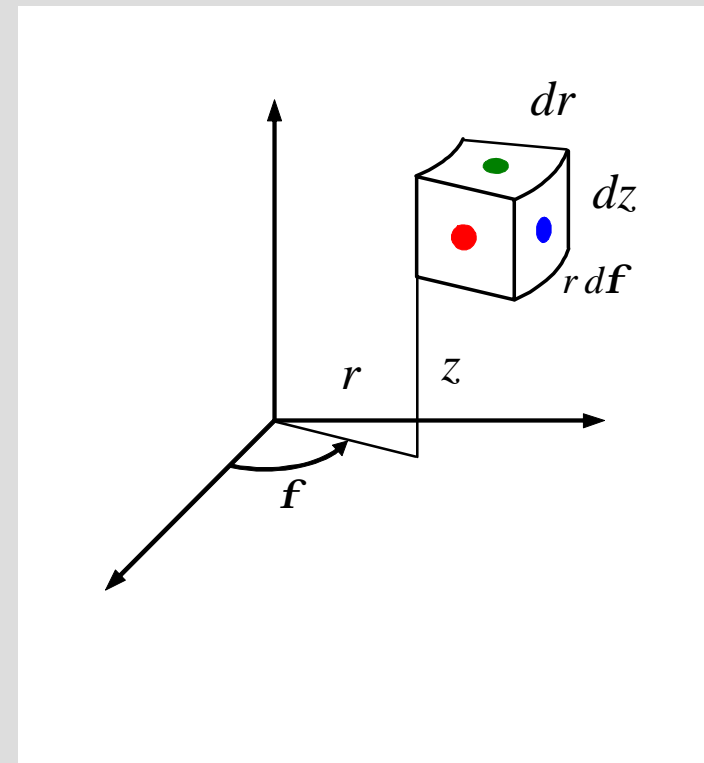
● $ds_f = dr dz$

● $ds_r = r d\mathbf{f} dz$

● $ds_z = r dr d\mathbf{f}$

elemento de volume

$$dv = r dr d\mathbf{f} dz$$



gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{f}} \hat{u}_f + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{u}_z$$

divergência

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_f}{\partial \mathbf{f}} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

rotacional

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{u}_r & r\hat{u}_f & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_f & A_z \end{vmatrix}$$

coordenadas esféricas $\rightarrow R, q, f$

versores

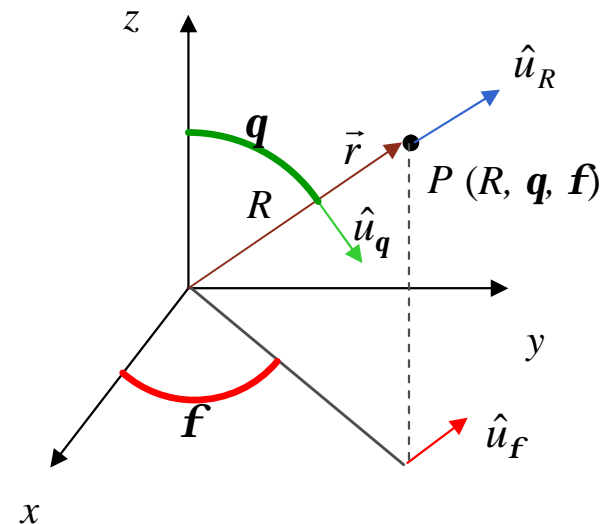
$$\hat{u}_R = \sin q \cos f \hat{u}_x + \sin q \sin f \hat{u}_y + \cos q \hat{u}_z$$

$$\hat{u}_q = \cos q \cos f \hat{u}_x + \cos q \sin f \hat{u}_y - \sin q \hat{u}_z$$

$$\hat{u}_f = -\sin f \hat{u}_x + \cos f \hat{u}_y$$

vector de posição

$$\vec{r} = R \hat{u}_R$$



$$x = R \sin q \cos f$$

$$y = R \sin q \sin f$$

$$z = R \cos q$$

$$f \in [0, 2\pi]$$

$$q \in [0, \pi]$$

elemento de comprimento

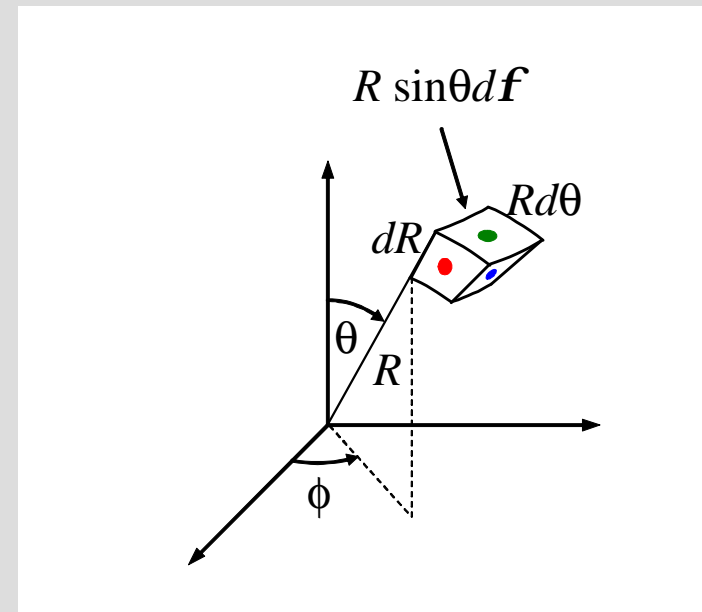
$$d\vec{l} = dR \hat{u}_R + R d\mathbf{q} \hat{u}_q + R \sin \mathbf{q} d\mathbf{f} \hat{u}_f$$

elementos de superfície

- $ds_f = R dR d\mathbf{q}$
- $ds_q = R \sin \mathbf{q} dR d\mathbf{f}$
- $ds_R = R^2 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f}$

elemento de volume

$$dv = R^2 \sin \mathbf{q} dR d\mathbf{q} d\mathbf{f}$$



gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial R} \hat{u}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \hat{u}_q + \frac{1}{R \sin \mathbf{q}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{f}} \hat{u}_f$$

divergência

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\sin \mathbf{q} A_q) + \frac{1}{R \sin \mathbf{q}} \frac{\partial A_f}{\partial \mathbf{f}}$$

rotacional

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{R^2 \sin \mathbf{q}} \begin{vmatrix} \hat{u}_R & R \hat{u}_q & R \sin \mathbf{q} \hat{u}_f \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \\ A_R & R A_q & R \sin \mathbf{q} A_f \end{vmatrix}$$

1. Considere os pontos P_1 e P_2 de coordenadas cartesianas $(1, 2, 0)$ e $(4, -5, 1)$, respectivamente. Determine
 - a) o vector que vai de P_1 para P_2 ;
 - b) a distância entre os dois pontos.

2. Considere o ponto P de coordenadas cilíndricas $(2, \pi/2, 1)$. Determine o seu vector de posição em coordenadas
 - a) cilíndricas;
 - b) cartesianas;
 - c) esféricas

3. Calcule o gradiente do campo escalar $f = 2x \sin(y) e^{-z}$ no ponto de coordenadas cartesianas $(1, \pi/2, 0)$.

4. Determine a divergência do campo vectorial $\vec{V} = R^n \hat{u}_R$

5. Determine o rotacional do campo vectorial $\vec{B} = \frac{4}{r} \cos(\mathbf{f}) \hat{u}_f + z \hat{u}_z$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

rotacional de gradiente é sempre nulo

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

divergência de rotacional é sempre nula



- se o rotacional de um campo vectorial é nulo, então esse campo vectorial pode ser expresso como o gradiente de um campo escalar.
- campo vectorial com rotacional nulo é chamado **campo conservativo**
- se a divergência de um campo vectorial é nula, então esse campo vectorial pode ser expresso como o rotacional de outro campo vectorial.

Um campo vectorial fica completamente especificado, a menos de uma constante, se a sua divergência e o seu rotacional forem conhecidos

Exercício

Considere o campo vectorial $\vec{F} = (x + c_1 z)\hat{u}_x + (c_2 x - 3z)\hat{u}_y + (x + c_3 y + c_4 z)\hat{u}_z$

Determine c_1 , c_2 , c_3 , e c_4 sabendo que $\nabla \times \vec{F} = 0$ e $\nabla \cdot \vec{F} = 0$

3ª feira

Integração de funções escalares e vectoriais

integrais de linha e de fluxo

Teoremas importantes

teoremas da divergência e de Stokes

4ª feira

Lei de Coulomb

Campo eléctrico criado por distribuições de cargas → princípio da sobreposição

distribuições discretas

distribuições contínuas

Sistemas de coordenadas

cartesianas, cilíndricas e esféricas

Operadores diferenciais

gradiente, divergência e rotacional

Integração

comprimento, área e volume

integração de funções escalares e vectoriais

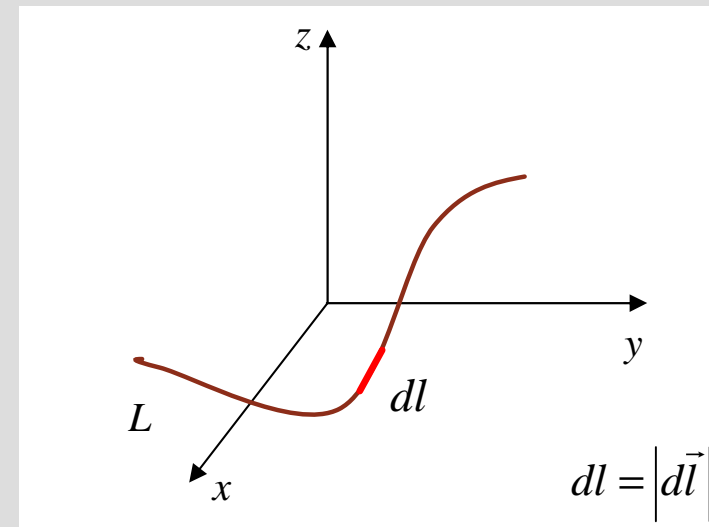
integrais de linha e de fluxo

Teoremas

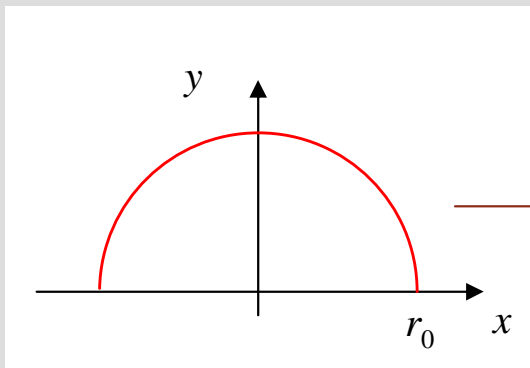
teoremas da divergência e de Stokes



$$\text{comprimento} = \int_L dl$$



Exemplo



coordenadas cilíndricas $\rightarrow d\vec{l} = dr\hat{u}_r + r d\mathbf{f}\hat{u}_f + dz\hat{u}_z$

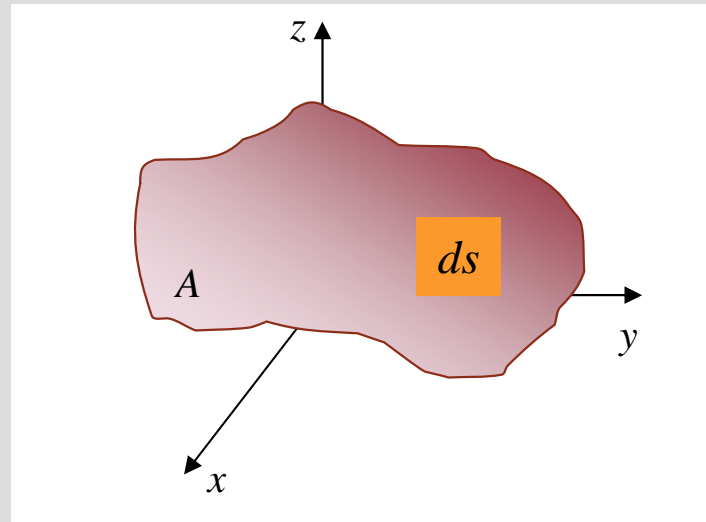
$$\begin{aligned} r &= r_0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dr &= 0 \\ dz &= 0 \end{aligned}$$

$$d\vec{l} = r_0 d\mathbf{f}\hat{u}_f \rightarrow dl = r_0 d\mathbf{f}$$

$$\text{comprimento} = \int_0^p r_0 d\mathbf{f} = p r_0$$

$$\text{área} = \int_A ds$$



Exemplo

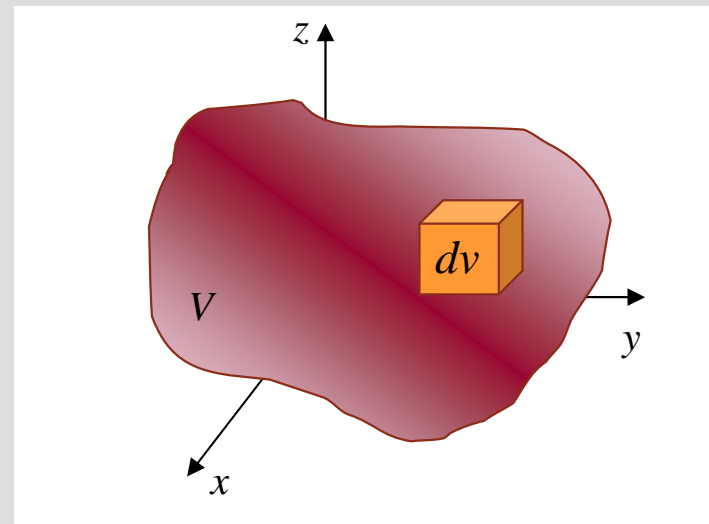
Para calcular a área da região definida por $R = R_0$, $f \in [0, 2p]$ e $q \in [0, p/2]$, o elemento de superfície a utilizar é

$$ds = ds_R = R^2 \sin q \, dq \, df = R_0^2 \sin q \, dq \, df$$

↑
 $R = R_0$

$$\Rightarrow \text{área} = \int_0^{2p} \int_0^{p/2} R_0^2 \sin q \, dq \, df = R_0^2 \int_0^{2p} df \int_0^{p/2} \sin q \, dq = R_0^2 \, 2p \, [-\cos q]_0^{p/2} = 2p R_0^2$$

$$\text{volume} = \int_V dv$$



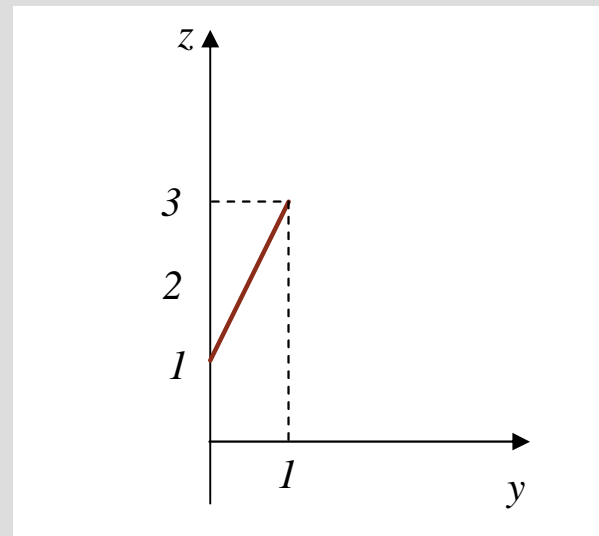
Exemplo

O volume da região definida por $R_1 < R < R_2$, $\mathbf{f} \in [0, 2\mathbf{p}]$ e $\mathbf{q} \in [0, \mathbf{p}]$, é dado por

$$\text{volume} = \int_0^{2\mathbf{p}} \int_0^{\mathbf{p}/2} \int_{R_1}^{R_2} R^2 \sin \mathbf{q} \, dR \, d\mathbf{q} \, d\mathbf{f} = \int_0^{2\mathbf{p}} d\mathbf{f} \int_0^{\mathbf{p}} \sin \mathbf{q} \, d\mathbf{q} \int_{R_1}^{R_2} R^2 \, dR = 2\mathbf{p} [-\cos \mathbf{q}]_0^{\mathbf{p}} \left[\frac{R^3}{3} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{4\mathbf{p}}{3} (R_2^3 - R_1^3)$$

$dv = R^2 \sin \mathbf{q} \, dR \, d\mathbf{q} \, d\mathbf{f}$ ← coordenadas esféricas

1. Calcule a área da superfície lateral do cone de altura H e diâmetro de base D .
2. Calcule o volume do cone do problema anterior.
3. Determine, por integração, o comprimento da linha representada na figura seguinte.



A integração de uma dada **função escalar** f ao longo de uma dada região pode ser de diferentes tipos:

→ $\int_L f dl$ e $\int_L f d\vec{l}$ (região = linha)

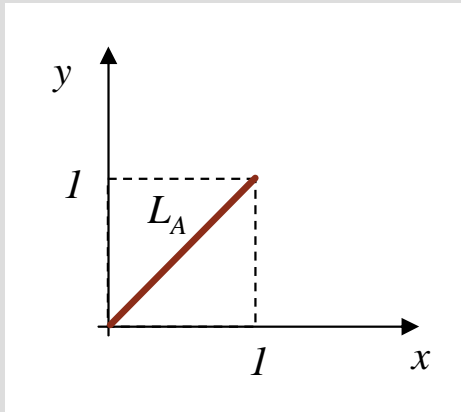
→ $\int_A f ds$ e $\int_A f d\vec{s}$ (região = superfície)

↑
vector normal à superfície considerada e com amplitude $|d\vec{s}| = ds$

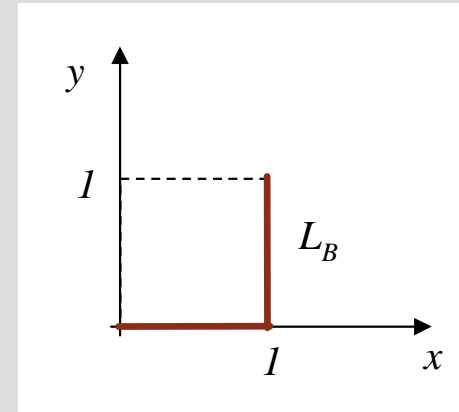
→ $\int_V f dv$ (região = volume)

1. Determinar o valor dos integrais $I_1 = \int_L f \, dl$ e $I_2 = \int_L f \, d\vec{l}$, onde $f = 2x + y^2$, para os dois percursos indicados a seguir

a)



b)



2. Determinar o valor do integral $I = \int_V f \, dv$ onde $f = \frac{\cos \theta}{R^2}$ e V é o volume da metade superior da esfera de raio 2 centrada na origem

Seja \vec{F} uma função vectorial

A integração desta função ao longo de uma dada região pode ser de tipos diferentes:

$$\int_L \vec{F} dl \quad \text{e} \quad \boxed{\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l}} \quad \text{integral de linha} \quad \longrightarrow \quad \text{circulação de } \vec{F} \text{ ao longo de } L$$

$$\int_A \vec{F} ds \quad \text{e} \quad \boxed{\int_A \vec{F} \cdot d\vec{s}} \quad \text{integral de fluxo} \quad \longrightarrow \quad \text{fluxo de } \vec{F} \text{ através de } A$$

$$\int_V \vec{F} dv$$

Dos integrais acima, são particularmente relevantes para esta disciplina os **integrais de linha e de fluxo**

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \leftarrow \text{(circulação de } \vec{F} \text{ ao longo de } L \text{)}$$

onde $L \rightarrow$ linha em consideração

$d\vec{l} \rightarrow$ tangente em cada ponto a L



$\vec{F} \cdot d\vec{l} \rightarrow$ depende da componente de \vec{F} segundo o percurso de integração

Exemplo: se \vec{F} for força e L o percurso, o integral representa o trabalho

Integral de linha – exemplo

Determine o valor do integral $I = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, onde P_1 e P_2 são os pontos de coordenadas $(2,1,0)$ e $(8,2,0)$, respectivamente, e $\vec{E} = y\hat{u}_x + x\hat{u}_y$, ao longo do segmento de recta que une os dois pontos

coordenadas cartesianas $\longrightarrow d\vec{l} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z \longrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = ydx + xdy$

a recta que passa pelos dois pontos é dada por: $x = 6y - 4 \longrightarrow dx = 6dy \longrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = (12y - 4)dy$

$$\Longrightarrow I = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 (12y - 4)dy = [6y^2 - 4y]_1^2 = 14$$

Determine o valor do integral $I = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, onde P_1 e P_2 são os pontos de coordenadas cartesianas $(2,1,0)$ e $(8,2,0)$, respectivamente, e $\vec{E} = y\hat{u}_x + x\hat{u}_y$ ao longo da parábola $x = 2y^2$

$$\int_A \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \leftarrow \text{(fluxo de } \vec{F} \text{ através de } A \text{)}$$

onde $A \rightarrow$ superfície em consideração (superfície pode ser **aberta** ou **fechada**) \rightarrow fluxo = $\oint_A \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$d\vec{s} \rightarrow$ normal a A em cada ponto

convenção: se A for fechada, $d\vec{s}$ aponta **para fora** de A

$\vec{F} \cdot d\vec{s} \rightarrow$ depende da componente de \vec{F} normal à superfície

Integral de fluxo – exemplo

Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{B} = 3 \sin \mathbf{q} \hat{u}_R + \frac{5}{R} \tan \mathbf{f} \hat{u}_q + R^2 \hat{u}_f$ através da esfera de raio

5 centrada na origem.

$$\text{fluxo} = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

superfície em causa é esférica $\longrightarrow d\vec{s} = ds_R \hat{u}_R \longrightarrow \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_R ds_R = 3 \sin \mathbf{q} ds_R$

$R = 5 \xrightarrow{ds_R = R^2 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 75 \sin^2 \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f}$

$$\text{fluxo} = \int_0^{2p} \int_0^p 75 \sin^2 \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f} = 150p \left[\frac{\mathbf{q}}{2} - \frac{\sin 2\mathbf{q}}{4} \right]_0^p = 75p^2$$

O integral de volume da divergência de um campo vectorial é igual ao fluxo total exterior do campo vectorial através da superfície que limita o volume

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} \, dv = \oint_A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

nota: este teorema permite converter integrais de superfície em integrais de volume, e vice-versa

Teorema da divergência – exemplo

Considere o campo vectorial $\vec{D} = \frac{\cos^2 \mathbf{f}}{R^3} \hat{u}_R$ e a coroa esférica definida por $1 < R < 2$.

Determine

a) $\int_V \nabla \cdot \vec{D} \, dv$

b) $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{s}$

a) coordenadas esféricas $\longrightarrow \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\sin \mathbf{q} A_q) + \frac{1}{R \sin \mathbf{q}} \frac{\partial A_f}{\partial \mathbf{f}}$

$$\begin{array}{l} D_R = \frac{\cos^2 \mathbf{f}}{R^3} \\ D_q = D_f = 0 \end{array} \longrightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\cos \mathbf{f}}{R} \right) = -\frac{\cos^2 \mathbf{f}}{R^4}$$

$$\longrightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{D} \, dv = \int_0^{2p} \int_0^p \int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{\cos^2 \mathbf{f}}{R^4} \right) R^2 \sin \mathbf{q} \, dR \, d\mathbf{q} \, d\mathbf{f} = - \int_0^{2p} \cos^2 \mathbf{f} \, d\mathbf{f} \int_0^p \sin \mathbf{q} \, d\mathbf{q} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -p$$

$$dv = R^2 \sin \mathbf{q} \, dR \, d\mathbf{q} \, d\mathbf{f}$$

Teorema da divergência – exemplo

b)

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{s} = \oint_{A_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \oint_{A_2} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

fluxo através da superfície com $R=1$

fluxo através da superfície com $R=2$

$$\vec{D} = \frac{\cos^2 \mathbf{f}}{R^3} \hat{u}_R$$

$$1 < R < 2$$

superfície com $R=1$:

$$R=1 \xrightarrow{d\vec{s} = -ds_R \hat{u}_R} \left[\begin{array}{l} d\vec{s} = -1^2 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f} \hat{u}_R = -\sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f} \hat{u}_R \\ \vec{D} = \cos^2 \mathbf{f} \hat{u}_R \end{array} \right] \longrightarrow \vec{D} \cdot d\vec{s} = -\cos^2 \mathbf{f} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f}$$

$$\downarrow$$

$$\oint_{A_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} = -2p$$

superfície com $R=2$:

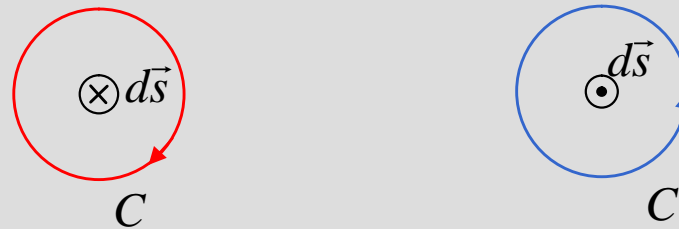
$$R=2 \xrightarrow{d\vec{s} = ds_R \hat{u}_R} \left[\begin{array}{l} d\vec{s} = 4 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f} \hat{u}_R \\ \vec{D} = \frac{\cos^2 \mathbf{f}}{8} \hat{u}_R \end{array} \right] \longrightarrow \vec{D} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \cos^2 \mathbf{f} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f} \longrightarrow \oint_{A_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} = p$$

$$\longrightarrow \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{s} = -p \quad \text{como seria de esperar}$$

O integral de superfície do rotacional de um campo vectorial estendido a uma dada superfície aberta é igual ao integral de linha do campo vectorial ao longo do percurso fechado que limita essa superfície

$$\int_A (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

importante: sentido de circulação e sentido de $d\vec{s}$ estão relacionados pela regra da mão-direita



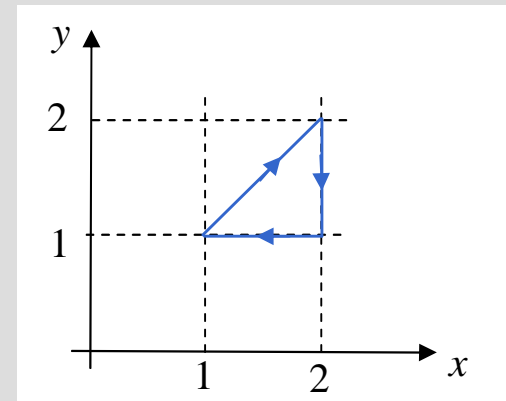
Teorema de Stokes – exemplo

Considere o campo vectorial $\vec{A} = 3x^2y^3\hat{u}_x - x^3y^2\hat{u}_y$ e o percurso triangular representado na figura.

Determine

a) $\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$

b) $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$



a)

S : superfície do triângulo

sentido horário $\rightarrow d\vec{s} = -ds\hat{u}_z = -dxdy\hat{u}_z$

$$\begin{aligned} A_x &= 3x^2y^3 \\ A_y &= -x^3y^2 \\ A_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \nabla \times \vec{A} = -12x^2y^2\hat{u}_z$$

$$\rightarrow (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = 12x^2y^2 dx dy$$

$$\rightarrow \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \int_y^2 12x^2y^2 dx dy = \int_1^2 12y^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_y^2 dy = 4 \int_1^2 y^2 (8 - y^3) dy = \frac{98}{3}$$

Teorema de Stokes – exemplo

b)

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_3} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z \quad \vec{A} = 3x^2y^3\hat{u}_x - x^3y^2\hat{u}_y \quad \vec{A} \cdot d\vec{l} = 3x^2y^3dx - x^3y^2dy$$

percurso L_1 : $x = 2 \longrightarrow dx = 0 \longrightarrow \vec{A} \cdot d\vec{l} = -8y^2dy$

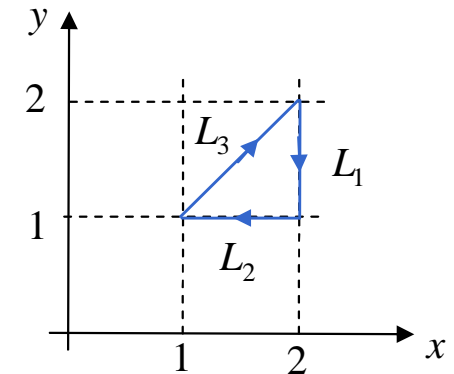
$$\int_{L_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} = -8 \int_2^1 y^2 dy = \frac{56}{3}$$

percurso L_2 : $y = 1 \longrightarrow dy = 0 \longrightarrow \vec{A} \cdot d\vec{l} = 3x^2dx$

$$\int_{L_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 3 \int_2^1 x^2 dx = -7$$

percurso L_3 : $y = x \longrightarrow dy = dx \longrightarrow \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2x^5dx$

$$\int_{L_3} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2 \int_1^2 x^5 dx = 21$$



$$\vec{A} = 3x^2y^3\hat{u}_x - x^3y^2\hat{u}_y$$

$$\longrightarrow \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{56}{3} - 7 + 21 = \frac{98}{3}$$

(como seria de esperar)

Electrostática

OpE - MIB 2007/2008

Análise Vectorial (revisão) → 2 aulas

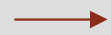
→ **Electrostática e Magnetostática → 7 aulas**

Campos e Ondas Electromagnéticas → 7 aulas

Óptica Geométrica → 3 aulas

Fibras Ópticas → 3 aulas

Lasers → 3 aulas



Campo eléctrico criado por distribuições discretas e contínuas de cargas

lei de Coulomb

princípio da sobreposição

Lei de Gauss

Potencial eléctrico

Electrostática na matéria

Correntes eléctricas estacionárias

Q e q → cargas pontuais

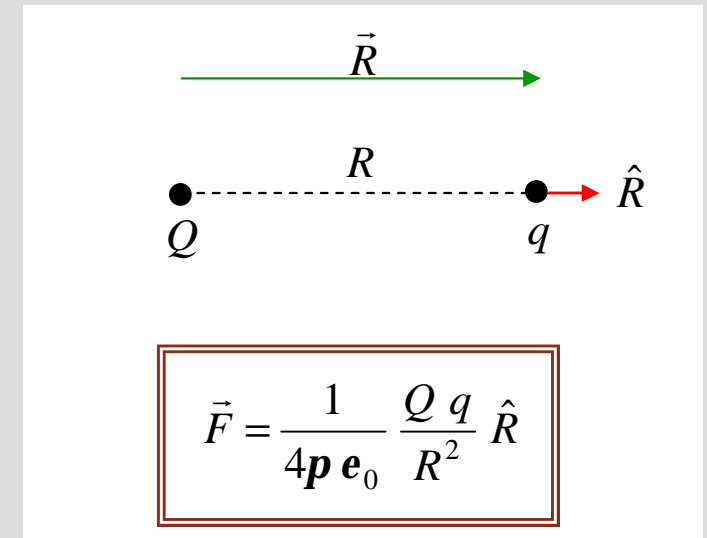
R → distância entre as cargas

\hat{R} → versor que aponta de Q para q → $\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$

\vec{F} → força que Q exerce em q

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ → constante de proporcionalidade

$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$ → **permitividade eléctrica do vazio**



nota

se $Qq > 0$ → \vec{F} segundo \hat{R} → força **repulsiva**

se $Qq < 0$ → \vec{F} segundo $-\hat{R}$ → força **atractiva**

cargas de sinal igual repelem-se
cargas de sinal oposto atraem-se

O campo eléctrico é definido como a força por unidade de carga que uma carga pontual muito pequena sofre quando colocada numa região do espaço onde um campo eléctrico existe:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$$

notas

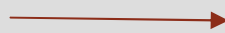
\vec{E} → é proporcional a \vec{F}

\vec{E} → tem direcção de \vec{F}

\vec{E} → tem unidades de $\text{N/C} = \text{V/m}$

desde que q seja suficientemente pequena para não alterar a distribuição de carga da fonte, \vec{E} é dado por

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$



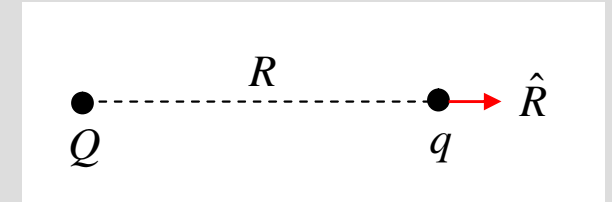
$$\vec{F} = q\vec{E}$$

força exercida na carga q
pelo campo eléctrico \vec{E}

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2} \hat{R}$$

$$\vec{E} = \vec{F}/q$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{R} \quad (\text{V/m})$$



notas

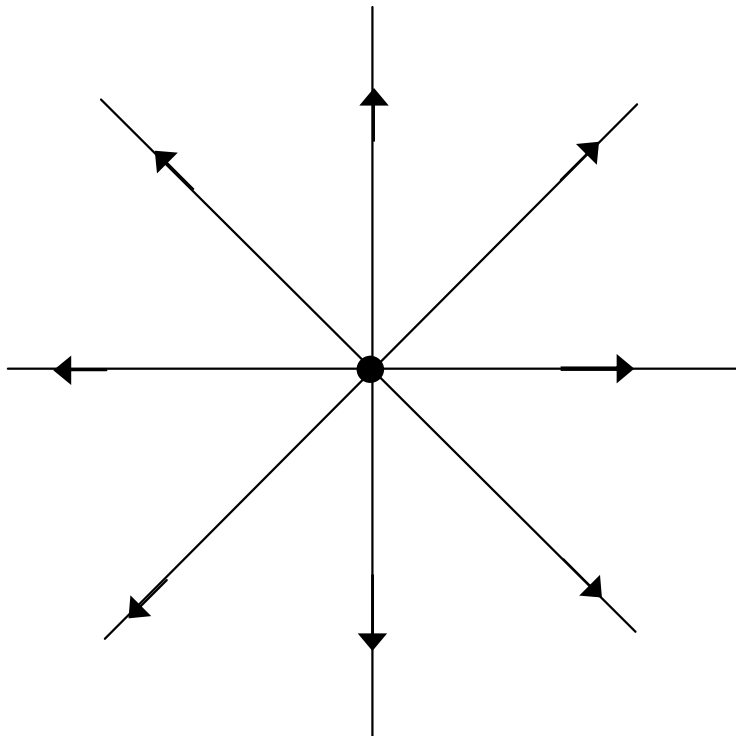
1. campo eléctrico criado por uma carga pontual positiva tem a direcção radial que aponta para fora da carga
2. intensidade do campo eléctrico é proporcional ao valor da carga
3. intensidade do campo eléctrico é inversamente proporcional ao quadrado da distância à carga

Carga pontual – linhas de campo eléctrico

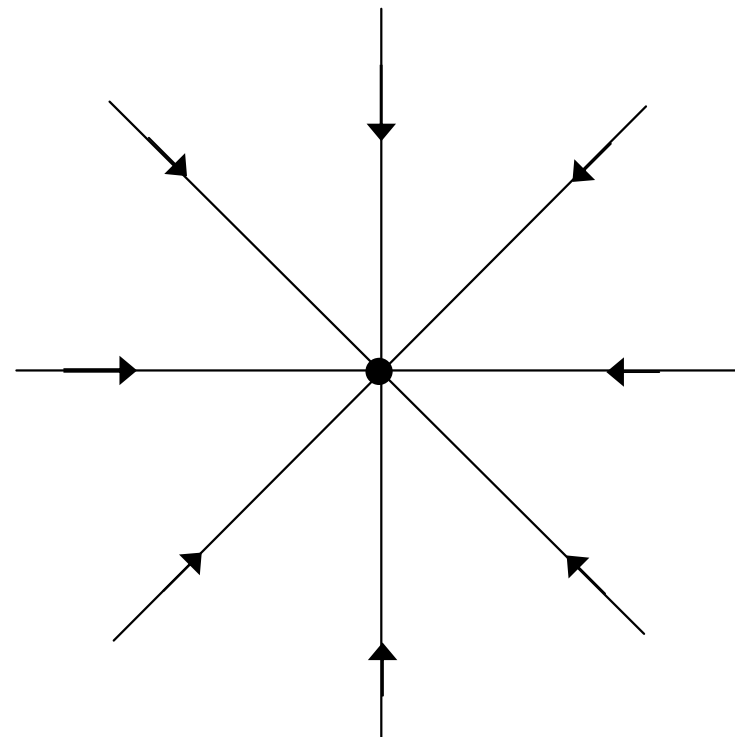
linhas de campo eléctrico → tangentes em cada ponto ao campo eléctrico nesse ponto

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{R} \quad (\text{V/m})$$

$Q > 0$



$Q < 0$



Carga pontual em posição genérica

seja:

$Q \rightarrow$ carga pontual (**fonte** de \vec{E})

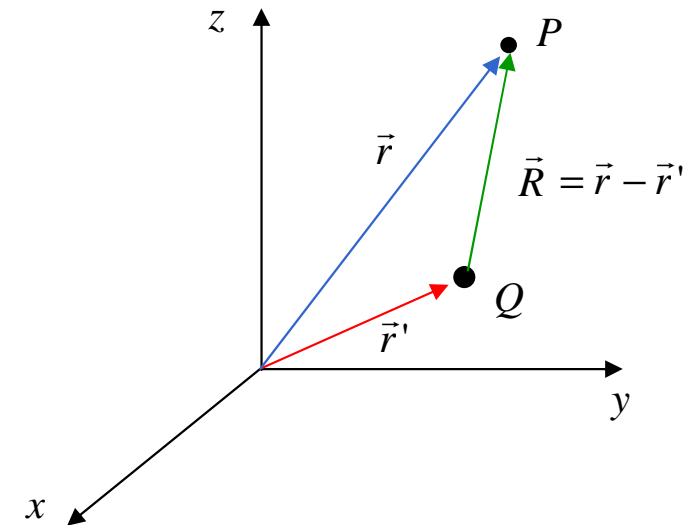
$P \rightarrow$ ponto onde se quer calcular \vec{E}

$\vec{r} \rightarrow$ vector de posição de P

$\vec{r}' \rightarrow$ vector de posição de Q

$\vec{r}' \rightarrow$ coordenadas da fonte

$\vec{r} \rightarrow$ coordenadas do campo



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{R} \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{R} \xrightarrow{\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}} \vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{R} \xrightarrow{\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

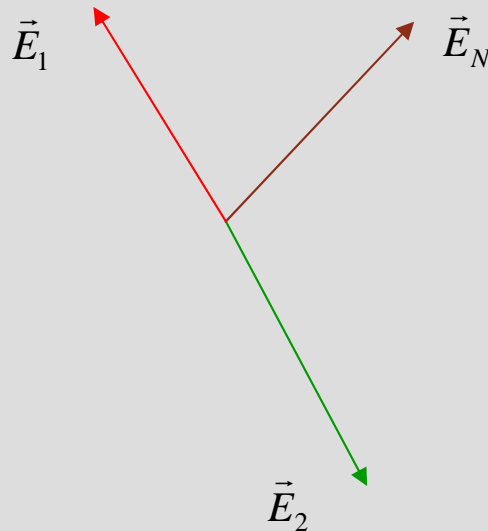
Exemplo

Uma carga de 10 nC está localizada no ponto de coordenadas cartesianas (1, 2, 2). Calcule o campo eléctrico criado por essa carga no ponto de coordenadas (-3, -1, 2)

$$\begin{array}{l} \vec{r}' = \hat{u}_x + 2\hat{u}_y + 2\hat{u}_z \\ \vec{r} = -3\hat{u}_x - \hat{u}_y + 2\hat{u}_z \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \uparrow \\ \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \end{array} \quad \vec{R} = -4\hat{u}_x - 3\hat{u}_y \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ R = \sqrt{16+9} = 5 \text{ m} \\ \hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = -0.8\hat{u}_x - 0.6\hat{u}_y \end{array}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{R} = \frac{1}{4\pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi}} \frac{10 \times 10^{-9}}{5^2} (-0.8\hat{u}_x - 0.6\hat{u}_y) = -0.0356\hat{u}_x - 0.0267\hat{u}_y \text{ (V/m)}$$

O campo eléctrico criado por várias fontes é dado pela **soma vectorial** dos campos eléctricos criados **individualmente** por cada fonte



$$\vec{E}_{\text{Total}} = \sum_i \vec{E}_i$$

Considere-se uma distribuição de N cargas pontuais:

Q_1 , localizada em \vec{r}'_1

Q_2 , localizada em \vec{r}'_2

Q_3 , localizada em \vec{r}'_3

⋮

Q_N , localizada em \vec{r}'_N

$$\vec{E}_{\text{Total}} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_i}{R_i^2} \hat{R}_i = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{R_i^2} \hat{R}_i \quad \text{onde } \vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}'_i$$

↑
princípio da sobreposição

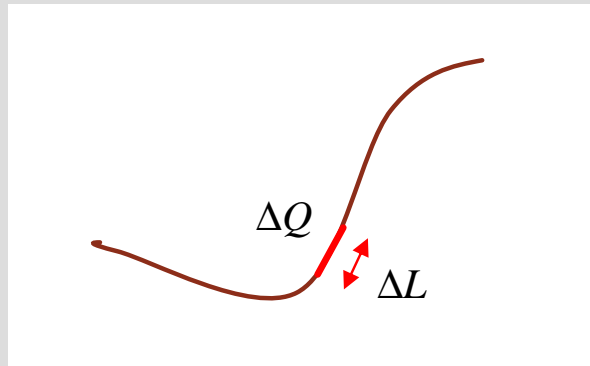
Duas cargas pontuais, Q_1 e Q_2 , estão localizadas em $(1, 2, 0)$ e $(2, 0, 0)$ (coordenadas cartesianas).

Qual é a relação entre Q_1 e Q_2 para que a força exercida numa carga de teste localizada em $(-1, 1, 0)$ não tenha

- a) componente segundo x ;
- b) componente segundo y .

Distribuição linear de carga

- distribuição de carga ao longo de uma linha



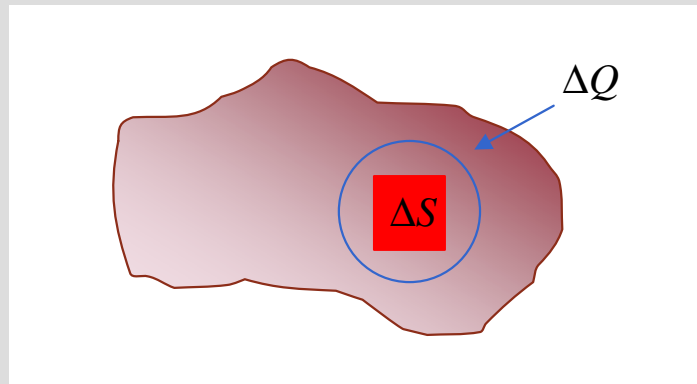
$\Delta Q \rightarrow$ carga existente em ΔL

seja r_l a **densidade linear de carga** (carga por unidade de comprimento)

$$r_l = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} \quad (\text{C/m})$$

Distribuição superficial de carga

- distribuição de carga ao longo de uma superfície



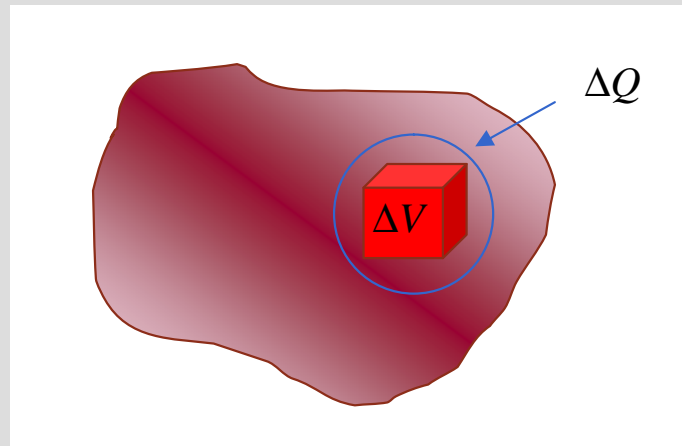
$\Delta Q \rightarrow$ carga existente em ΔS

seja \mathbf{r}_s a **densidade superficial de carga** (carga por unidade de área)

$$\mathbf{r}_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (\text{C/m}^2)$$

Distribuição volumétrica de carga

- distribuição de carga ao longo de um volume



$\Delta Q \rightarrow$ carga existente em ΔV

seja \mathbf{r}_v a **densidade volumétrica de carga** (carga por unidade de volume)

$$\mathbf{r}_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (\text{C/m}^3)$$

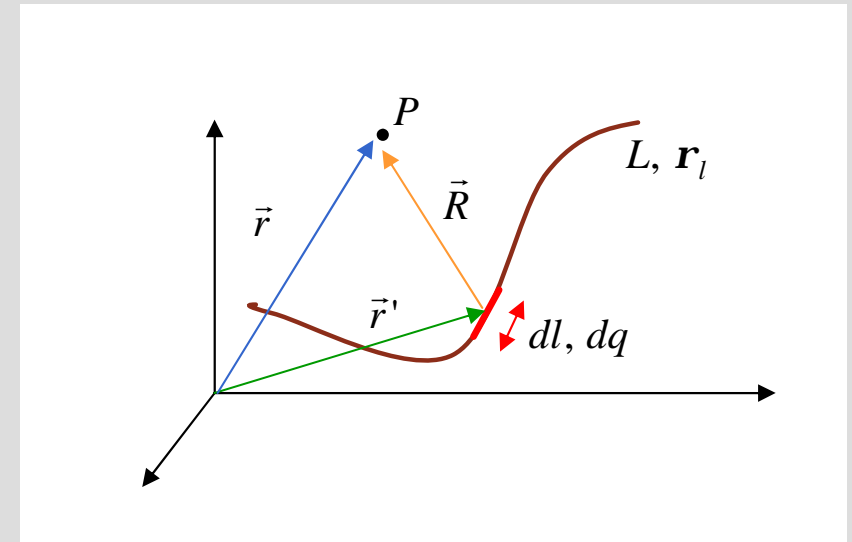
Distribuição linear de carga

campo criado pelo elemento dl

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \hat{R} \quad \text{onde} \quad dq = r_l dl$$
$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

princípio da sobreposição

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{dq}{R^2} \hat{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{r_l dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$



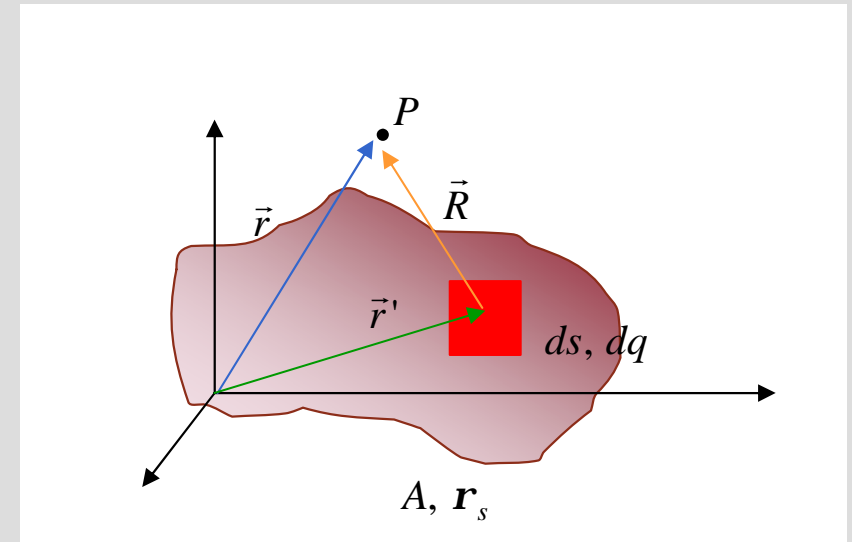
Distribuição superficial de carga

campo criado pelo elemento ds

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \hat{R} \quad \text{onde} \quad dq = \sigma_s ds$$
$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

princípio da sobreposição

$$\vec{E} = \int_A d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{dq}{R^2} \hat{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma_s ds}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$



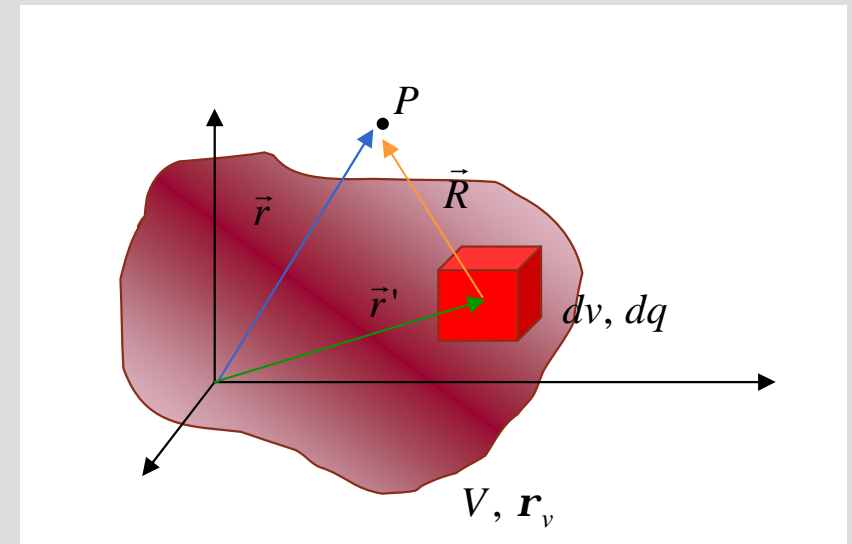
Distribuição volumétrica de carga

campo criado pelo elemento dv

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \hat{R} \quad \text{onde} \quad dq = \rho_v dv$$
$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

princípio da sobreposição

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dq}{R^2} \hat{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$



1. Determine o campo eléctrico criado pelas seguintes distribuições uniformes de carga
 - a) distribuição linear de carga ao longo de uma linha recta de comprimento infinito
 - b) distribuição superficial de carga ao longo de uma superfície plana de área infinita

2. Um anel de raio 5 m possui uma densidade linear de carga dada por $r_l = 10\sin(\mathbf{f})$ (C/m)
Determine o campo eléctrico no centro do anel.

3. Uma casca hemisférica fina de raio a possui uma densidade superficial de carga r_s uniforme.
Determine o campo eléctrico no centro da casca.

3ª feira

Divergência e rotacional do campo eléctrico

Lei de Gauss

Potencial eléctrico.

4ª feira

Electrostática na matéria

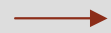
Vector deslocamento eléctrico

Condições fronteira para campos electrostáticos

Capacidade

Energia electrostática.

