Complementos de Álgebra Linear

Ano lectivo 2007/2008

2º Semestre

Capítulo I

Endomorfismos e subespaços invariantes

1. Recapitulação do conceito de endomorfismo

Definição: Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$. Chama-se endomorfismo de E a toda a aplicação linear $\varphi : E \to E$.

Representação matricial

E, φ $\rightsquigarrow$ definidos como acima

$B = (e_1, \ldots, e_n)$ $\rightsquigarrow$ base ordenada de E.

Matriz de φ na base B $\rightsquigarrow$ $[\varphi]_B = A := [A_1 | \cdots | A_n]$

onde $A_i := (\varphi(e_i))_B$, $i = 1, \ldots, n$

Notação

$[\,.\,]_B$ denota a matriz do endomorfismo . na base B.

$(\,\square\,)_B$ denota a matriz (das coordenadas) do elemento $\square$ na base B.

<u>Exemplo 1</u> : Sejam $E = \mathbb{R}^2$ e $B = (e_1, e_2)$ uma base de E.
Consideremos o endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 2e_1 + 3e_2 \\ \varphi(e_2) = e_1 + e_2 \end{cases}.$$

Neste caso temos que : $(\varphi(e_1))_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$(\varphi(e_2))_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

e portanto $[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ □

<u>Observação</u> : Sejam $V = (v)_B$, $\Phi = (\varphi(v))_B$, e $A = [\varphi]_B$.
Então :

$$\boxed{\Phi = AV} \qquad (1).$$

(Verifique esta igualdade para o exemplo anterior!)

<u>Mudança de base</u>

$E \rightsquigarrow$ espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$.
$B = (e_1, \dots, e_n)$ e $B' = (e'_1, \dots, e'_n) \rightsquigarrow$ bases de E

Dado $v \in E$, definamos $V := (v)_B$ e $V' := (v)_{B'}$.
Qual a relação entre V' e V ?

Suponhamos que $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, i.e., $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ (2).

Então, se exprimirmos os elementos $e_1, \dots, e_n$ (da base B) em termos da base B', obtemos o elemento v em termos de B'.

De facto, seja $\quad e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \, e'_j \quad , i = 1, \dots, n$.

Substituindo em (2) vem que:

$$v = v_1 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^1 \, e'_j + \dots + v_n \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n \, e'_j$$

$$= (v_1 \alpha_1^1 + \dots + v_n \alpha_1^n) \, e'_1 + \dots + (v_1 \alpha_n^1 + \dots + v_n \alpha_n^n) \, e'_n \quad ,$$

ou seja:

$$V' := (v)_{B'} = \begin{bmatrix} v_1 \alpha_1^1 + \dots + v_n \alpha_1^n \\ \vdots \\ v_1 \alpha_n^1 + \dots + v_n \alpha_n^n \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & & \alpha_n^n \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ (e_1)_{B'} & \dots & (e_n)_{B'} \end{array} \end{array} V \, .$$

Concluimos pois que:

$$V' = \underbrace{[\, (e_1)_{B'} \mid \dots \mid (e_2)_{B'} \,]}_{\text{matriz de mudança de base (de } B \text{ para } B')} \, V \qquad (3).$$

<u>Exemplo 2</u>:

Seja $B = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de $E = \mathbb{R}^3$, e definamos $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ com $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = 2e_2 + e_3$ e $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$ (Verifique que os elementos e'_1, e'_2, e'_3 são linearmente independentes e que, portanto, B' é de facto uma base de $\mathbb{R}^3$).

A matriz de mudança de base (de B para B') é dada por:

$$[\, (e_1)_{B'} \mid (e_2)_{B'} \mid (e_3)_{B'} \,] =: S$$

Como calcular esta matriz?

Notemos que $(e'_i)_{B'} = S\,(e'_i)_B$, $i=1,2,3$, o que implica que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S\,[\,(e'_1)_B \mid (e'_2)_B \mid (e'_3)_B\,]$$

ou, equivalentemente:

$$S = [\,(e'_1)_B \mid (e'_2)_B \mid (e'_3)_B\,]^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

<u>Observação</u>

Decorre deste exemplo que:

$$\underbrace{[\,(e_1)_{B'} \mid (e_2)_{B'} \mid (e_3)_{B'}\,]}_{\substack{\text{matriz de mudança de} \\ \text{base (de } B \text{ para } B')}} = \underbrace{[\,(e'_1)_B \mid (e'_2)_B \mid (e'_3)_B\,]^{-1}}_{\substack{\text{matriz de mudança de base} \\ \text{(de } B' \text{ para } B)}}.$$

O mesmo resultado é também válido no caso geral. (Demonstre-o!).