Campo eléctrico criado por distribuições discretas e contínuas de cargas



Divergência e rotacional do campo eléctrico

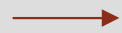
Lei de Gauss

Potencial eléctrico

(2ª aula)

Electrostática na matéria

Correntes eléctricas estacionárias



Um campo vectorial fica completamente especificado (a menos de uma constante) se a sua **divergência** e o seu **rotacional** forem conhecidos.



$$\nabla \cdot \vec{E} = ?$$

$$\nabla \times \vec{E} = ?$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{\text{todo o espaço}} \frac{\mathbf{r}_v(\vec{r}') dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

prova-se que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\mathbf{r}_v(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

notas

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{\text{todo o espaço}} \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \mathbf{r}_v dv$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

para uma carga pontual:

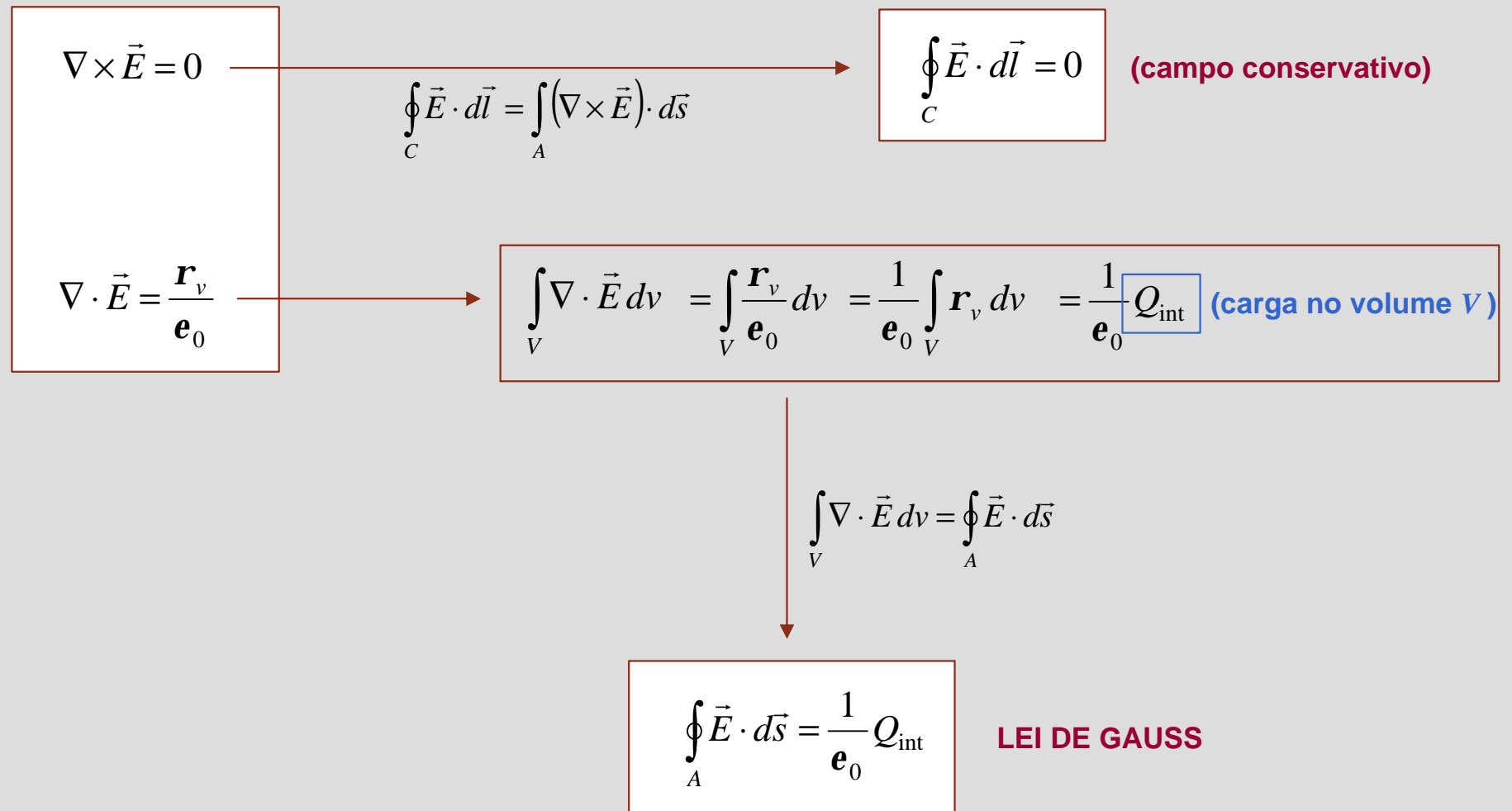
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{R} \longrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \longrightarrow \int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0 \longrightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

princípio da sobreposição

para uma distribuição de cargas:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \longrightarrow \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_1 + \nabla \times \vec{E}_2 + \dots = 0 + 0 + \dots \longrightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

concluindo:



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}}$$

Q_{int} → carga no interior de A

o fluxo total exterior de \vec{E} através de qualquer superfície fechada é igual à carga total no interior da superfície a dividir por ϵ_0

notas:

1. a superfície S é conhecida como **superfície gaussiana**
2. a superfície S pode ser **qualquer** superfície fechada
3. a superfície S deve ser escolhida de acordo com a **simetria** do problema
4. a superfície S não precisa de ser uma superfície física existente no problema

Lei de Gauss – utilidade

Em problemas típicos, pretende-se determinar o campo eléctrico criado por uma dada distribuição de carga.

Apesar da lei de Gauss ser **sempre válida**, nem sempre é fácil de aplicar.

- A lei de Gauss é particularmente útil para a determinação de \vec{E} em problemas com **simetria** tal que a **componente do campo eléctrico normal à superfície considerada é constante nessa superfície**.

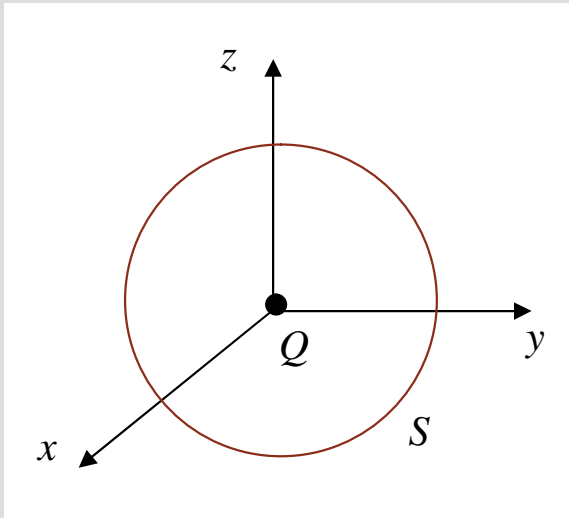
Em problemas com simetria o fluxo do campo eléctrico é extremamente simples de calcular, e a lei de Gauss é preferível à lei de Coulomb.

Aplicação da lei de Gauss

1. reconhecimento das condições de simetria
2. escolha da superfície gaussiana → tal que a componente do campo eléctrico **normal** a essa superfície é **constante** nela

Lei de Gauss – exemplo

carga pontual



simetria $\longrightarrow \vec{E} = E(R)\hat{u}_R$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}}$$

$S \rightarrow$ superfície esférica de raio $R \longrightarrow$

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= ds_R \hat{u}_R \\ \vec{E} &= E(R) \hat{u}_R \end{aligned}$$

 $\longrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(R) ds_R$

$$\longrightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E(R) ds_R = E(R) \int_S ds_R = \boxed{4\pi R^2} E(R) \xrightarrow{Q_{\text{int}} = Q} 4\pi R^2 E(R) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

área da superfície gaussiana

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{u}_R$$

$$\xleftarrow{\vec{E} = E(R)\hat{u}_R}$$

$$E(R) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

Aplicando a lei de Gauss, determine

- a) o campo eléctrico criado por um fio infinito com densidade linear de carga uniforme;
- b) o campo eléctrico criado por uma esfera de raio a com densidade volumétrica de carga uniforme
- c) o campo eléctrico criado por uma esfera de raio a com densidade volumétrica de carga $\mathbf{r}_v = \frac{\mathbf{r}_0}{R}$

$\nabla \times \vec{E} = 0$ \longrightarrow \vec{E} pode ser expresso como o **gradiente de um campo escalar**

$V \rightarrow$ potencial eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla V$$

convenção

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{P_1}^{P_2} (\nabla V) \cdot d\vec{l} = -\int_{P_1}^{P_2} dV = V_1 - V_2$$

$$dV = (\nabla V) \cdot d\vec{l}$$

$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Potencial eléctrico criado por uma carga pontual

$$V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

carga pontual localizada em $\vec{r}' = 0$ \longrightarrow $\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{u}_R$

seja $P_1 \rightarrow \infty$

$P_2 (R, \mathbf{q}, \mathbf{f}) \rightarrow \vec{r}$

coordenadas esféricas $\rightarrow d\vec{l} = dR \hat{u}_R + R d\mathbf{q} \hat{u}_q + R \sin \mathbf{q} d\mathbf{f} \hat{u}_f$

$$\longrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{dR}{R^2} \longrightarrow V(\vec{r}) - V(\infty) = - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

admitindo que $V(\infty) = 0$ \longrightarrow

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

carga pontual localizada em $\vec{r}' \neq 0$ \longrightarrow

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Considere-se uma distribuição de N cargas pontuais:

Q_1 , localizada em \vec{r}'_1

Q_2 , localizada em \vec{r}'_2

Q_3 , localizada em \vec{r}'_3

⋮

Q_N , localizada em \vec{r}'_N

$$V_{\text{Total}} = \sum_{i=1}^N V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|}$$

↑
princípio da sobreposição

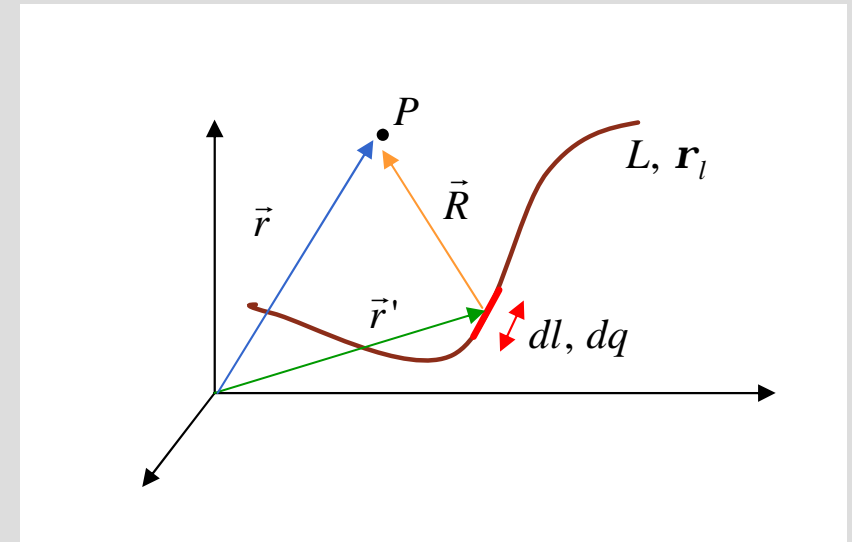
Distribuição linear de carga

potencial criado pelo elemento dl

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R} \quad \text{onde} \quad dq = r_l dl$$
$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

princípio da sobreposição

$$V = \int_L dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{r_l dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



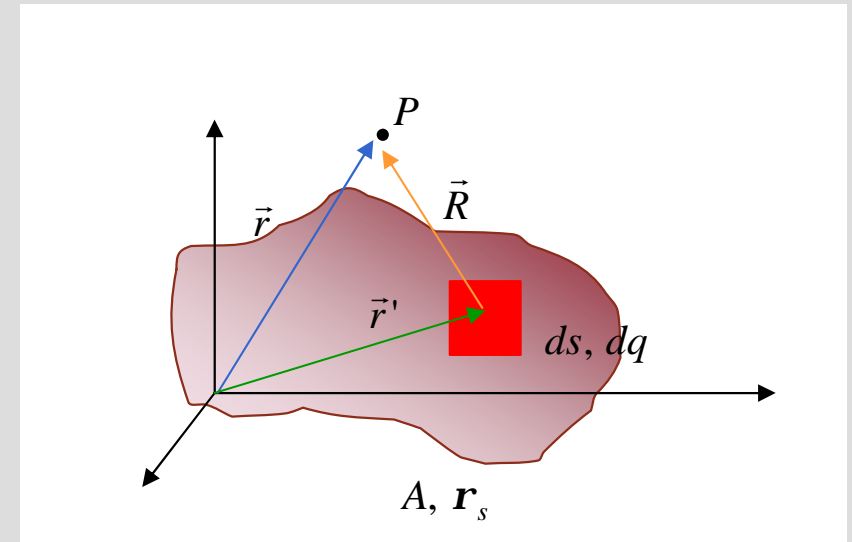
Distribuição superficial de carga

potencial criado pelo elemento ds

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R} \quad \text{onde} \quad dq = \sigma_s ds$$
$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

princípio da sobreposição

$$V = \int_A dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma_s ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



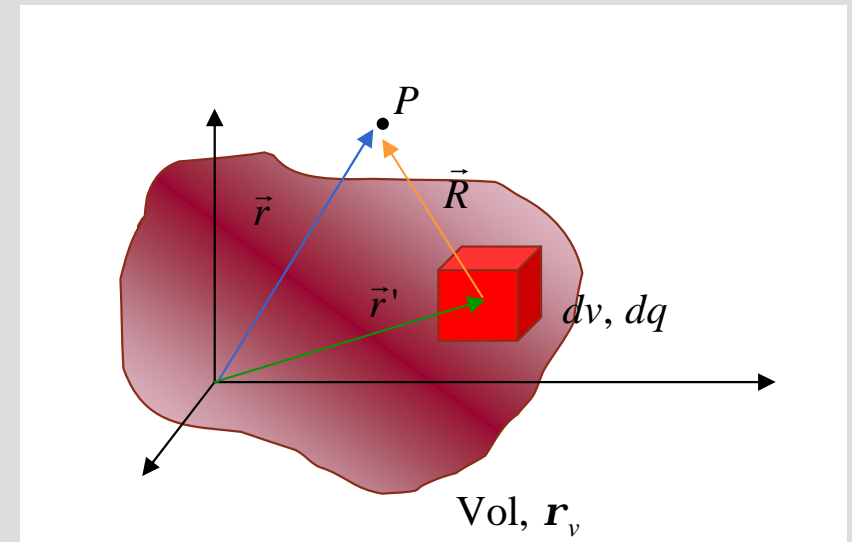
Distribuição volumétrica de carga

potencial criado pelo elemento dv

$$dV = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dq}{R} \quad \text{onde} \quad dq = \rho_v dv$$
$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

princípio da sobreposição

$$V = \int_{\text{Vol}} dV = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{\text{Vol}} \frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{\text{Vol}} \frac{\rho_v dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



se existirem condição de simetria:

1. determinação de \vec{E} por aplicação da lei de Gauss

2. determinação de V por integração $\left(V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right)$

se não existirem condição de simetria:

1. determinação de V

2. determinação de \vec{E} através de $\vec{E} = -\nabla V$

1. Determine o potencial eléctrico criado no eixo dos x por três cargas de valor 10 C localizadas em $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$.
2. Considere um disco de raio 2 m e densidade superficial de carga uniforme de valor 1 C/m^2 .
Determine
 - a) o potencial eléctrico sobre o eixo do disco;
 - b) o campo eléctrico sobre o eixo do disco.
3. Determine o potencial eléctrico criado por uma esfera de raio a com densidade volumétrica de carga uniforme ρ_v .

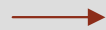
Campo eléctrico criado por distribuições discretas e contínuas de cargas

(1ª aula)

Lei de Gauss

Potencial eléctrico

(2ª aula)



Electrostática na matéria

Condutores

Dieléctricos

Condições fronteira

(3ª aula)

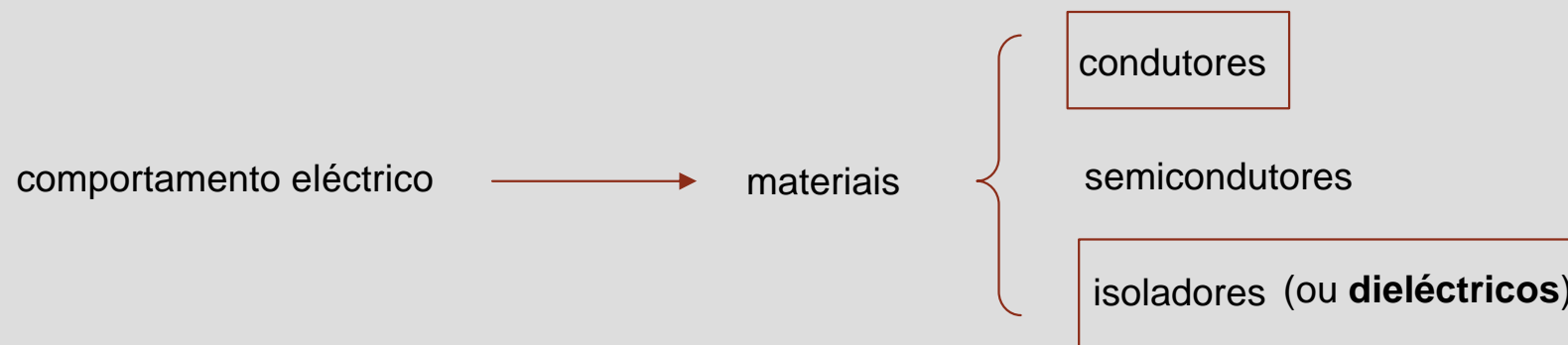
Capacidade

Energia electrostática

Correntes eléctricas estacionárias

Até agora só foram consideradas distribuições estacionárias de carga que estavam localizadas no ar ou no vazio.

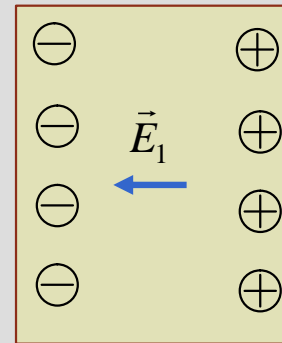
O que acontece ao campo eléctrico quando o meio é diferente?



Condutores em campos electrostáticos

condutor
(tem cargas livres)

aplicação de \vec{E}_0



$\vec{E}_1 \rightarrow$ campo eléctrico induzido

\vec{E}_0

⇒ cargas em repouso \rightarrow campo eléctrico no interior do condutor **nulo**

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_0 = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

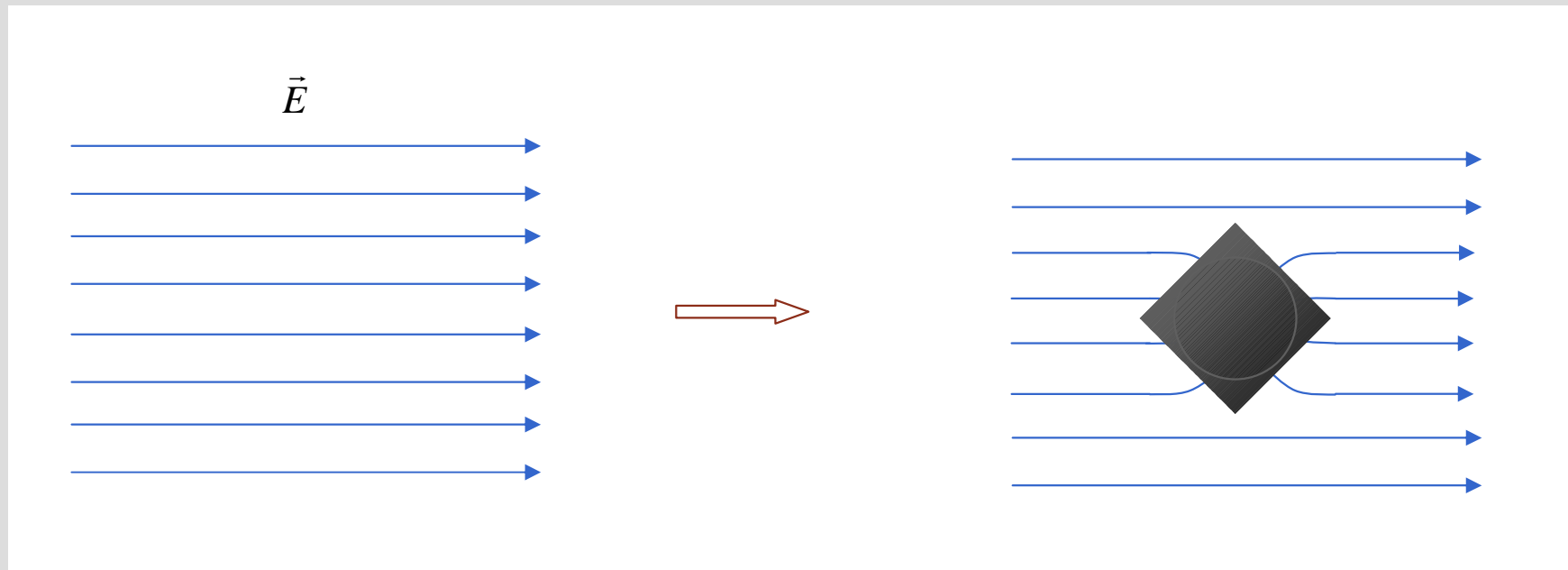
num condutor em repouso toda a **carga livre se encontra na sua superfície**

$\rho_v = 0$ dentro do condutor

⇒ cargas em repouso \rightarrow campo eléctrico junto ao condutor é sempre **normal** à sua superfície

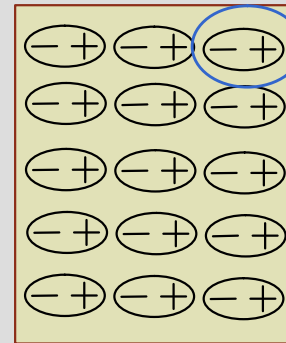
interior do condutor \rightarrow $\vec{E} = 0$
 $\mathbf{r}_v = 0$

superfície do condutor \rightarrow $E_{\text{tan}} = 0$
 $\mathbf{r}_s \neq 0$



dieléctrico
(tem cargas de polarização)

aplicação de \vec{E}_0



← **dipolo eléctrico**

\vec{E}_0

efeito macroscópico destes dipolos induzidos é traduzido pelo **vector de polarização** →

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{p}_k}{\Delta v}$$

vector de polarização traduz a forma como o campo eléctrico no interior do dieléctrico é alterado:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_v$$

← **densidade volumétrica de carga livre**

seja

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{C/m}^2)$$

vector deslocamento eléctrico

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = r_v$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = r_v$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} \, dv = \int_V r_v \, dv = Q_{\text{int}}$$

carga livre
no volume V

teorema da divergência

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{int}}$$

Lei de Gauss

seja

$$\vec{P} = \epsilon_0 c_e \vec{E}$$

$c_e \rightarrow$ susceptibilidade eléctrica

meio linear $\rightarrow c_e$ é independente de \vec{E}

meio isotrópico $\rightarrow c_e$ é independente da direcção de \vec{E}

meio homogéneo $\rightarrow c_e$ é independente da posição no dieléctrico

c_e é uma constante

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + c_e) \vec{E}$$

$$\epsilon_r = 1 + c_e$$

permitividade relativa ou
constante dieléctrica

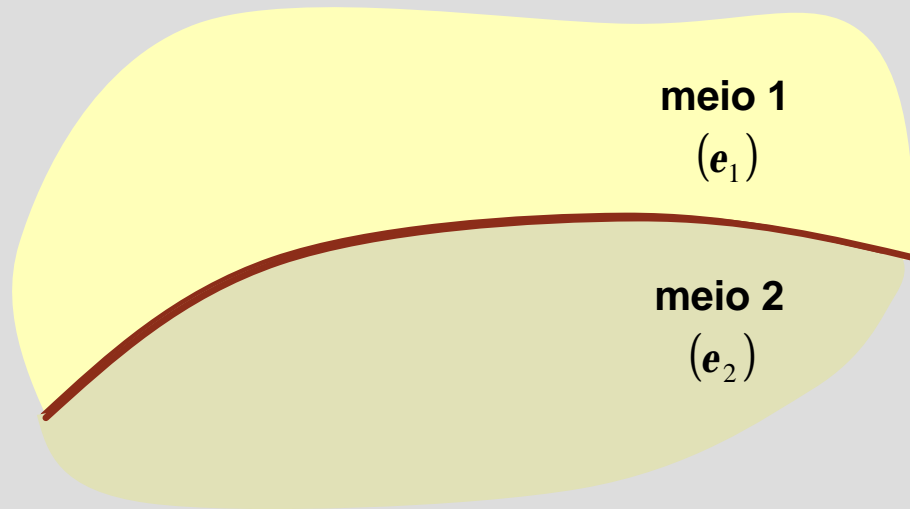
$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

permitividade absoluta

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

interface entre dois meios diferentes



Como se relacionam os campos \vec{E} e \vec{D} nos dois meios?

Componente normal

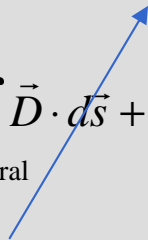
volume cilíndrico de base ΔS e altura $\Delta h \rightarrow 0$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{int}}$$



zero porque $\Delta h \rightarrow 0$

$$\int_{\text{topo}} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{lateral}} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{base}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{int}}$$

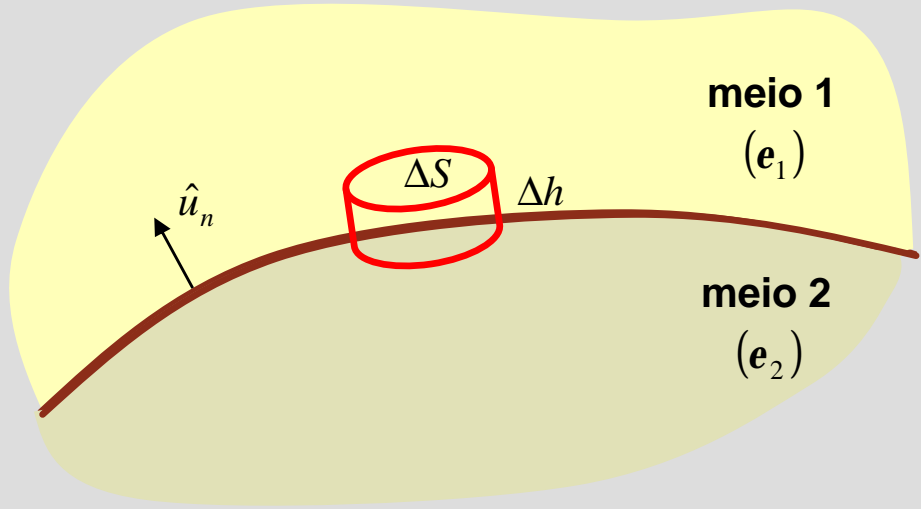


$$\vec{D}_1 \cdot \hat{u}_n \Delta S - \vec{D}_2 \cdot \hat{u}_n \Delta S = Q_{\text{int}}$$

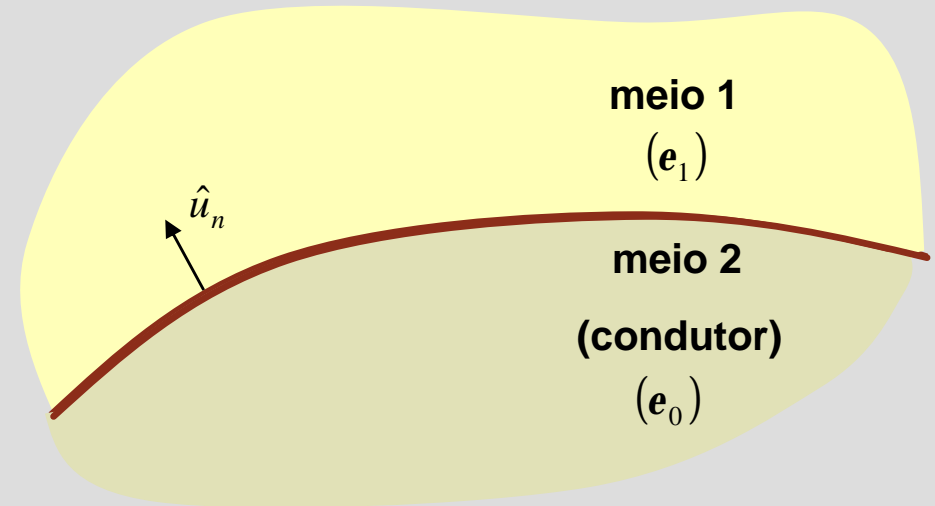
$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{u}_n = \frac{Q_{\text{int}}}{\Delta S} = \mathbf{r}_s$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \mathbf{r}_s$$

$$\mathbf{e}_1 E_{1n} - \mathbf{e}_2 E_{2n} = \mathbf{r}_s$$



interface dieléctrico-condutor com r_s



interior do condutor $\rightarrow \vec{E}_2 = 0 \longrightarrow \vec{D}_2 = 0$

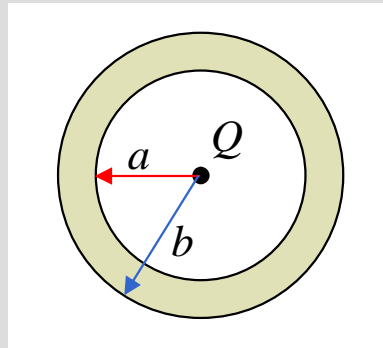
superfície do condutor $\rightarrow E_{2t} = 0 \longrightarrow E_{1t} = 0 \longrightarrow D_{1t} = 0$
 $E_{1t} = E_{2t}$

$D_{1n} - D_{2n} = r_s \longrightarrow D_{1n} = r_s$

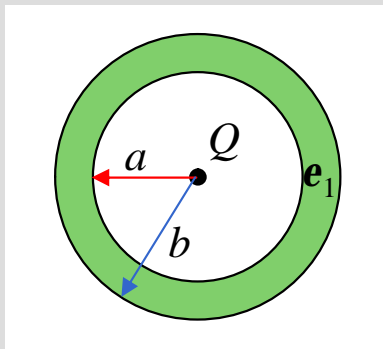
$$\vec{D}_1 = r_s \hat{u}_n$$

$$\vec{E}_1 = \frac{r_s}{e_1} \hat{u}_n$$

1. Uma carga pontual Q está colocada no centro de uma casca **condutora** de raio interior a e raio exterior b . Determine o campo eléctrico e o potencial eléctrico em todo o espaço.



2. Uma carga pontual Q está colocada no centro de uma casca **dielétrica** de raio interior a e raio exterior b , e com permitividade eléctrica ϵ_1 . Determine \vec{E} , \vec{P} e \vec{D} em todo o espaço.



Campo eléctrico criado por distribuições discretas e contínuas de cargas

(1ª aula)

Lei de Gauss

Potencial eléctrico

(2ª aula)

Electrostática na matéria

(3ª aula)

→ **Capacidade**

Energia electrostática

(4ª aula)

Correntes eléctricas estacionárias

- condutor num campo electrostático é um corpo equipotencial
- carga depositada num condutor em repouso distribui-se na sua superfície

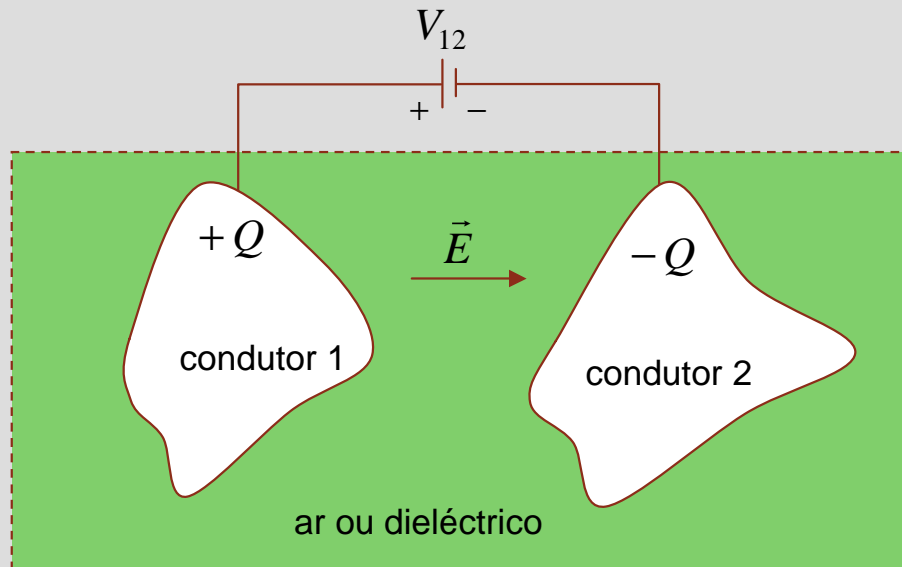
O campo eléctrico criado por um dado condutor é proporcional à carga Q nele depositada.

Por sua vez, como $\vec{E} = -\nabla V$ também V será proporcional a Q .

A razão Q/V é a **capacidade do condutor**

$$C = \frac{Q}{V} \text{ (F)} \longrightarrow Q = CV$$

Um **condensador** é um dispositivo constituído por dois condutores separados por ar ou por um meio dielétrico.



V_{12} → tensão entre os dois condutores

Q → valor absoluto da carga em cada condutor

Quando uma tensão é aplicada entre os condutores, ocorre uma transferência de carga, resultando numa carga $+Q$ num dos condutores e $-Q$ no outro.

Esta distribuição de carga leva ao aparecimento de um campo eléctrico entre os dois condutores.

→ A capacidade de um condensador é

$$C = \frac{Q}{V_{12}}$$

$$C = \frac{Q}{V_{12}}$$



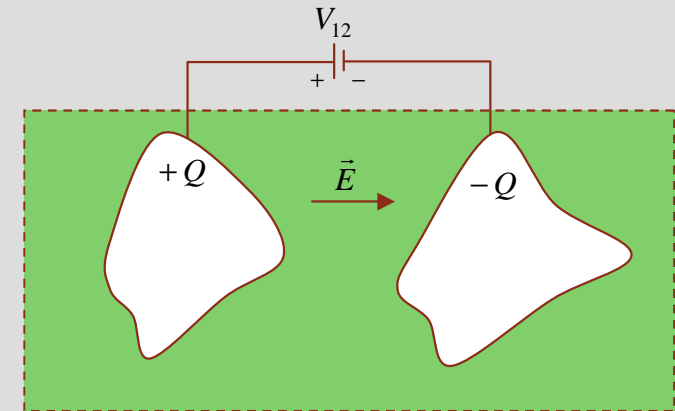
Método de cálculo

1. Admitir cargas $+Q$ e $-Q$ nos condutores

2. Determinar \vec{E} entre os condutores

3. Determinar $V_{12} = V_{(+Q)} - V_{(-Q)} = - \int_{(-Q)}^{(+Q)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

4. Calcular $C = \frac{Q}{V_{12}}$



$V_{12} \rightarrow$ tensão entre os dois condutores

$Q \rightarrow$ valor absoluto da carga em cada condutor

Exemplo – condensador de placas paralelas

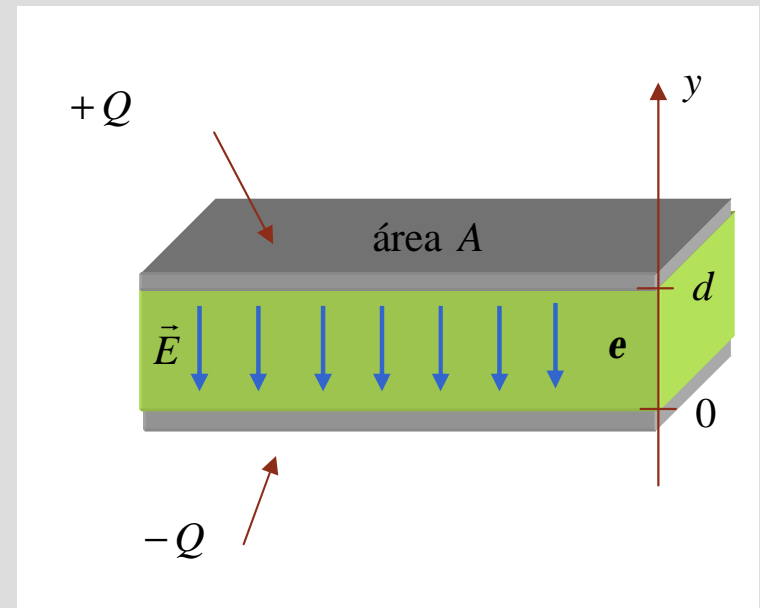
1. Admitir cargas $+Q$ e $-Q$ nos condutores

2. simetria + condição fronteira $\rightarrow \vec{E} = -\frac{\mathbf{r}_s}{\mathbf{e}} \hat{u}_y$

onde $\mathbf{r}_s = \frac{Q}{A}$

3.
$$V_{12} = V_{(+Q)} - V_{(-Q)} = - \int_{(-Q)}^{(+Q)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^d - \left(\frac{Q}{\mathbf{e} A} \right) dy = \frac{Qd}{\mathbf{e} A}$$

4.
$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{Q}{\frac{Qd}{\mathbf{e} A}} \longrightarrow \boxed{C = \mathbf{e} \frac{A}{d}}$$



$$V(P) - V(\infty) = -\int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \xrightarrow{V(\infty) = 0} \quad V(P) = -\int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

carga unitária $\rightarrow \vec{F} = Q\vec{E} = \vec{E} \quad \longrightarrow \quad V(P) = -\int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^P \vec{F} \cdot d\vec{l} = -W_{\text{pelo campo}} = W_{\text{contra campo}}$



$V(P)$ representa o trabalho realizado **contra** o campo eléctrico a trazer uma carga infinita desde o infinito até ao ponto P

Este trabalho é armazenado como **energia potencial** do sistema

carga não unitária $\rightarrow W_{\text{contra campo}} = -W_{\text{pelo campo}} = -\int_{\infty}^P \vec{F} \cdot d\vec{l} = -Q \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \longrightarrow \quad W_e = QV$

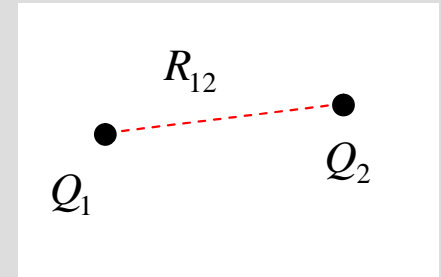
energia armazenada

Energia electrostática – sistema constituído por duas cargas

seja

$$V_1 \rightarrow \text{potencial criado por } Q_1 \text{ na posição de } Q_2 \longrightarrow V_1 = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 R_{12}}$$

$$V_2 \rightarrow \text{potencial criado por } Q_2 \text{ na posição de } Q_1 \longrightarrow V_2 = \frac{Q_2}{4\pi \epsilon_0 R_{12}}$$



trabalho realizado contra o campo ao trazer Q_2 desde o infinito até à distância R_{12} de Q_1 é:

$$W_e = Q_2 V_1$$

$$\text{mas } Q_2 V_1 = Q_1 V_2 = \frac{1}{2}(Q_1 V_2 + Q_2 V_1) \longrightarrow W_e = \frac{1}{2}(Q_1 V_2 + Q_2 V_1)$$

energia armazenada

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k V_k$$

energia armazenada

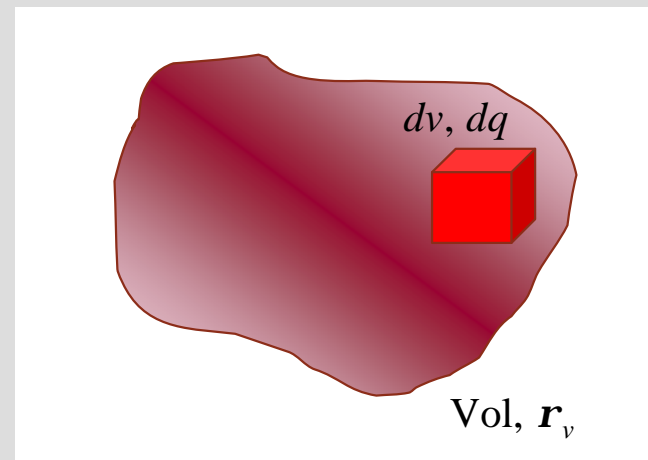
V_k → potencial criado por todas as cargas excepto Q_k no ponto onde está Q_k

$$V_k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^N \frac{Q_j}{R_{jk}} \leftarrow \text{distância entre cargas } Q_j \text{ e } Q_k$$

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k V_k$$

(distribuição discreta)

$$Q_k \rightarrow \mathbf{r}_v dv$$
$$\sum \rightarrow \int$$



$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{Vol}} \mathbf{r}_v V dv$$

energia armazenada

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{Vol}} \mathbf{r}_v V dv$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \mathbf{r}_v$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{Vol}} (\nabla \cdot \vec{D}) V dv$$

$$\nabla \cdot (V \vec{D}) = V \nabla \cdot (\vec{D}) + \vec{D} \cdot \nabla V$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{Vol}} \nabla \cdot (V \vec{D}) dv - \frac{1}{2} \int_{\text{Vol}} \vec{D} \cdot \nabla V dv$$

zero quando $R \rightarrow \infty$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{todo o espaço}} \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

$$W_e = \frac{1}{2} \oint_S (V \vec{D}) \cdot d\vec{s} + \frac{1}{2} \int_{\text{Vol}} \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

teorema da divergência

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Energia electrostática de um condensador

condensador $\rightarrow C = \frac{q}{V} \longrightarrow V = \frac{q}{C}$

variação dq origina variação na energia armazenada de $dW_e = V dq = \left(\frac{q}{C}\right) dq$

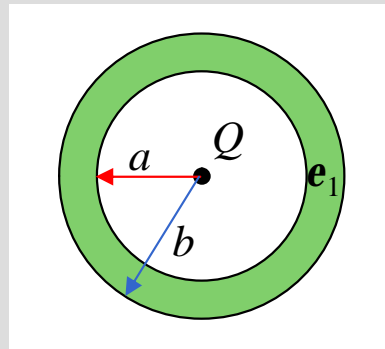
$$W_e = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{1}{C} \left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q$$

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

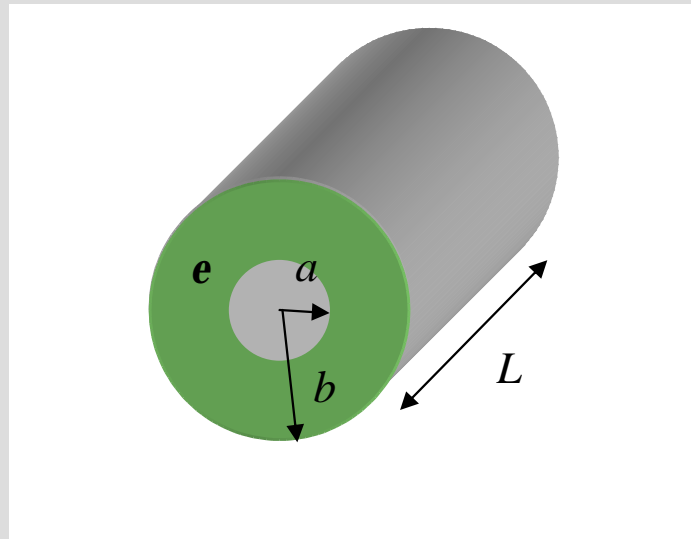
energia armazenada num condensador

1. (aula anterior)

Uma carga pontual Q está colocada no centro de uma coroa **dielétrica** de raio interior a e raio exterior b , e com permissividade eléctrica ϵ_1 . Determine \vec{E} , \vec{P} e \vec{D} em todo o espaço.



2. Considere um condensador esférico constituído por uma esfera condutora de raio a e uma casca esférica de raio b ($a < b$). O espaço entre os dois condutores está preenchido por um material dielétrico de permissividade ϵ . Determine a capacidade deste condensador.
3. Determine a capacidade do condensador cilíndrico representado.



4. Determine a energia electrostática armazenada numa esfera de raio a com densidade volumétrica de carga ρ_v uniforme.

5. Repita o problema anterior utilizando a expressão $W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{todo o espaço}} \vec{D} \cdot \vec{E} dv$.

6. Admitindo que a carga em cada condutor tem valor absoluto Q , determine a energia armazenada nos condensadores dos problemas 2 e 3.

Campo eléctrico criado por distribuições discretas e contínuas de cargas

(1ª aula)

Lei de Gauss

Potencial eléctrico

(2ª aula)

Electrostática na matéria

(3ª aula)

Capacidade

Energia electrostática

(4ª aula)

→ **Correntes eléctricas estacionárias**

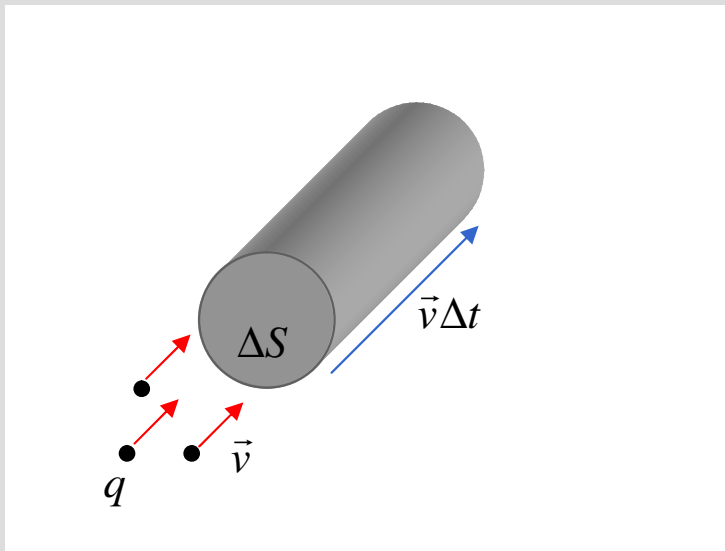
Leis de Ohm e de Joule

Resistência e resistividade

Equação da continuidade

(5ª aula)

Considere-se o movimento estacionário de cargas de valor q com velocidade \vec{v} através de um elemento de superfície ΔS



→ cargas deslocam-se $\vec{v}\Delta t$ durante intervalo Δt

todas as cargas no interior do cilindro definido por ΔS e $\vec{v}\Delta t$ atravessam ΔS no intervalo Δt

$$\Delta Q = q \underbrace{N}_{\text{cargas por unidade de volume}} \underbrace{\Delta S}_{\text{volume do cilindro}} \underbrace{(\vec{v} \cdot \hat{u}_n)}_{\text{versor normal a } \Delta S} \Delta t$$

$$I = \frac{Q}{t}$$

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$\Delta I = q N \Delta S (\vec{v} \cdot \hat{u}_n) = q N \vec{v} \cdot \Delta \vec{S}$$

$$\Delta \vec{S} = \Delta S \hat{u}_n$$

$$\vec{J} = q N \vec{v} \quad (\text{A/m}^2)$$

densidade de corrente

$$\vec{J} = q N \vec{v}$$

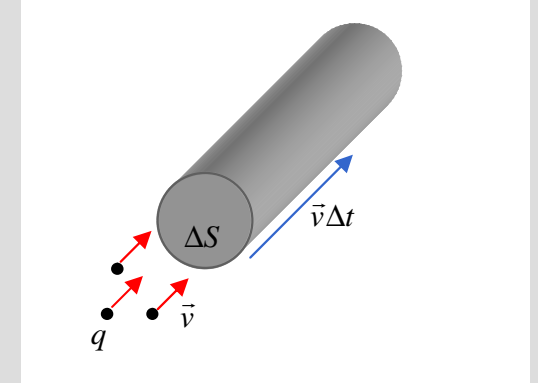
densidade de corrente

$$\Delta I = q N \vec{v} \cdot \Delta \vec{S}$$

$$\Delta I = \vec{J} \cdot \Delta \vec{S}$$

corrente eléctrica através de uma superfície é dada pelo fluxo da densidade de corrente através dessa superfície

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A})$$



Em condutores metálicos as cargas livres são electrões ($q = -e$), podendo escrever-se

$$\vec{v} = -\mathbf{m}_e \vec{E}$$

← mobilidade dos electrões (m^2/Vs)

$$\vec{J} = q N \vec{v}$$

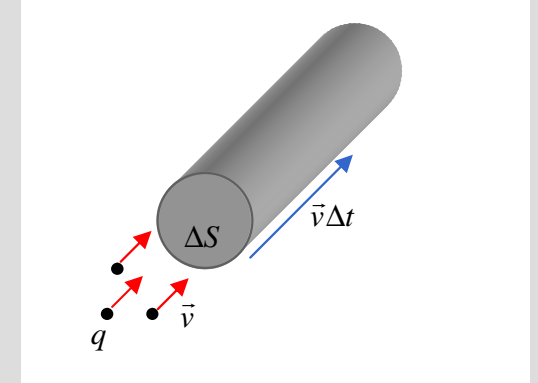
$$\vec{J} = -q N \mathbf{m}_e \vec{E} = e N \mathbf{m}_e \vec{E}$$

$$\mathbf{s} = e N \mathbf{m}_e$$

condutividade
(Sm)

$$\vec{J} = \mathbf{s} \vec{E}$$

Lei de Ohm
(forma pontual)



Nota:

circuitos eléctricos →

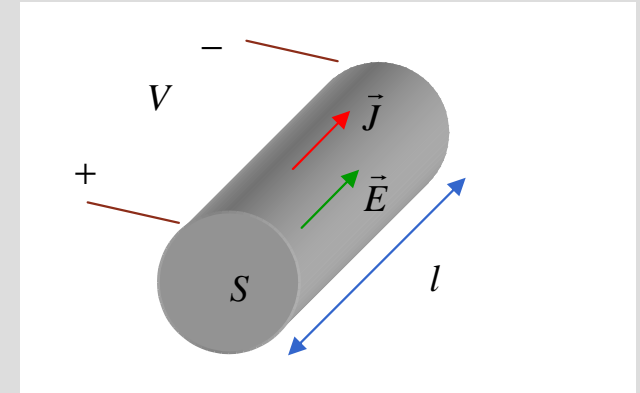
$$V = R I$$

Lei de Ohm

↑
resistência (W)

Resistividade e resistência – fio condutor

Considere-se um fio condutor de comprimento l e área de secção transversal S , feito de um material com condutividade \mathbf{s} ao qual é aplicado uma diferença de tensão V nas extremidades



$$\begin{array}{l} \vec{E} \longrightarrow \vec{J} = \mathbf{s} \vec{E} \longrightarrow J = \mathbf{s} E \\ \\ V = V_{(+)} - V_{(-)} = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{(-)}^{(+)} E dl = El \longrightarrow E = \frac{V}{l} \\ \\ I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_S J ds = JS \longrightarrow J = \frac{I}{S} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{I}{S} = \mathbf{s} \frac{V}{l} \longrightarrow \frac{V}{I} = \frac{1}{\mathbf{s}} \frac{l}{S} \xrightarrow{V = RI} \boxed{R = \frac{1}{\mathbf{s}} \frac{l}{S}} \end{array}$$

Nota:

resistividade \rightarrow

$$\boxed{r = \frac{1}{\mathbf{s}} \quad (\Omega\text{m})}$$

**resistência do
fio condutor**

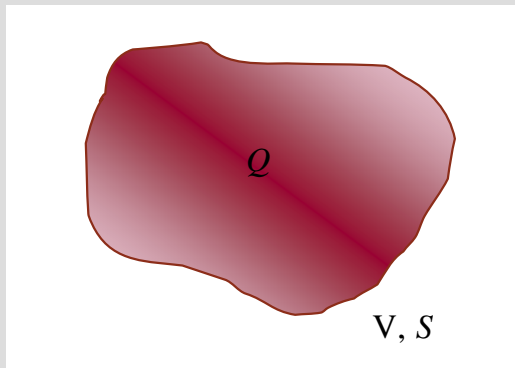
Resistência de um fio condutor – exemplo

Sabendo que a resistividade do cobre é $r = 1.7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$, determine a resistência por unidade de comprimento de um fio de cobre com 1.628 mm de diâmetro

$$R = \frac{l}{S} = r \frac{l}{S} \longrightarrow \frac{R}{l} = \frac{r}{S} = \frac{1.7 \times 10^{-8}}{\left(\frac{1.628 \times 10^{-3}}{2}\right)^2} = 8.2 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$$

Equação da continuidade

Considere-se um volume V limitado por uma superfície S e contendo uma carga total Q .



se uma corrente I atravessar S em direcção ao exterior (interior), a carga em V irá diminuir (aumentar).

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$
$$Q = \int_V \rho_v dv$$

$$\longrightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dv$$

$$\xrightarrow{\text{teor. divergência}} \int_V \nabla \cdot \vec{J} dv = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dv$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho_v}{dt}$$

equação da continuidade

nota

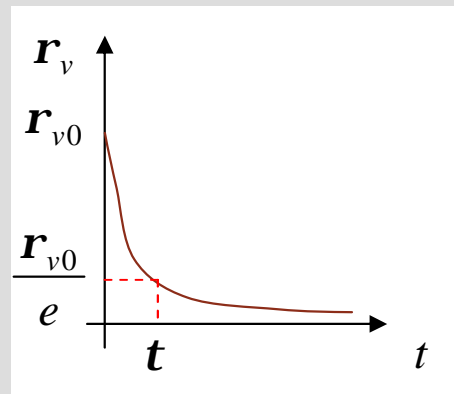
correntes estacionárias $\rightarrow \frac{d\rho_v}{dt} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$

Tempo de relaxamento

Em condições de equilíbrio, as cargas no interior de condutor distribuem-se de forma que no seu interior $r_v = 0$ e $\vec{E} = 0$

Esta redistribuição de cargas não ocorre de forma instantânea e pode ser estudada a partir da eq. da continuidade.

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{dr_v}{dt} \xrightarrow[\substack{\vec{J} = s \vec{E} \\ s = \text{const.}}]{\text{}} s \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{dr_v}{dt} \xrightarrow[\nabla \cdot \vec{E} = \frac{r_v}{e}]{\text{}} \frac{s}{e} r_v = -\frac{dr_v}{dt} \xrightarrow{\text{}} \boxed{\frac{dr_v}{dt} + \frac{s}{e} r_v = 0}$$



solução

$$\boxed{r_v = r_{v0} e^{-\frac{s}{e}t}}$$

Tempo de relaxamento, t → tempo que a carga demora a passar para 1/e do seu valor inicial

$$\xrightarrow{\text{}} \frac{r_{v0}}{e} = r_{v0} e^{-\frac{s}{e}t} \xrightarrow{\text{}} e^{-1} = e^{-\frac{s}{e}t} \xrightarrow{\text{}} \frac{s}{e}t = 1 \xrightarrow{\text{}} \boxed{t = \frac{e}{s}}$$

Tempo de relaxamento – exemplo

Sabendo que para o cobre $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m e $\epsilon \cong \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ F/m, determine o tempo de relaxamento do cobre.

$$t = \frac{\epsilon}{\sigma} = 1.52 \times 10^{-19} \text{ s}$$

O trabalho realizado pelo campo eléctrico ao deslocar uma carga q ao longo de uma distância $\Delta \vec{l}$ é dado por

$$\Delta W = q\vec{E} \cdot \Delta \vec{l}$$

A este trabalho corresponde uma potência $p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = q\vec{E} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{l}}{\Delta t} = q\vec{E} \cdot \Delta \vec{v}$

Se existirem N cargas por unidade de volume, a potência total entregue às cargas contidas no volume dv é

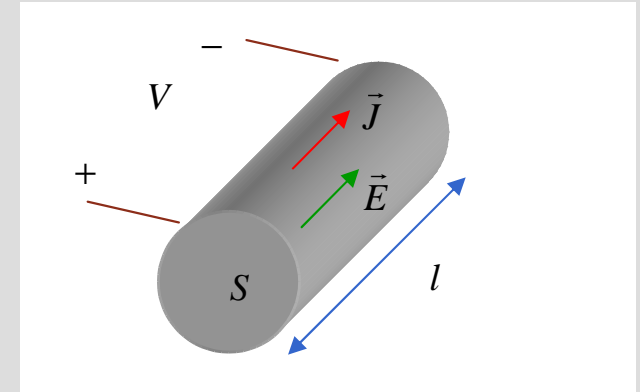
$$dP = \boxed{Ndv} q\vec{E} \cdot \Delta \vec{v} = \vec{E} \cdot \boxed{Nq\Delta \vec{v}} dv = \vec{E} \cdot \vec{J} dv \longrightarrow \boxed{\frac{dP}{dv} = \vec{E} \cdot \vec{J}} \text{ densidade de potência}$$

cargas em dv \uparrow \vec{J}

$$\Longrightarrow P = \int_{\text{Vol}} dP \longrightarrow \boxed{P = \int_{\text{Vol}} \vec{E} \cdot \vec{J} dv} \text{ lei de Joule}$$

Lei de Joule – fio condutor

Considere-se um fio condutor de comprimento l e área de secção transversal S , feito de um material com condutividade \mathbf{s} ao qual é aplicado uma diferença de tensão V nas extremidades



$$\vec{E} \longrightarrow \vec{J} = \mathbf{s} \vec{E} \longrightarrow J = \mathbf{s} E$$

$$V = V_{(+)} - V_{(-)} = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = El$$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_S J ds = JS$$

lei de Joule \rightarrow $P = \int_{\text{Vol}} \vec{E} \cdot \vec{J} dv = \int_{\text{Vol}} E J ds dl = \int_l E dl \int_S J ds = \boxed{El} \boxed{JS}$ \rightarrow $P = VI$

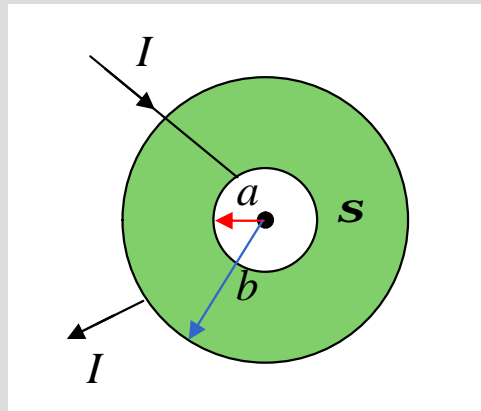
$J = \mathbf{s} E$
 $dv = ds dl$

\uparrow Vol \uparrow Vol
 V I

$V = RI$

$P = RI^2$

1. O espaço entre duas superfícies esféricas concêntricas condutoras de raios a e b ($a < b$) está preenchido com um material de condutividade S . Sabendo que uma corrente I entra no dispositivo pela superfície condutora interior e sai pela exterior, determine
- a densidade de corrente entre as duas superfícies condutoras;
 - o campo eléctrico entre as duas superfícies condutoras;
 - a diferença de tensão entre as duas superfícies condutoras;
 - a resistência entre as duas superfícies condutoras;
 - a potência dissipada.



Magnetostática

OpE - MIB 2007/2008

Análise Vectorial (revisão) → 2 aulas

→ **Electrostática e Magnetostática → 8 aulas**

Campos e Ondas Electromagnéticas → 6 aulas

Óptica Geométrica → 3 aulas

Fibras Ópticas → 3 aulas

Lasers → 3 aulas



Força de Lorentz

Divergência e rotacional do campo de indução magnética

Leis de Biot-Savart e de Ampère

(1ª aula)

Magnetostática na matéria

Campo magnético

Condições fronteira

(2ª aula)

Coeficiente de auto-indução

Energia magnética

(3ª aula)

Modelo Electrostático →

$$\nabla \cdot \vec{D} = \mathbf{r}_v$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Meios LHI →

$$\vec{D} = \mathbf{e} \vec{E}$$

Força eléctrica →

$$\vec{F}_e = q \vec{E}$$

Força magnética →

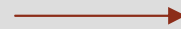
$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

\vec{v} → velocidade

\vec{B} → campo de indução magnética (Wb/m² ou T)

Força electromagnética total →

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$



$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

força de Lorentz

No vazio e para campos de indução magnética estacionários tem-se

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$\mu_0 \rightarrow$ permeabilidade magnética do vazio

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Notas

$$1. \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 \longrightarrow \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

como prevê a equação da continuidade para correntes estacionárias

$$2. \quad \text{a comparação de } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ com } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \text{ indica que não existe "carga magnética"}$$

\Rightarrow fonte de campos magnéticos estacionários são correntes estacionárias

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ \longrightarrow \vec{B} pode ser expresso como o rotacional de outro campo vectorial

$\vec{A} \rightarrow$ vector potencial magnético (Wb/m)

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

admitindo $\nabla \cdot \vec{A} = 0$
(para simplificar)

pode mostra-se
(ver Cheng)

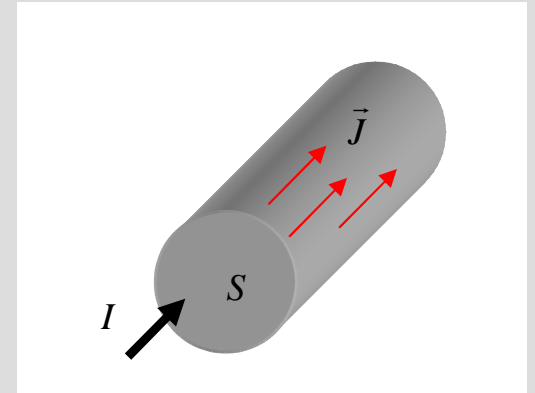
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{Vol}} \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$\vec{r} \rightarrow$ posição onde se quer calcular \vec{A}

$\vec{r}' \rightarrow$ posição do elemento de corrente

Lei de Biot–Savart

Considere-se um fio condutor com área de secção transversal S percorrido por uma corrente estacionária I



$$\longrightarrow dv' = S dl'$$

$$\vec{J} dv' = J S d\vec{l}' = I d\vec{l}'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{Vol}} \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

correntes estacionárias formam
percursos fechados

pode mostra-se
(ver Cheng)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Lei de Biot-Savart

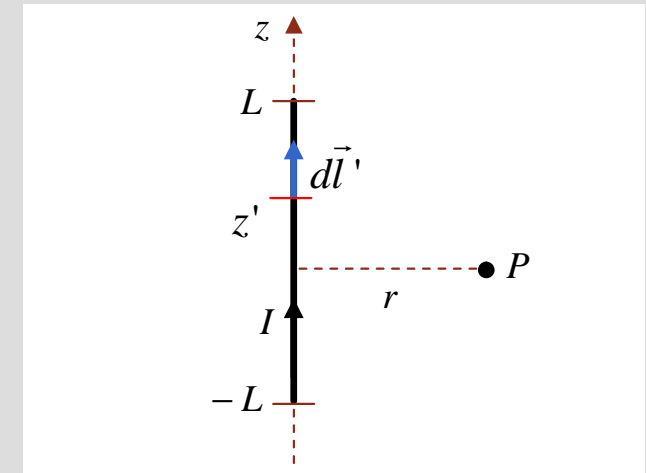
\vec{r} → posição onde se quer calcular \vec{B}

\vec{r}' → posição do elemento de corrente

Lei de Biot–Savart – exemplo

Considere um fio de comprimento $2L$ que é percorrido por uma corrente I .
Determine o campo de indução magnética num ponto do plano bissetor, a uma distância r do fio.

Nota: Este fio é parte de um circuito completo (fechado) mas só estamos interessados em calcular o campo criado por este lado do circuito.



coordenadas cilíndricas \rightarrow

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \hat{u}_r \\ \vec{r}' &= z' \hat{u}_z \end{aligned}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = r \hat{u}_r - z' \hat{u}_z \quad \rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (r^2 + z'^2)^{3/2}$$

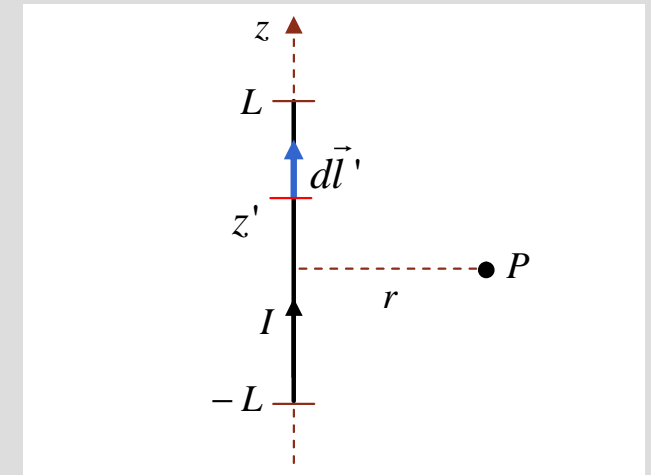
$$d\vec{l}' = dz' \hat{u}_z \quad \rightarrow \quad d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = dz' \hat{u}_z \times (r \hat{u}_r - z' \hat{u}_z) = r dz' \hat{u}_\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \hat{u}_\phi \int_{-L}^{+L} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}} \hat{u}_\phi$$

Lei de Biot–Savart – exemplo

Considere um fio de comprimento $2L$ que é percorrido por uma corrente I .
Determine o campo de indução magnética num ponto do plano bissector, a uma distância r do fio.

Nota: Este fio é parte de um circuito completo (fechado) mas só estamos interessados em calcular o campo criado por este lado do circuito.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}} \hat{u}_f$$

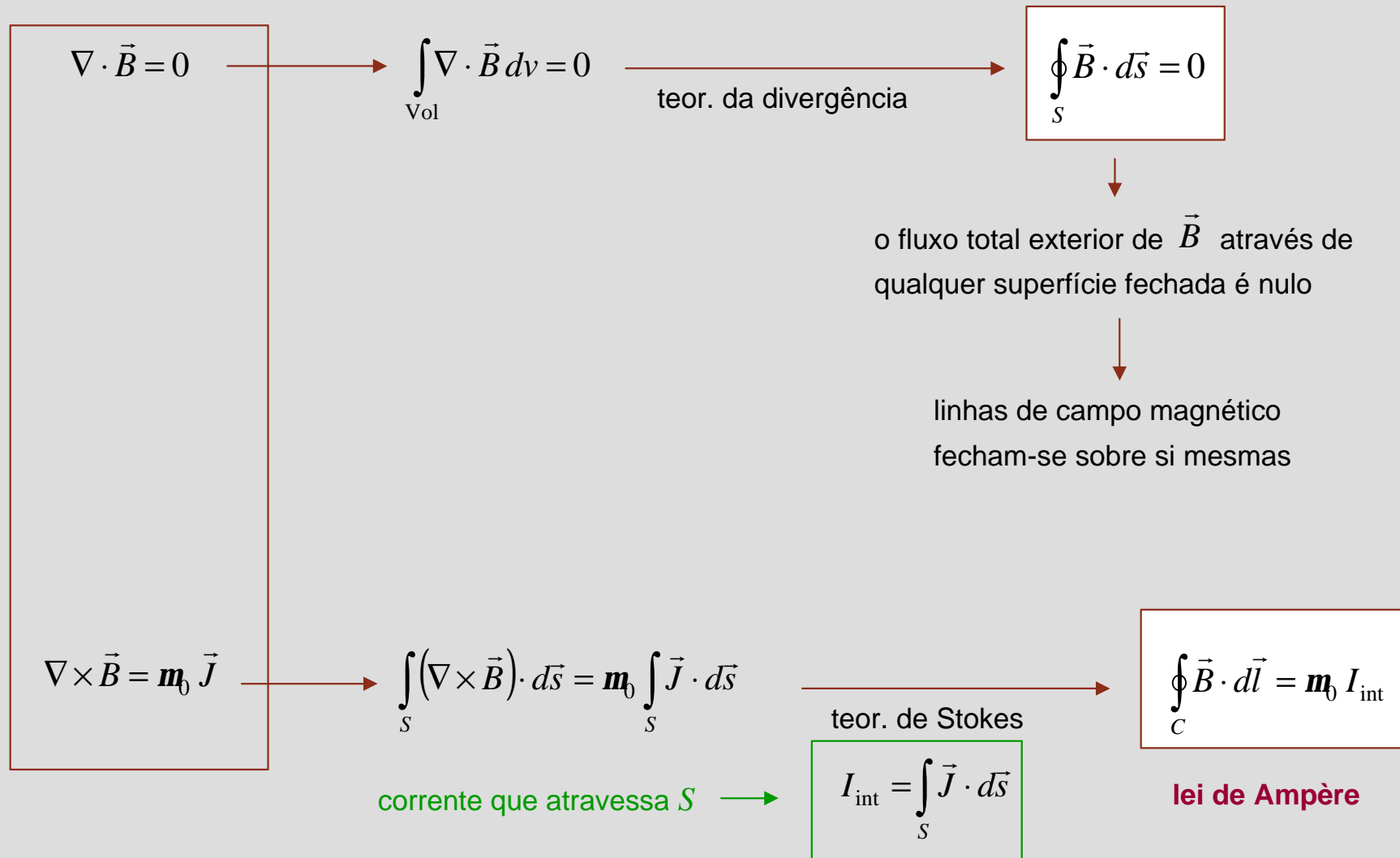
Notas

- \vec{B} e I relacionados pela “regra da mão-direita”
- o campo criado por um **fio infinito** é

$$\vec{B} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}} \hat{u}_f = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_f \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_f} \text{ fio infinito}$$

Divergência e rotacional do campo de indução magnética – forma integral

No vazio e para campos de indução magnética estacionários tem-se



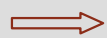
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

lei de Ampère

A circulação do campo de indução magnética ao longo de qualquer percurso fechado é igual a μ_0 vezes a corrente total que atravessa a superfície limitada pelo percurso

Notas

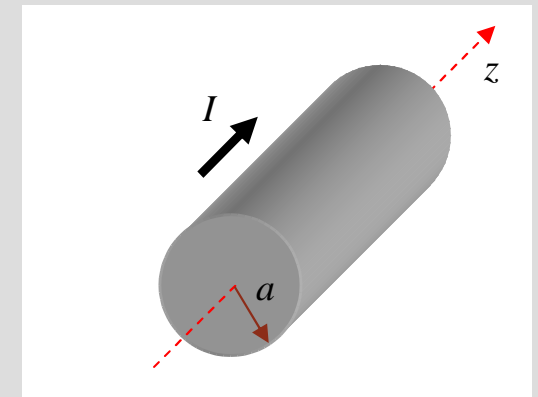
1. sentido de circulação e sentido da corrente estão relacionados pela “regra da mão direita”
2. a lei de Ampère é útil na determinação de \vec{B} em problemas que tenham **simetria**



percurso C deve ser escolhido de forma que a componente de \vec{B} **tangencial** ao percurso seja **constante** nesse percurso

Lei de Ampère – exemplo

Um condutor cilíndrico de comprimento infinito e raio a é percorrido por uma corrente I . Admitindo que esta corrente se distribui uniformemente sobre a secção transversal do condutor, determine o campo de indução magnética em todo o espaço, isto é, no interior e no exterior do condutor.



simetria cilíndrica \longrightarrow coordenadas cilíndricas com eixo dos z a apontar na direcção da corrente I

$$\vec{B} = B(r) \hat{u}_\phi \quad \text{regra da mão-direita}$$

simetria

C : percurso circular de raio r perpendicular ao condutor e centrado no seu eixo

$$d\vec{l} = dr \hat{u}_r + r d\phi \hat{u}_\phi + dz \hat{u}_z = r d\phi \hat{u}_\phi$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) r d\phi$$

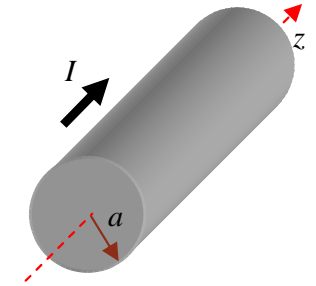
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B r d\phi = B r \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi r B$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_{\text{int}}}{2\pi r} \hat{u}_\phi$$

Lei de Ampère – exemplo

Um condutor cilíndrico de comprimento infinito e raio a é percorrido por uma corrente I . Admitindo que esta corrente se distribui uniformemente sobre a secção transversal do condutor, determine o campo de indução magnética em todo o espaço, isto é, no interior e no exterior do condutor.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_{\text{int}}}{2\pi r} \hat{u}_\phi \longrightarrow \text{determinação de } I_{\text{int}}$$

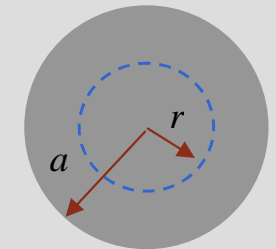
$$0 < r < a$$

$$I_{\text{int}} = \int_{S_r} \vec{J} \cdot d\vec{s} \longrightarrow I_{\text{int}} = \int_{S_r} \frac{I}{\pi a^2} ds = I \left(\frac{r}{a} \right)^2$$

superfície de raio r

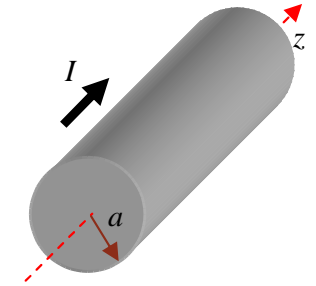
distribuição uniforme de corrente $\rightarrow \vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{u}_z$
 $d\vec{s} = ds \hat{u}_z$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{u}_\phi, \quad 0 < r < a$$



Lei de Ampère – exemplo

Um condutor cilíndrico de comprimento infinito e raio a é percorrido por uma corrente I . Admitindo que esta corrente se distribui uniformemente sobre a secção transversal do condutor, determine o campo de indução magnética em todo o espaço, isto é, no interior e no exterior do condutor.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_{\text{int}}}{2\pi r} \hat{u}_\phi \longrightarrow \text{determinação de } I_{\text{int}}$$

$$r > a$$

$$I_{\text{int}} = \int_{S_r} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

superfície de raio r

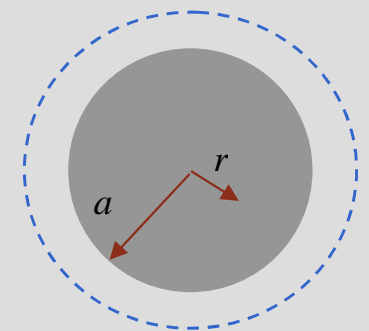
$$I_{\text{int}} = \int_{S_a} \vec{J} \cdot d\vec{s} = I$$

superfície de raio a

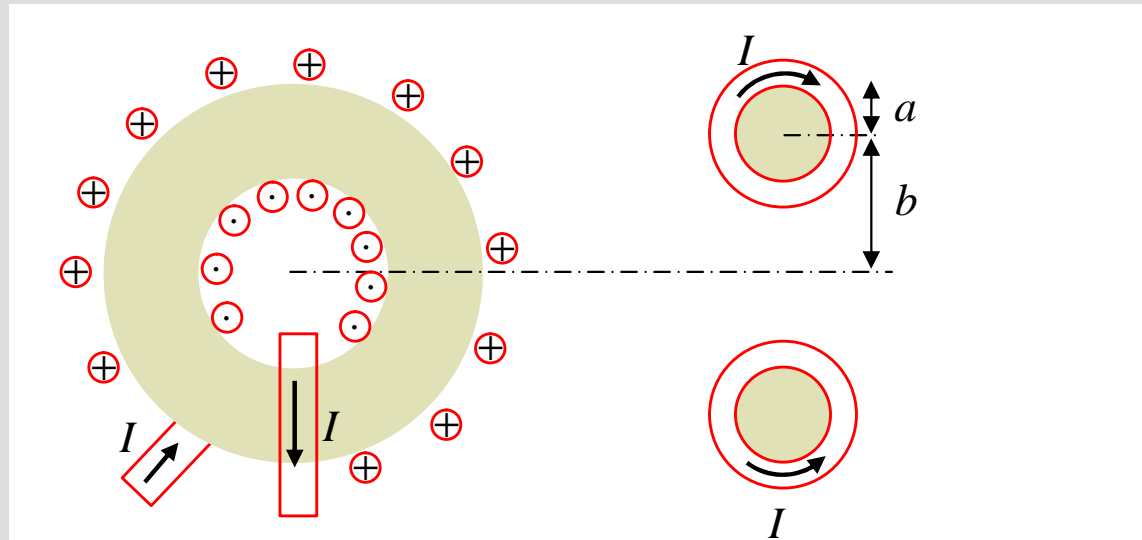
$$\vec{J} = \begin{cases} \frac{I}{\pi a^2} \hat{u}_z, & 0 < r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

$$d\vec{s} = ds \hat{u}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi, \quad r > a$$



1. Determine o campo de indução magnética num ponto do eixo de um anel circular de raio a que é percorrido por uma corrente I .
2. Um fio condutor percorrido por uma corrente I é enrolado em N voltas em torno de um toróide preenchido com ar. Sabendo que o toróide tem raio médio b e raio da secção transversal a , determine o campo de indução magnética em todo o espaço, isto é, para $0 < r < b - a$, $b - a < r < b + a$ e $r > b + a$.

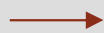


Força de Lorentz

Divergência e rotacional do campo de indução magnética

Leis de Biot-Savart e de Ampère

(1ª aula)



Magnetostática na matéria

Campo magnético

Curva de histerese

Condições fronteira

Coefficiente de auto-indução

(2ª aula)

Energia magnética

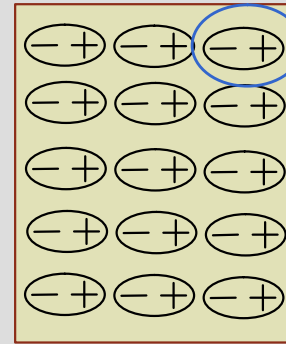
Força magnética

(3ª aula)

Relembrando campos eléctricos em dieléctricos

dieléctrico
(tem cargas de polarização)

aplicação de \vec{E}_0



dipolo eléctrico

\vec{E}_0

efeito macroscópico destes dipolos induzidos é traduzido pelo **vector de polarização** \rightarrow

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{p}_k}{\Delta v}$$

vector de polarização traduz a forma como o campo eléctrico no interior do dieléctrico é alterado:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{C/m}^2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = r_v$$

vector deslocamento eléctrico

dipolos magnéticos
(associados ao
movimento orbital e
ao spin dos
electrões) com
orientação aleatória

(material não magnético)

aplicação de campo magnético →

alinhamento dos
momentos dipolares
associados ao spin
e modificação do
movimento orbital

efeito macroscópico é traduzido pelo **vector de magnetização** →

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{m}_k}{\Delta v}$$

vector de magnetização traduz a forma como o campo magnético no interior do material é alterado:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

(vazio)

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

← densidade de corrente livre

seja

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (\text{A/m})$$

campo magnético

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

densidade de corrente livre

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} (= I_{\text{int}})$$

corrente livre no interior de S

teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{int}}$$

Lei de Ampère

seja

$$\vec{M} = c_m \vec{H}$$

$c_m \rightarrow$ susceptibilidade magnética

meio linear $\rightarrow c_m$ é independente de \vec{H}

meio isotrópico $\rightarrow c_m$ é independente da direcção de \vec{H}

meio homogéneo $\rightarrow c_m$ é independente da posição no material

c_m é uma constante

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + c_m) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 m_r \vec{H}$$

$$\vec{B} = m \vec{H}$$

$$m_r = 1 + c_m$$

$$m = \mu_0 m_r$$

permeabilidade relativa

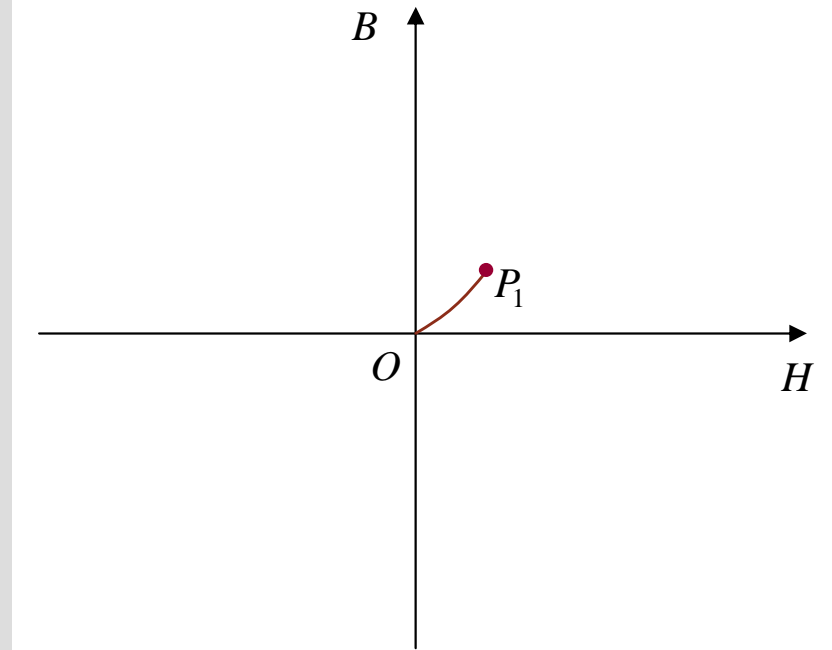
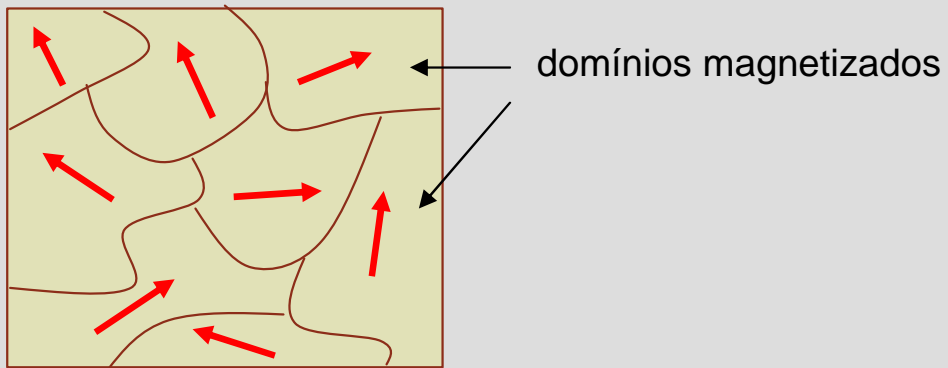
permeabilidade absoluta

$$\mathbf{m}_r = 1 + \mathbf{c}_m$$

materiais magnéticos \longrightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{diamagnéticos} \rightarrow \mathbf{m}_r < 1 \quad (|\mathbf{c}_m| \text{ pequeno}) \\ \text{paramagnéticos} \rightarrow \mathbf{m}_r > 1 \quad (\mathbf{c}_m \text{ pequeno}) \\ \text{ferromagnéticos} \rightarrow \mathbf{m}_r \gg 1 \quad (\mathbf{c}_m \text{ elevado}) \end{array} \right.$

Notas

1. O diamagnetismo está associado ao movimento orbital dos electrões e está presente em todos os materiais.
materiais diamagnéticos \rightarrow cobre, chumbo, mercúrio, ...
2. O paramagnetismo está associado ao movimento de rotação dos electrões (spin) e é afectado pela temperatura.
materiais paramagnéticos \rightarrow alumínio, magnésio, titânio, ...
3. O ferromagnetismo está associado à existência de domínio magnetizados (com dipolos magnéticos alinhados mesmo na ausência de campos magnéticos exteriores).
materiais ferromagnéticos \rightarrow ferro, cobalto, níquel, ...



ausência de campo magnético \rightarrow momentos dipolares com orientação aleatória

aplicação de campo magnético \rightarrow alargamento dos domínios com momentos dipolares alinhados com campo aplicado



aumento do campo de indução magnética



para campos fracos (até ponto P_1) este alargamento é **reversível**

para campos mais fortes (depois de ponto P_1) este alargamento já **não é reversível** e ocorre também orientação dos momentos dipolares na direcção do campo

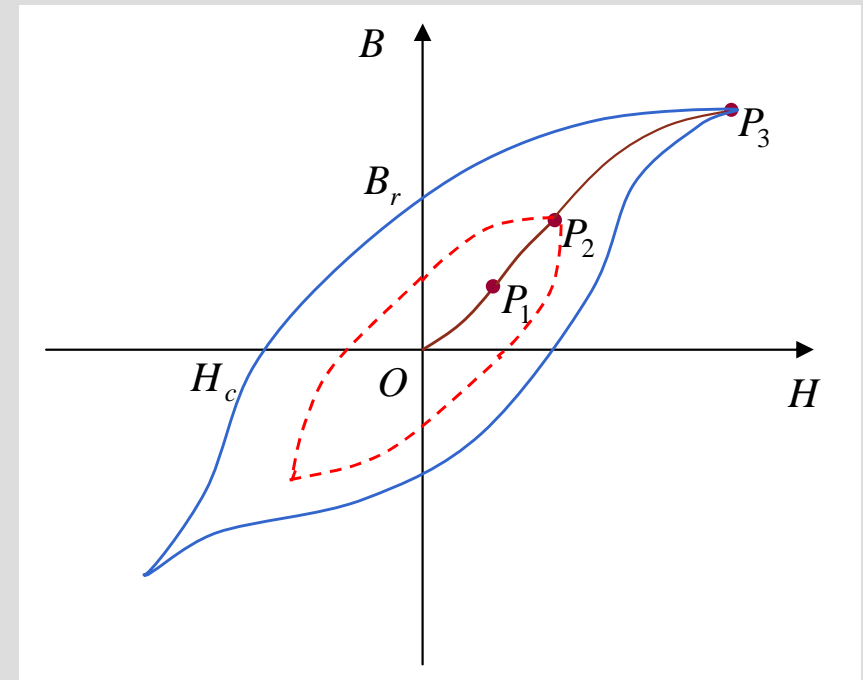


se campo é retirado em P_2 , a curva seguida será a indicada a tracejado e não o percurso P_2P_1O



curva de histerese

aumentando o campo para até P_3 → **saturação**



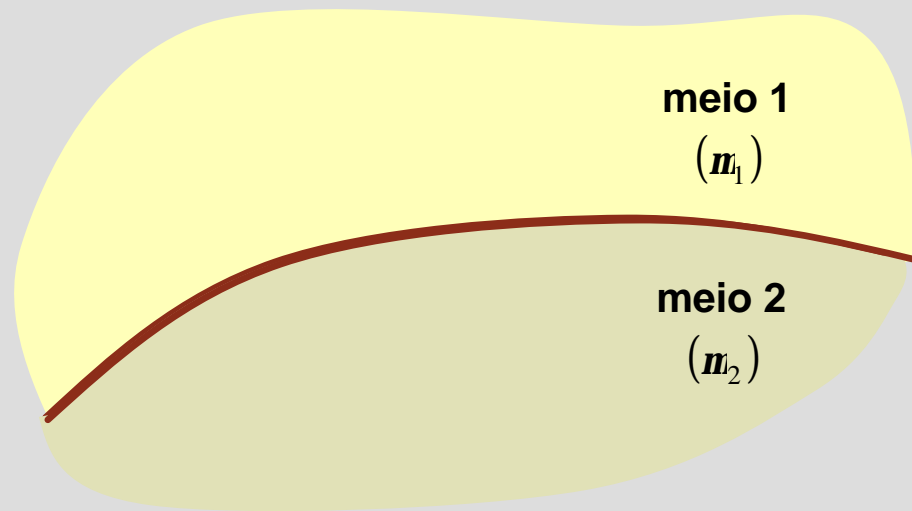
B_r → campo de indução magnética remanescente
 H_c → campo magnético coercivo

ímãs permanentes

Nota

ímãs permanentes → valores de H_c elevados
transformadores, motores, ... → curvas de histerese estreitas

interface entre dois meios diferentes



Como se relacionam os campos \vec{H} e \vec{B} nos dois meios?

volume cilíndrico de base ΔS e altura $\Delta h \rightarrow 0$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

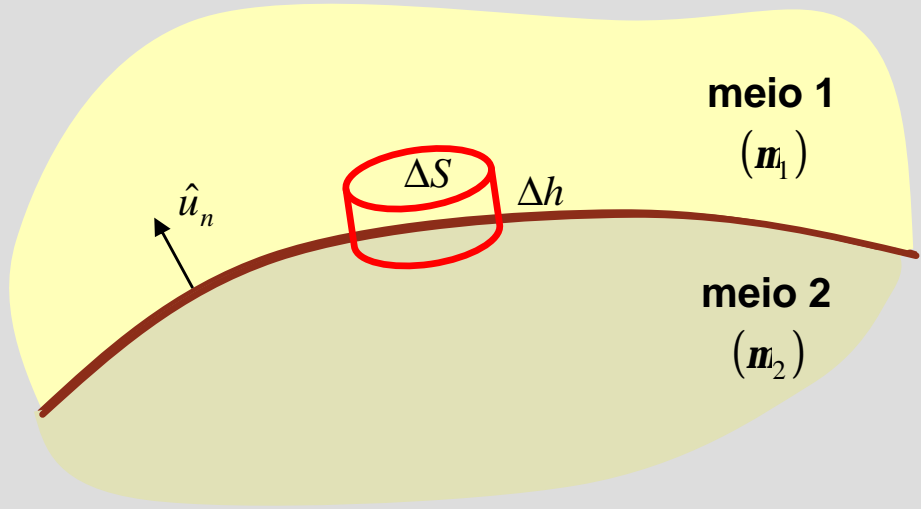


zero porque $\Delta h \rightarrow 0$

$$\int_{\text{topo}} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{lateral}} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{base}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \longrightarrow \vec{B}_1 \cdot \hat{u}_n \Delta S - \vec{B}_2 \cdot \hat{u}_n \Delta S = 0$$

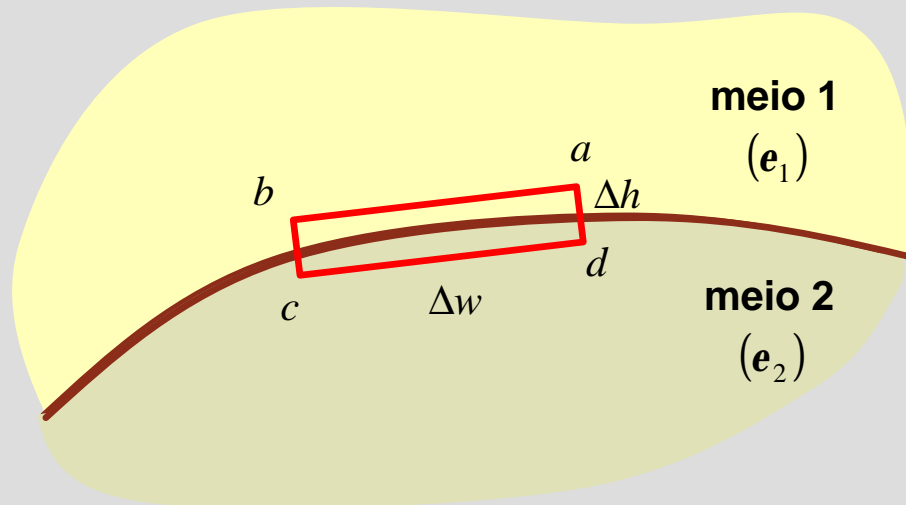
$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\mathbf{m}_1 H_{1n} = \mathbf{m}_2 H_{2n}$$



Componente tangencial

percurso rectangular de comprimento Δw e largura $\Delta h \rightarrow 0$



zero

zero porque $\Delta h \rightarrow 0$

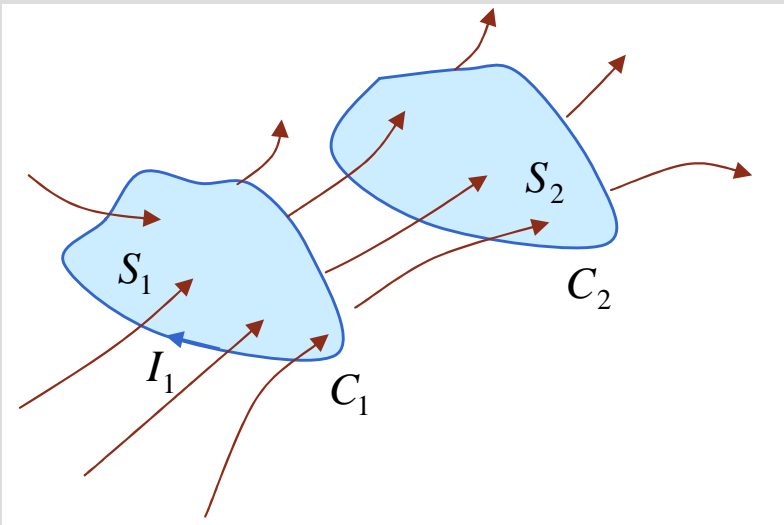
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{int}} \rightarrow \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{int}} \rightarrow H_{1t} \Delta w - H_{2t} \Delta w = I_{\text{int}} \rightarrow H_{1t} - H_{2t} = \frac{I_{\text{int}}}{\Delta w} = J_{sn}$$

$$\hat{u}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

fluxo magnético através de S

Considerem-se dois percursos fechados próximos, C_1 e C_2 , os quais limitam as superfícies S_1 e S_2 .



$\vec{B}_1 \rightarrow$ campo criado pela corrente I_1 em C_1

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} \rightarrow \text{fluxo mútuo}$$

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} \quad \text{fluxo mútuo}$$

$\vec{B}_1 \rightarrow$ campo criado pela corrente I_1 em C_1

\vec{B}_1 é proporcional a I_1

Φ_{12} é proporcional a I_1

indutância mútua

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

generalizando

Importante:

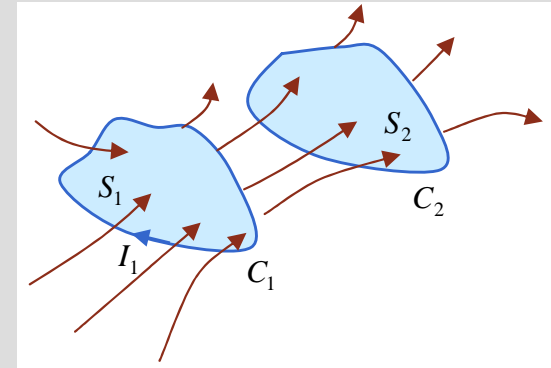
se percurso C_2 tiver N_2 espiras \rightarrow

$$\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12}$$

fluxo de ligação devido a F_{12}

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} \quad (\text{H})$$

indutância mútua



parte do fluxo magnético produzido por I_1 atravessa apenas o circuito C_1

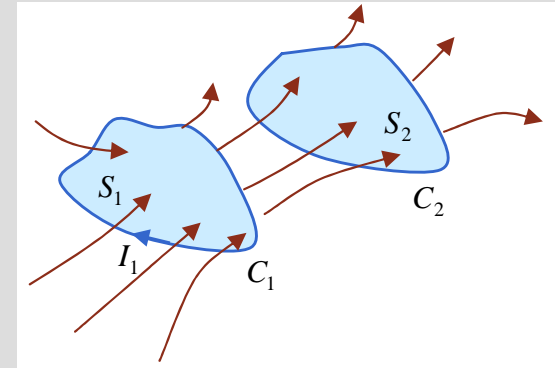
$$\Phi_{11} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}$$

$$\Lambda_{11} = N_1 \Phi_{11}$$

espiras em C_1

$$L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1} \quad (\text{H})$$

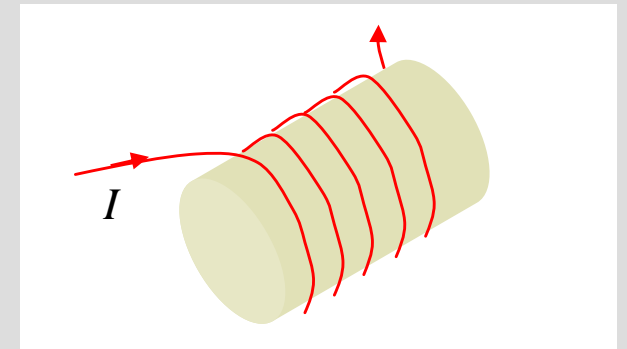
coeficiente de auto-indução



Um condutor com a forma apropriada para ter um dado coeficiente de auto-indução é uma **bobina**.

exemplo → fio condutor enrolado em torno de um núcleo

As bobinas armazenam **energia magnética**, tal como os condensadores armazenam energia eléctrica.



No caso de só existir um circuito, só faz sentido falar em **coeficiente de auto-indução**, o qual pode ser representado apenas por L :

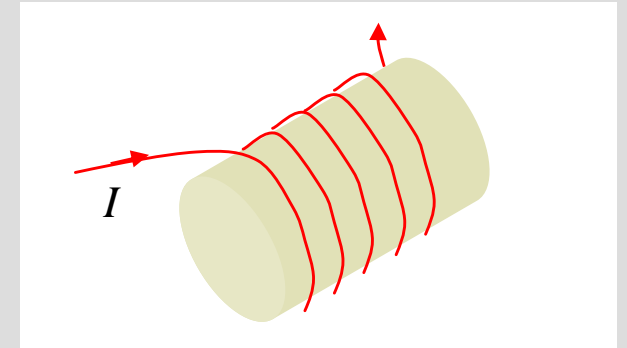
$$L = \frac{\Lambda}{I} \quad \text{onde} \quad \Lambda = N \Phi$$
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$L = \frac{\Lambda}{I}$$

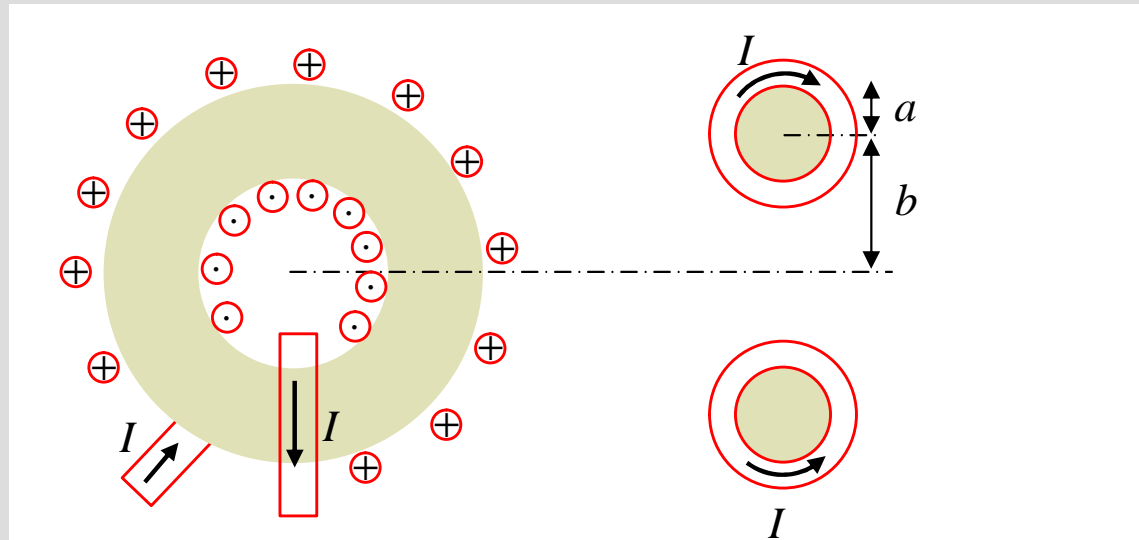


Método de cálculo

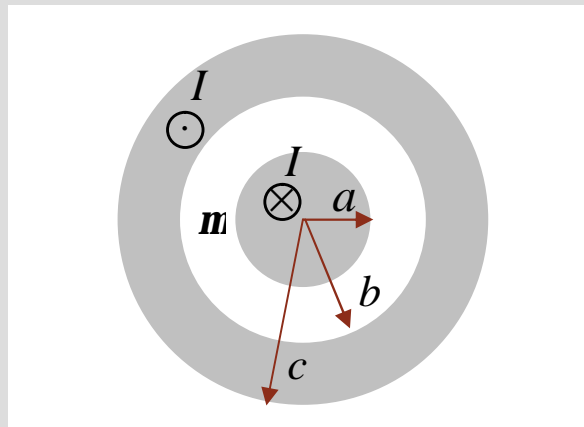
1. Admitir corrente I no condutor
2. Determinar \vec{B} (usando a lei de Ampère ou a lei de Biot–Savart)
3. Determinar $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$
4. Determinar $\Lambda = N\Phi$
5. Calcular $L = \frac{\Lambda}{I}$



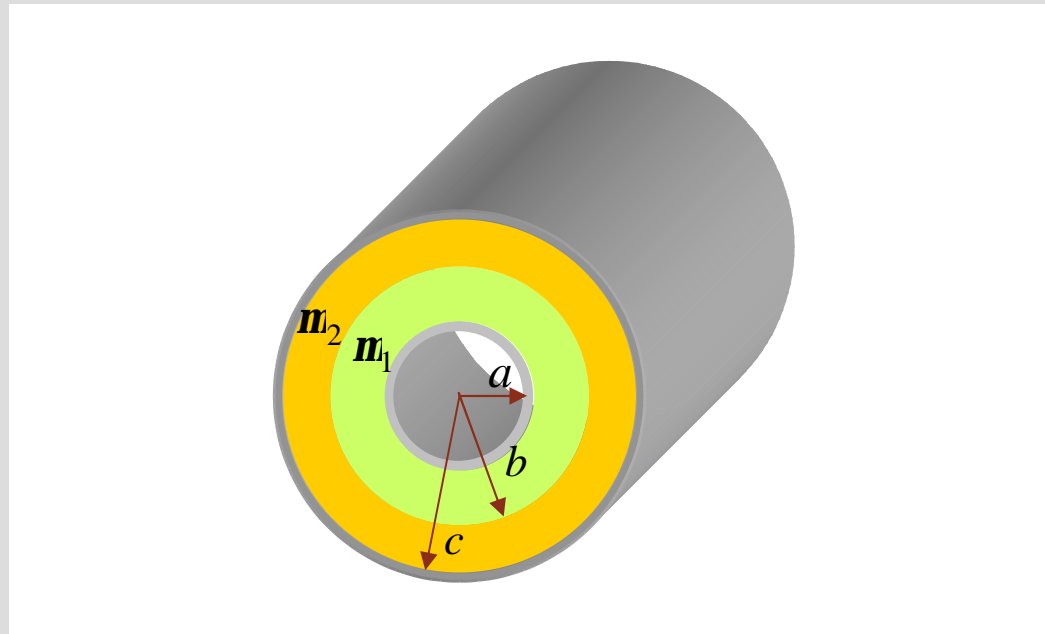
1. Determine o campo de indução magnética num ponto do eixo de um anel circular de raio a que é percorrido por uma corrente I .
2. Um fio condutor percorrido por uma corrente I é enrolado em N voltas em torno de um toróide preenchido com ar. Sabendo que o toróide tem raio médio b e raio da secção transversal a , determine o campo de indução magnética em todo o espaço, isto é, para $0 < r < b - a$, $b - a < r < b + a$ e $r > b + a$.



3. A região $0 < r < a$ está ocupada por um fio condutor de comprimento infinito percorrido por uma corrente I . Um outro condutor cilíndrico oco ocupa a região $b < r < c$ e é percorrido por uma corrente I no sentido contrário. O espaço entre os dois condutores, isto é, a região $a < r < b$ está preenchido por um material magnético com permeabilidade μ . Admitindo que a corrente se distribui uniformemente nos dois condutores, determine \vec{B} e \vec{H} em todo o espaço.