<u>Efeito de uma mudança de base na representação matricial de um endomorfismo</u>

$E \rightsquigarrow$ e.v. de dimensão n sobre $\mathbb{K}$

$B = (e_1, \dots, e_n)$ e $B' = (e'_1, \dots, e'_n) \rightsquigarrow$ bases de E

$\varphi : E \to E \rightsquigarrow$ endomorfismo

$A := [\varphi]_B \quad , \quad A' := [\varphi]_{B'}$

$S := [\,(e_1)_{B'} \mid \cdots \mid (e_n)_{B'}\,] \rightsquigarrow$ matriz de mudança de base de B para B'

$S^{-1} = [\,(e'_1)_B \mid \cdots \mid (e'_n)_B\,] \rightsquigarrow$ matriz de mudança de base de B' para B

Sabemos que:

$$
\begin{aligned}
A' := [\varphi]_{B'} &:= [\,(\varphi(e'_1))_{B'} \mid \cdots \mid (\varphi(e'_n))_{B'}\,] \\
&\overset{(3)}{=} S\,[\,(\varphi(e'_1))_B \mid \cdots \mid (\varphi(e'_n))_B\,] \\
&\overset{(1)}{=} S\,[\,A(e'_1)_B \mid \ldots \mid A(e'_n)_B\,] \\
&= S A\,[\,(e'_1)_B \mid \ldots \mid (e'_n)_B\,] = S A S^{-1},
\end{aligned}
$$

i.e.:

$$\boxed{A' = S A S^{-1}} \qquad (4)$$

<u>Definição</u>: Duas matrizes quadradas e da mesma dimensão, A e A', dizem-se <u>semelhantes</u> quando existe uma matriz regular S tal que (4) se verifica. A transformação $* \mapsto S * S^{-1}$ (definida sobre as matrizes quadradas de uma dada dimensão) chama-se a <u>transformação de semelhança associada à matriz S</u>.

Com esta nova nomenclatura, temos então que:

Proposição

(1) Sejam $A = [\varphi]_B$ e $A' = [\varphi]_{B'}$ duas representações matriciais do endomorfismo φ nas bases B e B', respectivamente.

Então A e A' são semelhantes, com

$$A' = SAS^{-1}$$

onde S é a matriz de mudança de base de B para B'.

(2) Reciprocamente, se $A = [\varphi]_B$ e A' é uma matriz semelhante a A, então existe uma base B' tal que $[\varphi]_{B'} = A'$. Mais concretamente: suponhamos que $A' = SAS^{-1}$. Então a matriz de mudança de base de B para B' é dada por S.

Demonstração

(1) Demonstrado na página anterior.

(2) Exercício! ■

Exemplo 3:

Sejam E, B e φ como no Exemplo 1, e consideremos uma nova base $B' = (e'_1, e'_2)$ de $E = \mathbb{R}^2$ definida por:

$$(e'_1)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (\text{i.e.,} \quad e'_1 = e_1 + e_2)$$

$$(e'_2)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{i.e.,} \quad e'_2 = e_1).$$

A matriz S de mudança de base de B para B' é dada por:

$$S = [\,(e_1)_{B'} \mid (e_2)_{B'}\,] = [\,(e'_1)_B \mid (e'_2)_B\,]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Portanto $\quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad$ e $\quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Deste modo

$$A' := [\varphi]_{B'} = S\,[\varphi]_B\,S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{cf. Exemplo 1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i.e.:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Verifique que de facto $(\varphi(e'_1))_{B'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $(\varphi(e'_2))_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$!) □

Observação

Designemos por E_B e $E_{B'}$ o espaço vectorial E munido das bases B e B', respectivamente.

Seja $\varphi : E \to E$ um endomorfismo, e sejam

$A := [\varphi]_B$

$A' := [\varphi]_{B'}$

e

$S \rightsquigarrow$ matriz de mudança de base de B para B'.

A igualdade $A' = SAS^{-1}$ significa que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
E_{B'} \arrow[r, "A'"] & E_{B'} \\
E_B \arrow[u, "S"] \arrow[r, "A"'] & E_B \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

2. Subespaços invariantes

Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$

$\varphi : E \to E$ um endomorfismo

$B = (e_1, \dots, e_n)$ uma base ordenada de E

F um subespaço de E de dimensão p

<u>Definição</u> : F é um <u>subespaço φ-invariante</u> (ou invariante com respeito a φ) se

$$\boxed{\varphi(F) \subseteq F}\ .$$

<u>Casos notáveis de subespaços φ-invariantes</u>:

1) $F = \{0_E\}$ $\qquad \varphi(\{0_E\}) = \{0_E\} \subseteq \{0_E\}$

2) $F = E$ $\qquad \varphi(E) \subseteq E$

3) $F = \ker \varphi^k \quad (k = 1, 2, \dots)$

$\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k \text{ vezes}}$

$$\varphi^k(\varphi(F)) = \varphi(\varphi^k(F)) = \varphi(\{0_E\}) = \{0_E\}$$

$$\therefore\ \varphi(F) \subseteq \ker \varphi^k = F\ .$$

4) $F = \operatorname{Im} \varphi^k \quad (k = 1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned} \varphi(\operatorname{Im} \varphi^k) &= \varphi(\varphi^k(E)) \\ &= \varphi^k(\varphi(E)) \\ &\subseteq \varphi^k(E) = \operatorname{Im} \varphi^k\ . \end{aligned}$$

<u>Proposição</u> (intersecção e soma de subespaços invariantes):

Sejam F_1 e F_2 dois subespaços φ-invariantes. Então:

(i) $F_1 \cap F_2$ é um subespaço φ-invariante

(ii) $F_1 + F_2$ é um subespaço φ-invariante.