4. Considere um cabo coaxial de comprimento L constituído por duas superfícies condutoras cilíndricas de raios a e c . O espaço entre as duas superfícies condutoras está preenchido por dois materiais magnéticos de permeabilidades μ_1 e μ_2 , tal como representado na figura. Sabendo que $L \gg c$, calcule o coeficiente de auto-indução deste cabo coaxial..



Força de Lorentz

Divergência e rotacional do campo de indução magnética

Leis de Biot-Savart e de Ampère

(1ª aula)

Magnetostática na matéria

Coefficiente de auto-indução

(2ª aula)

→ **Energia magnética**

Força magnética

Força em condutores percorridos por correntes

Efeito de Hall

Indução electromagnética

(3ª aula)

Considere-se um circuito fechado C_1 com coeficiente de auto-indução L_1 no qual a corrente i_1 é inicialmente nula.

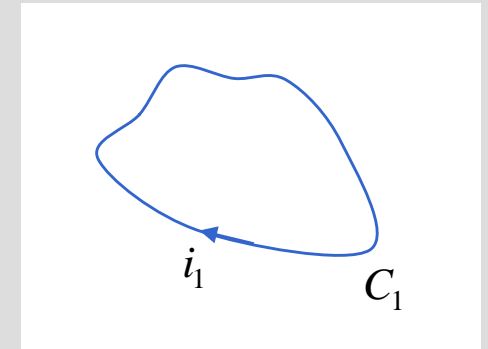
Um gerador de corrente é ligado ao anel, forçando a corrente a aumentar até I_1 .



Uma força electromotriz é induzida no circuito que se opõe à variação de corrente.



É necessário realizar **trabalho** para contrariar esta força electromotriz.



$$W_m = \int v_1 i_1 dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1$$

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

tensão aos terminais de uma bobina com coeficiente de auto-indução L_1

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

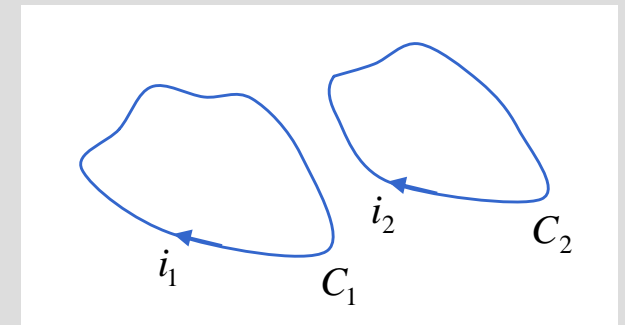
energia magnética armazenada

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1}$$

$$W_m = \frac{1}{2} I_1 \Phi_1$$

Energia magnética – dois circuitos

Considerem-se agora dois circuitos fechados C_1 e C_2 percorridos pelas correntes i_1 i_2 , as quais são inicialmente nulas e aumentam até aos valores I_1 e I_2 .
Admitamos que esta variação das correntes é feita em duas etapas:



1º $\begin{matrix} i_2 = 0 \\ i_1 : 0 \rightarrow I_1 \end{matrix}$ \longrightarrow requer trabalho $W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$

$v_{21} = L_{21} \frac{di_2}{dt}$ tensão aos terminais de C_1 por causa de i_2

2º $\begin{matrix} i_1 = I_1 \\ i_2 : 0 \rightarrow I_2 \end{matrix}$ \longrightarrow requer trabalho $W_2 + W_{21}$ onde $W_{21} = \int v_{21} I_1 dt = \int_0^{I_2} L_{21} I_1 di_2 = L_{21} I_1 I_2$
 $W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$

$\implies W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + L_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$

$L_{kk} = L_k$

$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_{jk} I_j I_k$

energia magnética armazenada

Generalizando a expressão anterior, a energia magnética armazenada por N percorridos pelas correntes estacionárias I_1, I_2, \dots, I_N é:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N L_{jk} I_j I_k$$

energia magnética armazenada

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^N L_{jk} I_j$$

fluxo magnético através do circuito C_k

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \Phi_k$$

É possível mostra-se que a energia magnética armazenada é dada por:
(ver Cheng)

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\text{todo o espaço}} \vec{H} \cdot \vec{B} dv' \quad (\text{J})$$

energia magnética armazenada



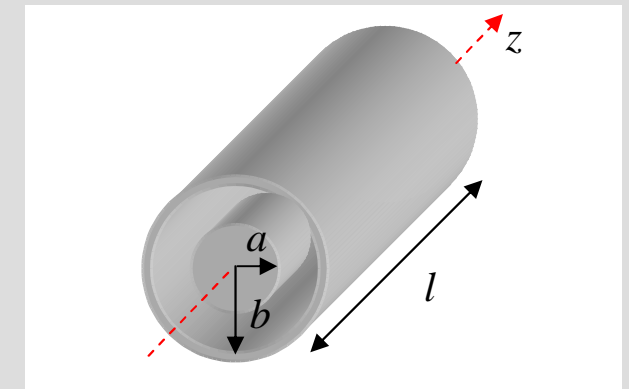
$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (\text{J/m}^3) \quad \leftarrow \text{densidade de energia magnética}$$

$$w_m = \frac{B^2}{2\mathbf{m}}$$

$$w_m = \frac{\mathbf{m}H^2}{2}$$

Cálculo de L a partir de W_m – exemplo

A partir da energia magnética armazenada, determine o coeficiente de auto-indução de um cabo coaxial de comprimento l constituído por um condutor cilíndrico sólido de raio a e uma superfície cilíndrica condutora de raio b ($b \ll l$). O espaço entre os dois condutores está preenchido por ar.



$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\text{todo o espaço}} \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv' = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{todo o espaço}} B^2 \, dv'$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

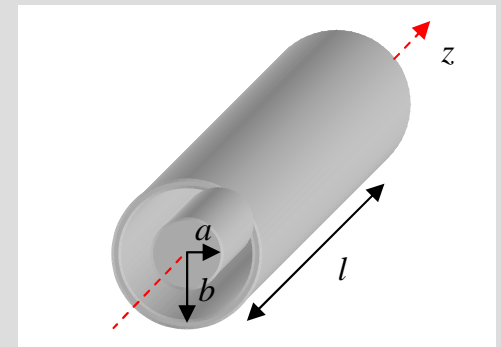
para determinar \vec{B} é necessário considerar que o cabo coaxial transporta uma dada corrente.

Admitamos que uma corrente I entra no cabo coaxial pelo condutor sólido (\rightarrow sentido do eixo dos z), distribuindo-se uniformemente nesse condutor, e “regressando” pelo condutor exterior (\rightarrow sentido contrário ao do eixo dos z).

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{u}_z, \text{ para } 0 < r < a \quad \text{e} \quad \vec{I} = -I \hat{u}_z, \text{ para } r = b$$

Cálculo de L a partir de W_m – exemplo

A partir da energia magnética armazenada, determine o coeficiente de auto-indução de um cabo coaxial de comprimento l constituído por um condutor cilíndrico sólido de raio a e uma superfície cilíndrica condutora de raio b ($b \ll l$). O espaço entre os dois condutores está preenchido por ar.



determinação de \vec{B}

simetria $\longrightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$

$$\vec{B} = B(r) \hat{u}_f$$

C : percurso circular de raio r perpendicular ao cabo e centrado no seu eixo

$$d\vec{l} = r d\mathbf{f} \hat{u}_f$$

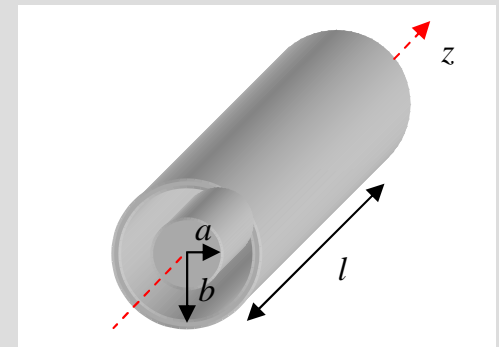
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B r d\mathbf{f} = B r \int_0^{2\pi} d\mathbf{f} = 2\pi r B$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_{\text{int}}}{2\pi r} \hat{u}_f$$

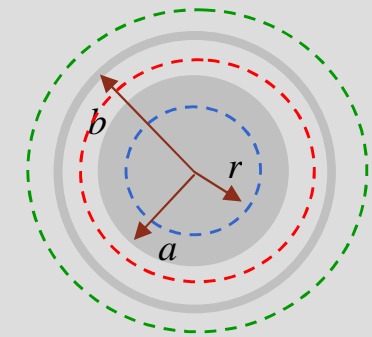
Cálculo de L a partir de W_m – exemplo

A partir da energia magnética armazenada, determine o coeficiente de auto-indução de um cabo coaxial de comprimento l constituído por um condutor cilíndrico sólido de raio a e uma superfície cilíndrica condutora de raio b ($b \ll l$). O espaço entre os dois condutores está preenchido por ar.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_{\text{int}}}{2\pi r} \hat{u}_f$$

determinação de I_{int}



$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{u}_z$$

$$0 < r < a$$

$$I_{\text{int}} = \int_{S_r} \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \longrightarrow \quad I_{\text{int}} = \int_{S_r} \frac{I}{\pi a^2} ds = I \left(\frac{r}{a} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{u}_f, \quad 0 < r < a$$

$$a < r < b$$

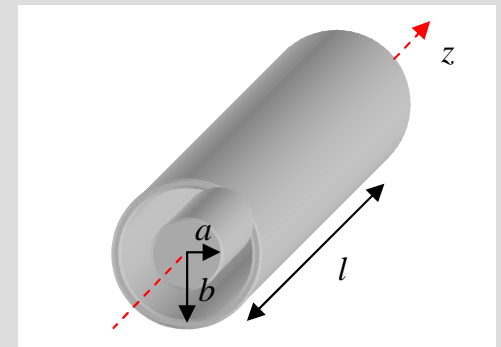
$$I_{\text{int}} = \int_{S_r} \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \longrightarrow \quad I_{\text{int}} = I \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_f, \quad a < r < b$$

$$r > b$$

$$I_{\text{int}} = \int_{S_r} \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \longrightarrow \quad I_{\text{int}} = I + (-I) = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = 0, \quad r > b$$

Cálculo de L a partir de W_m – exemplo

A partir da energia magnética armazenada, determine o coeficiente de auto-indução de um cabo coaxial de comprimento l constituído por um condutor cilíndrico sólido de raio a e uma superfície cilíndrica condutora de raio b ($b \ll l$). O espaço entre os dois condutores está preenchido por ar.



cálculo de W_m

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{todo o espaço}} B^2 dv' = \frac{1}{2\mu_0} \left\{ \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \right)^2 r dr d\phi dz + \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 r dr d\phi dz \right\} = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{u}_\phi, \quad 0 < r < a \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi, \quad a < r < b$$

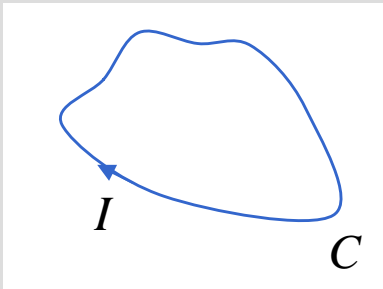
cálculo de L

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad \longrightarrow \quad L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{8\pi} + \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

associada ao condutor interior

Forças em condutores percorridos por correntes

Considere-se um condutor formando um percurso fechado C e percorrido por uma corrente estacionária I .



seja $S \rightarrow$ área da secção transversal do fio condutor

$d\vec{l} \rightarrow$ elemento do percurso

$\vec{B} \rightarrow$ campo de indução magnética

$\vec{v} \rightarrow$ velocidade dos portadores de carga (na direcção de $d\vec{l}$)

$N \rightarrow$ portadores de carga por unidade de volume

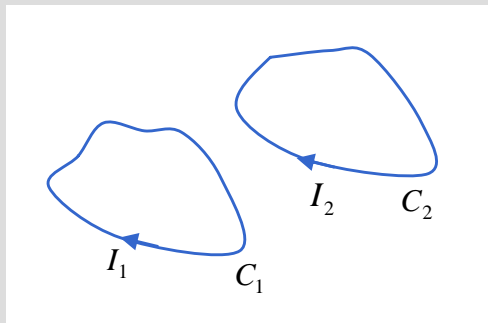
força em carga de valor $q = -e \rightarrow \vec{F}_m = -e \vec{v} \times \vec{B}$

força no volume $dv = S dl \rightarrow \vec{F}_m = -e \boxed{N S dl} \vec{v} \times \vec{B} = \boxed{-e N S v} d\vec{l} \times \vec{B} = \boxed{I d\vec{l} \times \vec{B}}$

portadores de carga em dv
 corrente I
 força no elemento dl

força no circuito $C \rightarrow \boxed{\vec{F}_m = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B}}$

Considerem-se agora dois circuitos fechados, C_1 e C_2 , percorridos pelas correntes I_1 e I_2 .



seja \vec{B}_{21} \rightarrow campo criado por I_2 na posição de C_1

\vec{F}_{21} \rightarrow força exercida por C_2 em C_1

$$\vec{F}_{21} = I_1 \oint_{C_1} d\vec{l} \times \vec{B}_{21}$$

onde
$$\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

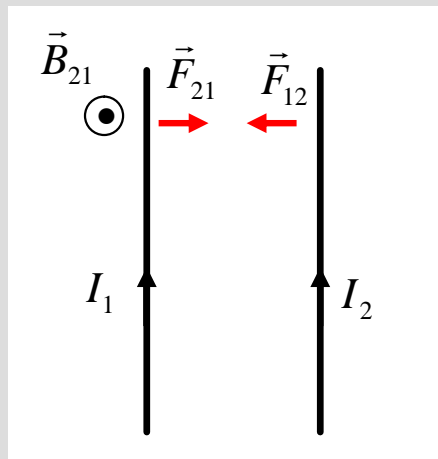
nota:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

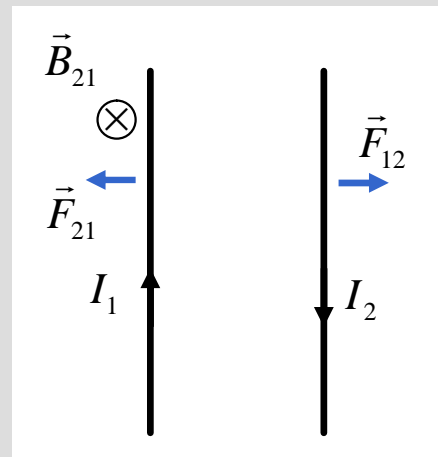
Forças em condutores – atracção / repulsão

Considerem-se dois condutores paralelos e infinitos percorridos pelas correntes I_1 e I_2 .

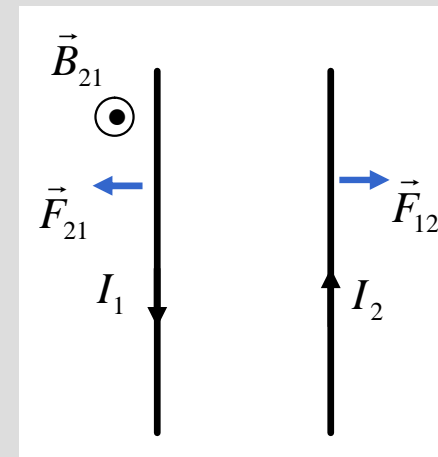
$$\vec{F}_{21} = I_1 \int_{C_1} d\vec{l} \times \vec{B}_{21}$$
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$



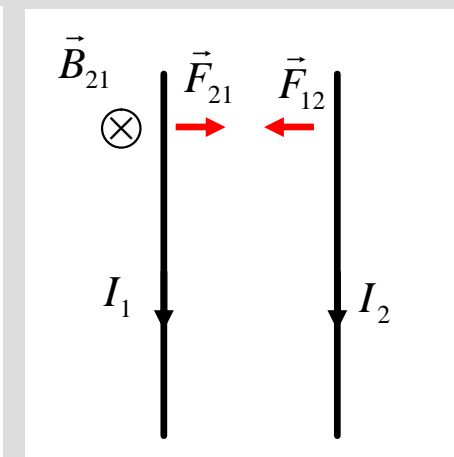
atracção



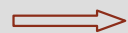
repulsão



repulsão



atracção



correntes no mesmo sentido → condutores atraem-se

correntes com sentido contrário → condutores repelem-se

Forças em condutores – exemplo

Um fio infinito e uma espira quadrada de lado a estão no mesmo plano e são percorridos pelas correntes I_1 e I_2 , tal como mostra a figura. Determine as forças exercidas em cada lado da espira.

$$\vec{F}_{12} = I_2 \oint_{C_2} d\vec{l} \times \vec{B}_{12}$$

$$\vec{B}_{12} = -B_{12} \hat{u}_x = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \hat{u}_x$$

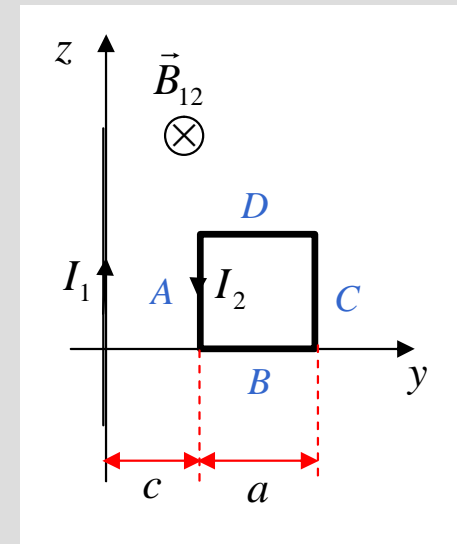
lado A

$$\vec{B}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} \hat{u}_x$$

$$d\vec{l} = dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y + dz \hat{u}_z = dz \hat{u}_z$$

$$\longrightarrow d\vec{l} \times \vec{B}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} dz \hat{u}_y$$

$$\longrightarrow \vec{F}_A = I_2 \int_a^0 \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} dz \hat{u}_y \right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi c} \hat{u}_y [z]_a^0 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi c} \hat{u}_y \quad (\text{repulsiva})$$



Forças em condutores – exemplo

Um fio infinito e uma espira quadrada de lado a estão no mesmo plano e são percorridos pelas correntes I_1 e I_2 , tal como mostra a figura. Determine as forças exercidas em cada lado da espira.

lado B

$$\vec{B}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1}{2p y} \hat{u}_x$$

$$d\vec{l} = dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y + dz \hat{u}_z = dy \hat{u}_y$$

$$d\vec{l} \times \vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2p y} dy \hat{u}_z$$

$$\vec{F}_B = I_2 \int_c^{c+a} \left(\frac{\mu_0 I_1}{2p y} dy \hat{u}_z \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2p} \hat{u}_z \int_c^{c+a} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2p} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right) \hat{u}_z$$

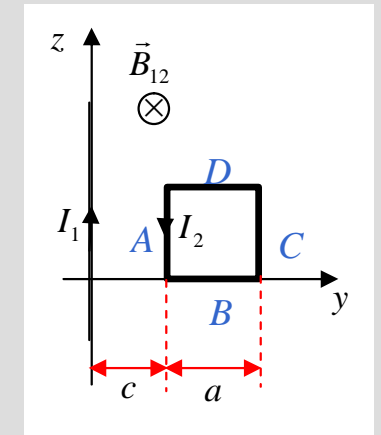
lado C

$$\vec{B}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1}{2p (c+a)} \hat{u}_x$$

$$d\vec{l} = dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y + dz \hat{u}_z = dz \hat{u}_z$$

$$d\vec{l} \times \vec{B}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1}{2p (c+a)} dz \hat{u}_y$$

$$\vec{F}_C = I_2 \int_0^a \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2p (c+a)} dz \hat{u}_y \right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2p (c+a)} \hat{u}_y \quad (\text{atractiva})$$



Forças em condutores – exemplo

Um fio infinito e uma espira quadrada de lado a estão no mesmo plano e são percorridos pelas correntes I_1 e I_2 , tal como mostra a figura. Determine as forças exercidas em cada lado da espira.

lado D

$$\vec{B}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \hat{u}_x$$

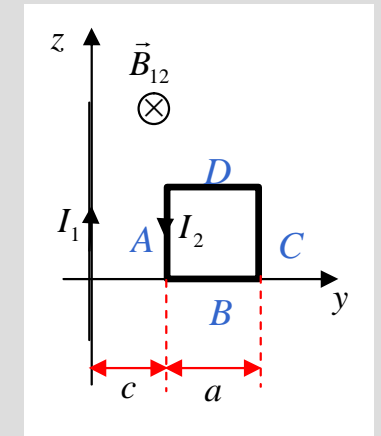
$$d\vec{l} = dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y + dz \hat{u}_z = dy \hat{u}_y$$

$$d\vec{l} \times \vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} dy \hat{u}_z$$

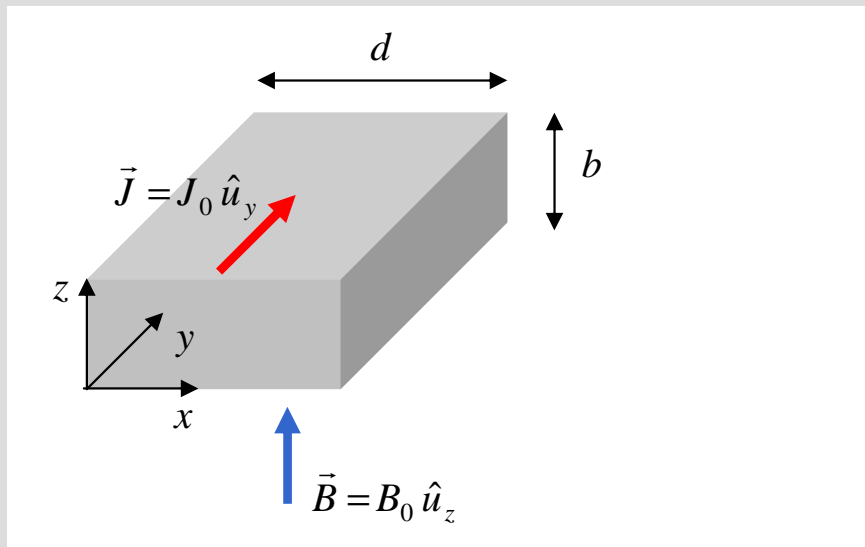
$$\vec{F}_D = I_2 \int_{c+a}^c \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} dy \hat{u}_z \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{c}{c+a}\right) \hat{u}_z = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{c}{c+a}\right) \hat{u}_z = -\vec{F}_B$$

Nota:

$$\vec{F}_{TOTAL} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+a} \right) \hat{u}_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{a^2}{c(c+a)} \hat{u}_y$$



Considere-se um material condutor de secção transversal rectangular com dimensões $d \times b$, percorrido por uma corrente eléctrica de densidade $\vec{J} = J_0 \hat{u}_y$ e colocado numa região do espaço onde existe um campo de indução magnética uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{u}_z$.



$$\vec{J} = J_0 \hat{u}_y = N q \vec{v} \quad \xrightarrow{\text{se } q = -e} \quad \vec{v} = -v_0 \hat{u}_y$$

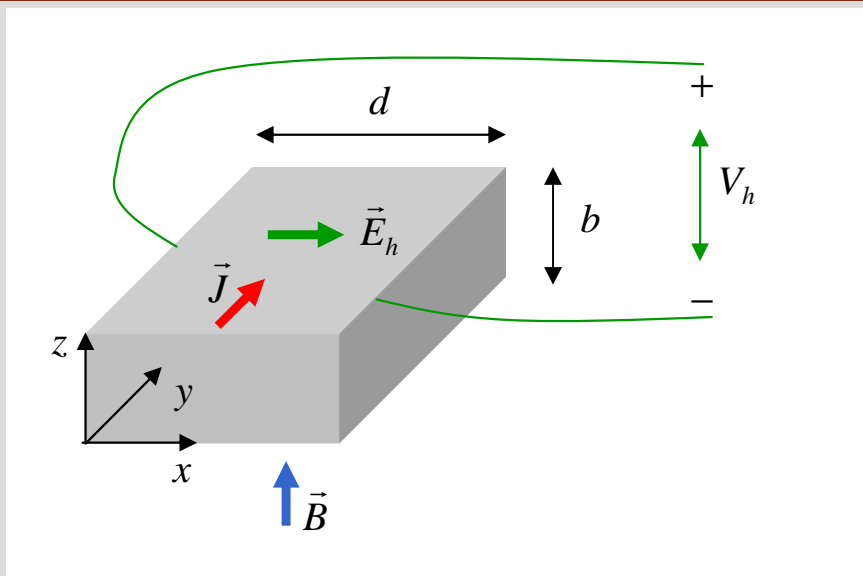
$$\longrightarrow \vec{F}_m = -e(-v_0 \hat{u}_y) \times B_0 \hat{u}_z = e v_0 B_0 \hat{u}_x$$

electrões deslocam-se para +x

campo eléctrico induzido E_h

movimento segundo x continua até que força electromagnética seja nula $\longrightarrow q(\vec{E}_h + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \longrightarrow \vec{E}_h = -\vec{v} \times \vec{B}$

$$\vec{E}_h = v_0 B_0 \hat{u}_x$$



$$\vec{E}_h = v_0 B_0 \hat{u}_x$$

↓

aparecimento de V_h

$$V_h = V(x=0) - V(x=d) = -\int_d^0 \vec{E}_h \cdot d\vec{l} = -\int_d^0 v_0 B_0 dx = v_0 B_0 d$$

notas

1. se cargas fossem positivas, V_h viria negativo
2. efeito de Hall pode ser usado para medir o campo magnético ou para verificar o sinal dos portadores de carga

electrostática →

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = r_v$$

postulado fundamental da
indução electromagnética

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

magnetostática →

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Meios LHI →

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Lei de Faraday da indução electromagnética

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

teor. de Stokes

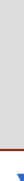
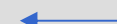
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$V = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

força electromotriz induzida num circuito com contorno C

força electromotriz induzida opõe-se à variação de fluxo magnético

lei de Lenz



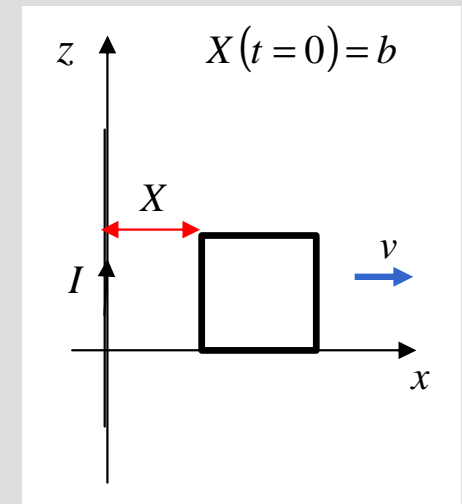
$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

lei de Faraday da indução electromagnética

Lei de Faraday – exemplo

Uma espira quadrada de lado a está colocada no mesmo plano de um fio infinito que é percorrido por uma eléctrica estacionária I . Sabendo que a espira, inicialmente a uma distância b do fio infinito, se afasta deste com uma velocidade v , determine:

- $\Phi(t)$;
- V ;
- o sentido de circulação da corrente induzida na espira.



$$a) \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \text{onde} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{u}_y \quad \text{no plano da espira}$$

$$S : \text{superfície limitada pela espira} \quad 0 < z < a \quad \text{e} \quad X < x < X + a \quad (X = b + vt)$$

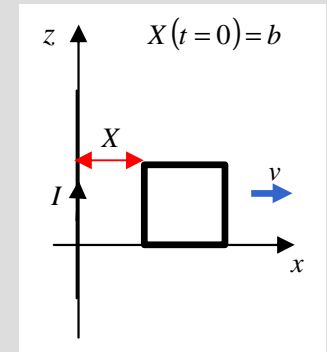
$$d\vec{s} = dx dz \hat{u}_y \quad \longrightarrow \quad \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx dz$$

$$\Phi = \int_0^a \int_X^{X+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx dz = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{X+a}{X}\right) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b+vt}\right)$$

Lei de Faraday – exemplo

Uma espira quadrada de lado a está colocada no mesmo plano de um fio infinito que é percorrido por uma eléctrica estacionária I . Sabendo que a espira, inicialmente a uma distância b do fio infinito, se afasta deste com uma velocidade v , determine:

- $\Phi(t)$;
- V ;
- o sentido de circulação da corrente induzida na espira.



b)

$$V = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 I a}{2p} \frac{d}{dt} \ln \left(1 + \frac{a}{b+vt} \right) = - \frac{\mu_0 I a}{2p} \frac{v}{(b+vt)(a+b+vt)}$$

c)

sentido horário

Ondas Electromagnéticas

OpE - MIB 2007/2008

Análise Vectorial (revisão) → 2 aulas

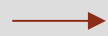
Electrostática e Magnetostática → 8 aulas

→ **Ondas Electromagnéticas → 6 aulas**

Óptica Geométrica → 3 aulas

Fibras Ópticas → 3 aulas

Lasers → 3 aulas



Equações de Maxwell

formas diferencial e integral

condições fronteira

Equação de onda em meios LHI sem perdas e sem fontes

Campos harmónicos

notação fasorial

(1ª aula)

Ondas electromagnéticas em meios infinitos sem perdas

(2ª aula)

Incidência normal

(3ª aula)

Incidência oblíqua

(4ª aula)

Interferência

(5ª aula)

Difracção

(6ª aula)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{lei da indução electromagnética de Faraday})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = r_v \quad (\text{lei de Gauss})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{lei de Ampère})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

meios LHI \rightarrow

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

meios condutores \rightarrow

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

conservação da carga \rightarrow

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial r_v}{\partial t} = 0$$

importante

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

↓
zero

nem sempre é verdade!!

\Rightarrow **é necessário modificar a equação que traduz a lei de Ampère**

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0 \xrightarrow{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} = 0} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \xrightarrow{\nabla \cdot \vec{D} = \mathbf{r}_v} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{D})}{\partial t}$$

$$\frac{\partial (\nabla \cdot \vec{D})}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \longrightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

lei de Ampère

corrente de
deslocamento

lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

teor. de Stokes

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

lei de Ampère

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

teor. de Stokes

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{int}} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

lei de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{D} = r_v$$

teor. da divergência

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{\text{int}}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

teor. da divergência

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

forma diferencial

forma integral

nota

I_{int} → corrente livre no interior de S

Q_{int} → carga livre no interior de S

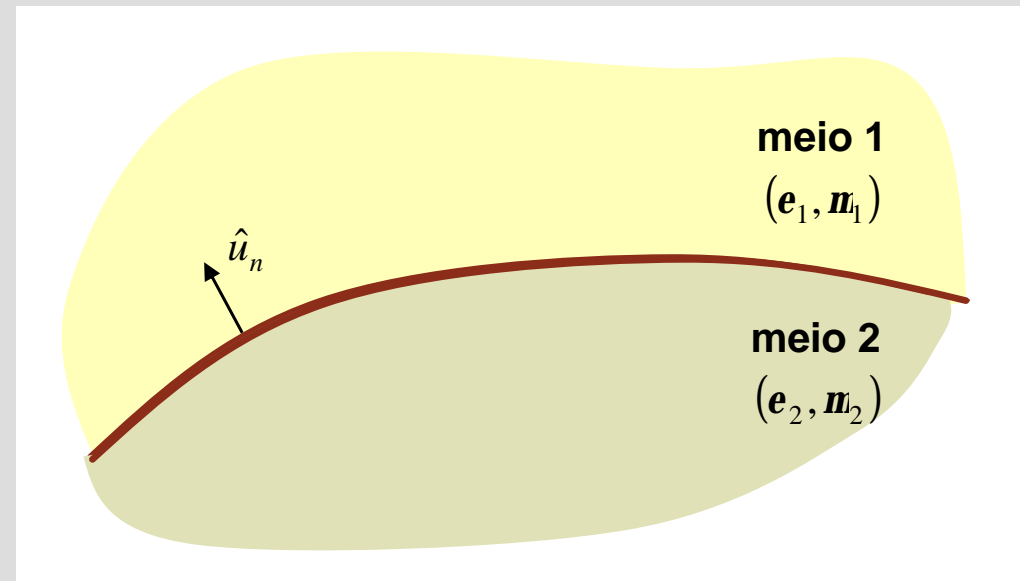
É possível mostrar-se (ver *Cheng*) que as condições fronteira obtidas para os casos estacionários continuam válidas para campos electromagnéticos variáveis no tempo.

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\hat{u}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

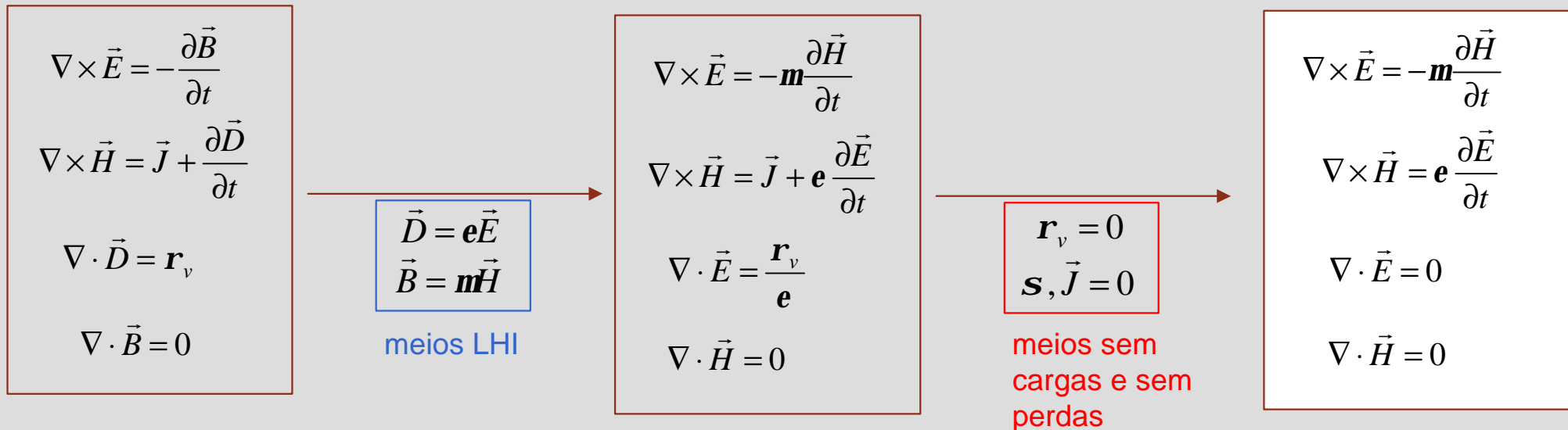
$$\hat{u}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \mathbf{r}_s$$



notas

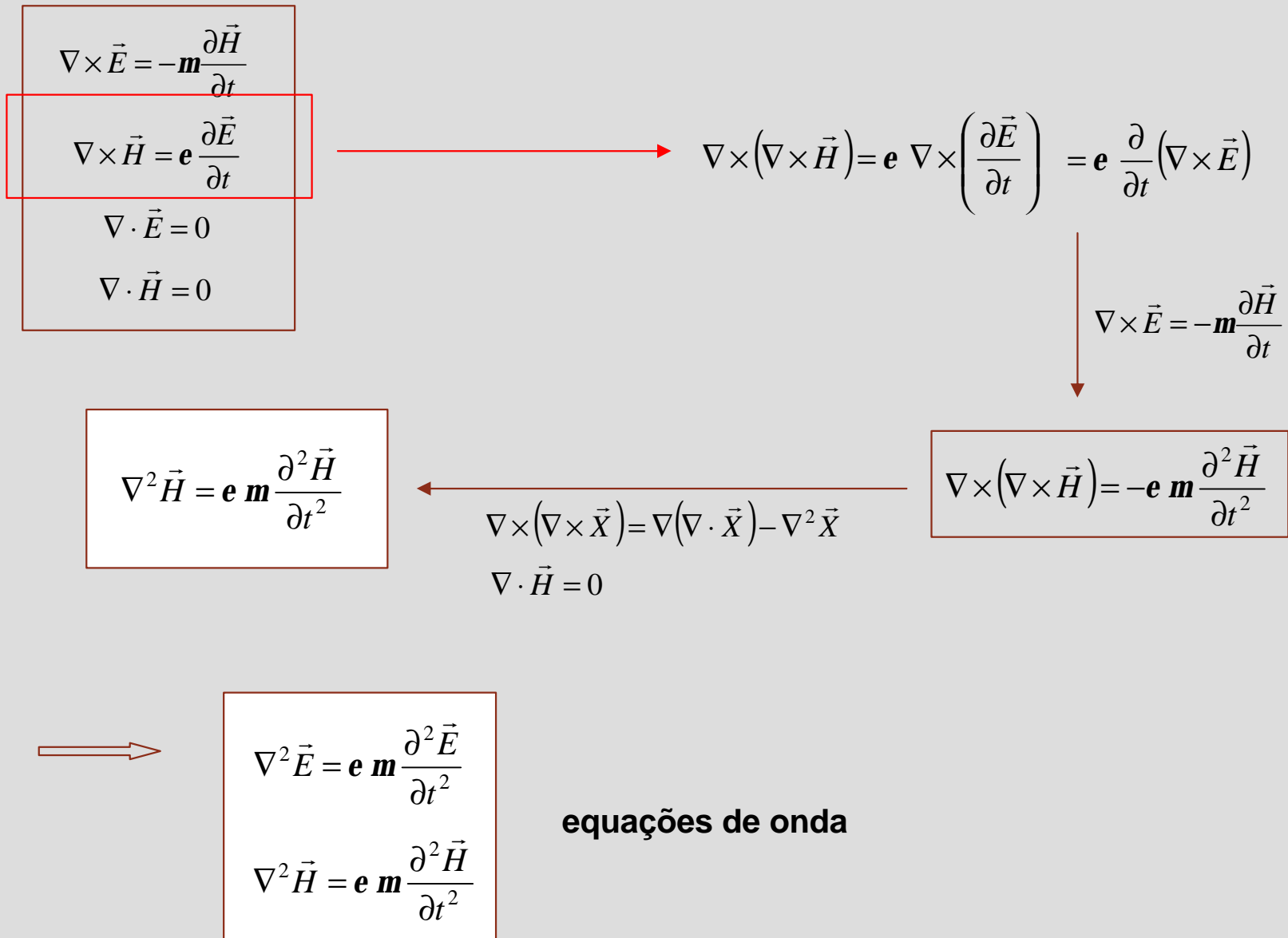
1. campos electromagnéticos são nulos no interior de condutores ideais ($\mathcal{S} = \infty$)
2. \vec{J}_s e \mathbf{r}_s são não nulos apenas quando um dos meios é um condutor ideal

Equações de Maxwell em meios LHI sem cargas e sem perdas



Nota:
em meios condutores $\vec{J} = \mathbf{s} \vec{E}$

Equações de onda em meios LHI sem cargas e sem perdas



Equação de onda – meios sem cargas e sem perdas

em coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \vec{X} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial z^2}$$



$$\nabla^2 \vec{E} = \mathbf{e m} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mathbf{e m} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$



$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mathbf{e m} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \mathbf{e m} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mathbf{e m} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mathbf{e m} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Considere-se a **equação de onda** escalar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

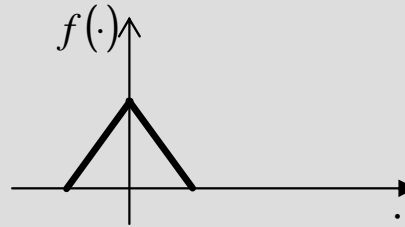
Esta equação é satisfeita por qualquer função escalar $u(x,t)$ do tipo

$$u(x,t) = f(x \pm ct)$$

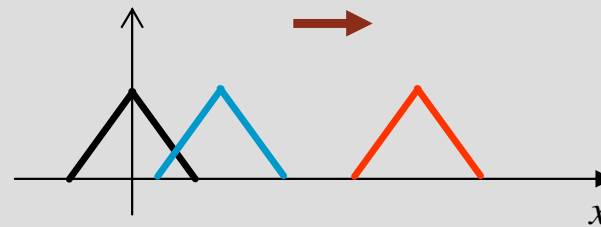
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Exemplo

Seja

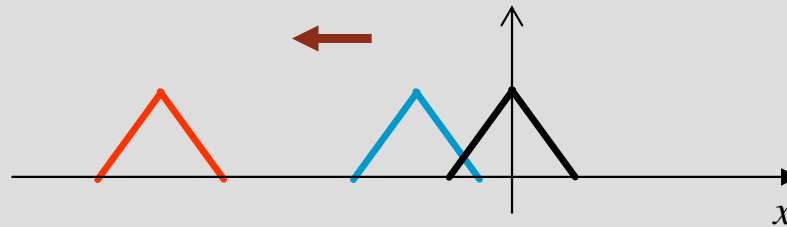


- se $u(x,t)=f(x-ct)$



$u(x,t=0)$
 $u(x,t_1)$ — blue line
 $u(x,t_2)$ — red line

- se $u(x,t)=f(x+ct)$



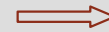
$u(x,t=0)$
 $u(x,t_1)$ — blue line
 $u(x,t_2)$ — red line

Velocidade de propagação

Para determinar a velocidade de propagação da onda é necessário considerar a velocidade com que um dado ponto do perfil f se propaga.

$$u(x,t) = f(x \pm ct)$$

→ sendo $x \pm ct = \text{const.}$, tem-se $dx \pm cdt = 0$



$$v = \left| \frac{dx}{dt} \right| = c$$



Na equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

este factor está associado à velocidade de propagação

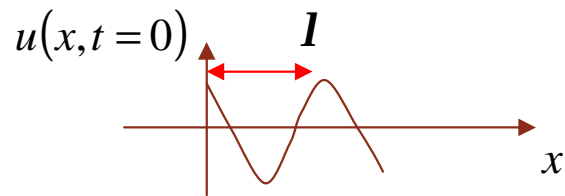
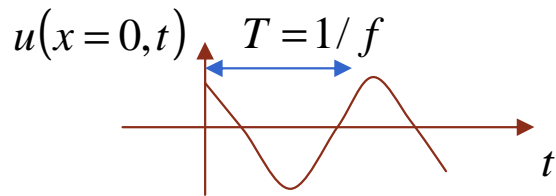
importante

a velocidade de propagação de ondas electromagnéticas é dada por $\frac{1}{v^2} = \epsilon \mu \longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

Soluções harmónicas

$$u(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\omega = 2\pi f \quad k = \frac{2\pi}{l}$$



solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

quando

$$\omega = kv$$

$$2\pi f = \frac{2\pi}{l} v$$

$$v = lf$$

sinais harmónicos nos tempos

de fácil geração

permitem decomposição de sinais genéricos (série de Fourier,...)

- **Sinais sinusoidais são caracterizados por**

- amplitude
- frequência
- fase

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \mathbf{f})$$



Podemos escrever

$$i(t) = \text{Re}\{I_0 e^{j(\omega t + \mathbf{f})}\} = \text{Re}\{I e^{j\omega t}\}$$

$I = I_0 e^{j\mathbf{f}}$

fasor

importante

$$e^{jq} = \cos(q) + j \sin(q)$$

Exemplos

Determine os fasores associados aos sinais sinusoidais seguintes

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \mathbf{f}) = \operatorname{Re}\{I_0 e^{j(\omega t + \mathbf{f})}\}$$

$$\text{fasor} \rightarrow I = I_0 e^{j\mathbf{f}}$$

$$\text{a) } i(t) = 10 \cos\left(10t + \frac{\mathbf{p}}{2}\right)$$

$$\text{b) } v(t) = 15 \sin(4t)$$

$$\text{c) } g(t) = 10 \cos\left(20t + \frac{\mathbf{p}}{4}\right) + 20 \sin\left(20t + \frac{\mathbf{p}}{2}\right)$$

$$\text{a) } i(t) = 10 \cos\left(10t + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \longrightarrow I = 10 e^{j\frac{\mathbf{p}}{2}} = 10 j$$

$$\text{b) } v(t) = 15 \sin(4t) = 15 \cos\left(4t - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \longrightarrow V = 15 e^{-j\frac{\mathbf{p}}{2}} = -15 j$$

$$\sin(\mathbf{a}) = \cos\left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{p}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } g(t) &= 10 \cos\left(20t + \frac{\mathbf{p}}{4}\right) + 20 \sin\left(20t + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \\ &= 10 \cos\left(20t + \frac{\mathbf{p}}{4}\right) + 20 \cos\left(20t + \frac{\mathbf{p}}{2} - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \longrightarrow G = 10 e^{j\frac{\mathbf{p}}{4}} + 20 = 20 + 5\sqrt{2} + j5\sqrt{2} = 27.97 e^{j14.6^\circ} \end{aligned}$$

Exemplos

Determine os sinais associados aos fasores seguintes, sabendo que $\omega = 20 \text{ rad/s}$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \mathbf{f}) = \text{Re}\{I_0 e^{j(\omega t + \mathbf{f})}\}$$

$$\text{fasor} \rightarrow I = I_0 e^{j\mathbf{f}}$$

a) $E = 5 \text{ V/m}$

b) $F = 5j$

c) $G = 4 + j3$

d) $E(x, y) = 4 \sin(x) e^{jy} \text{ V/m}$

a) $E = 5 \text{ V/m} \longrightarrow e(t) = 5 \cos(20t) \text{ V/m}$

b) $F = 5j = 5e^{j\frac{\pi}{2}} \longrightarrow f(t) = 5 \cos\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $G = 4 + j3 = 5e^{j36.9^\circ} \longrightarrow g(t) = 5 \cos(20t + 36.9^\circ)$

d) $E(x, y) = 4 \sin(x) e^{jy} \text{ V/m} \longrightarrow e(x, y, t) = \text{Re}\{4 \sin(x) e^{jy} e^{j20t}\} = \text{Re}\{4 \sin(x) e^{j(20t+y)}\}$
 $= 4 \sin(x) \cos(20t + y) \text{ V/m}$

- **Linearidade**

$$av_1(t) + bv_2(t) \rightarrow aV_1 + bV_2$$

- **Derivação**

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow j\omega X$$

$$x(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow X = I_0 e^{j\phi}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -I_0 \omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$= I_0 \omega \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow X = I_0 \omega e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega I_0 e^{j\phi}$$

- **Integração**

$$\int x(t) dt \rightarrow \frac{X}{j\omega}$$

Equações de Maxwell para meios LHI sem cargas e sem perdas – notação fasorial

Lei de Faraday →

$$\nabla \times \vec{E} = -\mathbf{m} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Lei de Ampère →

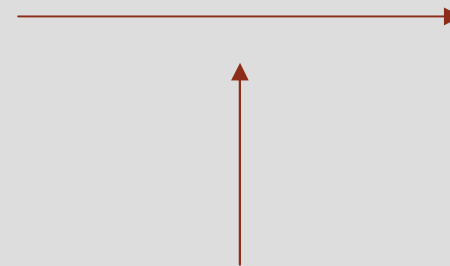
$$\nabla \times \vec{H} = \mathbf{e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Lei de Gauss →

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

meios LHI (ϵ , μ)
sem cargas e sem
perdas



notação fasorial

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mathbf{m} \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \mathbf{e} \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

1. Considere uma onda electromagnética de frequência 1 GHz a propagar-se no vazio. Determine o seu comprimento de onda.

2. O campo eléctrico de uma onda electromagnética é caracterizado por

$$\vec{E}(z,t) = 10 \cos(2\mathbf{p} \times 10^7 t + 0.2\mathbf{p} z) \hat{u}_y \text{ (V/m)}$$

Determine o seu comprimento de onda e a sua velocidade de propagação.

Em que sentido se propaga a onda?

3. O campo eléctrico de uma onda que se propaga no vazio é dado por

$$\vec{E}(z, t) = 10 \cos(10^9 \pi t - kz) \hat{u}_x \text{ (V/m)}$$

Determine

- o valor da constante k ;
 - o campo magnético desta onda.
4. O campo eléctrico de uma onda que se propaga no vazio é dado por

$$\vec{E}(z, t) = 2 \sin(3 \times 10^8 t + z) \hat{u}_x - 3 \cos(3 \times 10^8 t + z) \hat{u}_y \text{ (V/m)}$$

Determine o campo magnético desta onda.