<u>Demonstração</u>: (i) $\varphi(F_1 \cap F_2) \subseteq \varphi(F_1) \subseteq F_1$ e

$\varphi(F_1 \cap F_2) \subseteq \varphi(F_2) \subseteq F_2$

$\therefore \quad \varphi(F_1 \cap F_2) \subseteq F_1 \cap F_2$

(ii) $\varphi(F_1 + F_2) = \underbrace{\varphi(F_1)}_{\subseteq F_1} + \underbrace{\varphi(F_2)}_{\subseteq F_2} \subseteq F_1 + F_2$ ■

<u>Representação matricial de endomorfismos com subespaços invariantes</u>

E e.v. sobre $\mathbb{K}$, $\dim E = n$

$\varphi : E \to E$ endomorfismo

(1) Seja F um subespaço φ-invariante; $\dim F = p$.

Seja $B := (\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\text{base de } F}, e_{p+1}, \dots, e_n)$ base de E

tal que: base de F. Então a matriz de φ na base B é da forma:

$$[\varphi]_B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\ p \text{ linhas} \\ \}\ n-p \text{ linhas} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad\quad}_{p \text{ colunas}} & \underbrace{\quad\quad}_{n-p \text{ colunas}} \end{array} \end{array}$$

Demonstração :

$$[\varphi]_B = [\,(\varphi(e_1))_B \,|\cdots|\, (\varphi(e_p))_B \,|\, (\varphi(e_{p+1}))_B \,|\cdots|\, (\varphi(e_n))_B\,]$$

Uma vez que, pela invariância de F, $\varphi(e_i) \in F$ (para $i=1,\dots,p$), as últimas $n-p$ componentes de $\varphi(e_i)$ na base B são nulas, i.e., $[(\varphi(e_1))_B \,|\cdots|\, (\varphi(e_p))_B] = \begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}\, n-p$ para uma determinada matriz A_{11} $(p \times p)$ ■

(2) Sejam $F_1, \dots, F_k$ k subespaços invariantes de E, com $\dim F_i = p_i$ $(i=1,\dots k)$, tais que :

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k \quad .$$

Seja ainda $B = (e_1^1, \dots, e_{p_1}^1, \dots, e_1^k, \dots, e_{p_k}^k)$ uma base de E tal que $(e_1^i, \dots, e_{p_i}^i)$ é uma base de F_i $(i=1,\dots,k)$. Então a representação matricial de φ na base B é dada por :

$$[\varphi]_B = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{kk} \end{array}\right] \leftsquigarrow \text{matriz diagonal por blocos}$$

onde A_{ii} é uma matriz quadrada de dimensão p_i $(i=1,\dots,k)$

Demonstração : Exercício !

(Siga um raciocínio análogo ao da demonstração de (1)) ■

Critério de invariância

Proposição :

Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : E \to E$ um endomorfismo. Seja ainda $F = \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_p\})$ o subespaço de E gerado pelos elementos $v_1, \dots, v_p$ de E.

$$F \text{ é } \varphi\text{-invariante} \iff \varphi(v_i) \in F \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$$

Demonstração : (i) "$\Rightarrow$" é imediata, pela definição de subespaço φ-invariante.

(ii) "$\Leftarrow$" Seja $v \in F$; então existem coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tais que $v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$. Uma vez que φ é linear : $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi(v_i)$, o que (tendo em conta a hipótese de que $\varphi(v_i) \in F$) implica que $\varphi(v) \in F$. Portanto $\varphi(F) \subseteq F$, ou seja F é φ-invariante ■

Exemplo 4 : Sejam E um espaço vectorial de dimensão 3 sobre $\mathbb{R}$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ uma base ordenada de E , e $\varphi : E \to E$ o endomorfismo definido por :

$$\varphi(e_1) = 2e_1 + e_3 \quad ; \quad \varphi(e_2) = e_2 - 2e_3 \quad ; \quad \varphi(e_3) = e_1 + 2e_2 + 4e_3 .$$

Definamos :

$$v_1 := e_1 + e_2 \quad , \quad v_2 := e_2 + e_3 \quad , e \quad v_3 := e_1 + e_2 + e_3$$

$$\varphi(v_1) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2) = 2e_1 + e_3 + e_2 - 2e_3 = 2e_1 + e_2 - e_3 = 2v_1 - v_2$$

$\varphi(v_2) = \varphi(e_2) + \varphi(e_3) = e_2 - 2e_3 + e_1 + 2e_2 + 4e_3 = e_1 + e_2 + 2(e_2 + e_3) = v_1 + 2v_2$

$\varphi(v_3) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2) + \varphi(e_3) = \dots = 3(e_1 + e_2 + e_3) = 3v_3$.

Portanto : $\mathcal{L}(\{v_1, v_2\})$ é um subespaço φ-invariante de dimensão 2

$\mathcal{L}(\{v_3\})$ é um subespaço φ-invariante de dimensão 1.

<u>Exercício</u>: Prove que $(v_1, v_2, v_3) =: B'$ é uma base de E.

Qual a matriz de φ na base B' ?

3. <u>Valores próprios e vectores próprios</u>

Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : E \to E$ um endomorfismo.

<u>Definição</u> : $\lambda \in \mathbb{K}$ é um <u>valor próprio de φ</u> se

$$\exists\, v \in E \setminus \{0_E\} : \quad \varphi(v) = \lambda v .$$

Neste caso diz-se que v é um <u>vector próprio de φ</u> associado ao valor próprio λ.

<u>Observação 1</u>: Note que todo o vector próprio v de φ gera um subespaço invariante $(\mathcal{L}(v))$ de φ com dimensão 1. Por outro lado, todo o gerador de um subespaço φ-invariante unidimensional é um vector próprio de φ.

<u>Observação 2</u> : Dado um valor próprio λ de φ, o conjunto E_λ formado pelo vector nulo juntamente com todos os vectores próprios de φ associados a λ é um subespaço vectorial de E.

<u>Verificação</u> : $u, v \in E_\lambda$; $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v) = \alpha \lambda u + \alpha \lambda v$$
$$= \lambda(\alpha u + \beta v) \qquad \blacksquare$$

<u>Notação</u> : E_λ é designado por <u>subespaço próprio associado</u> a λ.

<u>Definição</u> : Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$. $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ é um <u>valor próprio de A</u> se

$$\exists\, V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \quad : \quad AV = \lambda_0 V .$$

Neste caso diz-se que V é um <u>vector próprio de A</u>.

<u>Lema</u> : Com a notação anterior,

$$\lambda_0 \in \mathbb{K} \text{ é um valor próprio de } A \iff \det(\lambda_0 I - A) = 0$$

<u>Notação</u> : O polinómio em λ $\det(\lambda I - A)$ é chamado o <u>polinómio característico de A</u>. A equação $\det(\lambda I - A) = 0$ é a <u>equação característica de A</u>.

Portanto : os valores próprios de A são as raízes da sua eq. característica.

Demonstração do Lema:

λ_0 valor próprio de A $\Leftrightarrow$ $\exists V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$: $(\lambda_0 I - A)V = 0$

$\Leftrightarrow$ $\dim [\mathcal{N}(\lambda_0 I - A)] = k \geq 1$

$\Leftrightarrow$ $car(\lambda_0 I - A) = n - k < n$

$\Leftrightarrow$ $\det(\lambda_0 I - A) = 0$ ■

Observação: Decorre imediatamente da comparação das definições de valor próprio de um endomorfismo e de uma matriz que, se $A = [\varphi]_B$ (para uma certa base B de E):

λ_0 é valor próprio de A $\Leftrightarrow$ λ_0 é valor próprio de φ.

Deste modo:

Os valores próprios de um endomorfismo podem ser calculados através da equação característica associada a qualquer representação matricial deste endomorfismo.

Notação:

O conjunto de todos os valores próprios de um endomorfismo φ é chamado o espectro de φ – $\sigma(\varphi)$ –.
Analogamente se define o espectro $\sigma(A)$ de uma matriz quadrada A.

O que acabamos de ver permite-nos concluir o seguinte.
Sejam B e B' duas bases de E, $\varphi : E \to E$ um endomorfismo, $A := [\varphi]_B$ e $A' := [\varphi]_{B'}$. Então

$$\sigma(A) = \sigma(A').$$

Uma vez que sabemos que representações matriciais do mesmo endomorfismo são matrizes semelhantes, a conclusão anterior também poderia ser obtida a partir da seguinte proposição.

<u>Proposição</u>: Sejam A e A' duas matrizes semelhantes, com dimensão $n \times n$. Então $\sigma(A) = \sigma(A')$.