Equações de Maxwell

Equação de onda em meios LHI sem perdas e sem fontes

Campos harmónicos

(1ª aula)

Ondas electromagnéticas em meios infinitos sem perdas

Ondas electromagnéticas transversais numa direcção arbitrária

Polarização de ondas planas

Dispersão

(2ª aula)

Potência e vector de Poynting

Incidência normal

(3ª aula)

Incidência oblíqua

(4ª aula)

Interferência

(5ª aula)

Difracção

(6ª aula)

sinal instantâneo

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \mathbf{f})$$

fasor

$$I = I_0 e^{j\mathbf{f}}$$



Algumas propriedades

linearidade: $av_1(t) + bv_2(t) \rightarrow aV_1 + bV_2$

derivação: $\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow j\omega X$

$$x(t) = I_0 \cos(\omega t + \mathbf{f}) \longrightarrow X = I_0 e^{j\mathbf{f}}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -I_0 \omega \sin(\omega t + \mathbf{f})$$

$$= I_0 \omega \cos\left(\omega t + \mathbf{f} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \longrightarrow X = I_0 \omega e^{j\left(\mathbf{f} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right)} = j\omega I_0 e^{j\mathbf{f}}$$

integração: $\int x(t) dt \rightarrow \frac{X}{j\omega}$

Equações de Maxwell para meios LHI sem cargas e sem perdas – notação fasorial

Lei de Faraday →

$$\nabla \times \vec{E} = -\mathbf{m} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Lei de Ampère →

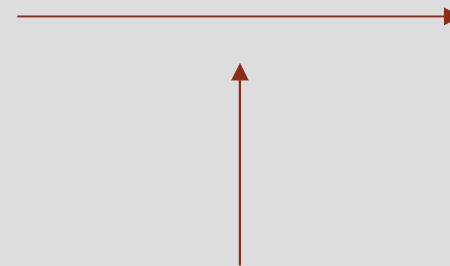
$$\nabla \times \vec{H} = \mathbf{e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Lei de Gauss →

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

meios LHI (ϵ , μ)
sem cargas e sem
perdas



notação fasorial

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mathbf{m} \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \mathbf{e} \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

em notação fasorial $\frac{\partial \vec{X}(\vec{r}, t)}{\partial t} \rightarrow j\omega \vec{X}(\vec{r}) \longrightarrow \frac{\partial^2 \vec{X}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \rightarrow (j\omega)^2 \vec{X}(\vec{r}) = -\omega^2 \vec{X}(\vec{r})$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mathbf{e m} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mathbf{e m} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

equações de onda em meios LHI
sem perdas e sem fontes

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mathbf{e m} \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mathbf{e m} \vec{H} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

equações de Helmholtz

nota

soluções harmónicas $\rightarrow \omega = kv = k \frac{1}{\sqrt{\mathbf{me}}}$

$$k = \omega \sqrt{\mathbf{me}}$$

número de onda

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{lei de Gauss})$$

seja $\vec{E} = \vec{E}(z) = E_x(z)\hat{u}_x + E_y(z)\hat{u}_y + E_z(z)\hat{u}_z$

$$\frac{\partial E_x(z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(z)}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_z(z) = \text{const.} \quad \rightarrow \quad E_z(z) = 0$$

por exemplo, seja $\vec{E} = E_x(z)\hat{u}_x$

$$\vec{E} \perp \hat{u}_z$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = E_x(z)\hat{u}_x$$

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0$$

solução geral

$$r^2 + k^2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm jk$$

$$\vec{E} = (E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz})\hat{u}_x$$

Ondas electromagnéticas planas – velocidade de fase

$$\vec{E} = (E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}) \hat{u}_x$$



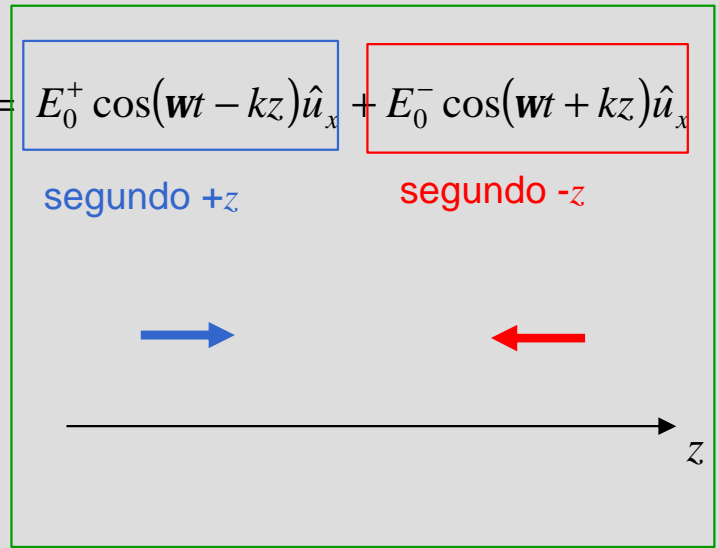
onda plana uniforme que se propaga segundo z

$$i(t) = \text{Re}\{I e^{j\omega t}\}$$

$$\vec{E}(z,t) = E_0^+ \cos(\omega t - kz) \hat{u}_x + E_0^- \cos(\omega t + kz) \hat{u}_x$$

segundo $+z$

segundo $-z$



fase e amplitude constantes nos planos $z = \text{const.}$

nota

ondas planas → fase é constante em planos perpendiculares à direcção de propagação

ondas planas uniformes → amplitude é constante nos planos de fase constante

$$E_x = E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}$$

$$\vec{E} = E(z) \hat{u}_x \quad \longrightarrow \quad \vec{H} = ?$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega \mu} \nabla \times \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \epsilon \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega \mu} \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega \mu} \left[+ \frac{\partial}{\partial z} (E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}) \right] \hat{u}_y = \left(\frac{k}{\omega \mu} E_0^+ e^{-jkz} - \frac{k}{\omega \mu} E_0^- e^{jkz} \right) \hat{u}_y$$

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$h = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\vec{H} = \left(\frac{1}{h} E_0^+ e^{-jkz} - \frac{1}{h} E_0^- e^{jkz} \right) \hat{u}_y$$

$\longrightarrow z$

$$\vec{E} = (E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}) \hat{u}_x$$
$$\vec{H} = \left(\frac{1}{h} E_0^+ e^{-jkz} - \frac{1}{h} E_0^- e^{jkz} \right) \hat{u}_y$$



$$h = \sqrt{\frac{m}{e}} \Omega \quad \text{é a impedância intrínseca do meio}$$

no vazio

$$e = e_0 \cong \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

$$m = m_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$



$$h = h_0 = \sqrt{\frac{m_0}{e_0}} \cong 120\pi \Omega \cong 377 \Omega$$

Ondas electromagnéticas transversais

direcção de propagação: z

$$\vec{E} = (E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}) \hat{u}_x$$

$$\vec{H} = \left(\frac{1}{h} E_0^+ e^{-jkz} - \frac{1}{h} E_0^- e^{jkz} \right) \hat{u}_y$$

⇒ \vec{E} e \vec{H} são perpendiculares entre si e ambos são perpendiculares à direcção de propagação



ondas electromagnéticas transversais



ondas TEM

Ondas TEM – propagação numa direcção arbitrária

seja $\vec{E} = E_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \hat{p}_e$ ← **versor que indica direcção do vector campo eléctrico**

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

k_x, k_y e $k_z \rightarrow$ componentes de um vector com valor absoluto $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

$$\vec{k} = k_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y + k_z \hat{u}_z = k \hat{a}_n$$

vector segundo direcção de propagação

\hat{a}_n indica direcção de propagação

$$\vec{E} = E_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{p}_e$$

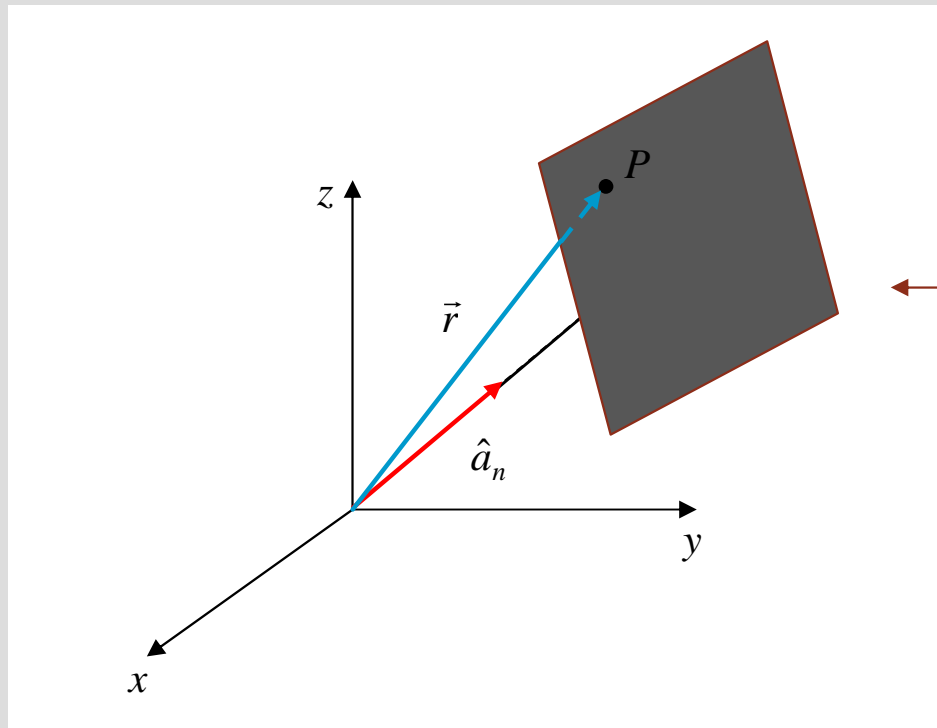
$$\vec{r} = x \hat{u}_x + y \hat{u}_y + z \hat{u}_z$$

Ondas TEM – planos de fase constante

$$\vec{E} = E_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{p}_e$$

planos de fase constante: $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.}$ $\xrightarrow{\vec{k} = k\hat{a}_n}$ $\hat{a}_n \cdot \vec{r} = \text{const.}$ \rightarrow equação de planos perpendiculares a \hat{a}_n

↑
projecção de \vec{r} na direcção de \hat{a}_n



plano de fase constante e amplitude uniforme

Ondas TEM – direcção do campo eléctrico

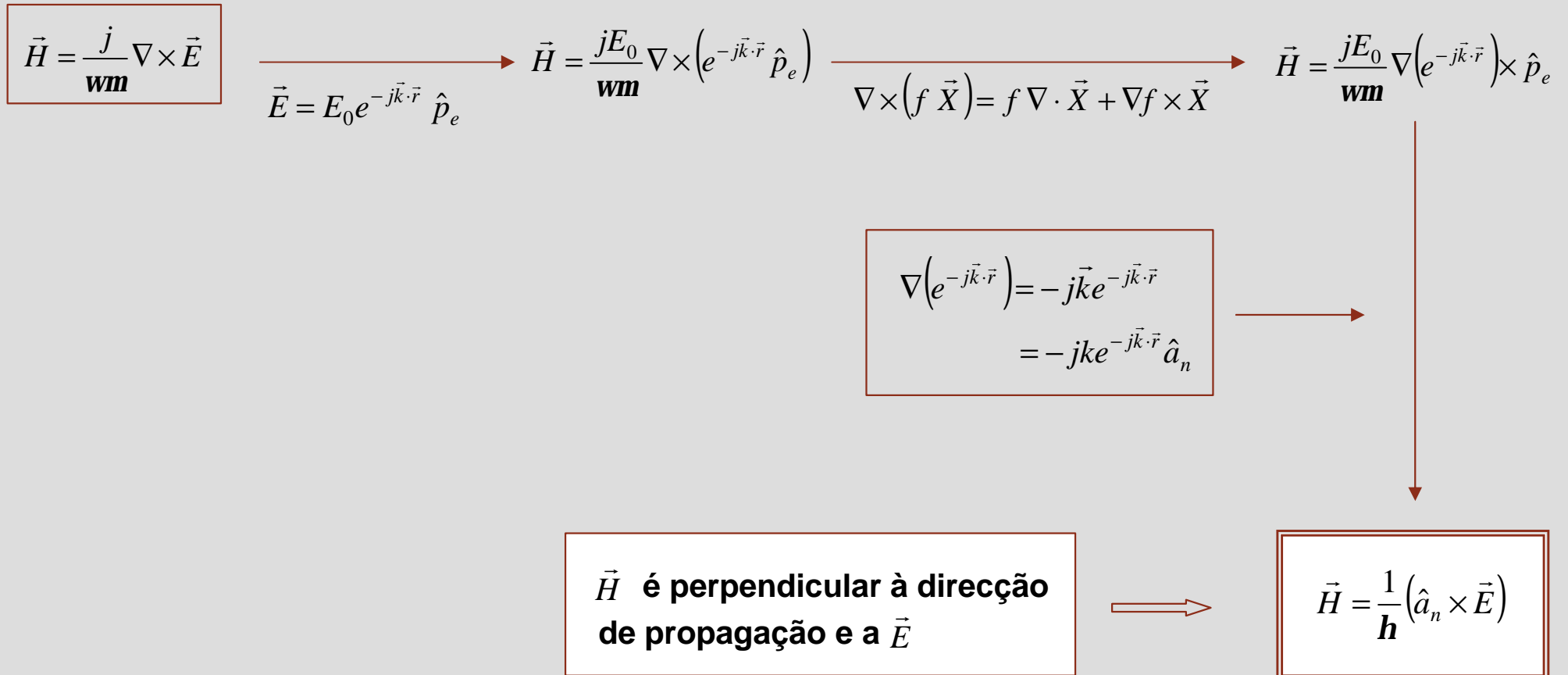
$$\vec{E} = E_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{p}_e \xrightarrow{\nabla \cdot \vec{E} = 0} E_0 \nabla \cdot (e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{p}_e) = 0 \xrightarrow{\nabla \cdot (f \vec{X}) = f \nabla \cdot \vec{X} + \vec{X} \cdot \nabla f} E_0 \nabla (e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) \cdot \hat{p}_e = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla (e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{u}_z \right) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= -j(k_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y + k_z \hat{u}_z) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= -j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned}$$

\vec{E} é perpendicular à direcção de propagação!

$$\hat{a}_n \cdot \hat{p}_e = 0 \quad \leftarrow \quad -jkE_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{a}_n \cdot \hat{p}_e = 0$$

Ondas TEM – campo magnético



importante:

$$\vec{H} = \frac{1}{h} (\hat{a}_n \times \vec{E})$$

$$\vec{E} = -h (\hat{a}_n \times \vec{H})$$

direcção de \vec{E} \rightarrow indica a **POLARIZAÇÃO** da onda

se $\vec{E} = E_0 e^{-jkz} \hat{u}_x \Rightarrow$ onda polarizada **LINEARMENTE** segundo \hat{u}_x
 $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{u}_x \rightarrow$ direcção de polarização fixa

CASO GERAL

para ondas TEM que se propagam segundo $+z \Rightarrow \vec{E} \perp \hat{z} \Rightarrow \vec{E} = E_x \hat{u}_x + E_y \hat{u}_y$

$\rightarrow \vec{E} = E_{x0} e^{-jkz} \hat{u}_x + E_{y0} e^{-jkz} \hat{u}_y$ onde E_{x0}, E_{y0} são complexos \rightarrow

$$E_{x0} = A_1 e^{jf_1}$$

$$E_{y0} = A_2 e^{jf_2}$$

$$\vec{E} = A_1 e^{j(f_1 - kz)} \hat{u}_x + A_2 e^{j(f_2 - kz)} \hat{u}_y$$

Polarização de ondas planas – polarização linear

$$\vec{E} = A_1 e^{j(\mathbf{f}_1 - kz)} \hat{u}_x + A_2 e^{j(\mathbf{f}_2 - kz)} \hat{u}_y \xrightarrow{v(t) = \text{Re}\{V e^{j\omega t}\}} \boxed{\vec{E}(z, t) = A_1 \cos(\omega t - kz + \mathbf{f}_1) \hat{u}_x + A_2 \cos(\omega t - kz + \mathbf{f}_2) \hat{u}_y}$$

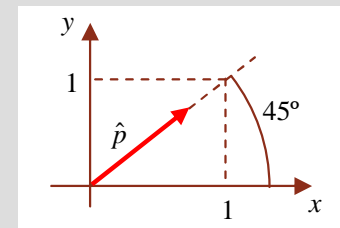
casos particulares

1. $A_2 = 0 \longrightarrow \vec{E}(z, t) = A_1 \cos(\omega t - kz + \mathbf{f}_1) \hat{u}_x \longrightarrow$ polarização segundo \hat{u}_x

2. $A_1 = 0 \longrightarrow \vec{E}(z, t) = A_2 \cos(\omega t - kz + \mathbf{f}_2) \hat{u}_y \longrightarrow$ polarização segundo \hat{u}_y

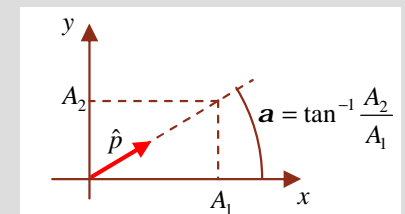
3. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{f} \longrightarrow \vec{E}(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \mathbf{f})(\hat{u}_x + \hat{u}_y) = A_0 \cos(\omega t - kz + \mathbf{f}) \hat{p} \longrightarrow$ segundo \hat{p}
 $A_1 = A_2 = A$

onde $A_0 = \sqrt{2}A$ e $\hat{p} = \frac{\hat{u}_x + \hat{u}_y}{\sqrt{2}}$



4. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{f} \longrightarrow \vec{E}(z, t) = \cos(\omega t - kz + \mathbf{f})(A_1 \hat{u}_x + A_2 \hat{u}_y) = A_0 \cos(\omega t - kz + \mathbf{f}) \hat{p} \longrightarrow$ segundo \hat{p}
 $A_1 \neq A_2$

onde $A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ e $\hat{p} = \frac{A_1 \hat{u}_x + A_2 \hat{u}_y}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$



$$\vec{E}(z,t) = A_1 \cos(\omega t - k z + \mathbf{f}_1) \hat{u}_x + A_2 \cos(\omega t - k z + \mathbf{f}_2) \hat{u}_y$$

casos particulares

5. $\mathbf{f}_1 = 0$ \longrightarrow $\vec{E}(z,t) = A \cos(\omega t - k z) \hat{u}_x + A \cos\left(\omega t - k z - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \hat{u}_y$
 $\mathbf{f}_2 = -\frac{\mathbf{p}}{2}$
 $A_1 = A_2 = A$

$$= A \cos(\omega t - k z) \hat{u}_x + A \sin(\omega t - k z) \hat{u}_y$$

$$\downarrow$$

$$\vec{E}(0,t) = A \cos(\omega t) \hat{u}_x + A \sin(\omega t) \hat{u}_y$$

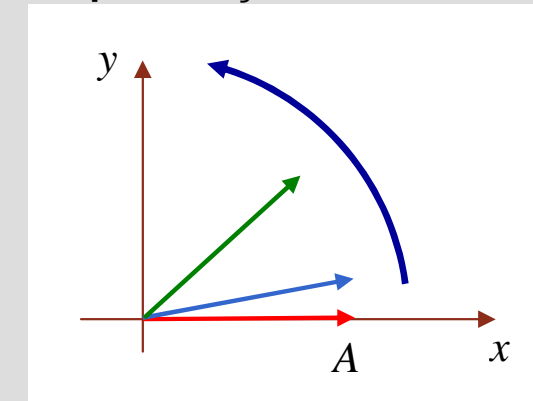
$$\downarrow$$

$$\vec{E}(0,0) = A \hat{u}_x$$

$$\vec{E}(0,t_1) = A \cos(\omega t_1) \hat{u}_x + A \sin(\omega t_1) \hat{u}_y$$

$$\vec{E}(0,t_2) = A \cos(\omega t_2) \hat{u}_x + A \sin(\omega t_2) \hat{u}_y$$

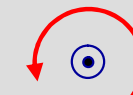
polarização circular



regra da **mão direita** \rightarrow **polegar aponta no sentido de propagação**
dedos indicam direcção de $\vec{E}(0,t)$



polarização circular direita



$$\vec{E}(z,t) = A_1 \cos(\omega t - k z + \mathbf{f}_1) \hat{u}_x + A_2 \cos(\omega t - k z + \mathbf{f}_2) \hat{u}_y$$

casos particulares

6. $\mathbf{f}_1 = 0$ \longrightarrow $\vec{E}(z,t) = A \cos(\omega t - k z) \hat{u}_x + A \cos\left(\omega t - k z + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \hat{u}_y$
 $\mathbf{f}_2 = +\frac{\mathbf{p}}{2}$
 $A_1 = A_2 = A$

$$= A \cos(\omega t - k z) \hat{u}_x - A \sin(\omega t - k z) \hat{u}_y$$

↓

$$\vec{E}(0,t) = A \cos(\omega t) \hat{u}_x - A \sin(\omega t) \hat{u}_y$$

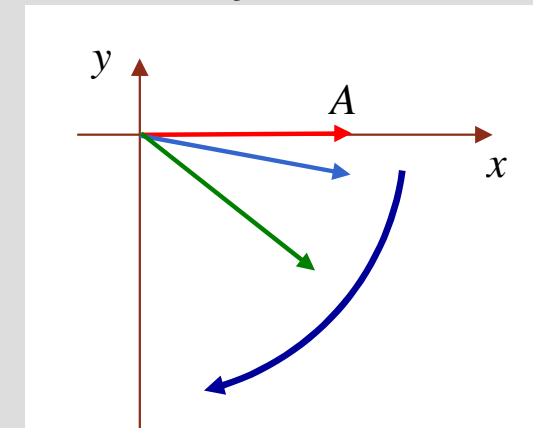
↓

$$\vec{E}(0,0) = A \hat{u}_x$$

$$\vec{E}(0,t_1) = A \cos(\omega t_1) \hat{u}_x - A \sin(\omega t_1) \hat{u}_y$$

$$\vec{E}(0,t_2) = A \cos(\omega t_2) \hat{u}_x - A \sin(\omega t_2) \hat{u}_y$$

polarização circular



regra da mão “esquerda” \rightarrow polegar aponta no sentido de propagação
 dedos indicam direcção de $\vec{E}(0,t)$

\Rightarrow polarização circular esquerda



$$\vec{E}(z,t) = A_1 \cos(\omega t - k z + \mathbf{f}_1) \hat{u}_x + A_2 \cos(\omega t - k z + \mathbf{f}_2) \hat{u}_y$$

casos particulares

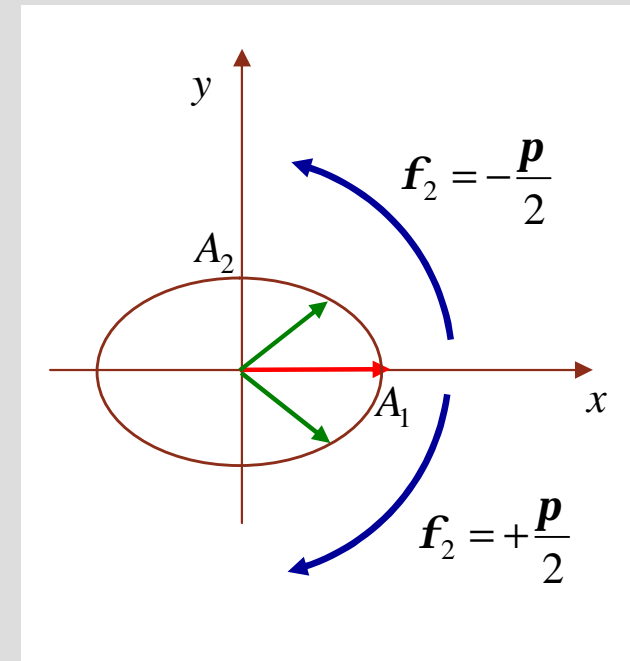
$$7. \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= 0 \\ \mathbf{f}_2 &= \pm \frac{\mathbf{p}}{2} \\ A_1 &\neq A_2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= A_1 \cos(\omega t - k z) \hat{u}_x + A_2 \cos\left(\omega t - k z \pm \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \hat{u}_y \\ &= A_1 \cos(\omega t - k z) \hat{u}_x \mp A_2 \sin(\omega t - k z) \hat{u}_y \end{aligned}$$

$$\vec{E}(0,t) = A_1 \cos(\omega t) \hat{u}_x \mp A_2 \sin(\omega t) \hat{u}_y$$

$$\vec{E}(0,0) = A_1 \hat{u}_x$$

$$\vec{E}(0,t_1) = A_1 \cos(\omega t_1) \hat{u}_x \mp A_2 \sin(\omega t_1) \hat{u}_y$$

polarização elíptica



Polarização de ondas planas – resumo

seja $\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$ (soma de duas ondas linearmente polarizadas em quadratura no espaço)

se ondas em fase \longrightarrow onda resultante tem polarização linear

direcção do versor de polarização depende da relação entre amplitudes das duas ondas

se diferença de fase = 90° \longrightarrow onda resultante tem polarização circular ou elíptica

circular \rightarrow amplitudes iguais

elíptica \rightarrow amplitudes diferentes

se diferença de fase arbitrária \longrightarrow onda resultante tem polarização elíptica

eixos da elipse não coincidem com x e y

Polarização de ondas planas – aplicações

ondas AM → emitidas em polarização linear, com \vec{E} orientado perpendicularmente ao solo
antena de recepção deve ser paralela a \vec{E}

ondas TV → emitidas em polarização linear, com \vec{E} orientado paralelamente ao solo
antena de recepção deve ser paralela a \vec{E}



antenas nos telhados são horizontais

ondas FM → emitidas em polarização circular
antena de recepção deve estar num plano normal à direcção de propagação

Dispersão

$\frac{1}{\sqrt{me}}$ representa a velocidade de propagação da frente de onda de fase constante

seja

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{me}}$$

velocidade de fase

Em determinados meios, a **velocidade de fase varia com a frequência** da onda **(meios dispersivos)**



Em sinais que consistem numa dada banda de frequências, as componentes a diferentes frequências propagam-se a velocidades de fase diferentes



distorção do sinal

DISPERSÃO

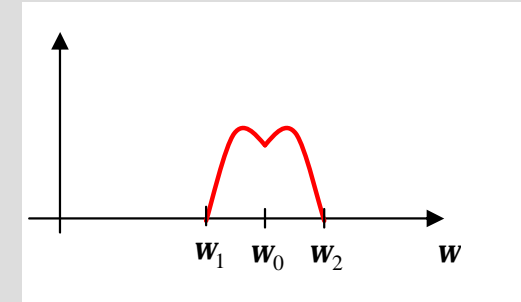
relação de dispersão → equação que relaciona k com w

→ $k = w\sqrt{me}$

Envolvente e portadora

sinal de largura de banda $2\Delta\omega$ centrada numa portadora ω_0 ($\omega_0 \gg \Delta\omega$)

$$\begin{array}{ccc} \omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega & \xrightarrow{k = k(\omega)} & k_1 = k_0 - \Delta k \\ \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega & & k_2 = k_0 + \Delta k \end{array}$$

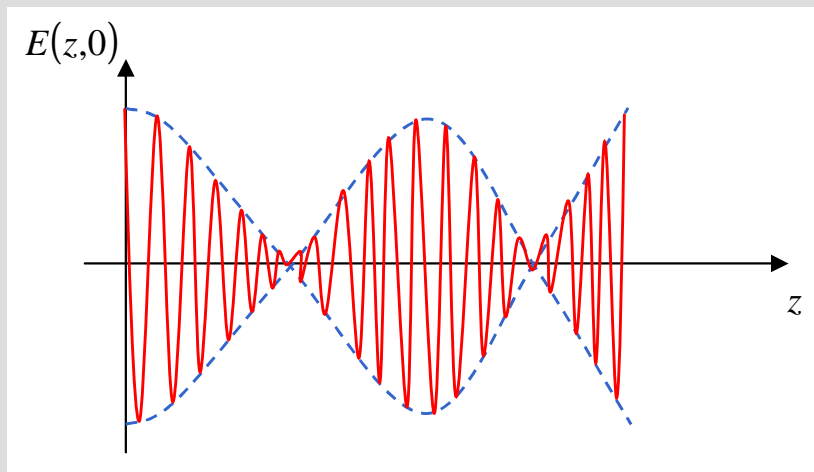


ondas planas correspondentes a ω_1 e ω_2 : $E(z,t) = E_0 \{ \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k)z] + \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_0 - \Delta k)z] \}$

$$= 2E_0 \boxed{\cos(\Delta\omega t - \Delta k z)} \boxed{\cos(\omega_0 t - k_0 z)}$$

envolvente

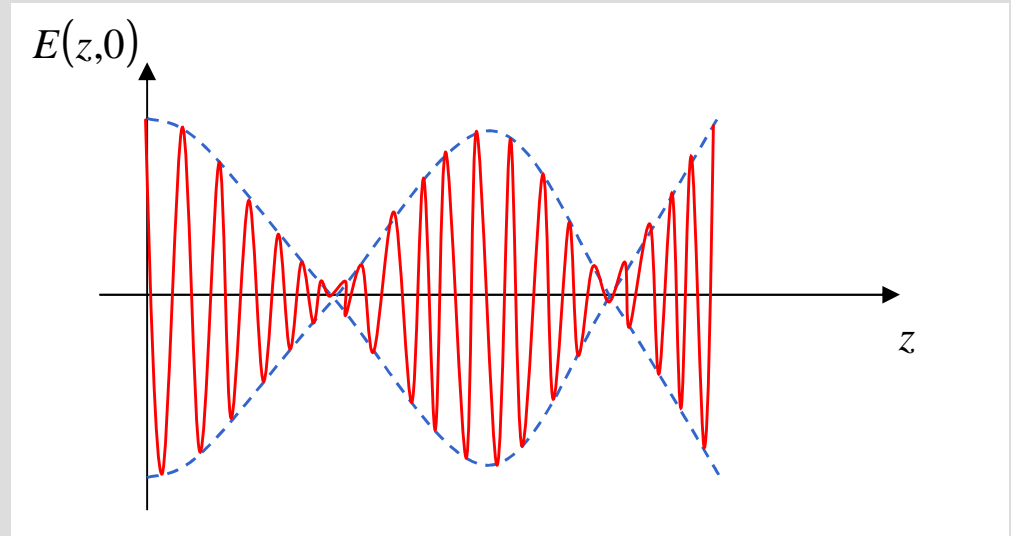
portadora



Velocidade de grupo

$$E(z, t) = 2E_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k z) \cos(\omega_0 t - k_0 z)$$

↓ envolvente ↓ portadora



portadora → propaga-se à velocidade $v_f = \frac{\omega_0}{k_0}$

envolvente → propaga-se à velocidade

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

→
 $\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0}$

$$v_g = \frac{1}{dk/d\omega} \text{ (m/s)}$$

velocidade de grupo

Velocidade de grupo – dispersão normal e anómala

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{v_f} \right) = \frac{v_f - \omega \frac{dv_f}{d\omega}}{v_f^2}$$



$$v_g = \frac{v_f}{1 - \frac{\omega}{v_f} \frac{dv_f}{d\omega}}$$

$$v_g = \frac{1}{dk/d\omega} \quad \leftarrow \text{velocidade de grupo}$$

$$v_f = \frac{k}{b} \quad \leftarrow \text{velocidade de fase}$$

casos particulares

1. $\frac{dv_f}{d\omega} = 0 \quad \longrightarrow \quad v_g = v_f \quad \longleftarrow \quad \text{sem dispersão} \quad (v_f \text{ constante})$
2. $\frac{dv_f}{d\omega} < 0 \quad \longrightarrow \quad v_g < v_f \quad \longleftarrow \quad \text{dispersão normal} \quad (v_f \text{ diminui com } \omega)$
3. $\frac{dv_f}{d\omega} > 0 \quad \longrightarrow \quad v_g > v_f \quad \longleftarrow \quad \text{dispersão anómala} \quad (v_f \text{ aumenta com } \omega)$

1. Considere uma onda electromagnética de frequência 1 GHz a propagar-se no vazio. Determine o seu comprimento de onda.

2. O campo eléctrico de uma onda electromagnética é caracterizado por

$$\vec{E}(z,t) = 10 \cos(2\mathbf{p} \times 10^7 t + 0.2\mathbf{p} z) \hat{u}_y \text{ (V/m)}$$

Determine o seu comprimento de onda e a sua velocidade de propagação.

Em que sentido se propaga a onda?

3. O campo eléctrico de uma onda que se propaga no vazio é dado por

$$\vec{E}(z, t) = 10 \cos(10^9 \pi t - kz) \hat{u}_x \text{ (V/m)}$$

Determine

- o valor da constante k ;
 - o campo magnético desta onda.
4. Uma onda electromagnética de frequência 1 GHz que se propaga num meio com dispersão normal tem uma velocidade de fase de 300 Mm/s. A velocidade de fase varia com o comprimento de onda de acordo com a equação $v_f = a\lambda^{3/4}$, onde a é uma constante. Determine a velocidade de grupo.

Equações de Maxwell

Equação de onda em meios LHI sem perdas e sem fontes

Campos harmónicos

(1ª aula)

Ondas electromagnéticas em meios infinitos sem perdas

(2ª aula)

→ **Potência de uma onda electromagnética**

Incidência

Leis de Snell

Incidência normal

(3ª aula)

Incidência oblíqua

(4ª aula)

Interferência

(5ª aula)

Difracção

(6ª aula)

Energia transportada por uma onda

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \quad (\text{igualdade vectorial})$$

W/m²

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\mathbf{m} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \mathbf{e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \left(-\mathbf{m} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{J} + \mathbf{e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \longrightarrow \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\mathbf{m} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{H}) - \mathbf{e} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} \cdot \vec{A})$$

$$\vec{J} = \mathbf{s} \vec{E}$$

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mathbf{m}}{2} |\vec{H}|^2 + \frac{\mathbf{e}}{2} |\vec{E}|^2 \right) dv - \int_V \mathbf{s} |\vec{E}|^2 dv$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{m}}{2} |\vec{H}|^2 + \frac{\mathbf{e}}{2} |\vec{E}|^2 \right) - \mathbf{s} |\vec{E}|^2$$

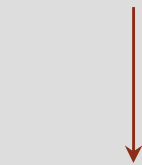
$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dv$$

Nota: expressões instantâneas

Teorema de Poynting

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mathbf{m}}{2} |\vec{H}|^2 + \frac{\mathbf{e}}{2} |\vec{E}|^2 \right) dv - \int_V \mathbf{s} |\vec{E}|^2 dv$$

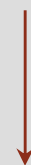
→ **conservação de energia**



potência que
atravessa S



diminuição da energia
armazenada no campo EM
por unidade de tempo



potência dissipada
por condução

Nota: expressões instantâneas

Vector de Poynting

vector de Poynting $\rightarrow \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \text{ (W/m}^2\text{)}$



representa a **densidade de potência instantânea** transportada pela onda electromagnética

$\rightarrow \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_m + w_e) dv - \int_V p_s dv$

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mathbf{m}}{2} |\vec{H}|^2 + \frac{\mathbf{e}}{2} |\vec{E}|^2 \right) dv - \int_V \mathbf{s} |\vec{E}|^2 dv$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{m} |\vec{H}|^2$$

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{e} |\vec{E}|^2$$

$$p_s = \mathbf{s} |\vec{E}|^2$$

Nota: expressões instantâneas

Vector de Poynting – campos harmónicos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\}$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}\}$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\} \times \text{Re}\{\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}\}$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})e^{j2\omega t}\}$$

valor instantâneo

fasores

$$\text{Re}\{\vec{X}\} = \frac{1}{2}\{\vec{X} + \vec{X}^*\}$$

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\vec{A}\} \times \text{Re}\{\vec{B}\} &= \frac{1}{2}\{\vec{A} + \vec{A}^*\} \times \frac{1}{2}\{\vec{B} + \vec{B}^*\} \\ &= \frac{1}{4}\{\vec{A} \times \vec{B}^* + \vec{A}^* \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A}^* \times \vec{B}^*\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{A} \times \vec{B}^* + \vec{A} \times \vec{B}\} \end{aligned}$$

Vector de Poynting médio

densidade de potência média $\rightarrow \vec{S}_{\text{med}}(\vec{r}) = \frac{1}{T} \int_T \vec{S}(\vec{r}, t) dt$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) e^{j2\omega t} \right\}$$

$$\vec{S}_{\text{med}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right\} \quad (\text{W/m}^2)$$

vector de Poynting médio

Vector de Poynting médio – ondas TEM

ondas TEM →

$$\vec{H} = \frac{1}{h} \hat{a}_n \times \vec{E}$$

$$\vec{E} \perp \vec{H} \perp \hat{a}_n$$

$$\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{h^*} \vec{E} \times (\hat{a}_n \times \vec{E}^*)$$

$$\vec{S}_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{h^*} \{(\vec{E} \cdot \vec{E}^*)\hat{a}_n - \vec{E}^*(\vec{E} \cdot \hat{a}_n)\} = \frac{1}{h^*} |\vec{E}|^2 \hat{a}_n$$



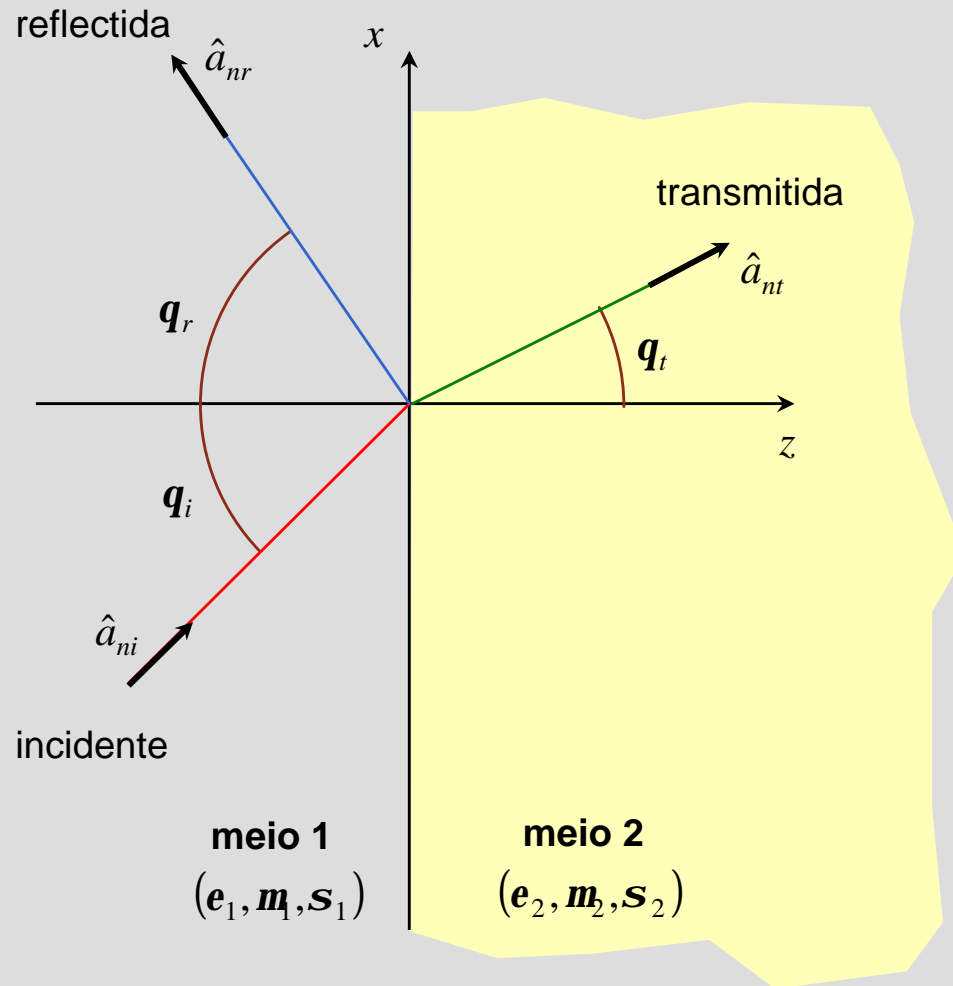
$$\vec{S}_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} = \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 \text{Re}\left\{\frac{1}{h^*}\right\} \hat{a}_n$$

vector de Poynting médio aponta na direção e sentido de propagação da onda

Nota

meios sem perdas → h é real → $\vec{S}_{\text{med}} = \frac{1}{2h} |\vec{E}|^2 \hat{a}_n$

Incidência de uma onda TEM numa interface plana



ângulo de incidência $\rightarrow q_i$

plano de incidência \rightarrow plano xz

plano formado pela normal à interface e pela direcção de propagação da onda incidente

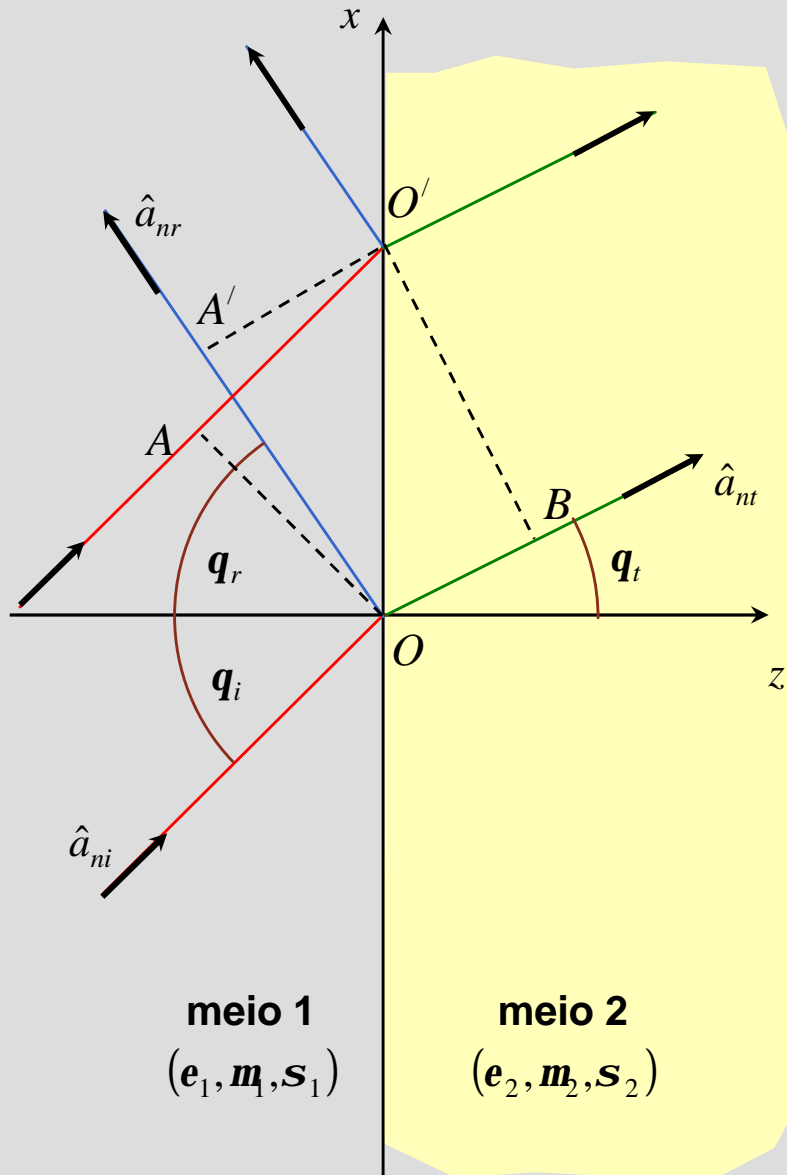
direcções de propagação:

$$\hat{a}_{ni} = \sin q_i \hat{u}_x + \cos q_i \hat{u}_z$$

$$\hat{a}_{nr} = \sin q_r \hat{u}_x - \cos q_r \hat{u}_z$$

$$\hat{a}_{nt} = \sin q_t \hat{u}_x + \cos q_t \hat{u}_z$$

Leis de Snell – lei da reflexão



frente de onda → mesma fase

ondas planas → frentes de onda são planos normais a \hat{a}_n



pontos O e A têm mesma fase

pontos O' e A' têm mesma fase



$$\text{fase} = k \cdot \text{dist.}$$



$$k_1 \overline{AO'} = k_1 \overline{OA'}$$

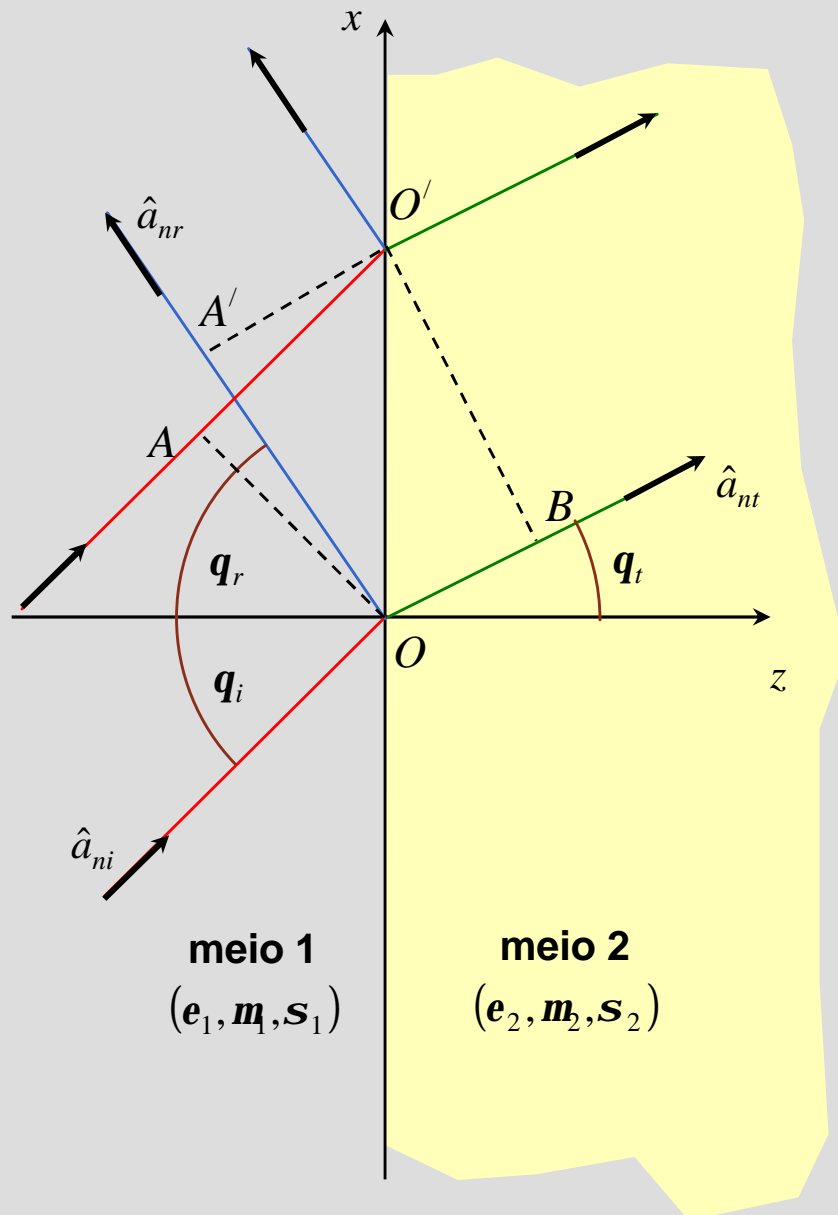


$$\overline{OO'} \sin q_i = \overline{OO'} \sin q_r$$



$$q_i = q_r$$

Leis de Snell – lei da refração



ondas planas \rightarrow frentes de onda são planos normais a \hat{a}_n



pontos O e A têm mesma fase

pontos O' e B têm mesma fase



fase = $k \cdot \text{dist.}$



$$k_1 \overline{AO'} = k_2 \overline{OB}$$



$$k_1 \overline{OO'} \sin q_i = k_2 \overline{OO'} \sin q_t$$

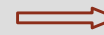


$$\frac{\sin q_t}{\sin q_i} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{v_{f2}}{v_{f1}}$$

$$k = \frac{\omega}{v_f}$$

Índice de refração

Índice de refração → quociente entre velocidades de propagação no vázio e no meio



$n \geq 1$
 n elevado → velocidade baixa

$$n = \frac{c}{v_f}$$

Ex: meio sem perdas $v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

$$n = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

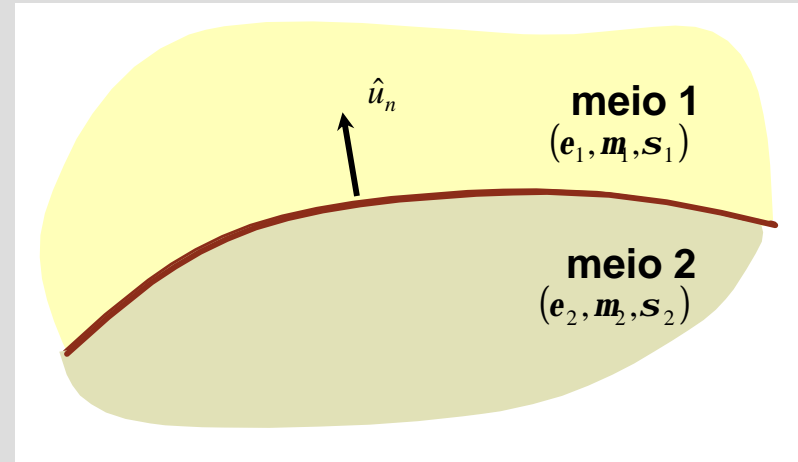
$$\frac{\sin \mathbf{q}_t}{\sin \mathbf{q}_i} = \frac{v_{f2}}{v_{f1}}$$

$$\frac{\sin \mathbf{q}_t}{\sin \mathbf{q}_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

← lei de Snell da refração

Condições fronteira

$\hat{u}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$	→	$E_{1,\text{tan}} = E_{2,\text{tan}}$
$\hat{u}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$	←	densidade superficial de corrente
$\hat{u}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = r_S$	←	densidade superficial de carga
$\hat{u}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$	→	$B_{1,\text{norm}} = B_{2,\text{norm}}$



↓

E_{tan} contínuo
H_{tan} contínuo se $\vec{J}_S = 0$
D_{norm} contínuo se $r_S = 0$
B_{norm} contínuo

Nota
 $\vec{J}_S \neq 0$ e $r_S \neq 0$ apenas em **condutores perfeitos**

Condições fronteira – condutores perfeitos

condutores perfeitos $\rightarrow \mathbf{S} = \infty$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{cond}} &= 0 & \vec{H}_{\text{cond}} &= 0 \\ \vec{D}_{\text{cond}} &= 0 & \vec{B}_{\text{cond}} &= 0 \end{aligned}$$

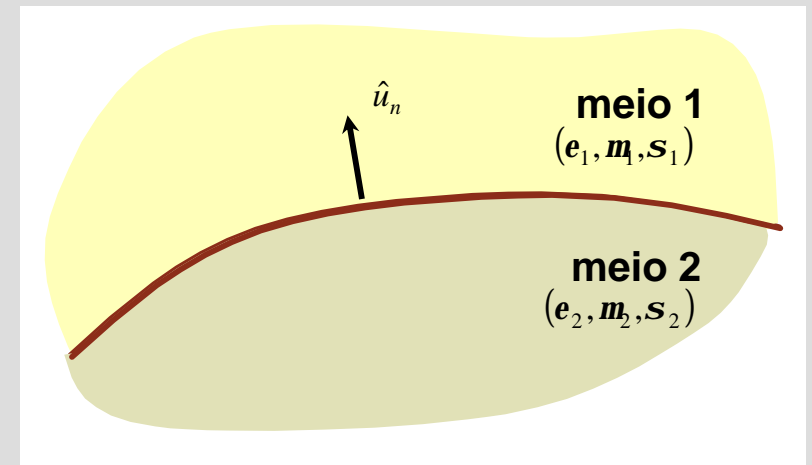
$$\vec{J}_S \neq 0 \text{ e } \mathbf{r}_S \neq 0$$

Exemplo

$$\mathbf{S}_2 = \infty$$

$$\vec{J}_S = \hat{u}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \hat{u}_n \times \vec{H}_1 = H_{1,\text{tan}} \hat{u}_t$$

$$\mathbf{r}_S = \hat{u}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \hat{u}_n \cdot \vec{D}_1 = D_{1,\text{norm}}$$



Incidência normal

incidência normal $\rightarrow q_i = 0 \longrightarrow q_r = q_t = 0$

$$\begin{aligned} q_i &= q_r \\ \frac{\sin q_t}{\sin q_i} &= \frac{n_1}{n_2} \end{aligned}$$

incidente \rightarrow

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_{i0} e^{-jk_1 z} \hat{u}_x \\ \vec{H}_i &= \frac{E_{i0}}{h_1} e^{-jk_1 z} \hat{u}_y \end{aligned}$$

reflectida \rightarrow

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= E_{r0} e^{+jk_1 z} \hat{u}_x \\ \vec{H}_r &= -\frac{E_{r0}}{h_1} e^{+jk_1 z} \hat{u}_y \end{aligned}$$

transmitida \rightarrow

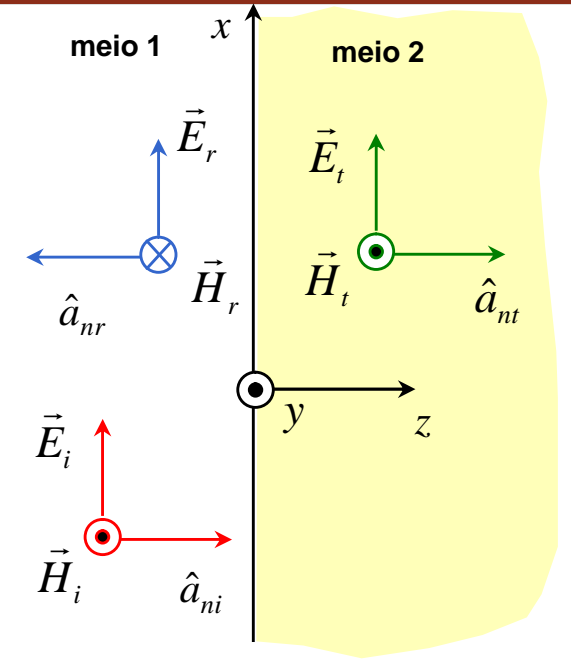
$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= E_{t0} e^{-jk_2 z} \hat{u}_x \\ \vec{H}_t &= \frac{E_{t0}}{h_2} e^{-jk_2 z} \hat{u}_y \end{aligned}$$

meio 2

meio 1

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ &= (E_{i0} e^{-jk_1 z} + E_{r0} e^{+jk_1 z}) \hat{u}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= \vec{H}_i + \vec{H}_r \\ &= \left(\frac{E_{i0}}{h_1} e^{-jk_1 z} - \frac{E_{r0}}{h_1} e^{+jk_1 z} \right) \hat{u}_y \end{aligned}$$