<u>Demonstração</u>: Uma vez que A e A' são semelhantes, existe uma matriz regular S tal que $A' = SAS^{-1}$. Então:

$$\det(\lambda I - A') = \det(\lambda I - SAS^{-1}) = \det(\lambda SS^{-1} - SAS^{-1}) =$$
$$\det[S(\lambda I - A)S^{-1}] = \det S \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det S^{-1}$$
$$= \det(\lambda I - A).$$

Portanto as raízes das equações características de A e A' coincidem ■

<u>Exemplo 5</u>: Consideremos o endomorfismo φ do Exemplo 1, cuja representação matricial na base B é:

$$A := [\varphi]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tomando a base B' introduzida no Exemplo 3, temos que:

$$A' := [\varphi]_{B'} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$p(\lambda) := \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -3 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)-3$$

i.e.,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 1 \quad ;$$

e

$$p'(\lambda) := \det(\lambda I - A') = \det \begin{bmatrix} \lambda-4 & -3 \\ 1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+1)+3$$

i.e.,

$$p'(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 1 = p(\lambda).$$

Deste modo $\sigma(A') = \sigma(A) := \{ \lambda_0 \in \mathbb{R} \mid \lambda_0^2 - 3\lambda_0 - 1 = 0 \}$.

$$\lambda_0^2 - 3\lambda_0 - 1 = 0 \iff \lambda_0 = \frac{3 \mp \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Assim:

$$\sigma(A') = \sigma(A) = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \right\} \quad \square$$

Analisemos agora o que se passa com os vectores próprios.

<u>Observação</u>:

Seja $V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Então, decorre da definição de vector próprio que:

V é um vector próprio de A associado a λ_0 $\iff$ $V \in \mathcal{N}(\lambda_0 I - A)$ $\square$

Comparando as definições de vector próprio de um endomorfismo e de uma matriz, não é difícil concluir que se $A = [\varphi]_B$ então:

v é um vector próprio de φ associado a λ_0

$\Leftrightarrow$

$(v)_B$ é um vector próprio de A associado a λ_0.

<u>Lema</u>: Sejam A e A' duas matrizes quadradas semelhantes, $\lambda_0 \in \sigma(A) = \sigma(A')$, e S uma matriz regular tal que $SAS^{-1} = A'$. Então:

V' é um vector próprio de A' associado a λ_0 $\Leftrightarrow$ $V' = SV$ e V é um vector próprio de A associado a λ_0.

<u>Demonstração</u>:

(i) ($\Rightarrow$) $A'V' = \lambda_0 V' \Leftrightarrow SAS^{-1}V' = \lambda_0 V' \Leftrightarrow AS^{-1}V' = \lambda_0 S^{-1}V'$

Seja $V := S^{-1}V'$. Então: $V' = SV$ e $AV = \lambda_0 V$.

(ii) ($\Leftarrow$) $AV = \lambda_0 V \Leftrightarrow \underbrace{SAS^{-1}}_{A'} SV = \lambda_0 SV$. Assim, definindo $V' := SV$ temos que:

$$A'V' = \lambda_0 V' \quad \blacksquare$$

<u>Observação</u> : Em particular, se A e A' são representações matriciais de um endomorfismo φ nas bases B e B', respectivamente, V e V' serão as representações matriciais de um mesmo vector próprio v de φ naquelas bases. Por seu lado a matriz S é a matriz de mudança de base de B para B' $\square$

<u>Exemplo 5</u> (continuação):

<u>Determinação dos vectores próprios de A</u> $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} , \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Vectores próprios associados ao valor próprio $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$:

$$\mathcal{V} := \mathcal{N}\left(\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} & -1 \\ -3 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{V} \iff \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} & -1 \\ -3 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \beta = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\alpha$$

$$\iff \mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \end{bmatrix} \alpha , \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\iff \mathcal{V} = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \end{bmatrix} \right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{13} \end{bmatrix} \right)$$

por ex.

Vectores próprios associados ao valor próprio $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$: Exercício!

<u>Vectores próprios de</u> $A' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = S A S^{-1}$

com $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Vectores próprios associados ao valor próprio $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$:

$$\mathcal{V}' := \mathcal{N}\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

Atendendo a que os vectores próprios de A' associados ao valor próprio $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ são obtidos a partir dos vectores próprios de A (associados ao mesmo valor próprio) através de uma mudança de base de B para B', temos que:

$$\mathcal{V}' = S(\mathcal{V}) = \mathcal{L}\left(S \begin{bmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{13} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{13} \end{bmatrix} \right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1+\sqrt{13} \\ -3-\sqrt{13} \end{bmatrix} \right).$$

<u>Exercício</u> : Verifique este resultado calculando directamente $\mathcal{V}'$ a partir do modo como este subespaço foi definido acima.

Vectores próprios associados a $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$: Exercício! $\square$

Observação :

Note que os valores próprios de uma matriz com entradas num corpo $\mathbb{K}$ dependem de $\mathbb{K}$.
Este facto é ilustrado no exemplo que se segue.

Exemplo 6 :

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Consideremos primeiro que o corpo subjacente é $\mathbb{K}_1 := \mathbb{R}$. Então, os valores próprios de A são as raízes reais da equação característica:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0$$

Uma vez que $\lambda^2 + 1 \neq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, concluimos que $\sigma(A) = \emptyset$.
Suponhamos agora que A é uma matriz com entradas no corpo $\mathbb{K}_2 := \mathbb{C}$. Neste caso as raízes da equação característica (em $\mathbb{C}$) são : $\lambda = \mp i$, i.e., $\sigma(A) = \{i, -i\}$ □

— // —

Analisemos agora algumas propriedades dos valores próprios e dos vectores próprios.

Teorema : Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas no corpo $\mathbb{K}$; e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os valores próprios distintos de A, $(k \leq n)$.

Então :

(1) Se $v_1, \dots, v_k$ são vectores próprios respectivamente associados a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $v_1, \dots, v_k$ são linearmente independentes.

(2) Se $k = n$, designando por V_{λ_i} o subespaço próprio associado ao vector próprio λ_i $(i = 1, \dots, n)$, temos que:

$$\dim V_{\lambda_i} = 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

<u>Demonstração</u>:

(1) (Por indução)

<u>$k = 1$</u> $\rightarrow$ v_1 linearmente independente $\Leftrightarrow$ $v_1 \neq 0$. Isto é sempre válido pela definição de vector próprio.

<u>$k = \ell$</u> $\rightarrow$ Suponhamos que os vectores próprios $v_1, \dots, v_\ell$ associados aos valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ são linearmente independentes.

<u>$k = \ell + 1$</u> $\rightarrow$ Vamos ver que a hipótese de indução implica que $v_1, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}$ (com $v_{\ell+1}$ um vector próprio associado a $\lambda_{\ell+1}$) são também linearmente independentes.

Isto é, se:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell + \alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} = 0 \qquad \alpha_i \in \mathbb{K} \quad i = 1, \dots, \ell+1$$

então $\alpha_i = 0$ $i = 1, \dots, \ell+1$.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell + \alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} = 0 \Rightarrow A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell + \alpha_{\ell+1} v_{\ell+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell \lambda_\ell v_\ell + \alpha_{\ell+1} \lambda_{\ell+1} v_{\ell+1} = 0 \qquad (5)$$

Por outro lado: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell + \alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_{\ell+1} v_1 + \dots + \alpha_\ell \lambda_{\ell+1} v_\ell + \alpha_{\ell+1} \lambda_{\ell+1} v_{\ell+1} = 0 \qquad (6)$$

Subtraindo membro a membro as igualdades (5) e (6), obtemos:

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{\ell+1})v_1+\cdots+\alpha_\ell(\lambda_\ell-\lambda_{\ell+1})v_\ell=0 .$$

Uma vez que, pela hipótese de indução, $v_1,\ldots,v_\ell$ são linearmente independentes, isto equivale a dizer que: $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{\ell+1})=\cdots=\alpha_\ell(\lambda_\ell-\lambda_{\ell+1})=0$

Tendo em conta que os valores próprios $\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell$, $\lambda_{\ell+1}$ são distintos, teremos que ter: $\alpha_1=\ldots=\alpha_\ell=0$.

Substituindo na expressão $\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_\ell v_\ell+\alpha_{\ell+1}v_{\ell+1}=0$ (que inicialmente consideramos) obtemos:

$$\alpha_{\ell+1}v_{\ell+1}=0 .$$

Como $v_{\ell+1}$ é um vector próprio, $v_{\ell+1}\neq 0$ e portanto terá que ser $\alpha_{\ell+1}=0$.

Concluimos assim que $\alpha_1=\ldots=\alpha_\ell=\alpha_{\ell+1}=0$, ou seja $v_1,\ldots,v_\ell,v_{\ell+1}$ são linearmente independentes. □

(2) Suponhamos que existe um valor próprio λ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$ com pelo menos dois vectores próprios associados v_j e v_j' que são linearmente independentes. Sejam $v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_n$ vectores próprios associados aos valores próprios $\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n$. Vamos ver que $v_1,\ldots,v_{j-1},v_j,v_j',v_{j+1},\ldots,v_n$ são (sob estas condições) linearmente independentes. Suponhamos então que:

$$\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_{j-1}v_{j-1}+\alpha_j v_j+\alpha_j' v_j'+\alpha_{j+1}v_{j+1}+\cdots+\alpha_n v_n=0$$

Analogamente ao que vimos em (1), isto implica que:

$$(\lambda_j-\lambda_1)\alpha_1 v_1+\cdots+(\lambda_j-\lambda_{j-1})\alpha_{j-1}v_{j-1}+(\lambda_j-\lambda_{j+1})\alpha_{j+1}v_{j+1}+$$
$$+\cdots+(\lambda_j-\lambda_n)\alpha_n v_n=0.$$

Uma vez que $\lambda_j\neq\lambda_i$ $(j\neq i)$, terá que ser $\alpha_1=\cdots=\alpha_{j-1}=\alpha_{j+1}=\cdots=\alpha_n=0$.