Incidência normal – coeficientes de reflexão e transmissão

condições fronteira →

$$\begin{aligned} E_{\tan} & \text{ contínuo} \\ H_{\tan} & \text{ contínuo (se } \vec{J}_s = 0) \end{aligned}$$



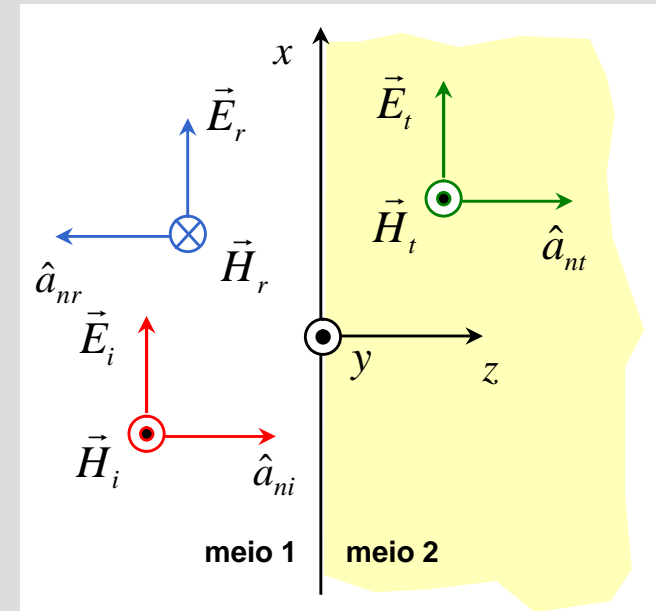
$$\text{em } z=0 \rightarrow \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_2 \\ \vec{H}_1 &= \vec{H}_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} E_{i0} + E_{r0} &= E_{t0} \\ \frac{E_{i0}}{h_1} - \frac{E_{r0}}{h_1} &= \frac{E_{t0}}{h_2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{E_{r0}}{E_{i0}} &= \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} \\ \frac{E_{t0}}{E_{i0}} &= \frac{2h_2}{h_2 + h_1} \end{aligned}$$



meio 1

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= (E_{i0}e^{-jk_1z} + E_{r0}e^{+jk_1z})\hat{u}_x \\ \vec{H}_1 &= \left(\frac{E_{i0}}{h_1}e^{-jk_1z} - \frac{E_{r0}}{h_1}e^{+jk_1z} \right)\hat{u}_y \end{aligned}$$

meio 2

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= E_{t0}e^{-jk_2z}\hat{u}_x \\ \vec{H}_2 &= \frac{E_{t0}}{h_2}e^{-jk_2z}\hat{u}_y \end{aligned}$$

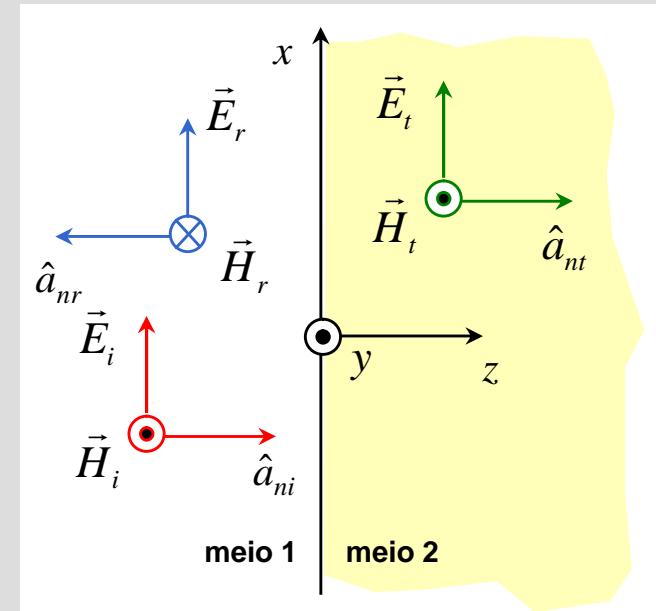
Incidência normal – coeficientes de reflexão e transmissão

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} \quad \rightarrow \quad \Gamma = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}$$

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2h_2}{h_2 + h_1} \quad \rightarrow \quad t = \frac{2h_2}{h_2 + h_1}$$

coeficiente de reflexão

coeficiente de transmissão



Notas

1. $1 + \Gamma = t$

2. $|\Gamma| \leq 1$

3. $t \geq 0$

4. $\vec{E}_1 = E_{i0} (e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{+jk_1 z}) \hat{u}_x$

$$\vec{E}_2 = t E_{i0} e^{-jk_2 z} \hat{u}_x$$

meio 1

$$\vec{E}_1 = (E_{i0} e^{-jk_1 z} + E_{r0} e^{+jk_1 z}) \hat{u}_x$$

$$\vec{H}_1 = \left(\frac{E_{i0}}{h_1} e^{-jk_1 z} - \frac{E_{r0}}{h_1} e^{+jk_1 z} \right) \hat{u}_y$$

meio 2

$$\vec{E}_2 = E_{t0} e^{-jk_2 z} \hat{u}_x$$

$$\vec{H}_2 = \frac{E_{t0}}{h_2} e^{-jk_2 z} \hat{u}_y$$

Incidência normal – onda estacionária

$$\vec{E}_1 = E_{i0} \left(e^{-jk_1z} + \Gamma e^{+jk_1z} \right) \hat{u}_x \xrightarrow{1+\Gamma=t} \vec{E}_1 = E_{i0} \left[(t - \Gamma) e^{-jk_1z} + \Gamma e^{+jk_1z} \right] \hat{u}_x$$



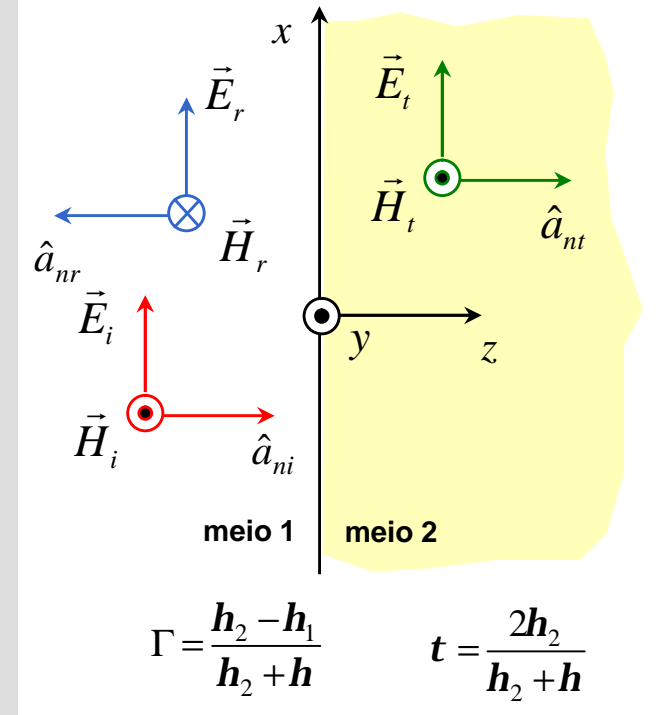
$$\vec{E}_1 = t E_{i0} e^{-jk_1z} \hat{u}_x + \Gamma E_{i0} \left(e^{+jk_1z} - e^{-jk_1z} \right) \hat{u}_x$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\vec{E}_1 = t E_{i0} e^{-jkz} \hat{u}_x + 2j\Gamma E_{i0} \sin(k_1z) \hat{u}_x$$

onda em propagação

onda estacionária



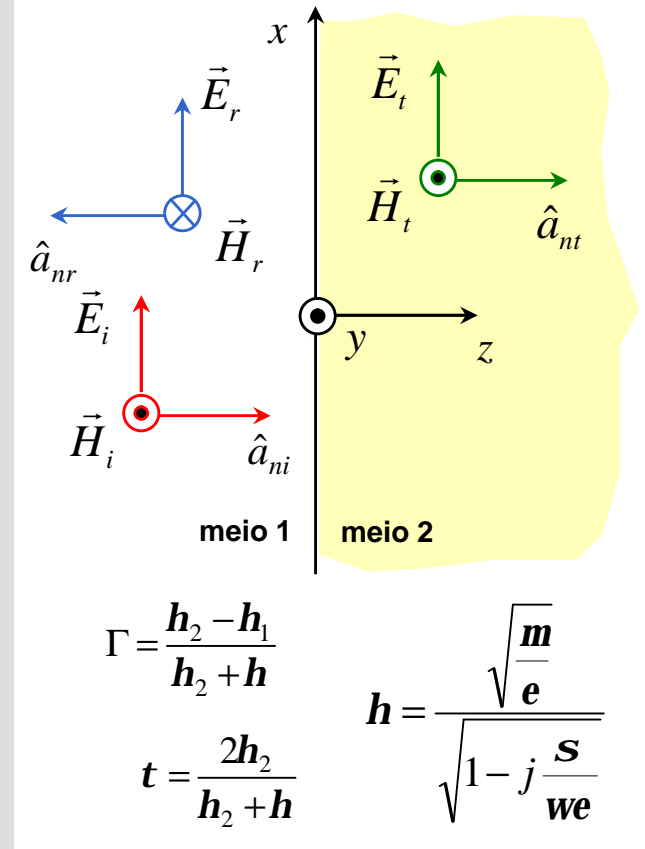
Incidência normal – incidência num condutor ideal

meio 1 sem perdas ($s_1 = 0$) \longrightarrow $\vec{E}_1 = (E_{i0}e^{-jk_1z} + \Gamma E_{i0}e^{+jk_1z})\hat{u}_x$

meio 2 condutor ideal ($s_2 = \infty$) \longrightarrow $E_{t0} = 0 \longrightarrow$ $t = 0$
 $\Gamma = -1$

$\vec{E}_2 = 0$
 $\vec{E}_1 = E_{i0}(e^{-jk_1z} - e^{+jk_1z})\hat{u}_x$
 $= -2jE_{i0}\sin(k_1z)\hat{u}_x$

não há onda móvel, apenas
onda estacionária \longrightarrow



- Uma onda electromagnética plana, propagando-se no ar, é caracterizada por

$$\vec{E}_1 = 60e^{-j20z}(\hat{u}_x + j\hat{u}_y) \quad (\text{mV/m})$$

Determine

- o fasor do campo magnético;
 - o valor médio do vector de Poynting.
-
- Uma onda electromagnética plana de 200 MHz tem polarização linear segundo x e uma intensidade do campo eléctrico de 10 V/m. A onda propaga-se no ar e incide perpendicularmente num meio dieléctrico de constante dieléctrica 4 e que ocupa a região definida por $z > 0$.
 - Determine o fasor do campo eléctrico da onda incidente, sabendo que o campo tem um máximo positivo em $z = 0$ quando $t = 0$.
 - Calcule os coeficientes de reflexão e de transmissão.
 - Determine os fasores do campo eléctrico das ondas reflectida, transmitida e do campo total em $z < 0$.
 - Calcule a percentagem da potência incidente que é reflectida pela interface e a que é transmitida para o segundo meio.

Equações de Maxwell

Equação de onda em meios LHI sem perdas e sem fontes

Campos harmónicos

(1ª aula)

Ondas electromagnéticas em meios infinitos sem perdas

(2ª aula)

Incidência normal

(3ª aula)

→ **Incidência oblíqua**

Polarizações perpendicular e paralela

Reflexão interna total

Princípio de funcionamento dos guias de onda

(4ª aula)

Interferência

(5ª aula)

Difracção

(6ª aula)

Incidência oblíqua de uma onda TEM numa interface plana

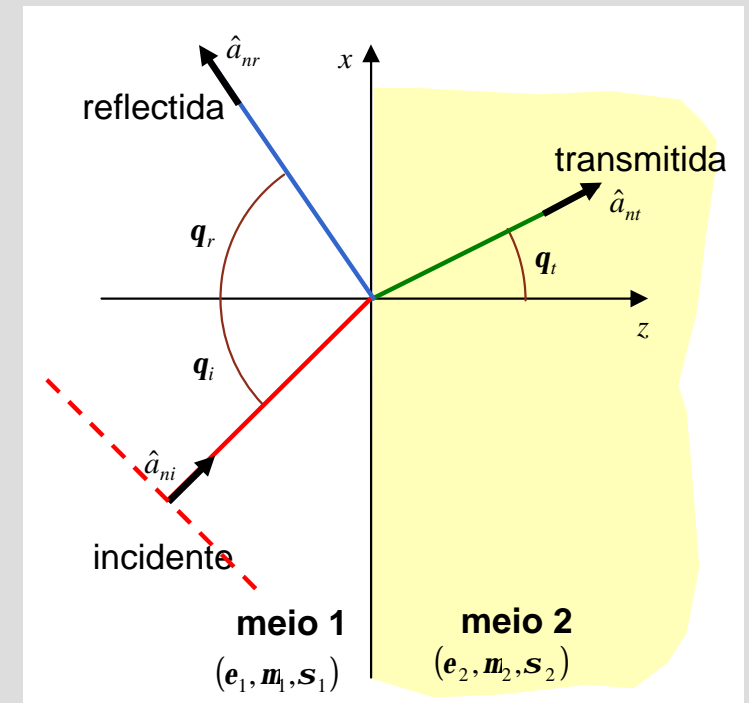
onda TEM $\rightarrow \vec{E} \perp \vec{H} \perp \hat{a}_n \rightarrow \vec{E}_i$ e \vec{H}_i estão no plano $\perp \hat{a}_n$

1. \vec{E}_i **perpendicular** ao plano de incidência

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y \rightarrow \text{polarização perpendicular}$$

2. \vec{E}_i **paralelo** ao plano de incidência

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z) \rightarrow \text{polarização paralela}$$



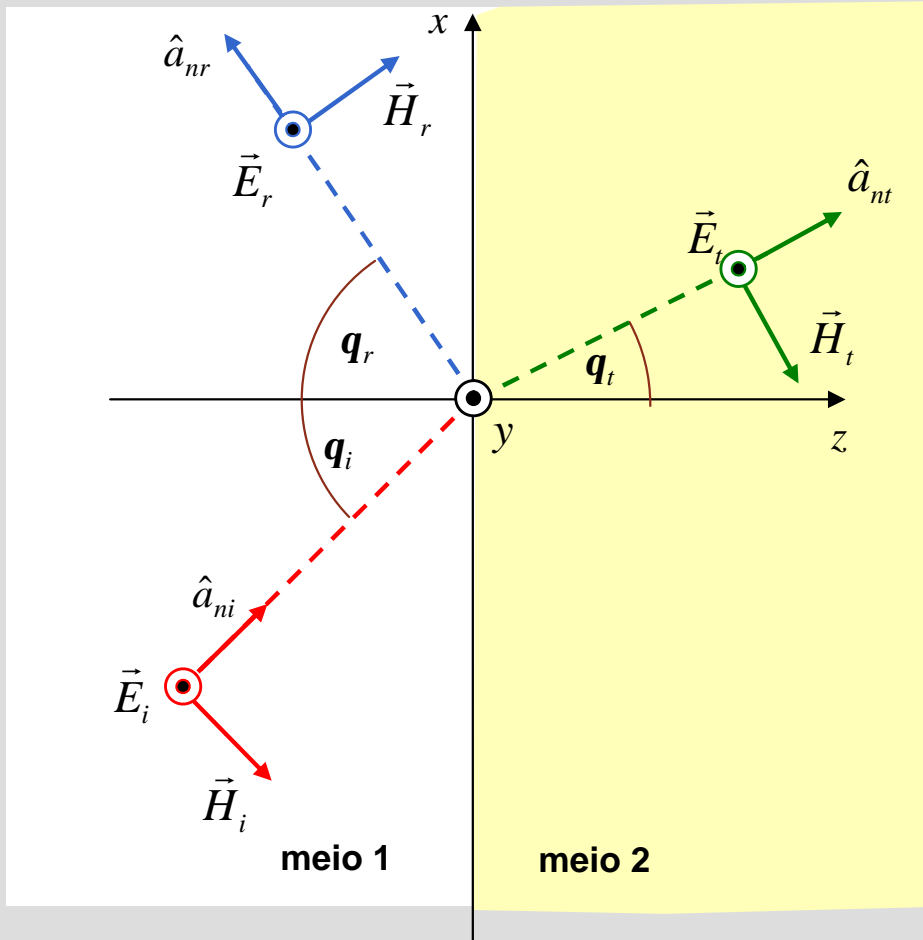
\rightarrow **Caso geral:** $\vec{E}_i = E_{i0,1} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z) + E_{i0,2} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y$

polarização paralela

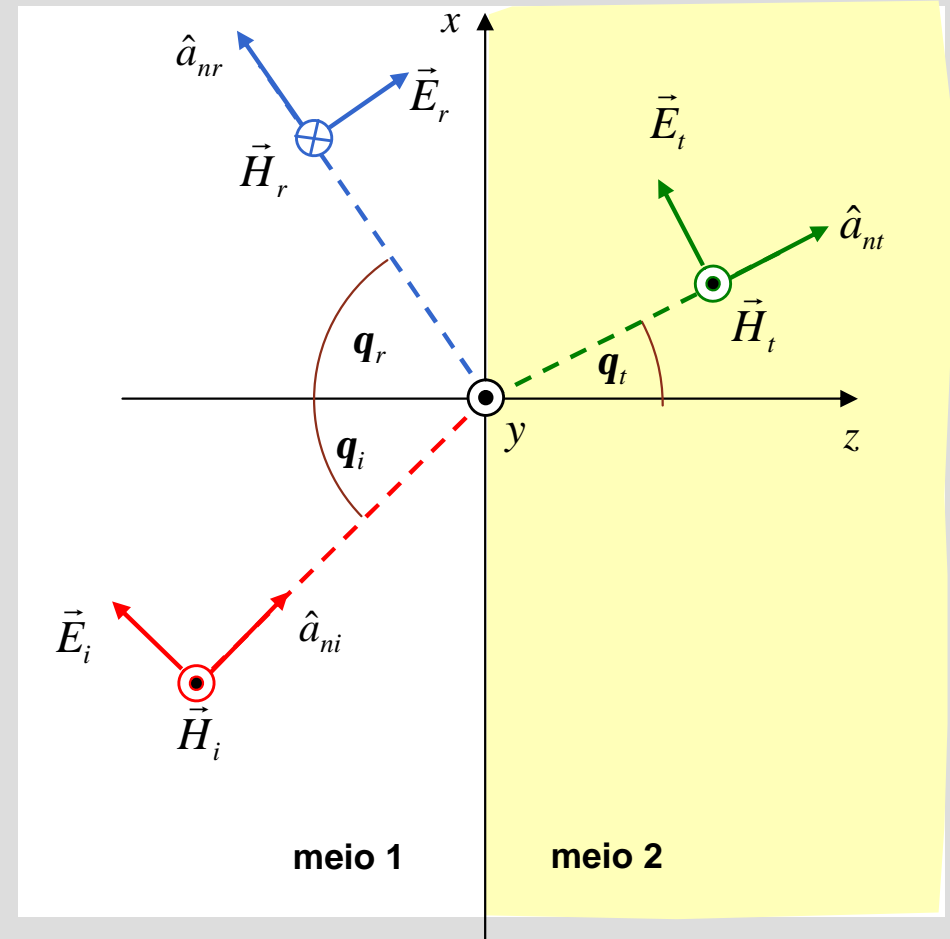
polarização perpendicular

Polarizações perpendicular e paralela – convenção

polarização perpendicular



polarização paralela



**componentes do campo eléctrico tangentes
à interface mantêm o sentido**

Polarização perpendicular – campos eléctrico e magnético

incidente

$$\hat{a}_{ni} = \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_x + \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_z$$

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{h_1} \hat{a}_{ni} \times \vec{E}_i = \frac{E_{i0}}{h_1} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} (\sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z - \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x)$$

reflectida

$$\hat{a}_{nr} = \sin \mathbf{q}_r \hat{u}_x - \cos \mathbf{q}_r \hat{u}_z = \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_z$$

$$\vec{E}_r = E_{r0} e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y$$

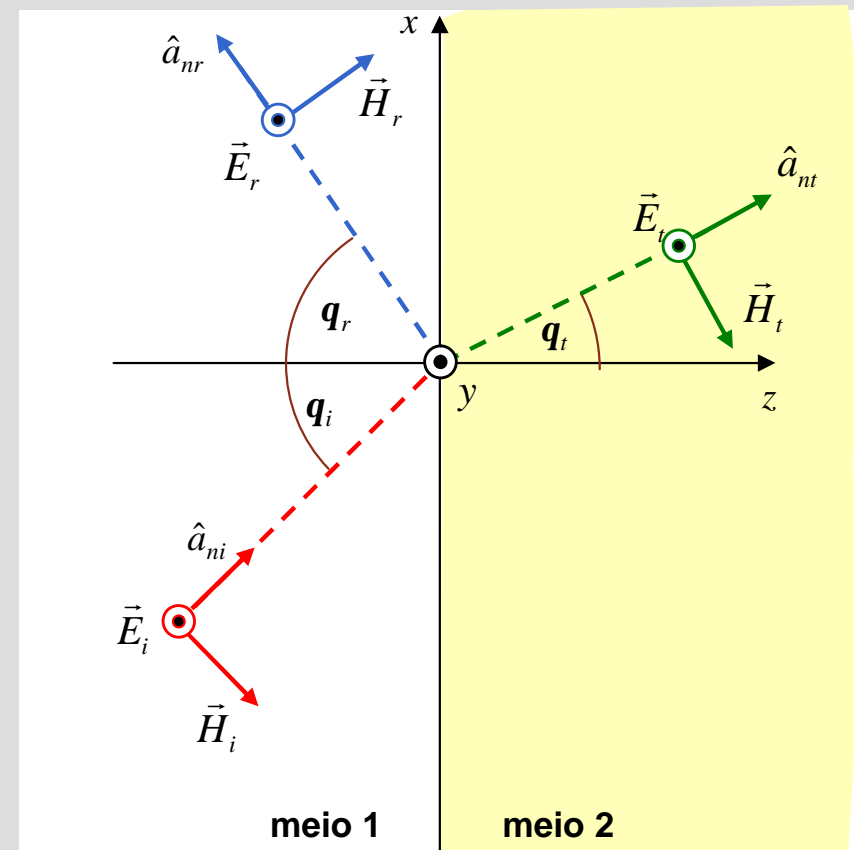
$$\vec{H}_r = \frac{1}{h_1} \hat{a}_{nr} \times \vec{E}_r = \frac{E_{r0}}{h_1} e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} (\sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z + \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x)$$

transmitida

$$\hat{a}_{nt} = \sin \mathbf{q}_t \hat{u}_x + \cos \mathbf{q}_t \hat{u}_z$$

$$\vec{E}_t = E_{t0} e^{-jk_2 \hat{a}_{nt} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y$$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{h_2} \hat{a}_{nt} \times \vec{E}_t = \frac{E_{t0}}{h_2} e^{-jk_2 \hat{a}_{nt} \cdot \vec{r}} (\sin \mathbf{q}_t \hat{u}_z - \cos \mathbf{q}_t \hat{u}_x)$$



importante

relações entre E_{i0} , E_{r0} e E_{t0} obtidas a partir das condições fronteira

Polarização perpendicular – campos eléctrico e magnético

condições fronteira \rightarrow E_{\tan} contínuo
 H_{\tan} contínuo (se $\vec{J}_s = 0$)

em $z = 0 \rightarrow \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t$

$$H_{ix} + H_{rx} = H_{tx}$$

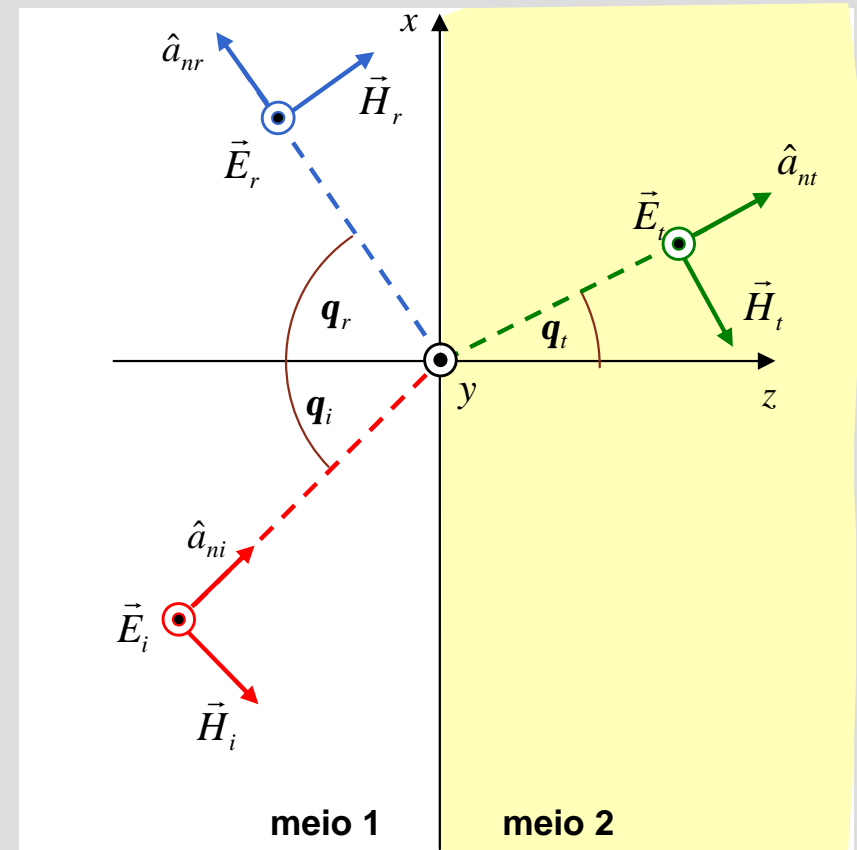
$$E_{i0} e^{-jk_1 \sin q_i x} + E_{r0} e^{-jk_1 \sin q_i x} = E_{t0} e^{-jk_2 \sin q_t x}$$

$$\frac{-E_{i0} \cos q_i e^{-jk_1 \sin q_i x} + E_{r0} \cos q_i e^{-jk_1 \sin q_i x}}{h_1} = -\frac{E_{t0} \cos q_t e^{-jk_2 \sin q_t x}}{h_2}$$

$$k_1 \sin q_i = k_2 \sin q_t$$

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

$$\frac{1}{h_1} (E_{i0} - E_{r0}) \cos q_i = \frac{E_{t0}}{h_2} \cos q_t$$



Polarização perpendicular – coeficientes de reflexão e transmissão

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

$$\frac{1}{h_1}(E_{i0} - E_{r0})\cos q_i = \frac{E_{t0}}{h_2}\cos q_t$$



$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{h_2 \cos q_i - h_1 \cos q_t}{h_2 \cos q_i + h_1 \cos q_t}$$

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2h_2 \cos q_i}{h_2 \cos q_i + h_1 \cos q_t}$$

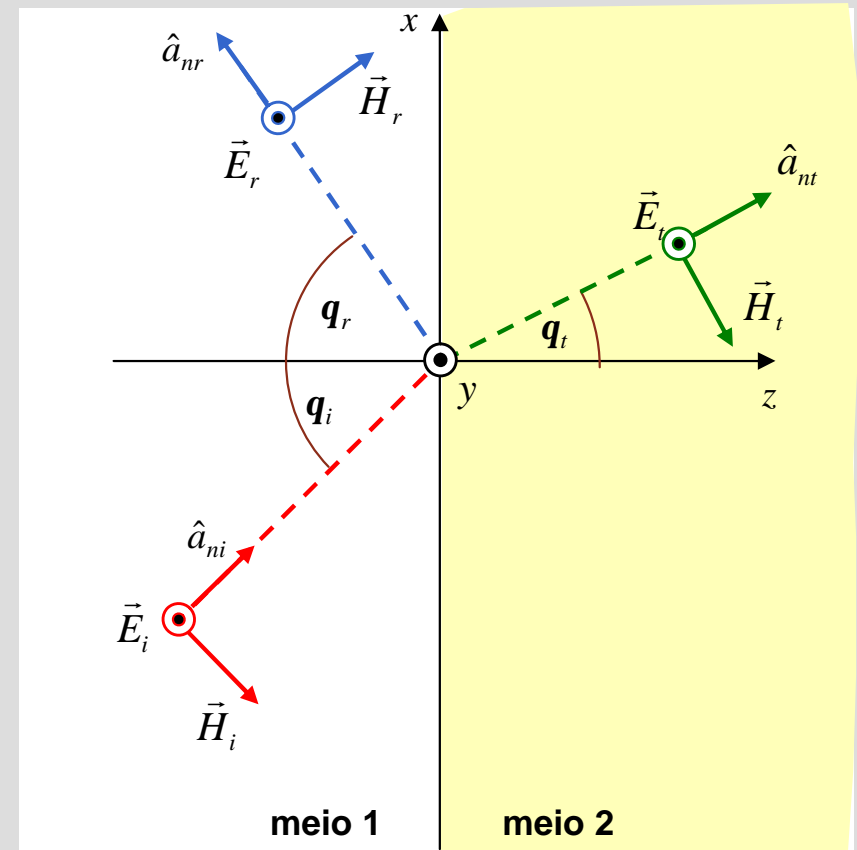


$$\Gamma_{\perp} = \frac{h_2 \cos q_i - h_1 \cos q_t}{h_2 \cos q_i + h_1 \cos q_t}$$

coeficiente de reflexão

$$t_{\perp} = \frac{2h_2 \cos q_i}{h_2 \cos q_i + h_1 \cos q_t}$$

coeficiente de transmissão



Polarização perpendicular – coeficientes de reflexão e transmissão

$$\Gamma_{\perp} = \frac{h_2 \cos q_i - h_1 \cos q_t}{h_2 \cos q_i + h_1 \cos q_t}$$

coeficiente de reflexão

$$t_{\perp} = \frac{2h_2 \cos q_i}{h_2 \cos q_i + h_1 \cos q_t}$$

coeficiente de transmissão

notas

1. $1 + \Gamma_{\perp} = t_{\perp}$ (tal como para incidência normal)
2. é possível que $\Gamma_{\perp} = 0 \rightarrow h_2 \cos q_i = h_1 \cos q_t$

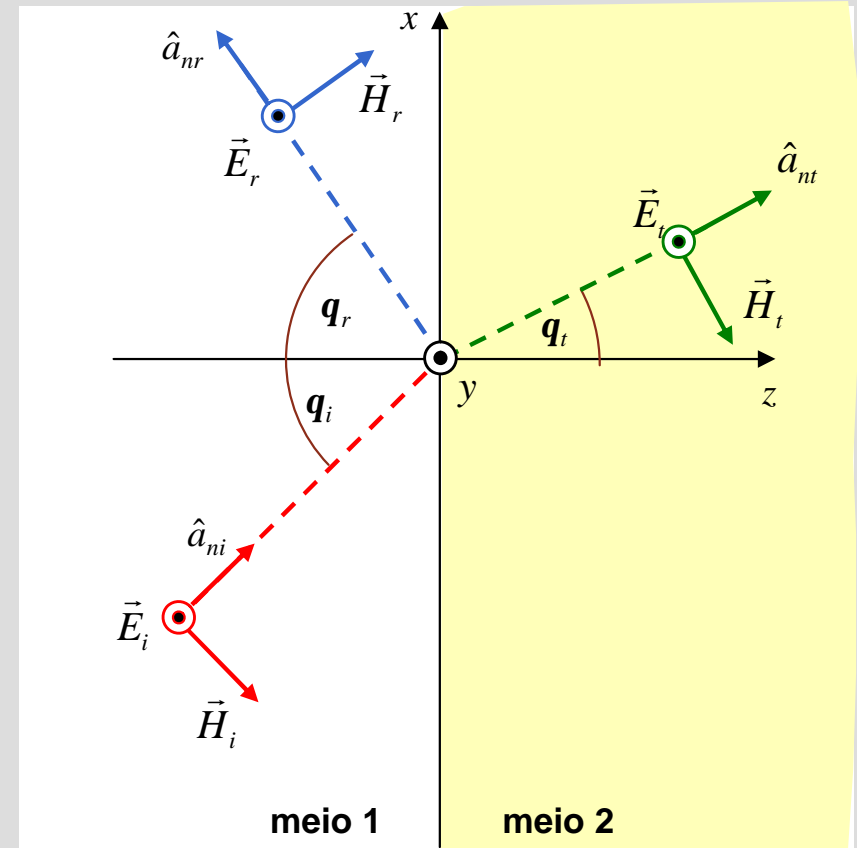
(ângulo de Brewster) $q_i = q_{B\perp}$

$$n_1 \sin q_i = n_2 \sin q_t$$

$$\sin^2 q_{B\perp} = \frac{1 - m_1 e_2 / m_2 e_1}{1 - (m_1 / m_2)^2}$$

→ só possível quando $m_1 \neq m_2$

3. se meio 2 for condutor perfeito, $E_{t0} = 0 \rightarrow t_{\perp} = 0$
 $\Gamma_{\perp} = -1$



Polarização paralela – campos eléctrico e magnético

incidente

$$\hat{a}_{ni} = \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_x + \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_z$$

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z)$$

$$\vec{H}_i = \frac{E_{i0}}{h_1} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y$$

reflectida

$$\hat{a}_{nr} = \sin \mathbf{q}_r \hat{u}_x - \cos \mathbf{q}_r \hat{u}_z = \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_z$$

$$\vec{E}_r = E_{r0} e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x + \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z)$$

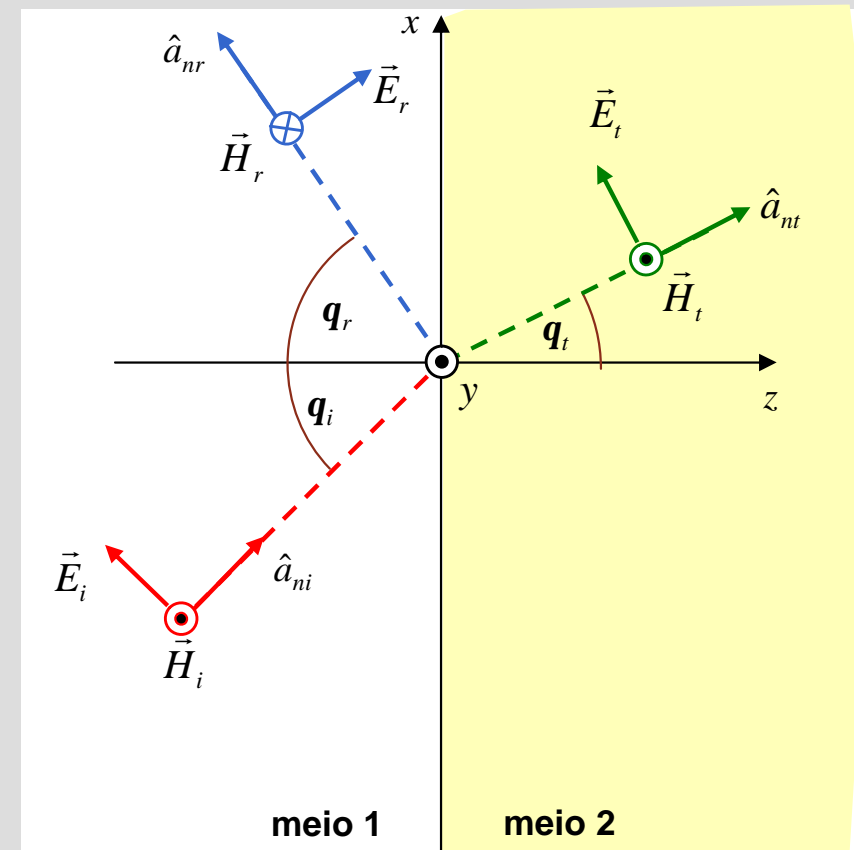
$$\vec{H}_r = -\frac{E_{r0}}{h_1} e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y$$

transmitida

$$\hat{a}_{nt} = \sin \mathbf{q}_t \hat{u}_x + \cos \mathbf{q}_t \hat{u}_z$$

$$\vec{E}_t = E_{t0} e^{-jk_2 \hat{a}_{nt} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_t \hat{u}_x - \sin \mathbf{q}_t \hat{u}_z)$$

$$\vec{H}_t = \frac{E_{t0}}{h_2} e^{-jk_2 \hat{a}_{nt} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y$$



relações entre E_{i0} , E_{r0} e E_{t0} obtidas a partir das condições fronteira

Polarização paralela – campos eléctrico e magnético

condições fronteira \rightarrow E_{\tan} contínuo
 H_{\tan} contínuo (se $\vec{J}_s = 0$)

em $z = 0 \rightarrow E_{ix} + E_{rx} = E_{tx}$
 $\vec{H}_i + \vec{H}_r = \vec{H}_t$

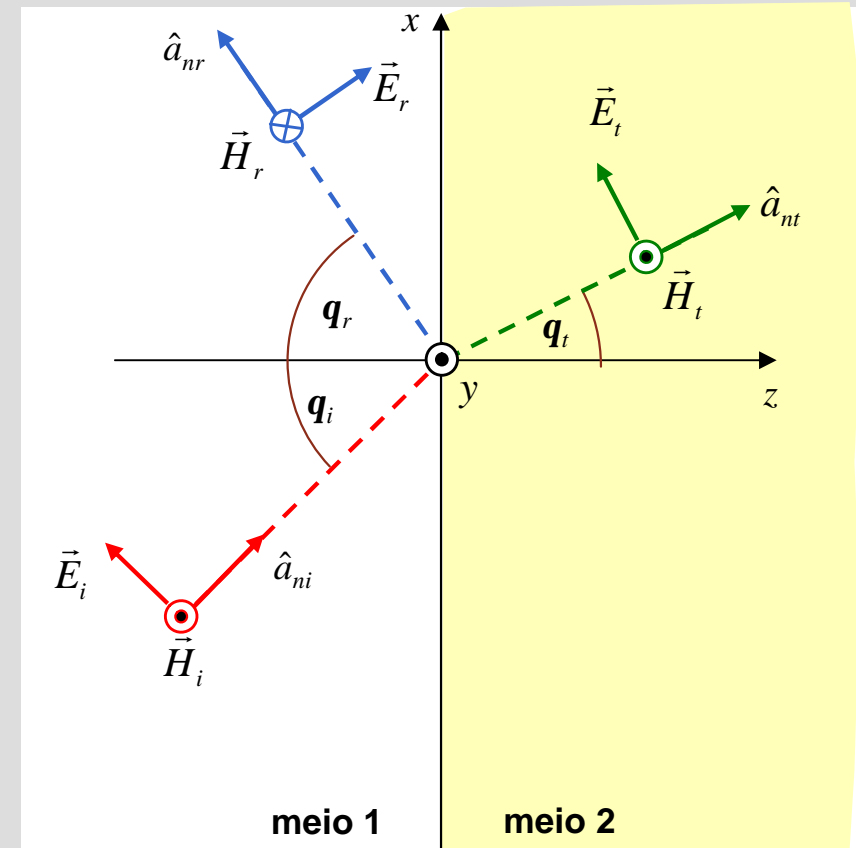
$$E_{i0} \cos \mathbf{q}_i e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} + E_{r0} \cos \mathbf{q}_i e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} = E_{t0} \cos \mathbf{q}_t e^{-jk_2 \sin \mathbf{q}_t x}$$

$$\frac{E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} - E_{r0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x}}{h_1} = \frac{E_{t0} e^{-jk_2 \sin \mathbf{q}_t x}}{h_2}$$

$$k_1 \sin \mathbf{q}_i = k_2 \sin \mathbf{q}_t$$

$$(E_{i0} + E_{r0}) \cos \mathbf{q}_i = E_{t0} \cos \mathbf{q}_t$$

$$\frac{1}{h_1} (E_{i0} - E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{h_2}$$



Polarização paralela – coeficientes de reflexão e transmissão

$$(E_{i0} + E_{r0}) \cos q_i = E_{t0} \cos q_t$$

$$\frac{1}{h_1} (E_{i0} - E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{h_2}$$

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{h_2 \cos q_t - h_1 \cos q_i}{h_2 \cos q_t + h_1 \cos q_i}$$

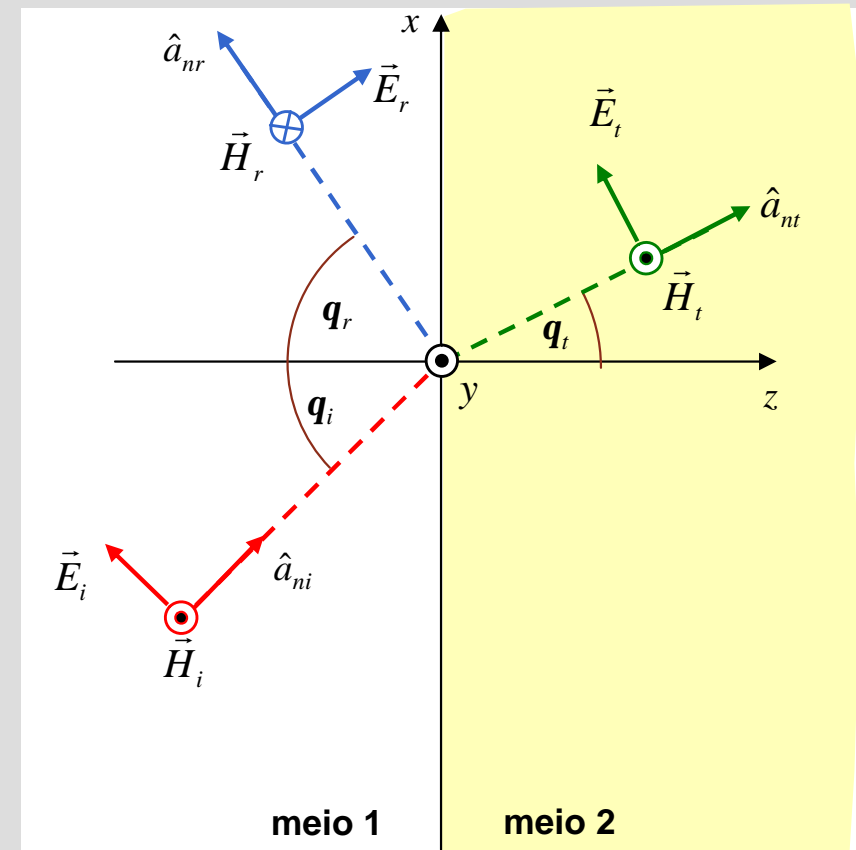
$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2h_2 \cos q_i}{h_2 \cos q_t + h_1 \cos q_i}$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{h_2 \cos q_t - h_1 \cos q_i}{h_2 \cos q_t + h_1 \cos q_i}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2h_2 \cos q_i}{h_2 \cos q_t + h_1 \cos q_i}$$

coeficiente de reflexão

coeficiente de transmissão



Polarização paralela – coeficientes de reflexão e transmissão

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{h_2 \cos q_t - h_1 \cos q_i}{h_2 \cos q_t + h_1 \cos q_i}$$

coeficiente de reflexão

$$t_{\parallel} = \frac{2h_2 \cos q_i}{h_2 \cos q_t + h_1 \cos q_i}$$

coeficiente de transmissão

notas

1. $1 + \Gamma_{\parallel} = t_{\parallel} \left(\frac{\cos q_t}{\cos q_i} \right)$

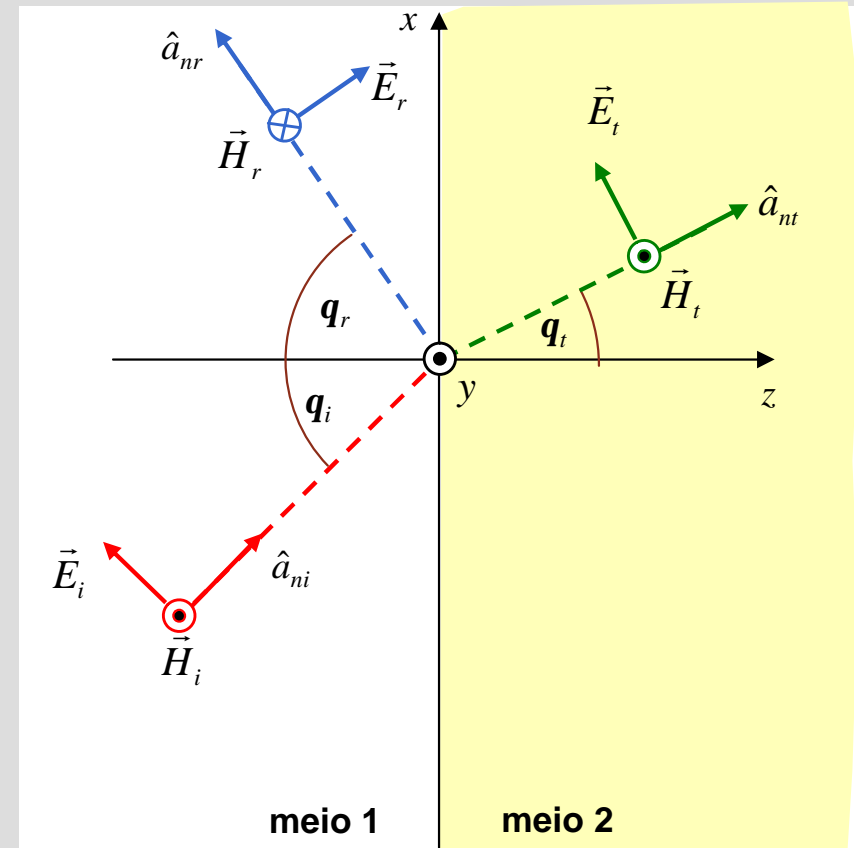
2. é possível que $\Gamma_{\parallel} = 0 \rightarrow h_2 \cos q_t = h_1 \cos q_i$

(ângulo de Brewster) $q_i = q_{B\parallel}$

$$n_1 \sin q_i = n_2 \sin q_t$$

$$\sin^2 q_{B\parallel} = \frac{1 - m_2 e_1 / m_1 e_2}{1 - (e_1 / e_2)^2} \rightarrow \text{quando } m_1 = m_2 \rightarrow \sin q_{B\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1 + (e_1 / e_2)^2}}$$

3. se meio 2 for condutor perfeito, $E_{t0} = 0 \rightarrow t_{\parallel} = 0$
 $\Gamma_{\parallel} = -1$



Campo eléctrico no meio 1 – polarização perpendicular

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y + E_{r0} e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y$$

$$1 + \Gamma_{\perp} = \mathbf{t}_{\perp}$$

$$\hat{a}_{ni} \cdot \vec{r} = \sin \mathbf{q}_i x + \cos \mathbf{q}_i z$$

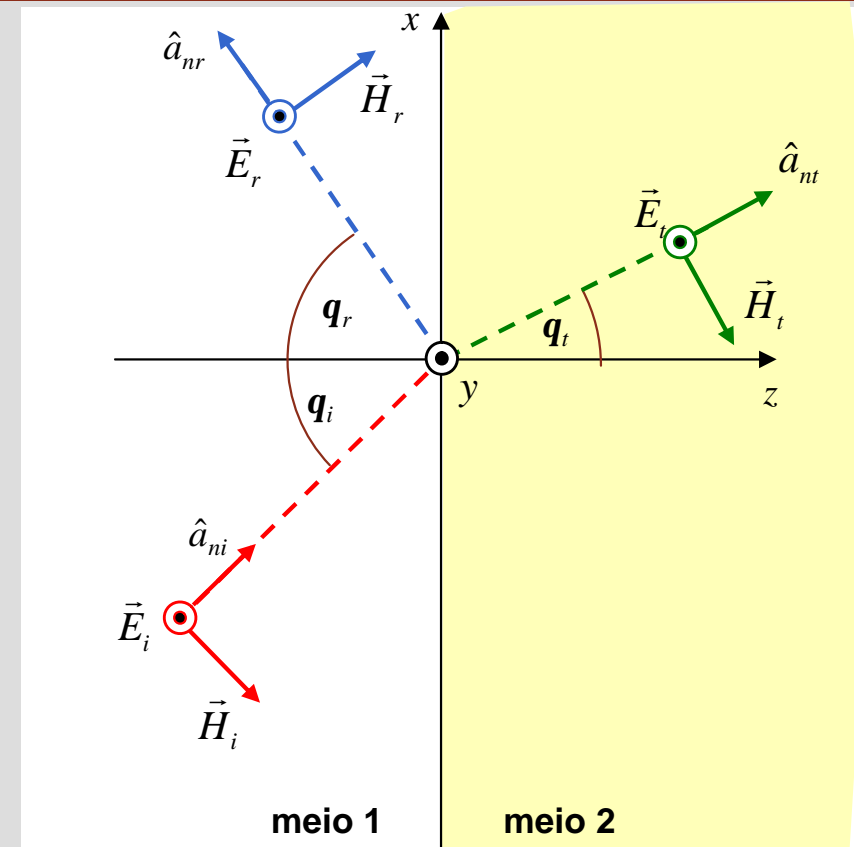
$$\hat{a}_{nr} \cdot \vec{r} = \sin \mathbf{q}_i x - \cos \mathbf{q}_i z$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= E_{i0} \left[(\mathbf{t}_{\perp} - \Gamma_{\perp}) e^{-jk_1 \cos \mathbf{q}_i z} + \Gamma_{\perp} e^{jk_1 \cos \mathbf{q}_i z} \right] e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \hat{u}_y \\ &= \mathbf{t}_{\perp} E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y + \Gamma_{\perp} E_{i0} \left(e^{jk_1 \cos \mathbf{q}_i z} - e^{-jk_1 \cos \mathbf{q}_i z} \right) e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \hat{u}_y \end{aligned}$$

$$= \mathbf{t}_{\perp} E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} \hat{u}_y + j2\Gamma_{\perp} E_{i0} \sin(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \hat{u}_y$$

onda em propagação
segundo \hat{a}_{ni}

onda em propagação **segundo x** ,
com **amplitude dependente de z**



Incidência num condutor ideal – polarização perpendicular

meio 2 condutor ideal ($S_2 = \infty$) \longrightarrow $\Gamma_{\perp} = -1$

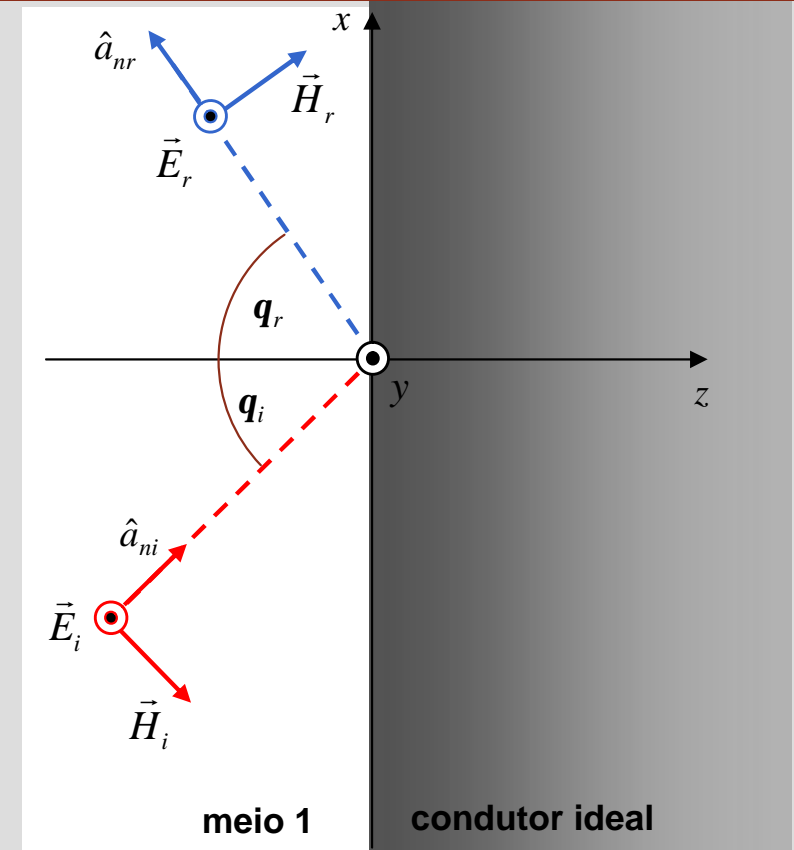
$$t_{\perp} = 0$$

$$\vec{E}_2 = 0$$

$$\vec{E}_1 = E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \left(e^{-jk_1 \cos \mathbf{q}_i z} - e^{jk_1 \cos \mathbf{q}_i z} \right) \hat{u}_y$$

$$= -j2E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \sin(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) \hat{u}_y$$

onda em propagação **segundo x**,
com **amplitude dependente de z**



máximos: $z_{MAX} = \frac{(2n+1)p}{2k_1 \cos \mathbf{q}_i}$ e $|\vec{E}_1|_{MAX} = 2|E_{i0}|$