Consequentemente: $\alpha_j v_j+\alpha_j' v_j'=0$, e, pela independência linear de v_j e v_j', $\alpha_j=\alpha_j'=0$. Portanto $v_1,\ldots,v_{j-1},v_j,v_j',v_{j+1},\ldots,v_n$

são $n+1$ vectores linearmente independentes. Mas isto é absurdo já que estes vectores pertencem a $\mathbb{K}^n$ (que tem dimensão n). Portanto, todo o valor próprio λ_j $(j=1,\dots,n)$ de A possui um e apenas um vector próprio linearmente independente, ou seja:

$$\dim V_{\lambda_i} = 1 \qquad i = 1, \dots, n. \qquad \blacksquare$$

Diagonalização de matrizes

Proposição (condição suficiente para diagonalização):

Seja A uma matriz $n \times n$ com n valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distintos. Então existe uma matriz regular S tal que:

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} =: \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Demonstração:

Como A tem n valores próprios distintos, resulta de (2) no Teorema anterior que $v_1, \dots, v_n$ (vectores próprios associados a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) são linearmente independentes. Portanto $S := [v_1 | \cdots | v_n]^{-1}$ é uma matriz regular. Alem disso $SAS^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Para provar este facto, definamos $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Então:

$SAS^{-1} = D \iff AS^{-1} = S^{-1}D \iff A\,[v_1 | \dots | v_n] = [\lambda_1 v_1 | \dots | \lambda_n v_n]$.

Esta última igualdade é válida uma vez que $Av_1 = \lambda_1 v_1, \dots, Av_n = \lambda_n v_n$.

Isto prova a proposição $\blacksquare$

Definição: Uma matriz A de dimensão $n \times n$ diz-se diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal.

Note que a condição suficiente para diagonalização dada pelo resultado anterior não é necessária. Há matrizes com valores próprios não distintos que são diagonalizáveis. Um exemplo trivial é a matriz identidade $n \times n$, que tem todos os valores próprios iguais a 1 (portanto não distintos) e é uma matriz diagonal (portanto obviamente diagonalizável).

<u>Teorema</u> (condição necessária e suficiente para diagonalização)

Seja A uma matriz $n \times n$.

A é diagonalizável $\Leftrightarrow$ A tem n vectores próprios linearmente independentes.

<u>Notação</u>: A é <u>não defectiva</u>.

<u>Demonstração</u>:

(i) "$\Leftarrow$" Ver demonstração da condição suficiente para diagonalização.

(ii) "$\Rightarrow$" Suponhamos que A é diagonalizável. Então existe uma matriz regular S tal que:

$$SAS^{-1} = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

Equivalentemente:

$$AS^{-1} = S^{-1} \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Assim, designando por v_i a i-ésima coluna de S^{-1} $(i = 1, \dots, n)$ temos que:

$$Av_i = d_i v_i \qquad i = 1, \dots, n.$$

Como $v_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$, já que v_i é uma coluna de uma matriz regular, concluimos que v_i é um vector próprio de A associado ao valor próprio d_i. Uma vez que $S^{-1} = [v_1 | \cdots | v_n]$ é regular, $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes.

$\therefore$ A tem n vectores próprios linearmente independentes ■

Falando agora em termos de endomorfismos, diz-se que o <u>endomorfismo</u> φ é <u>diagonalizável</u> se as suas representações matriciais são diagonalizáveis.

O teorema que se segue é uma consequência imediata da c.n.s. para a diagonalização de matrizes.

<u>Teorema</u>: Seja $\varphi : E \to E$ um endomorfismo do espaço n-dimensional E. Então:

φ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ E tem uma base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de vectores próprios de φ.

<u>Matriz de φ na base B</u>:

$$[\varphi]_B = [\, (\varphi(v_1))_B \mid \cdots \mid (\varphi(v_n))_B \,]$$

$$= [\, (\lambda_1 v_1)_B \mid \cdots \mid (\lambda_n v_n)_B \,]$$

com λ_i valor próprio ao qual o vector próprio v_i está associado

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

$$\therefore \quad [\varphi]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \square$$

<u>Teorema</u> : Sejam $\varphi : E \to E$ um endomorfismo, e $\dim E = n$.
Sejam ainda $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os valores próprios distintos de φ. Então:

(1) $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$

(2) E admite uma base de vectores próprios de φ
$\Leftrightarrow \quad E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$.

<u>Demonstração</u> :

(1) $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} \Leftrightarrow$ Todo o elemento de $v \in E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k}$ tem uma decomposição única como uma soma $v = v_1 + \dots + v_k$ de elementos $v_i \in E_{\lambda_i}$ $(i = 1, \dots, k)$.
Esta segunda afirmação pode ser demonstrada tendo em conta que vectores próprios associados a valores próprios diferentes são linearmente independentes. (Faça a demonstração como exercício!).