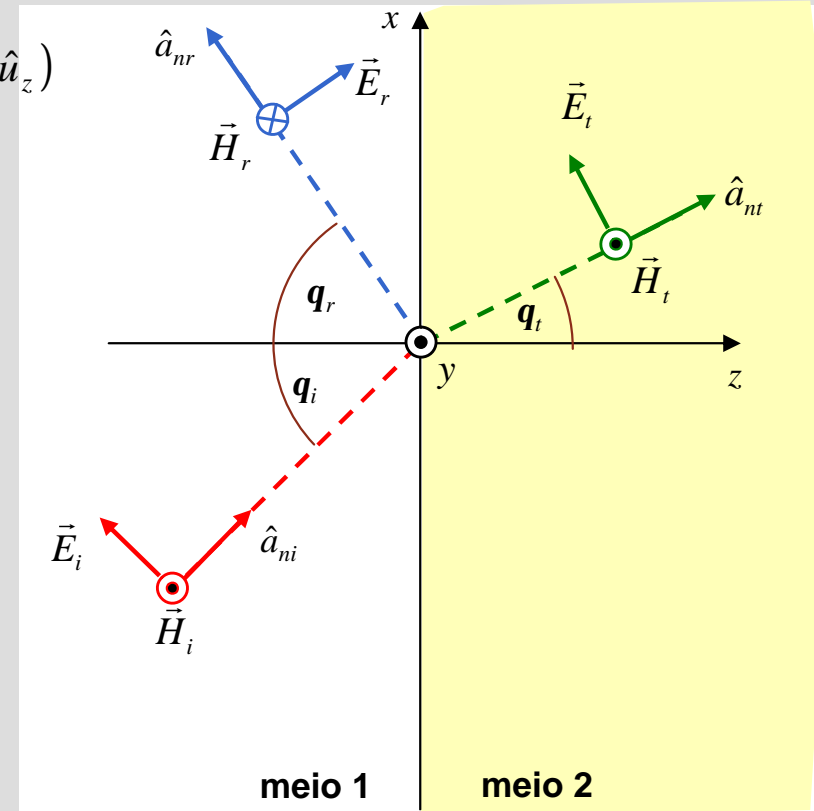
mínimos: $z_{min} = \frac{np}{k_1 \cos \mathbf{q}_i}$ e $|\vec{E}_1|_{min} = 0$

Campo eléctrico no meio 1 – polarização paralela

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z) + E_{r0} e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x + \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z) \\ &= t_{\parallel} \frac{\cos \mathbf{q}_t}{\cos \mathbf{q}_i} E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z) \\ &\quad - \Gamma_{\parallel} E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z) + \Gamma_{\parallel} E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x + \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z)\end{aligned}$$

$$1 + \Gamma_{\parallel} = t_{\parallel} \left(\frac{\cos \mathbf{q}_t}{\cos \mathbf{q}_i} \right)$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= t_{\parallel} \frac{\cos \mathbf{q}_t}{\cos \mathbf{q}_i} E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z) \\ &\quad + \Gamma_{\parallel} E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \left(e^{jk_1 \cos \mathbf{q}_i z} - e^{-jk_1 \cos \mathbf{q}_i z} \right) \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x \\ &\quad + \Gamma_{\parallel} E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \left(e^{jk_1 \cos \mathbf{q}_i z} + e^{-jk_1 \cos \mathbf{q}_i z} \right) \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z \\ &= t_{\parallel} \frac{\cos \mathbf{q}_t}{\cos \mathbf{q}_i} E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z) \\ &\quad + j2\Gamma_{\parallel} E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \sin(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x \\ &\quad + 2\Gamma_{\parallel} E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \cos(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z\end{aligned}$$



Campo eléctrico no meio 1 – polarização paralela

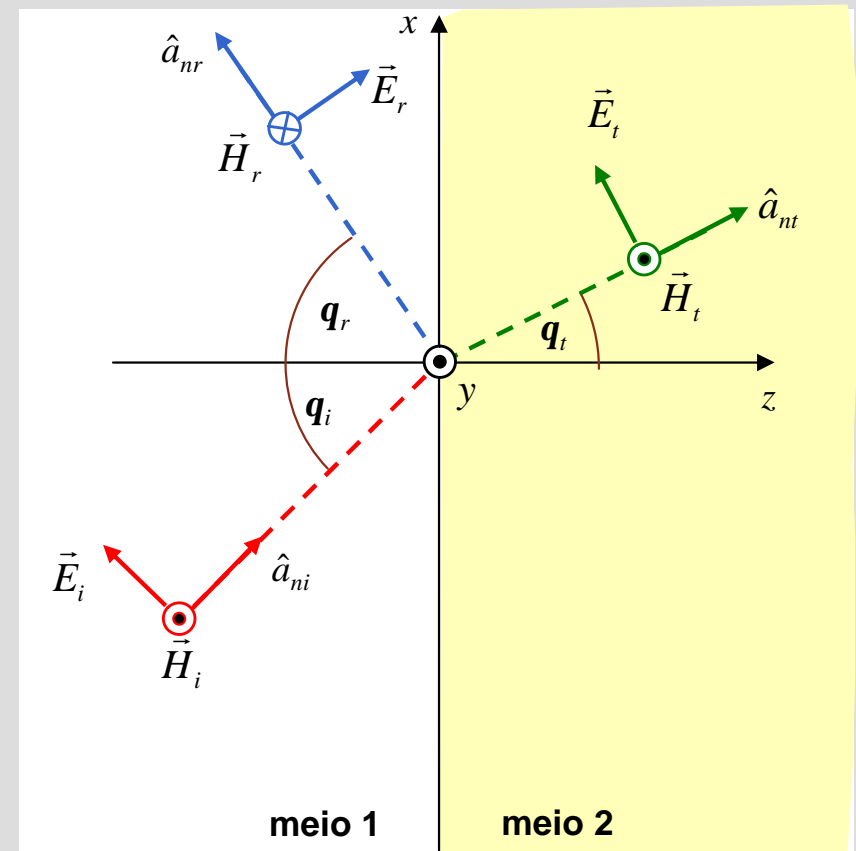
onda em propagação
segundo \hat{a}_{ni}

$$\vec{E}_1 = t_{\parallel} \frac{\cos \mathbf{q}_t}{\cos \mathbf{q}_i} E_{i0} e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} (\cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z)$$

$$+ j2\Gamma_{\parallel} E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \sin(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x$$

$$+ 2\Gamma_{\parallel} E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \cos(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z$$

ondas em propagação segundo x ,
com amplitudes dependente de z



Incidência num condutor ideal – polarização paralela

meio 2 condutor ideal ($S_2 = \infty$)

$$\Gamma_{\parallel} = -1$$

$$t_{\parallel} = 0$$

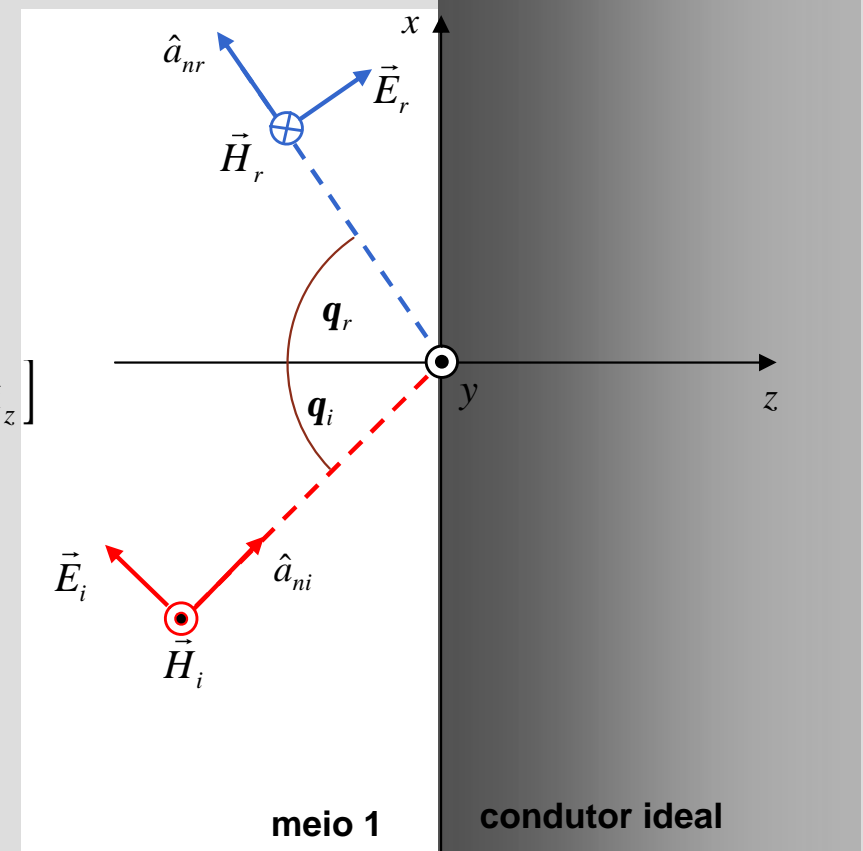
$$\vec{E}_2 = 0$$

$$\vec{E}_1 = E_{i0} \left[\left(e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} - e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} \right) \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - \left(e^{-jk_1 \hat{a}_{ni} \cdot \vec{r}} + e^{-jk_1 \hat{a}_{nr} \cdot \vec{r}} \right) \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z \right]$$

$$= -j2E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \sin(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x$$

$$- 2E_{i0} e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \cos(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z$$

ondas em propagação segundo x ,
com amplitudes dependente de z



máximos de E_{1x} : $z_{MAX} = \frac{(2n+1)p}{2b_1 \cos \mathbf{q}_i}$ e $|E_{1x}|_{MAX} = 2|E_{i0} \cos \mathbf{q}_i|$

mínimos de E_{1x} : $z_{min} = \frac{np}{b_1 \cos \mathbf{q}_i}$ e $|E_{1x}|_{min} = 0$

$$\perp : \vec{E}_1 = -j2E_{i0}e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \sin(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) \hat{u}_y$$

$$\parallel : \vec{E}_1 = -j2E_{i0}e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \sin(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) \cos \mathbf{q}_i \hat{u}_x - 2E_{i0}e^{-jk_1 \sin \mathbf{q}_i x} \cos(k_1 \cos \mathbf{q}_i z) \sin \mathbf{q}_i \hat{u}_z$$

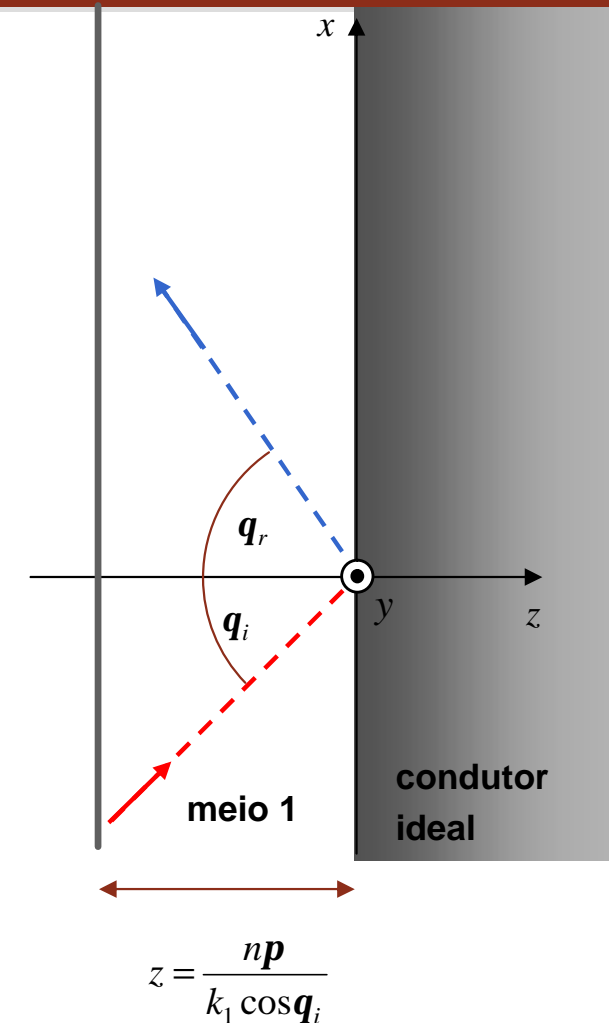


polarização perpendicular: $|\vec{E}_1| = 0$ em $z = \frac{n\mathbf{p}}{k_1 \cos \mathbf{q}_i}$

polarização paralela: $|E_{1x}| = 0$ em $z = \frac{n\mathbf{p}}{k_1 \cos \mathbf{q}_i}$



para ambas polarizações, um plano condutor paralelo ao plano xy poderia ser colocado em $z = \frac{n\mathbf{p}}{k_1 \cos \mathbf{q}_i}$, sem alterar o campo no meio 1



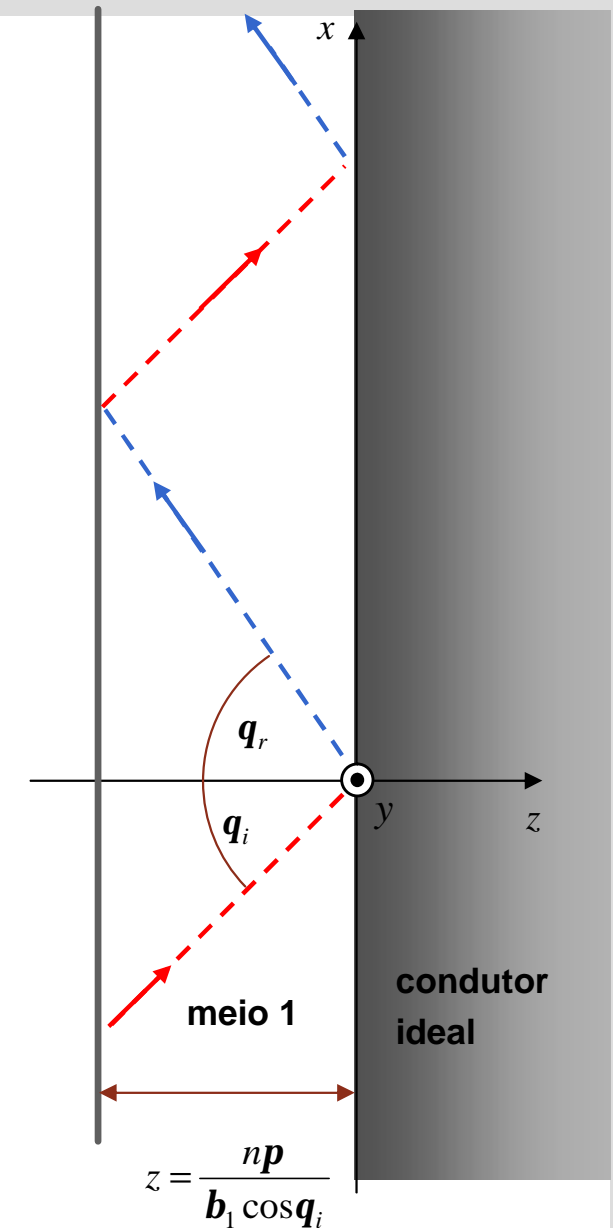
onda electromagnética é **guiada**
pelas duas superfícies condutoras



princípio de funcionamento dos guias de onda metálicos



será possível guiar uma onda electromagnética
com meios dieléctricos?



caso geral:

em cada incidência parte da onda é transmitida para o dieléctrico 2



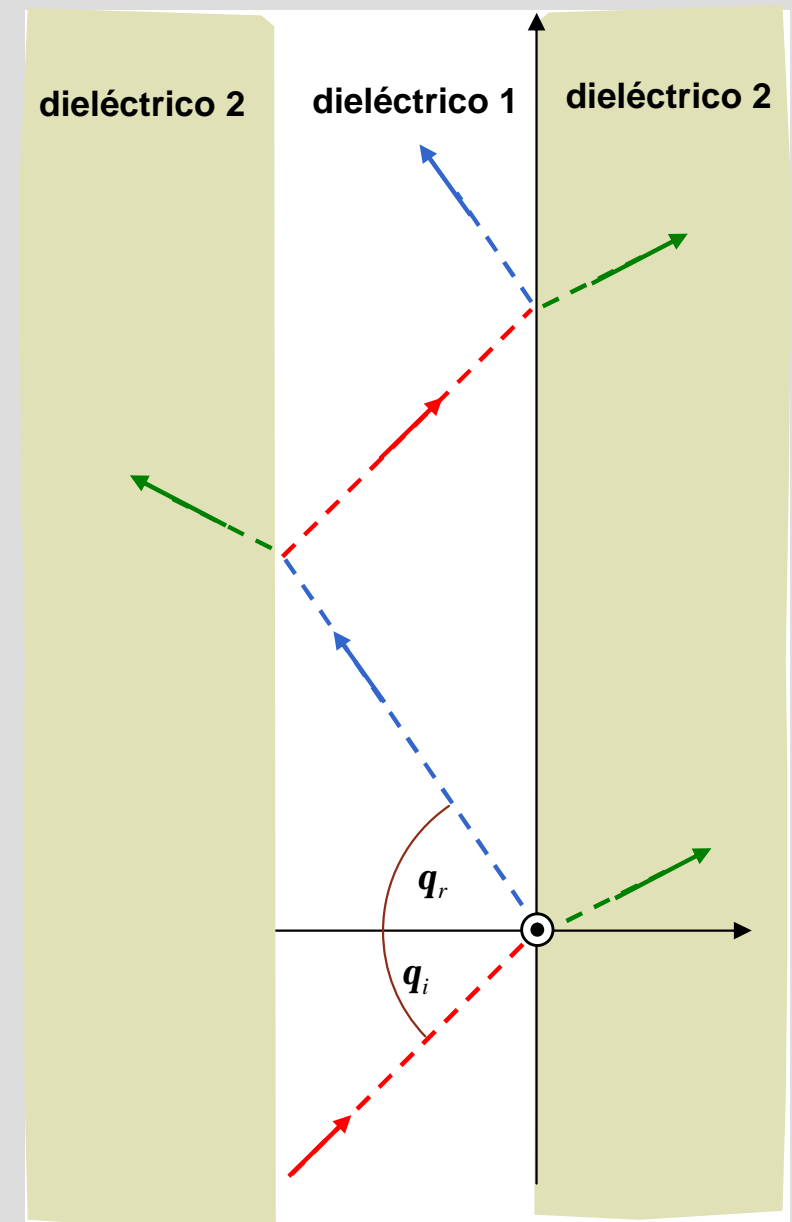
ao fim de alguma distância já a onda no dieléctrico interior se atenuou consideravelmente



no caso geral, materiais dieléctricos não permitem conduzir ondas electromagnéticas de forma eficiente

→ a solução seria garantir que não há energia transmitida para o meio 2

será isto possível?



Lei de Snell da refração $n_1 \sin \mathbf{q}_i = n_2 \sin \mathbf{q}_t$

$$n_1 > n_2 \longrightarrow \mathbf{q}_t > \mathbf{q}_i$$

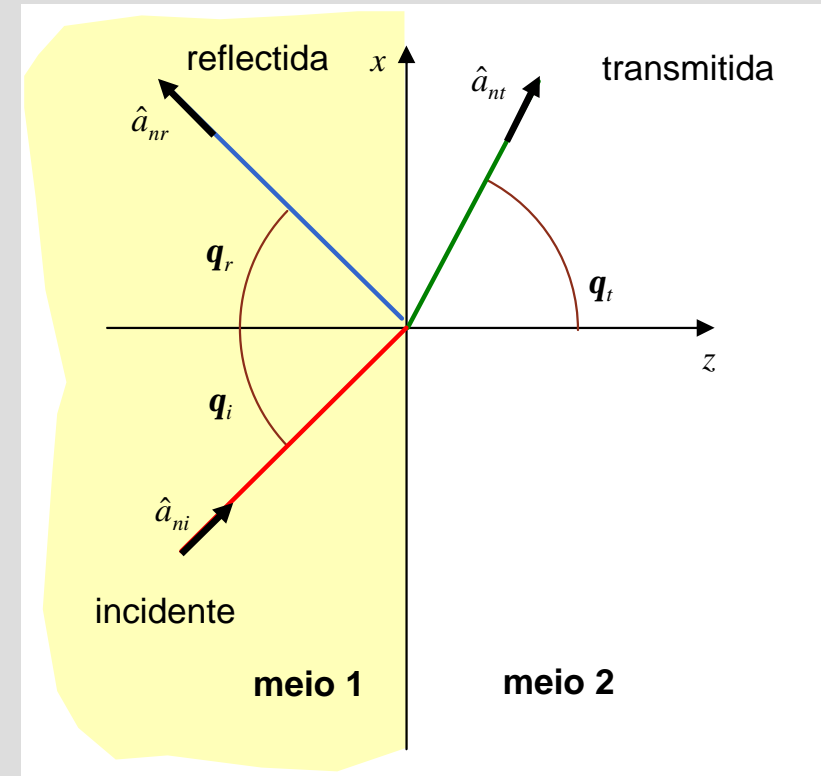
Ângulo crítico $\mathbf{q}_c = \mathbf{q}_i$ talque $\mathbf{q}_t = 90^\circ \longrightarrow \mathbf{q}_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$

$\mathbf{q}_i \geq \mathbf{q}_c \longrightarrow$ não há onda transmitida para o meio 2

Reflexão interna total

$$\sin \mathbf{q}_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \mathbf{q}_i \geq \frac{n_1}{n_2} \sin \mathbf{q}_c$$

$$\sin \mathbf{q}_t \geq 1 \longrightarrow \cos \mathbf{q}_t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \mathbf{q}_t} = \pm j \sqrt{\sin^2 \mathbf{q}_t - 1}$$



Reflexão interna total

$$\sin q_t \geq 1$$

$$\cos q_t = \pm j\sqrt{\sin^2 q_t - 1}$$

Meios não magnéticos

$$\mathbf{h} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_0}{\mathbf{e}}} = \frac{\mathbf{h}_0}{n}$$

$$n = \sqrt{\mathbf{e}_r}$$

Coefficientes de reflexão

$$\Gamma_{\perp} = \frac{h_2 \cos q_i - h_1 \cos q_t}{h_2 \cos q_i + h_1 \cos q_t}$$

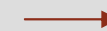
$$\Gamma_{\parallel} = \frac{h_2 \cos q_t - h_1 \cos q_i}{h_2 \cos q_t + h_1 \cos q_i}$$

$$\Gamma_{\perp} = \frac{n_1 \cos q_i - n_2 \cos q_t}{n_1 \cos q_i + n_2 \cos q_t}$$

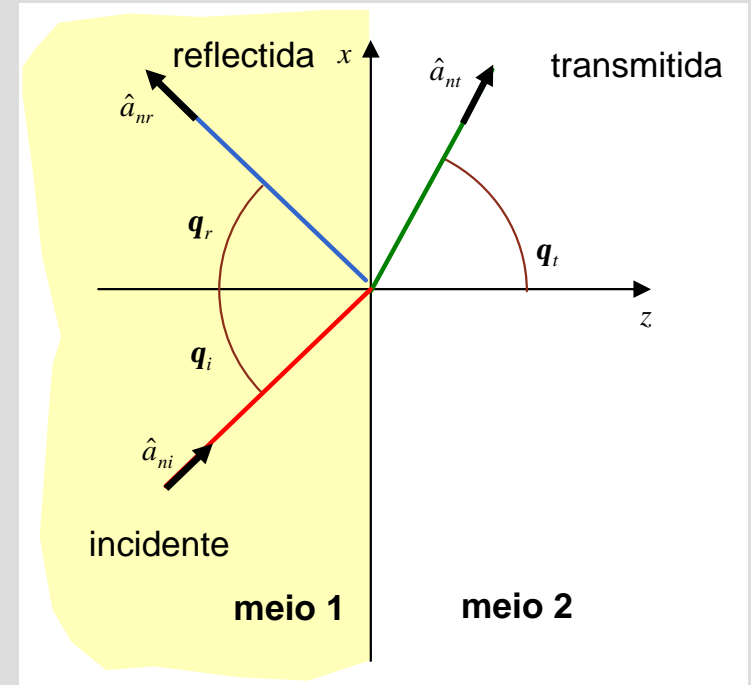
$$\Gamma_{\parallel} = \frac{n_1 \cos q_t - n_2 \cos q_i}{n_1 \cos q_t + n_2 \cos q_i}$$

$$\Gamma_{\perp} = \frac{n_1 \cos q_i \mp j n_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 q_i - 1}}{n_1 \cos q_i \pm j n_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 q_i - 1}}$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-n_2 \cos q_i \pm j n_1 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 q_i - 1}}{n_2 \cos q_i \pm j n_1 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 q_i - 1}}$$



$$|\Gamma_{\perp}| = |\Gamma_{\parallel}| = 1$$



Reflexão interna total – campos evanescentes

dependência espacial dos campos no meio 2:

$$e^{-jk_2 \hat{a}_{nt} \cdot \vec{r}}$$

$$\hat{a}_{nt} = \sin \mathbf{q}_t \hat{u}_x + \cos \mathbf{q}_t \hat{u}_z \longrightarrow$$

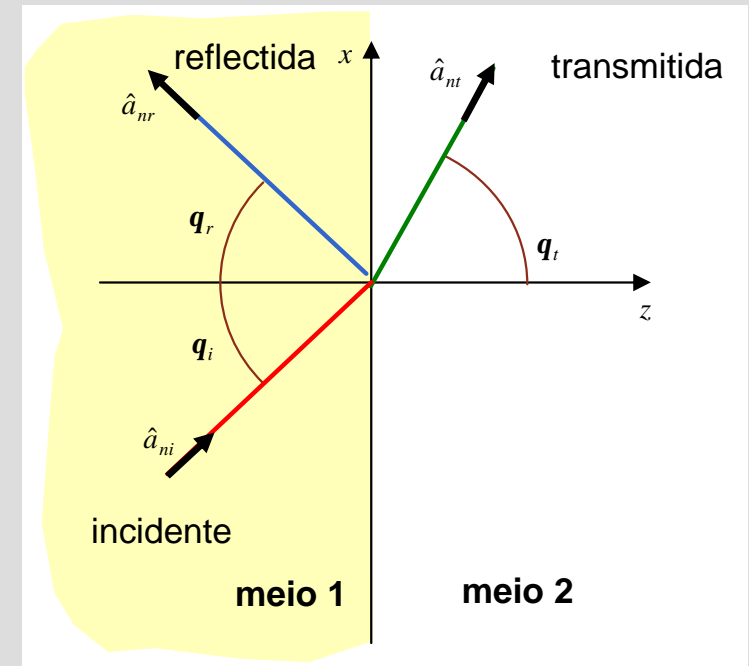
$$e^{-jk_2 (\sin \mathbf{q}_t x + \cos \mathbf{q}_t z)}$$

$$\cos \mathbf{q}_t = \pm j \sqrt{\sin^2 \mathbf{q}_t - 1} \longrightarrow$$

$$e^{-k_2 z \sqrt{\sin^2 \mathbf{q}_t - 1}} e^{-jk_2 x \sin \mathbf{q}_t}$$

onda que se propaga segundo $+x$
amplitude decresce exponencialmente com z

campos evanescentes



Polarização perpendicular

$$\vec{E}_t = E_{t0} e^{-k_2 z \sqrt{\sin^2 q_t - 1}} e^{-jk_2 x \sin q_t} \hat{u}_y$$

$$\vec{H}_t = \frac{E_{t0}}{h_2} e^{-k_2 z \sqrt{\sin^2 q_t - 1}} e^{-jk_2 x \sin q_t} \left(\sin q_t \hat{u}_z + j \sqrt{\sin^2 q_t - 1} \hat{u}_x \right)$$

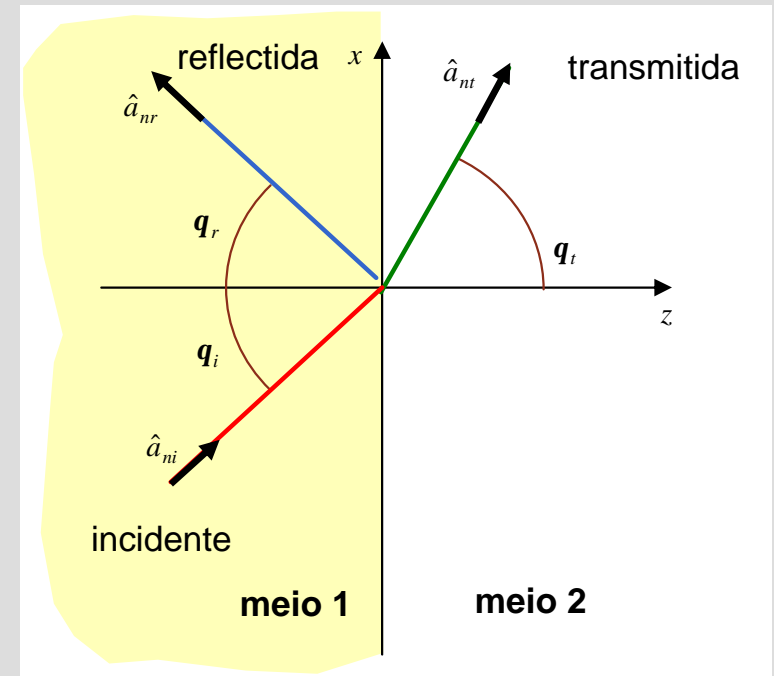
$$\vec{S}_{med,t} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \} = \frac{|E_{t0}|^2}{2h_2} \sin q_t e^{-k_2 z \sqrt{\sin^2 q_t - 1}} \hat{u}_x$$

Polarização paralela

$$\vec{E}_t = -E_{t0} e^{-k_2 z \sqrt{\sin^2 q_t - 1}} e^{-jk_2 x \sin q_t} \left(\sin q_t \hat{u}_z + j \sqrt{\sin^2 q_t - 1} \hat{u}_x \right)$$

$$\vec{H}_t = \frac{E_{t0}}{h_2} e^{-k_2 z \sqrt{\sin^2 q_t - 1}} e^{-jk_2 x \sin q_t} \hat{u}_y$$

$$\vec{S}_{med,t} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \} = \frac{|E_{t0}|^2}{2h_2} \sin q_t e^{-k_2 z \sqrt{\sin^2 q_t - 1}} \hat{u}_x$$



energia propaga-se ao longo do guia, não havendo perdas para o dielétrico 2

A região do espaço definida por $y < 0$ encontra-se preenchida com um material não magnético e nela propaga-se uma onda plana de frequência 1.5 GHz caracterizada pelo fasor

$$\vec{E}_i(x, y) = E_0 e^{-j4\mathbf{p}(4x+3y)} \hat{u}_z \quad (\text{V/m})$$

Esta onda incide obliquamente na interface com a região $y > 0$, a qual está preenchida com ar.

- Classifique o estado de polarização desta onda relativamente ao plano de incidência.
- Determine a direcção de propagação e o ângulo de incidência.
- Determine a permitividade relativa do meio 1.
- Obtenha o fasor do campo magnético desta onda.
- Determine os coeficientes de reflexão e de transmissão.
- Obtenha os fasores dos campos eléctricos da onda reflectida e da onda no ar.

Equações de Maxwell

Equação de onda em meios LHI sem perdas e sem fontes

(1ª aula)

Campos harmónicos

Ondas electromagnéticas planas

(2ª aula)

Incidência normal

(3ª aula)

Incidência oblíqua

(4ª aula)

→ **Incidência em múltiplas interfaces**

Adaptador de $\lambda/4$

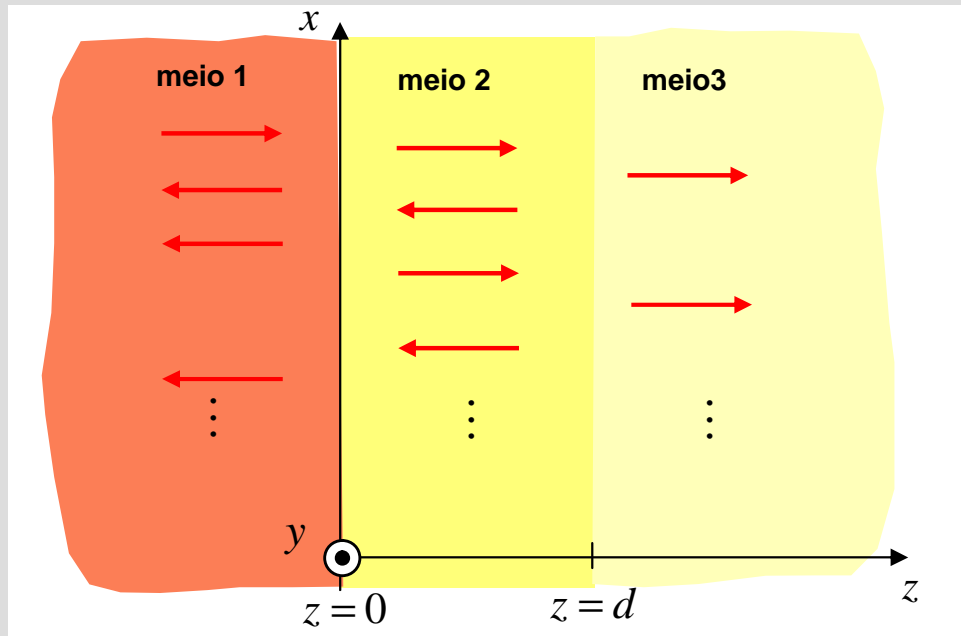
(5ª aula)

Etalon de Fabry-Perot

Difracção

(6ª aula)

Incidência normal – múltiplas interfaces



notas

1. meios 1 e 2 \rightarrow infinitos
2. $\vec{E}_i = E_0 e^{-jk_1 z} \hat{u}_x \rightarrow$ todas as ondas estão linearmente polarizadas segundo x

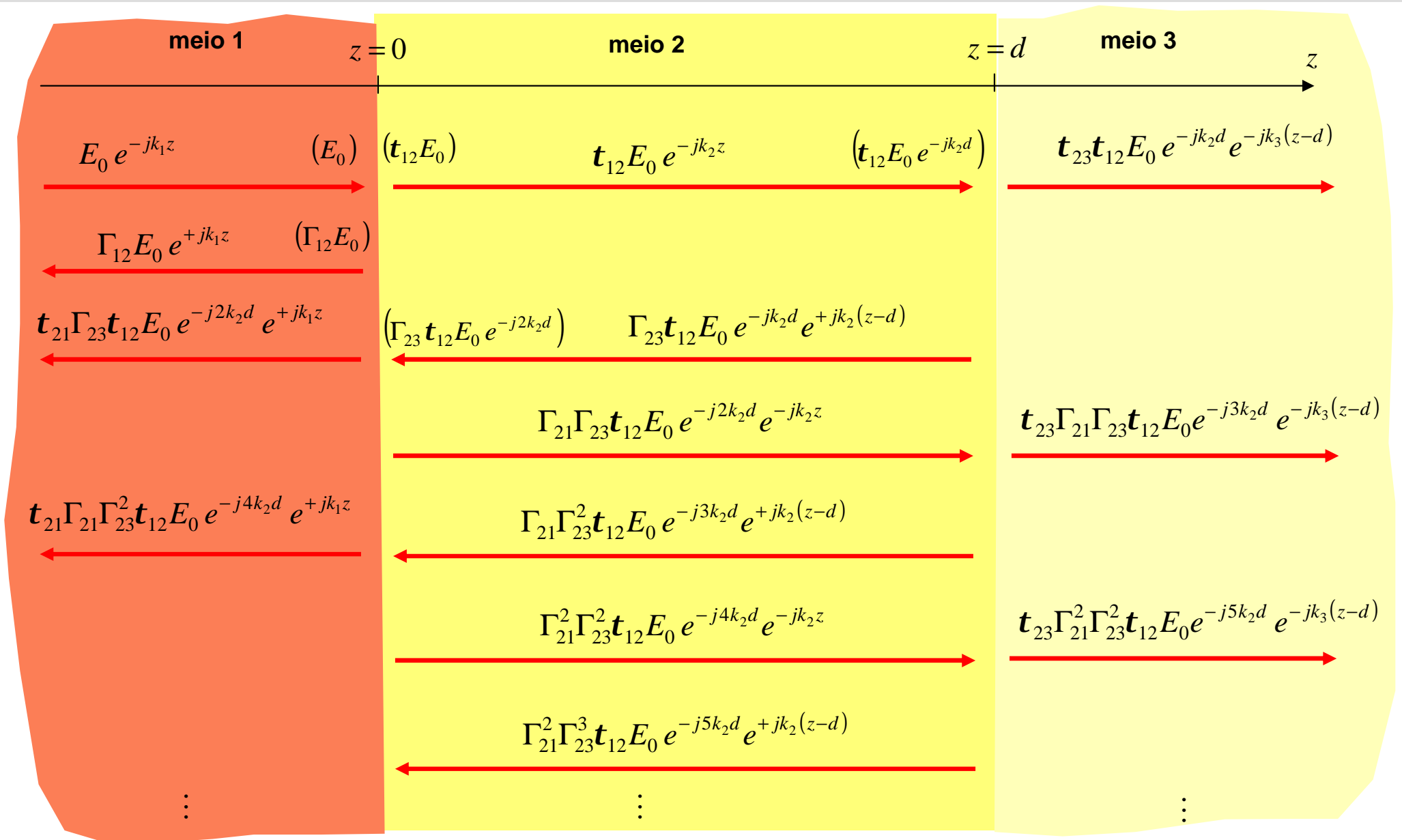
coeficientes de reflexão e de transmissão:

$$\text{interface } 1 \rightarrow 2 : \quad \Gamma_{12} = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} \quad \text{e} \quad t_{12} = \frac{2h_2}{h_2 + h_1}$$

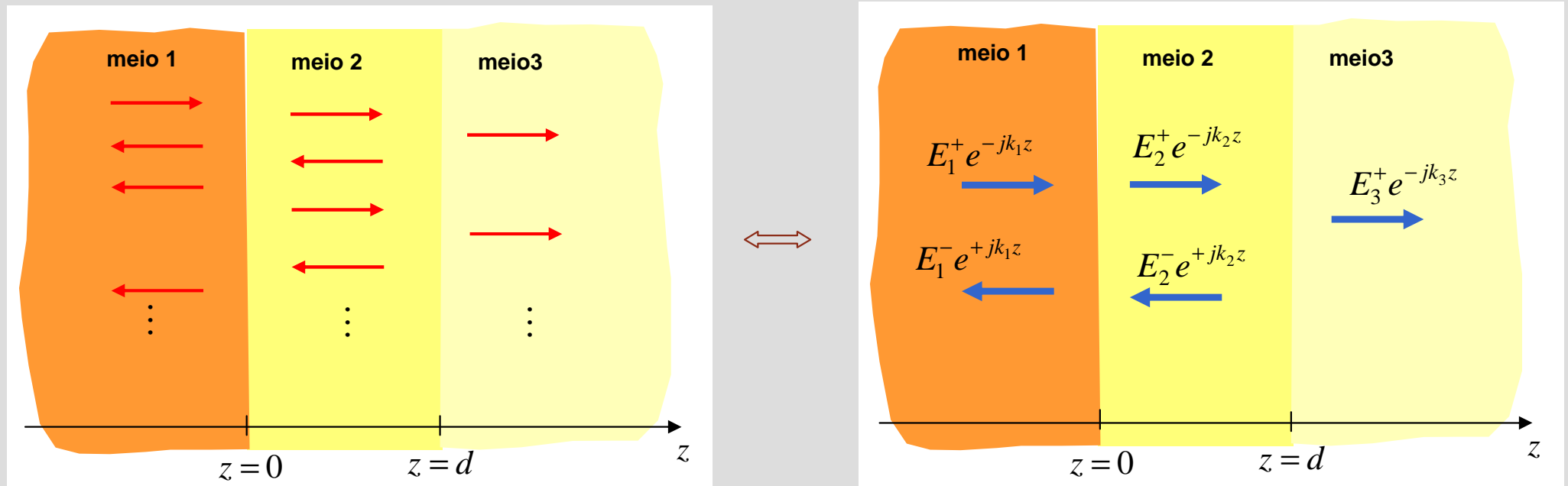
$$\text{interface } 2 \rightarrow 1 : \quad \Gamma_{21} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} = -\Gamma_{12} \quad \text{e} \quad t_{21} = \frac{2h_1}{h_1 + h_2}$$

$$\text{interface } 2 \rightarrow 3 : \quad \Gamma_{23} = \frac{h_3 - h_2}{h_3 + h_2} \quad \text{e} \quad t_{23} = \frac{2h_3}{h_2 + h_3}$$

Incidência normal – múltiplas interfaces



Incidência normal – múltiplas interfaces



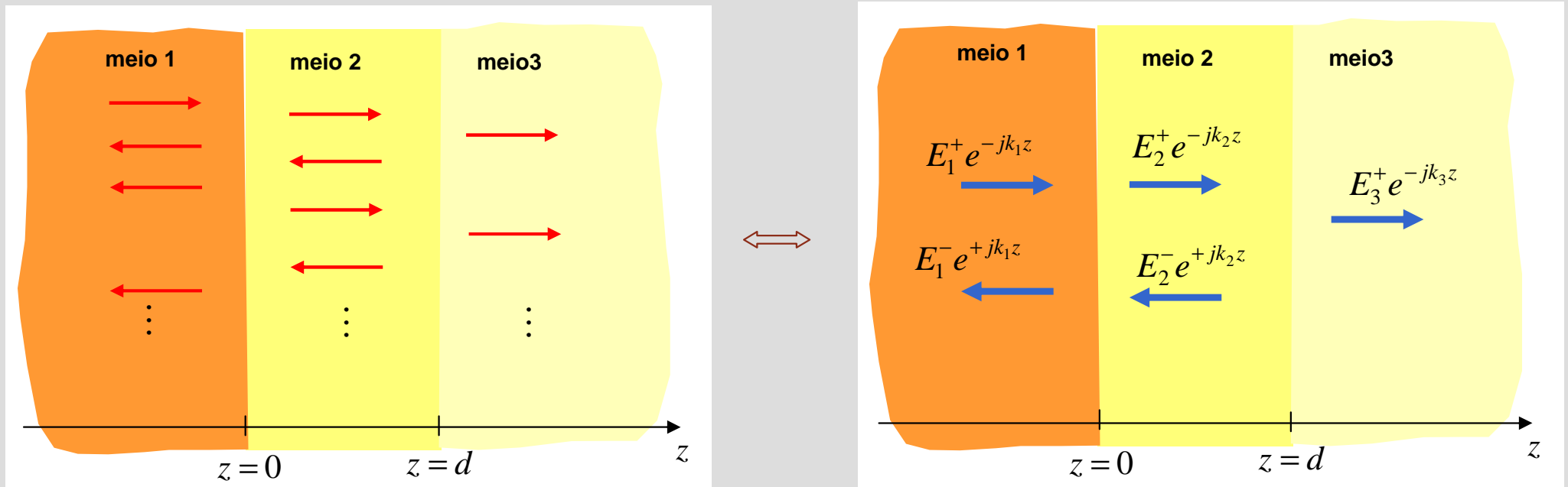
$$E_1^+ = E_0$$

$$E_1^- = \Gamma_{12} E_0 + t_{21} \Gamma_{23} t_{12} E_0 e^{-j2k_2 d} + t_{21} \Gamma_{21} \Gamma_{23}^2 t_{12} E_0 e^{-j4k_2 d} + t_{21} \Gamma_{21}^2 \Gamma_{23}^3 t_{12} E_0 e^{-j6k_2 d} + \dots$$

$$= \Gamma_{12} E_0 + t_{21} t_{12} \Gamma_{23} E_0 e^{-j2k_2 d} \left(1 + \Gamma_{21} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{23}^2 e^{-j4k_2 d} + \dots \right)$$

$$= \Gamma_{12} E_0 + t_{21} t_{12} \Gamma_{23} E_0 e^{-j2k_2 d} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\Gamma_{21} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d} \right)^n = \left(\Gamma_{12} + \frac{t_{21} t_{12} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}}{1 - \Gamma_{21} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}} \right) E_0 = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}}{1 + \Gamma_{12} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}} E_0$$

Incidência normal – múltiplas interfaces

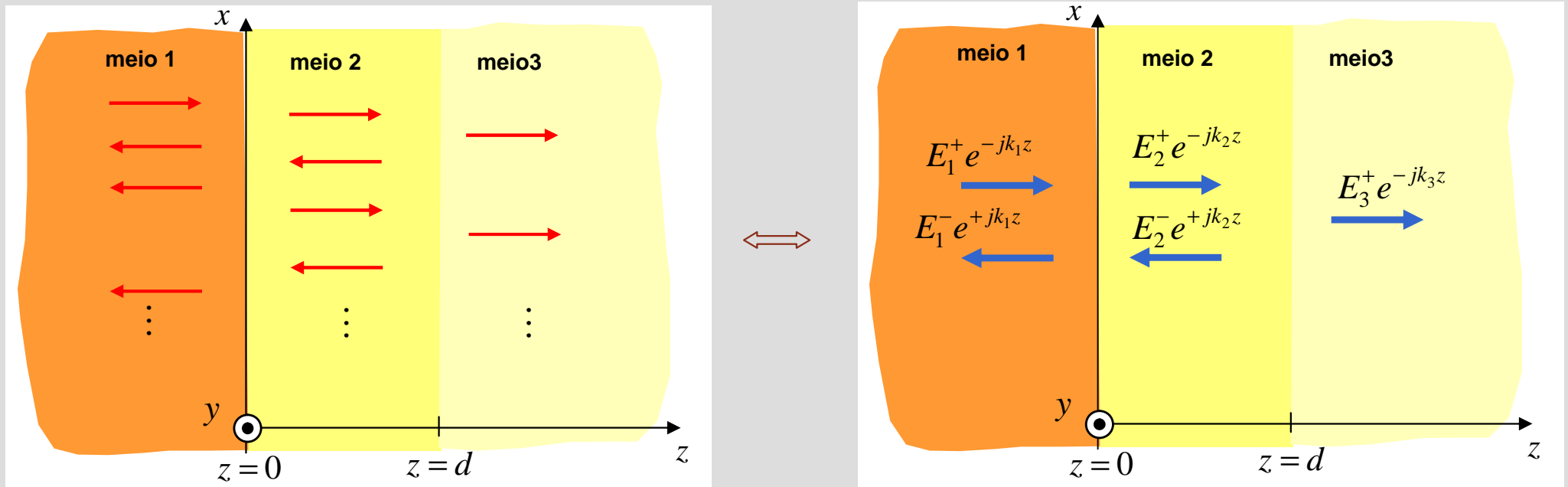


$$E_3^+ = t_{23} t_{12} E_0 e^{-jk_2 d} e^{jk_3 d} + t_{23} \Gamma_{21} \Gamma_{23} t_{12} E_0 e^{-j3k_2 d} e^{jk_3 d} + t_{23} \Gamma_{21}^2 \Gamma_{23}^2 t_{12} E_0 e^{-j5k_2 d} e^{jk_3 d} + t_{23} \Gamma_{21}^3 \Gamma_{23}^3 t_{12} E_0 e^{-j7k_2 d} e^{jk_3 d} + \dots$$

$$= t_{23} t_{12} E_0 e^{j(k_3 - k_2)d} \left(1 + \Gamma_{21} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{23}^2 e^{-j4k_2 d} + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{23}^3 e^{-j6k_2 d} + \dots \right)$$

$$= t_{23} t_{12} E_0 e^{j(k_3 - k_2)d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Gamma_{21} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d} \right)^n = \boxed{\frac{t_{23} t_{12} e^{j(k_3 - k_2)d}}{1 + \Gamma_{12} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}} E_0}$$

Incidência normal em múltiplas interfaces – método alternativo



meio 1

$$\vec{E}_1 = (E_1^+ e^{-jk_1 z} + E_1^- e^{jk_1 z}) \hat{u}_x$$

$$\vec{H}_1 = \left(\frac{E_1^+}{h_1} e^{-jk_1 z} - \frac{E_1^-}{h_1} e^{jk_1 z} \right) \hat{u}_y$$

meio 2

$$\vec{E}_2 = (E_2^+ e^{-jk_2 z} + E_2^- e^{jk_2 z}) \hat{u}_x$$

$$\vec{H}_2 = \left(\frac{E_2^+}{h_2} e^{-jk_2 z} - \frac{E_2^-}{h_2} e^{jk_2 z} \right) \hat{u}_y$$

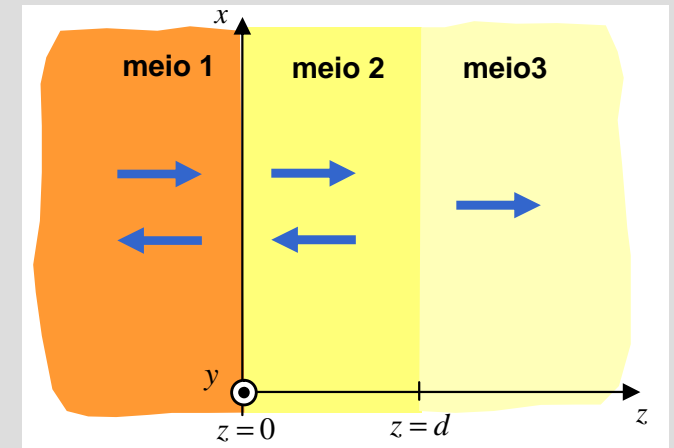
meio 3

$$\vec{E}_3 = E_3^+ e^{-jk_3 z} \hat{u}_x$$

$$\vec{H}_3 = \frac{E_3^+}{h_3} e^{-jk_3 z} \hat{u}_y$$

Múltiplas interfaces – condições fronteira

meios dieléctricos $\rightarrow \vec{J}_s = 0 \rightarrow$
 E_{\tan} contínuo
 H_{\tan} contínuo



$$z = 0 \rightarrow \begin{cases} E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^- \\ \frac{E_1^+ - E_1^-}{h_1} = \frac{E_2^+ - E_2^-}{h_2} \end{cases}$$

$$z = d \rightarrow \begin{cases} E_2^+ e^{-jk_2 d} + E_2^- e^{jk_2 d} = E_3^+ e^{-jk_3 d} \\ \frac{E_2^+ e^{-jk_2 d} - E_2^- e^{jk_2 d}}{h_2} = \frac{E_3^+ e^{-jk_3 d}}{h_3} \end{cases}$$

4 equações
4 incógnitas $\rightarrow (E_1^-, E_2^+, E_2^-, E_3^+)$
considerando $E_1^+ = E_0$

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^-$$

$$\frac{E_1^+ - E_1^-}{h_1} = \frac{E_2^+ - E_2^-}{h_2}$$

$$E_2^+ e^{-jk_2 d} + E_2^- e^{jk_2 d} = E_3^+ e^{-jk_3 d}$$

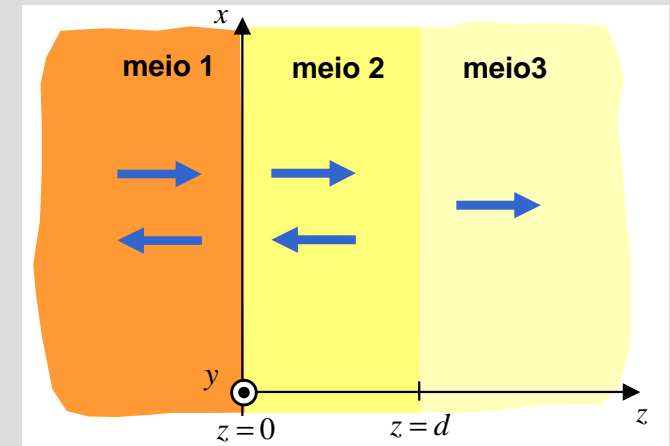
$$\frac{E_2^+ e^{-jk_2 d} - E_2^- e^{jk_2 d}}{h_2} = \frac{E_3^+ e^{-jk_3 d}}{h_3}$$

$$E_1^+ = E_0$$

$$E_1^- = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}}{1 + \Gamma_{12} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}} E_0$$

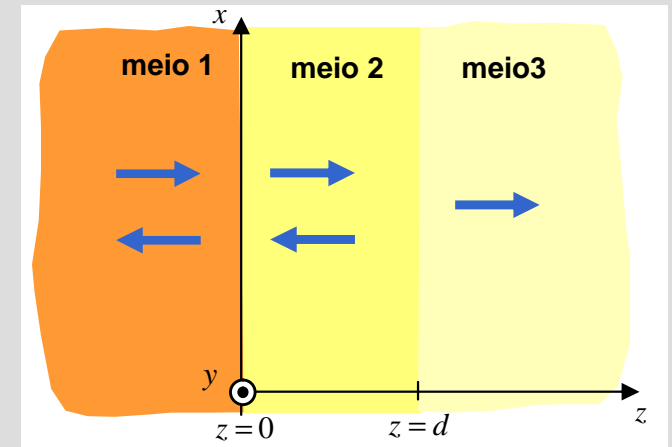
$$E_3^+ = \frac{t_{23} t_{12} e^{j(k_3 - k_2) d}}{1 + \Gamma_{12} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}} E_0$$

expressões anteriores, como seria de esperar



Eliminação de reflexões na interface 1 → 3 através da inserção do meio 2

→ meio 2 é visto como **adaptador**



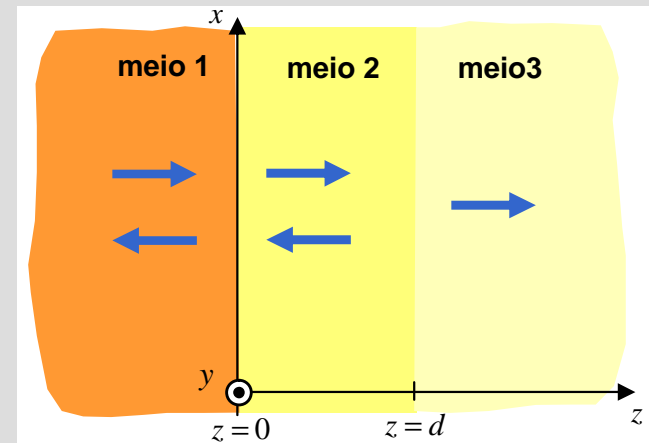
Aplicações práticas

- eliminação de reflexos em lentes
- atenuação de ecos de radar (aviões invisíveis)
- ...

Múltiplas interfaces – adaptador de 1/4

eliminar reflexões $\rightarrow E_1^- = 0 \longrightarrow \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d} = -\Gamma_{12}$

$$h_1 h_3 (1 - e^{-j2k_2 d}) + h_2 (h_1 - h_3) (1 + e^{-j2k_2 d}) - h_2^2 (1 - e^{-j2k_2 d}) = 0$$



adaptador de 1/4 :

$$e^{-j2k_2 d} = -1 \longrightarrow 2k_2 d = m\pi, \quad m \text{ inteiro e ímpar}$$

$$h_2 = \sqrt{h_1 h_3}$$

comprimento de onda
no meio 2

$$d = m \frac{\lambda_2}{4}, \quad m \text{ inteiro e ímpar}$$

$$E_1^- = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}}{1 + \Gamma_{12} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}} E_0$$

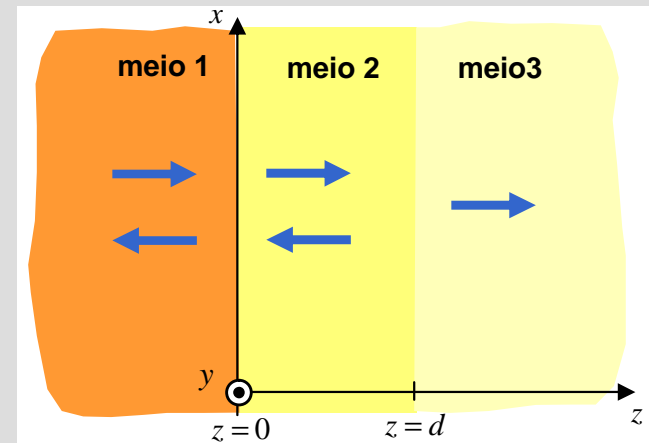
$$E_3^+ = \frac{t_{23} t_{12} e^{j(k_3 - k_2) d}}{1 + \Gamma_{12} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}} E_0$$

Adaptador de 1/4 – comprimentos de onda diferentes

$$h_2 = \sqrt{h_1 h_3} \longrightarrow \Gamma_{12} = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} = \frac{\sqrt{h_3} - \sqrt{h_1}}{\sqrt{h_3} + \sqrt{h_1}}$$

$$\Gamma_{23} = \frac{h_3 - h_2}{h_3 + h_2} = \frac{\sqrt{h_3} - \sqrt{h_1}}{\sqrt{h_3} + \sqrt{h_1}}$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{23} = \Gamma$$



f_p → frequência para a qual foi projectado o adaptador → $l_{2,p} = \frac{v_2}{f_p}$ velocidade no meio 2

$$d = \frac{v_2}{4f_p}$$

$$E_1^- = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}}{1 + \Gamma_{12} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}} E_0$$

$$E_3^+ = \frac{t_{23} t_{12} e^{j(k_3 - k_2)d}}{1 + \Gamma_{12} \Gamma_{23} e^{-j2k_2 d}} E_0$$

à frequência f → $\frac{E_1^-}{E_0} = \frac{\Gamma(1 + e^{-j2k_2 d})}{1 + \Gamma^2 e^{-j2k_2 d}}$

$$|z|^2 = z z^*$$

$$\frac{I_{\text{ref}}}{I_{\text{inc}}} = \frac{|E_1^-|^2}{|E_0|^2} = \frac{2\Gamma^2(1 + \cos(2k_2 d))}{1 + \Gamma^4 + 2\Gamma^2 \cos(2k_2 d)} = \boxed{\frac{F \cos^2 d}{1 + F \cos^2 d}} \quad \text{onde}$$

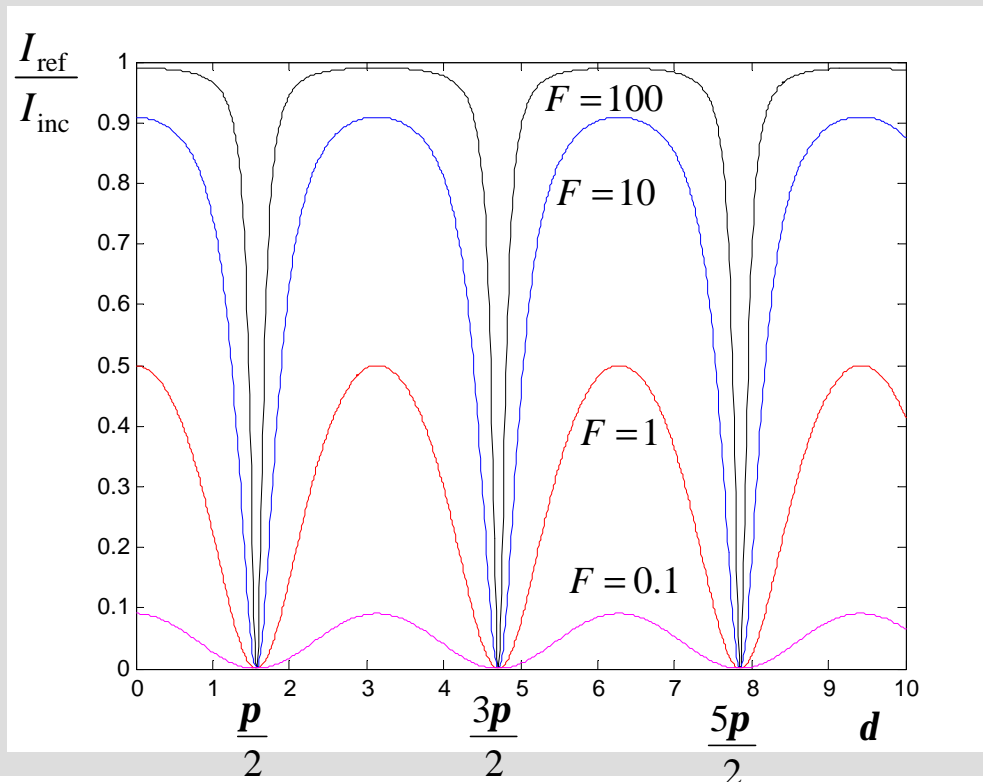
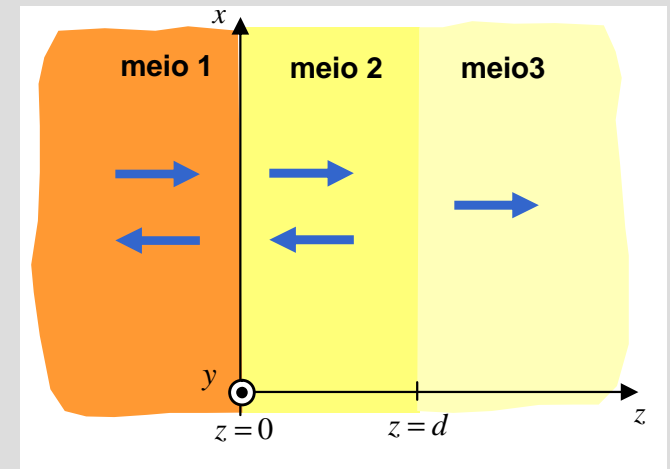
$$F = \left(\frac{2\Gamma}{1 - \Gamma^2} \right)^2$$

$$d = k_2 d = \frac{p}{2} \frac{f}{f_p}$$

Adaptador de 1/4 – comprimentos de onda diferentes

$$\frac{I_{\text{ref}}}{I_{\text{inc}}} = \frac{F \cos^2 d}{1 + F \cos^2 d} \quad \text{onde} \quad F = \left(\frac{2\Gamma}{1-\Gamma^2} \right)^2 \quad \text{e} \quad d = \frac{p}{2} \frac{f}{f_p}$$

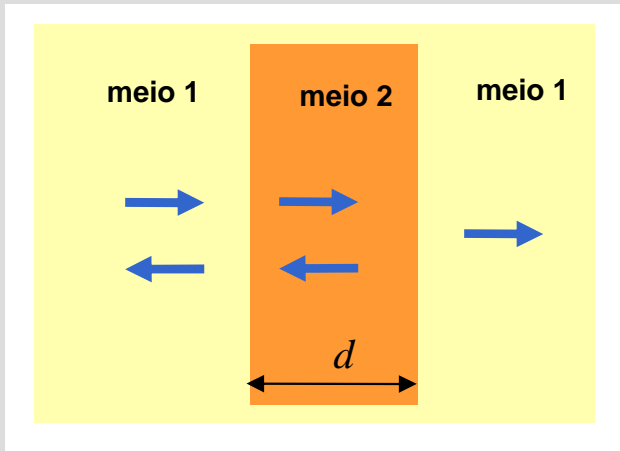
$$\begin{array}{l} \Gamma = 0 \rightarrow F = 0 \\ |\Gamma| \rightarrow 1 \rightarrow F \rightarrow \infty \end{array} \quad \begin{array}{l} f = 0 \rightarrow d = 0 \\ f \rightarrow \infty \rightarrow d \rightarrow \infty \end{array}$$



Etalon de Fabry-Perot

meio 1 = meio 3 $\longrightarrow h_1 = h_3 \longrightarrow \Gamma_{12} = -\Gamma_{23} = \Gamma$

$$t_{23}t_{12} = 1 - \Gamma^2$$

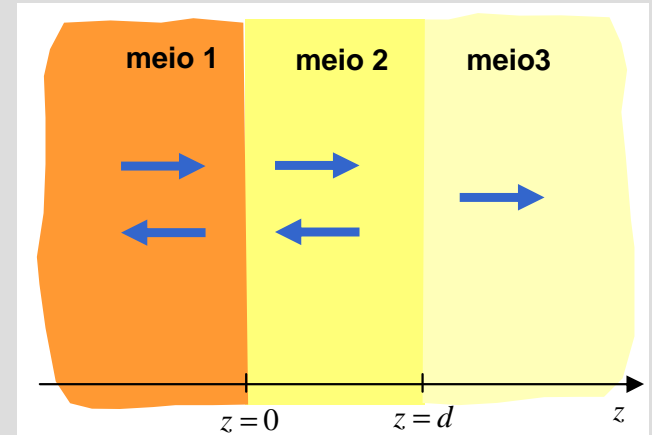


$$\frac{E_1^-}{E_0} = \frac{\Gamma(1 - e^{-j2k_2d})}{1 - \Gamma^2 e^{-j2k_2d}}$$

$$\frac{E_3^+}{E_0} = \frac{(1 - \Gamma^2)e^{j(k_3 - k_2)d}}{1 - \Gamma^2 e^{-j2k_2d}}$$

$$|z|^2 = zz^*$$

$$\left| \frac{E_3^+}{E_0} \right|^2 = \frac{(1 - \Gamma^2)^2}{1 + \Gamma^4 - 2\Gamma^2 \cos(2k_2d)}$$



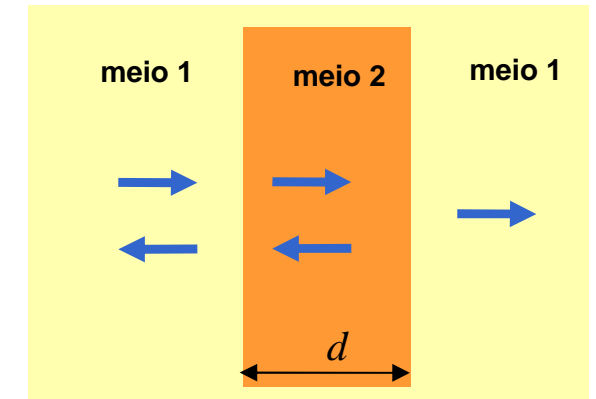
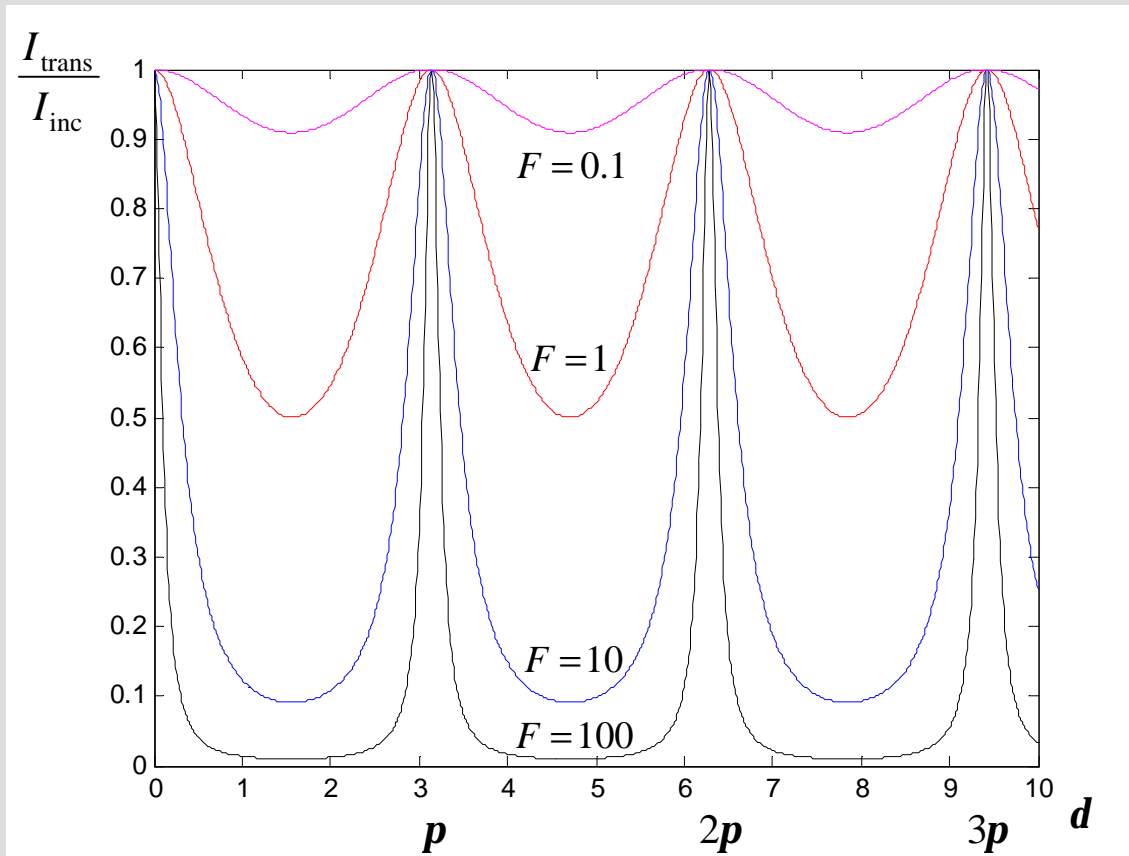
$$E_1^- = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23} e^{-j2k_2d}}{1 + \Gamma_{12}\Gamma_{23} e^{-j2k_2d}} E_0$$

$$E_3^+ = \frac{t_{23}t_{12} e^{j(k_3 - k_2)d}}{1 + \Gamma_{12}\Gamma_{23} e^{-j2k_2d}} E_0$$

$$\frac{I_{\text{trans}}}{I_{\text{inc}}} = \frac{1}{1 + F \sin^2(d)}$$

onde $F = \left(\frac{2\Gamma}{1 - \Gamma^2} \right)^2$

$$d = k_2 d = \frac{2\mathbf{p} f n_2 d}{c}$$

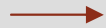


$$\frac{I_{\text{trans}}}{I_{\text{inc}}} = \frac{1}{1 + F \sin^2(d)}$$

$$F = \left(\frac{2\Gamma}{1 - \Gamma^2} \right)^2 \quad d = \frac{2p f n_2 d}{c}$$

- **possível aplicação**

filtrar os modos das cavidade ópticas de lasers para obter oscilação a uma única frequência



Espectro angular

Função de transferência associada à propagação

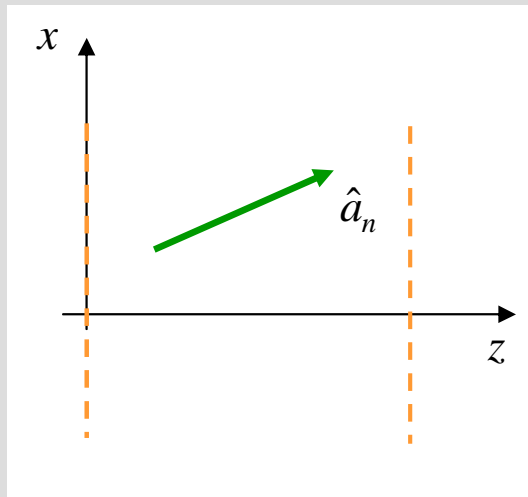
Aproximação de Fresnel

Aproximação de Fraunhofer

Padrão de difracção de uma fenda

Padrão de difracção de N fendas

Consideremos uma onda que se propaga no plano xz , cujo campo é definido por



$$\vec{E} = U(x, z) \hat{p}$$

← versor que indica polarização

↑
amplitude complexa
(inclui fase adquirida durante propagação)

Consideremos agora o plano $z = 0$ e o plano paralelo a esse que está localizado em z

$U(x, 0)$ → a amplitude complexa do campo no primeiro plano

$U(x, z)$ → a amplitude complexa do campo no segundo plano

objectivo: conhecido $U(x, 0)$ → calcular $U(x, z)$

Transformada de Fourier temporal

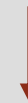
$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



decomposição em sinais com diferentes frequências

Transformada de Fourier espacial

$$G(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{jk_x x} dx$$
$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(k_x) e^{-jk_x x} dk_x$$



decomposição em sinais com diferentes componentes do número de onda segundo x

nota:

ondas harmónicas $\rightarrow v(\vec{r}, t) = \text{Re}\{V_0 e^{j(\omega t - k \hat{a}_n \cdot \vec{r})}\}$

Transformada de Fourier espacial – exemplos

amplitude complexa $\rightarrow U(x, z)$

$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx \quad \leftarrow \quad A(k_x, z) = F\{U(x, z)\}$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x \quad \leftarrow \quad A(k_x, z) = F^{-1}\{U(x, z)\}$$

Exemplo 1

$U(x, z) = e^{-jkz}$ \leftarrow onda plana com amplitude unitária que se propaga segundo $+z$



$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jkz} e^{jk_x x} dx = e^{-jkz} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk_x x} dx = e^{-jkz} F\{1\} = 2p \mathbf{d}(k_x) e^{-jkz}$$

Exemplo 2

$$A(k_x, z) = 2p \, d(k_x - k_{x0}) e^{-jk_z z}$$

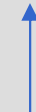


$$U(x, z) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} 2p \, d(k_x - k_{x0}) e^{-jk_z z} e^{-jk_x x} dk_x = e^{-jk_z z} \int_{-\infty}^{+\infty} d(k_x - k_{x0}) e^{-jk_x x} dk_x = e^{-jk_z z} e^{-jk_{x0} x} = e^{-j(k_{x0} x + k_z z)}$$

$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$

$$= e^{-j(k_{x0} x + k_z z)}$$

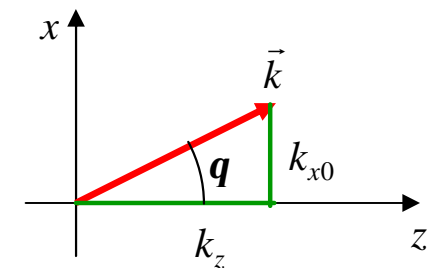


onda plana com amplitude unitária que se propaga segundo: $\hat{a}_n = \frac{k_{x0} \hat{u}_x + k_z \hat{u}_z}{k}$

nota

$$k = |\vec{k}| \longrightarrow k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} \longrightarrow \sin \mathbf{q} = \frac{k_x}{k}$$

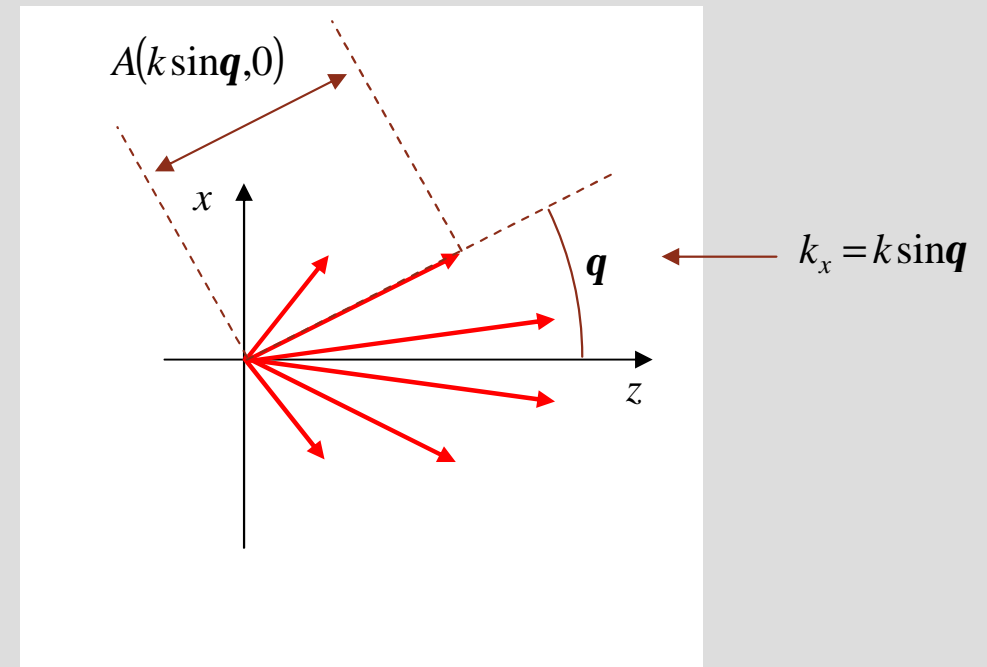
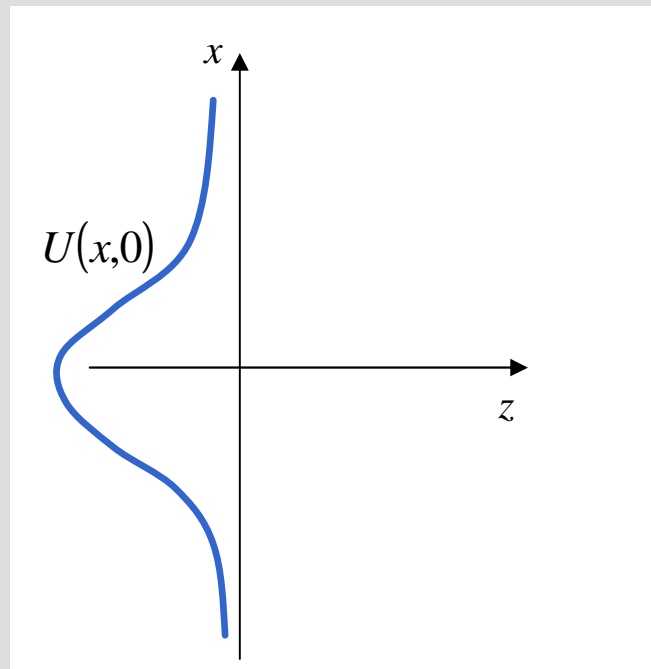
$$k = w \sqrt{me}$$



$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$

← decomposição em ondas planas de diferentes direcções e amplitudes



→ $A(k_x, z)$ é conhecido como **espectro angular**

Equação de Helmholtz no domínio das frequências espaciais

A propagação de uma onda electromagnética num meio LHI sem fontes é governada pela **equação de Helmholtz**:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0$$

onde $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

$$\nabla^2 U(x, z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$

$$F\{U\} = A$$

$$F\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -jk_x A$$

$$\longrightarrow F\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = (-jk_x)^2 A = -k_x^2 A$$

$$-k_x^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2 A = 0$$

$$k^2 = k_x^2 + k_z^2$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k_z^2 A = 0$$

Função de transferência associada à propagação

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k_z^2 A = 0$$

$$A(k_x, z) = A(k_x, 0) e^{-jk_z z}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_z^2$$

transformada
após distância z

$$A(k_x, z) = A(k_x, 0) e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2} z}$$

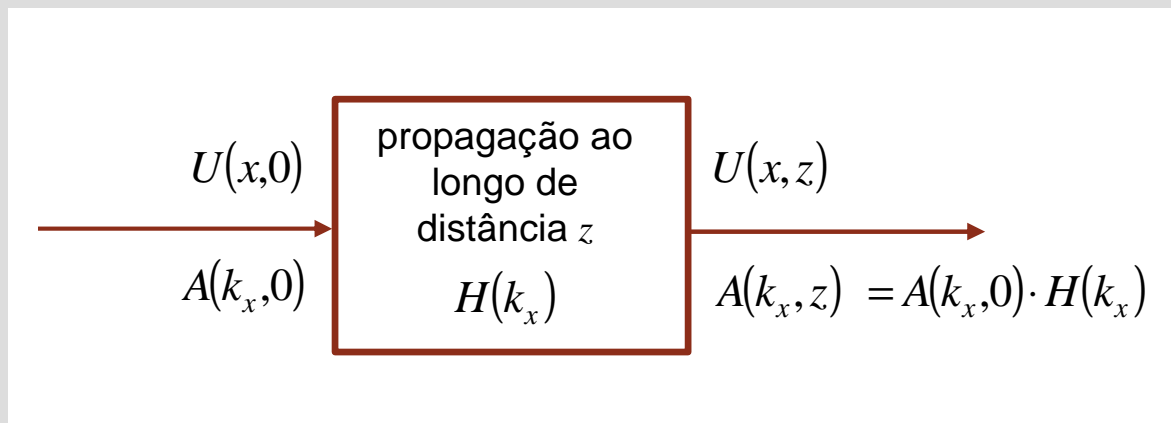
transformada
em z = 0

função de transferência
da propagação

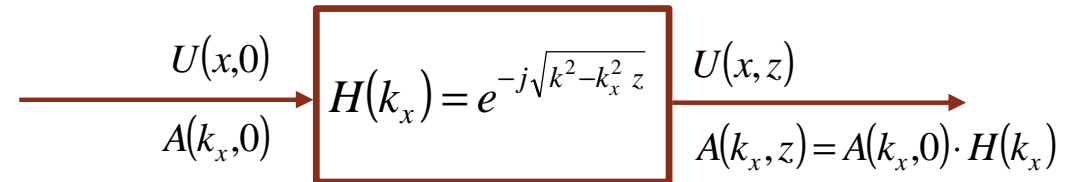
$$H(k_x) = e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2} z}$$

$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$



Função de transferência associada à propagação



Notas:

1. $H(k_x)$ é função \rightarrow do meio e da frequência da onda através da dependência em $k = w\sqrt{me}$
 \rightarrow da distância z

2. $-\infty < k_x < +\infty$ \rightarrow se $|k_x| \leq k \rightarrow k_z$ real \rightarrow onda **em propagação**
 $k = w\sqrt{me}$
 $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2}$ se $|k_x| > k \rightarrow k_z$ imaginário \rightarrow onda **evanescente** \rightarrow amplitude decresce exponencialmente com z

necessário considerar apenas os k_x tais que $|k_x| \leq k$

para z suficientemente elevados

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} U(x,0) \\ A(k_x,0) \end{array} & \xrightarrow{\boxed{H(k_x) = e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2} z}}} & \begin{array}{l} U(x,z) \\ A(k_x,z) = A(k_x,0) \cdot H(k_x) \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 A(k_x, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx \\
 U(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, 0) H(k_x) e^{-jk_x x} dk_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} U(x', 0) e^{jk_x x'} dx' \right] H(k_x) e^{-jk_x x} dk_x \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', 0) H(k_x) e^{jk_x (x' - x)} dx' dk_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', 0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H(k_x) e^{jk_x (x' - x)} dk_x \right] dx'
 \end{aligned}$$

$$\downarrow H(k_x) = e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2} z}$$

$$\boxed{U(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', 0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\sqrt{k^2 - k_x^2} z} e^{jk_x (x' - x)} dk_x \right] dx'}$$

Admitamos que

$$|k_x| \ll k$$

$$\sqrt{k^2 - k_x^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{k_x}{k}\right)^2} \cong k \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_x}{k}\right)^2 \right] = k - \frac{1}{2k} k_x^2$$

$$\rightarrow H_{\text{FRESNEL}}(k_x) = e^{-jkz} e^{j\frac{k_x^2}{2k}z}$$

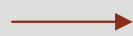
$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$

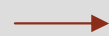
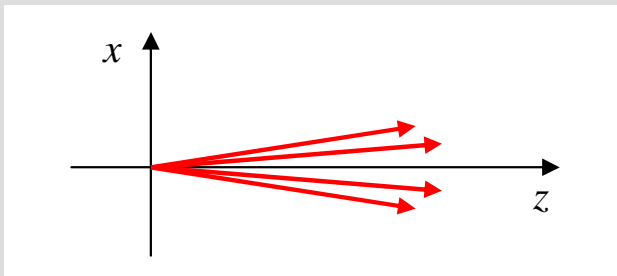
$$H(k_x) = e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2} z}$$

Nota:

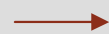
$$|k_x| \ll k$$



consideram-se apenas as ondas planas com componentes segundo x do vector de onda muito menores do que k



pequenos ângulos de difracção



aproximação de Fresnel é também conhecida como **aproximação paraxial**

$$U(x, z) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', 0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H(k_x) e^{jk_x(x'-x)} dk_x \right] dx'$$

$$H_{\text{FRESNEL}}(k_x) = e^{-jkz} e^{j\frac{k_x^2}{2k}z}$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2p} e^{jkz} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', 0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\left[\frac{z}{2k}k_x^2 + (x'-x)k_x\right]} dk_x \right] dx'$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx)} dx = \sqrt{\frac{p}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$U(x, z) = \sqrt{\frac{j}{Iz}} e^{jkz} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', 0) e^{-j\frac{k}{2z}(x-x')^2} dx'$$

$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

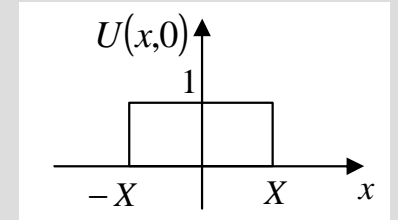
$$U(x, z) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$

Aproximação de Fresnel – difracção através de uma fenda

Seja

$$U(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq X \\ 0, & |x| > X \end{cases}$$

← corresponde a uma onda de amplitude unitária que se propaga segundo +z e que em z = 0 incide numa fenda de largura 2X



$$U(x,z) = \sqrt{\frac{j}{Iz}} e^{jkz} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x',0) e^{-j\frac{k}{2z}(x-x')^2} dx'$$

$$U(x,z) = \sqrt{\frac{j}{Iz}} e^{jkz} \int_{-X}^X e^{-j\frac{k}{2z}(x^2 - 2xx' + x'^2)} dx' = \sqrt{\frac{j}{Iz}} e^{jkz} e^{-j\frac{k}{2z}x^2} \int_{-X}^X e^{-j\frac{k}{2z}(x'^2 - 2xx')} dx' = \dots$$

Aproximação de Fraunhofer

Admitamos que

$$z \gg \frac{kX^2}{2}$$

onde $X = \max(x')$

$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$

$$\frac{2z}{kX^2} \gg 1 \longrightarrow \frac{kX^2}{2z} \ll 1 \longrightarrow e^{-j\frac{kX^2}{2z}} \cong 1 \longrightarrow e^{-j\frac{kx'^2}{2z}} \cong 1$$

$$\longrightarrow U(x, z) = \sqrt{\frac{j}{Iz}} e^{jkz} e^{-j\frac{k}{2z}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', 0) e^{-j\frac{kx'^2}{2z}} e^{j\frac{kxx'}{z}} dx' \cong \sqrt{\frac{j}{Iz}} e^{jkz} e^{-j\frac{k}{2z}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', 0) e^{j\frac{kx}{z}x'} dx'$$

$$\longrightarrow U(x, z) = \sqrt{\frac{j}{Iz}} e^{jkz} e^{-j\frac{k}{2z}x^2} A\left(\frac{kx}{z}, 0\right)$$

$$A\left(\frac{kx}{z}, 0\right)$$

Aproximação de Fraunhofer – difracção através de uma fenda

Consideremos a difracção através de uma fenda de largura $2X$ localizada em $z = 0$:

$$U(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq X \\ 0, & |x| > X \end{cases}$$

$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$

$$A(k_x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0) e^{jk_x x} dx = \int_{-X}^{+X} e^{jk_x x} dx = \left[\frac{e^{jk_x x}}{jk_x} \right]_{-X}^{+X} = \frac{e^{jk_x X} - e^{-jk_x X}}{jk_x} = \frac{2\sin(k_x X)}{k_x}$$

$$U(x, z) = \sqrt{\frac{j}{I z}} e^{jkz} e^{-j\frac{k}{2z}x^2} A\left(\frac{kx}{z}, 0\right) \longrightarrow$$

$$|U(x, z)|^2 = \frac{1}{I z} \left| A\left(\frac{kx}{z}, 0\right) \right|^2$$

$$|U(x, z)|^2 = \frac{4}{I z} \frac{\sin^2\left(\frac{kXx}{z}\right)}{\left(\frac{kx}{z}\right)^2}$$

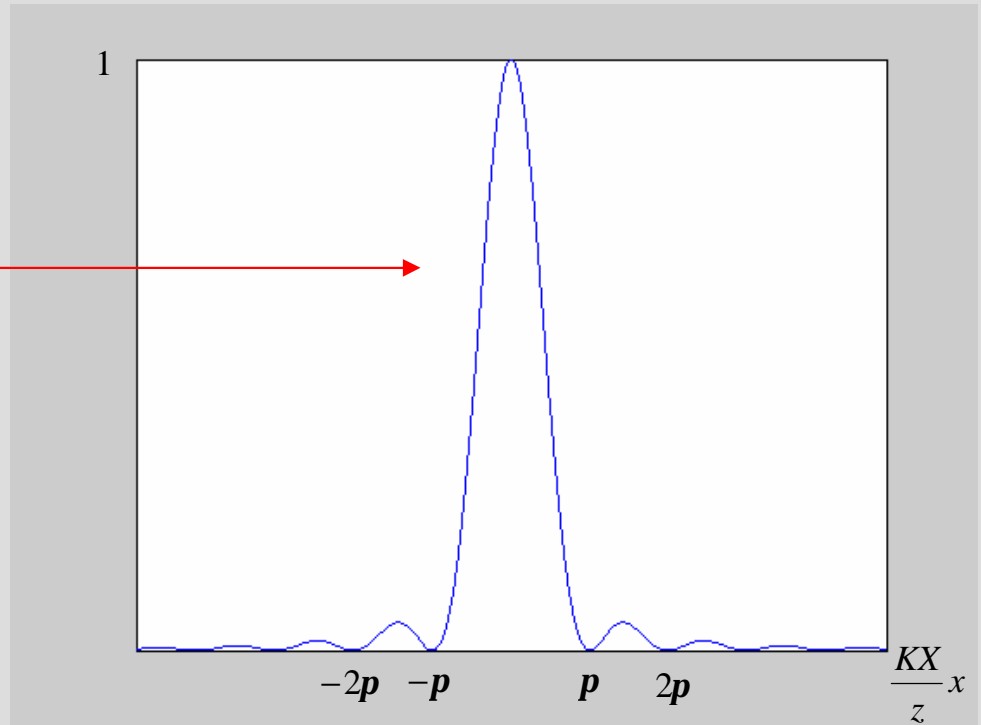
Aproximação de Fraunhofer – difracção através de uma fenda

$$|U(x, z)|^2 = \frac{4}{I z} \frac{\sin^2\left(\frac{kXx}{z}\right)}{\left(\frac{kx}{z}\right)^2} \longrightarrow \left(|U(x, z)|^2\right)_{\text{MAX}} = |U(0, z)|^2 = \frac{4X^2}{I z}$$

$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

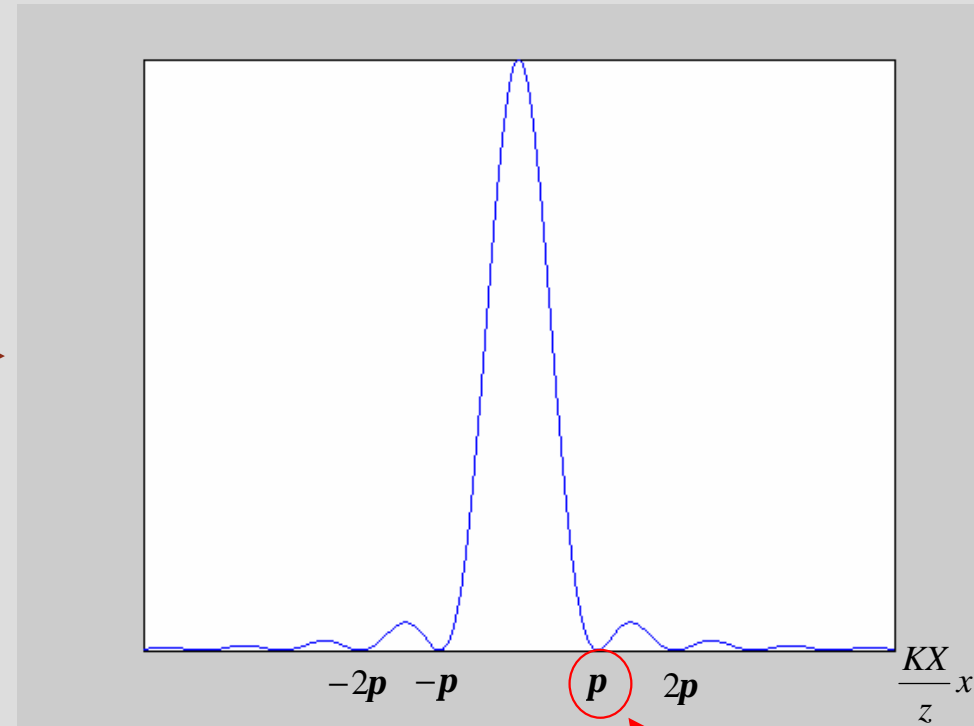
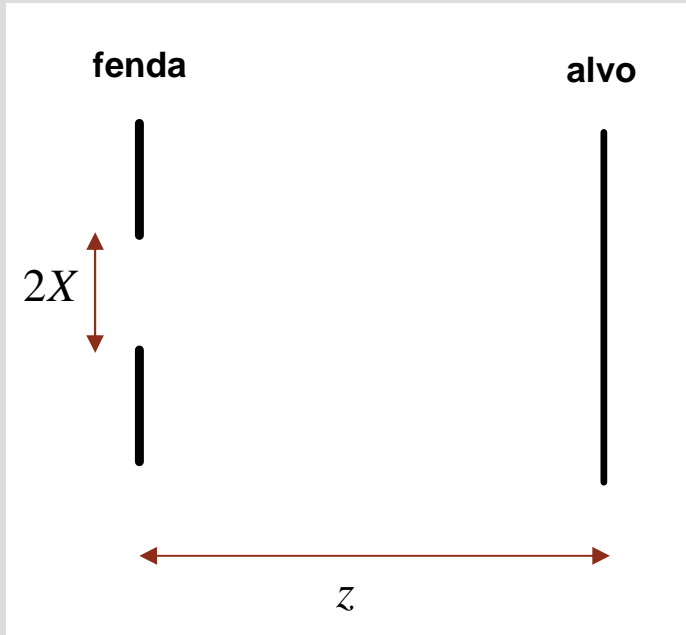
$$U(x, z) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$

intensidade normalizada = $\frac{|U(x, z)|^2}{\left(|U(x, z)|^2\right)_{\text{MAX}}} = \frac{\sin^2\left(\frac{kX}{z} x\right)}{\left(\frac{kX}{z} x\right)^2}$

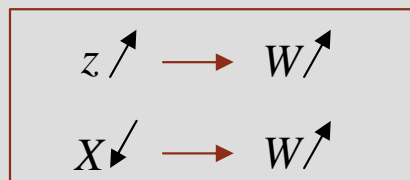


Aproximação de Fraunhofer – difracção através de uma fenda

intensidade normalizada no alvo



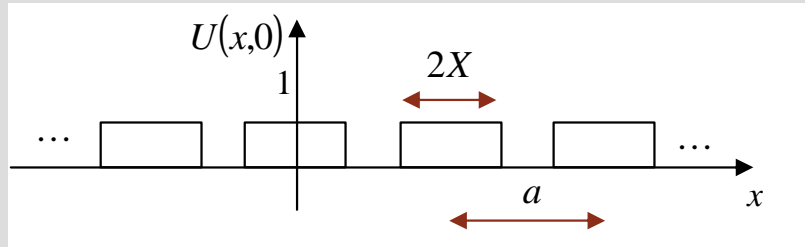
$$\frac{kXx}{z} = p \rightarrow x = \frac{zp}{kX} = \frac{zI}{2X}$$



$$W = \frac{Iz}{X}$$

Aproximação de Fraunhofer – difracção através de N fendas

Consideremos a difracção através de N fendas de largura $2X$ e separadas de uma distância a :



importante: $a > 2X$

$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$

$$U(x, 0) = \sum_{i=0}^{N-1} U_0 \left(x - ia + (N-1) \frac{a}{2} \right) \quad \text{onde} \quad U_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq X \\ 0, & |x| > X \end{cases}$$

$$A(k_x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0) e^{jk_x x} dx = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \int_{[ia-(N-1)\frac{a}{2}-X]^{-X}}^{[ia-(N-1)\frac{a}{2}+X]^{+X}} e^{jk_x x} dx \right\} = \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{e^{jk_x x}}{jk_x} \right]_{[ia-(N-1)\frac{a}{2}-X]^{-X}}^{[ia-(N-1)\frac{a}{2}+X]^{+X}} = \frac{2 \sin(k_x X)}{k_x} \sum_{i=0}^{N-1} e^{jk_x [ia-(N-1)\frac{a}{2}]}$$

$$= \frac{2 \sin(k_x X)}{k_x} e^{-jk_x (N-1)\frac{a}{2}} \sum_{i=0}^{N-1} (e^{jk_x a})^i = \frac{2 \sin(k_x X)}{k_x} e^{-jk_x (N-1)\frac{a}{2}} \frac{1 - e^{jk_x Na}}{1 - e^{jk_x a}} = \frac{2 \sin(k_x X)}{k_x} \frac{\sin\left(\frac{k_x Na}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k_x a}{2}\right)}$$

Aproximação de Fraunhofer – difracção através de N fendas

$$A(k_x, 0) = \frac{2 \sin(k_x X)}{k_x} \frac{\sin\left(\frac{k_x Na}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k_x a}{2}\right)}$$

$$A(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) e^{jk_x x} dx$$

$$U(x, z) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, z) e^{-jk_x x} dk_x$$

$$\left| U(x, z) \right|^2 = \frac{1}{I z} \left| A\left(\frac{kx}{z}, 0\right) \right|^2$$

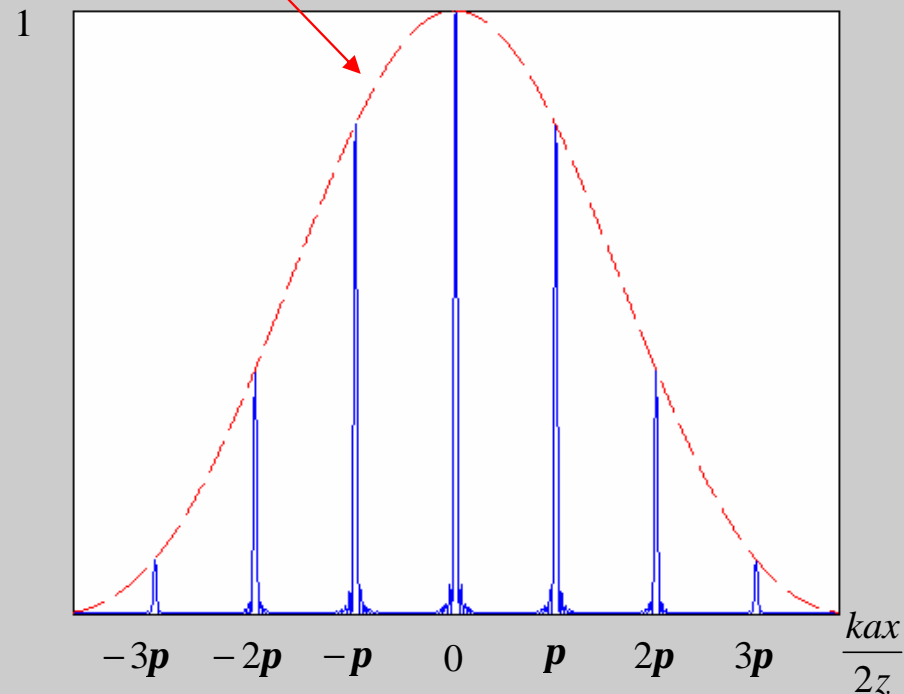
$$\left| U(x, z) \right|^2 = \frac{4}{I z} \frac{\sin^2\left(\frac{kXx}{z}\right)}{\left(\frac{kx}{z}\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{kNax}{2z}\right)}{\sin^2\left(\frac{kax}{2z}\right)}$$

$$\left(\left| U(x, z) \right|^2 \right)_{\text{MAX}} = \left| U(0, z) \right|^2 = \frac{4X^2 N^2}{I z}$$

Aproximação de Fraunhofer – difracção através de N fendas

$$\text{intensidade normalizada} = \frac{|U(x,z)|^2}{\left(|U(x,z)|^2\right)_{\text{MAX}}} = \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{kXx}{z}\right)}{\left(\frac{kXx}{z}\right)^2}}_{\text{difracção}} \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{kNax}{2z}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{kax}{2z}\right)}}_{\text{padrão de interferência}}$$

Se $a = 8X$
 $N = 25$



$$\text{intensidade normalizada} = \frac{|U(x,z)|^2}{\left(|U(x,z)|^2\right)_{\text{MAX}}} = \frac{\sin^2\left(\frac{kXx}{z}\right)}{\left(\frac{kXx}{z}\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{kNax}{2z}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{kax}{2z}\right)}$$

$$\text{intensidade normalizada} = \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin(Nv)}{N \sin(v)}\right)^2$$

guião:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin(Nv)}{N \sin(v)}\right)^2$$

$$u = \frac{p s}{l} \sin q$$

$$v = \frac{p a}{l} \sin q$$

$$\sin q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$\sin q \cong \tan q = \frac{x}{z}$$

q pequeno

$$u = \frac{p s x}{l z} = \frac{k s x}{2 z} = \frac{k X x}{z}$$

$$v = \frac{p a z}{l z} = \frac{k a x}{2 z}$$

$$s = 2X$$