(2)

"$\Leftarrow$" Seja B_i uma base de E_{λ_i} $(i = 1, \dots, k)$. Uma vez que $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$, $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ é uma base de E.
Além disso B é constituida por elementos de E_{λ_i} $(i = 1, \dots, k)$, ou seja, por vectores próprios de φ.

"$\Rightarrow$" Seja $B = (v_1^1, \dots, v_{n_1}^1, \dots, v_1^k, \dots, v_{n_k}^k)$ uma base de E constituida por vectores próprios de φ. Sem perda de generalidade podemos supôr que os elementos de B estão ordenados de tal modo que $E_{\lambda_i} = \mathcal{L}(\{v_1^i, \dots, v_{n_i}^i\})$ $(i = 1, \dots, k)$.
Uma vez que B é uma base de E temos que:

$$E = \underbrace{\mathcal{L}(v_1^1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(v_{n_1}^1)}_{\substack{\| \\ \mathcal{L}(\{v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1\}) \\ \| \\ E_{\lambda_1}}} \oplus \cdots \oplus \underbrace{\mathcal{L}(v_1^k) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(v_{n_k}^k)}_{\substack{\| \\ \mathcal{L}(\{v_1^k, \ldots, v_{n_k}^k\}) \\ \| \\ E_{\lambda_k}}}$$

Portanto:

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k} \qquad \blacksquare$$

<u>Corolário</u>: Com a notação do Teorema anterior,

$$\varphi \text{ é diagonalizável} \iff \dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_k}.$$

<u>Demonstração</u>:

Notemos que: $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_k} \iff E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$

$\iff$ E admite uma base de vectores próprios de φ
(pelo Teorema anterior)

$\iff$ φ diagonalizável
(pelo Teorema da página 26) $\blacksquare$

<u>Exemplo 7</u>:

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Os valores próprios de A são as raízes da equação: $\det \begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{bmatrix} = 0 \iff$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = 2$.

$\therefore \sigma(A) = \{2, 3\}$.

Definamos:

$\mathcal{V}_2 := \{$ vectores próprios de A associados a $\lambda = 2\}$

$\mathcal{V}_3 := \{$ " " " " " " $\lambda = 3\}$.

Então:

$$v \in \mathcal{V}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} v = 0 \Leftrightarrow -v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow v_2 = v_1 + v_3 \Leftrightarrow v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 + v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{V}_2 = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) \quad ;$$

$$v \in \mathcal{V}_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + v_3 = 0 \end{cases}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_3 \\ v_2 = v_3 \end{cases} \Leftrightarrow v = \begin{bmatrix} v_3 \\ v_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{V}_3 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Portanto A tem 3 vectores próprios linearmente independentes.

Seja $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$. Verifique que:

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \square$$

4. Teorema de Cayley - Hamilton

O teorema de Cayley - Hamilton afirma que todo o endomorfismo (toda a matriz quadrada) satisfaz a sua equação característica. Para demonstrar este teorema vamos introduzir algumas noções adicionais sobre subespaços invariantes.

4.1. Restrição de um endomorfismo a um subespaço invariante

Sejam $E \rightsquigarrow$ espaço vectorial de dimensão n (sobre um corpo $\mathbb{K}$)

$\varphi \rightsquigarrow$ endomorfismo definido em E

$F \rightsquigarrow$ subespaço φ-invariante com $\dim F = p$.

Uma vez que F é φ-invariante (isto é $\varphi(F) \subseteq F$), quando restringimos φ a F obtemos um endomorfismo de F. À restrição de φ a F chamamos φ_F.

Portanto
$$\begin{aligned} \varphi_F : F &\longrightarrow F \\ w &\longmapsto \varphi(w) \end{aligned}$$

Exemplo 8

Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$\varphi(1,0,0) = (1,1,0)$$
$$\varphi(0,1,0) = (2,-1,0)$$
$$\varphi(0,0,1) = (1,3,1)$$

O subespaço $F = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ é claramente φ-invariante. (Verifique!)
Assim, a restrição de φ a F é um endomorfismo de F, isto é:
$$\varphi_F : F \longrightarrow F .$$

Note-se que se F não fosse φ-invariante, haveria elementos w de F tais que $\varphi(w) \notin F$ e portanto a restrição de φ a F não seria um endomorfismo de F.

A matriz de φ_F na base $\mathcal{B}' = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ é
$$[\varphi_F]_{\mathcal{B}} = [(\varphi_F(1,0,0))_{\mathcal{B}'} \ (\varphi_F(0,1,0))_{\mathcal{B}'})]$$
$$= [((1,1,0))_{\mathcal{B}'} \ ((2,-1,0))_{\mathcal{B}'})$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Observação</u>: Note que apesar de os elementos de F serem ternos, apenas são necessárias <u>duas</u> coordenadas, relativamente à base $\mathcal{B}'$, para os identificar. Por isso é que as suas representações na base $\mathcal{B}$ são colunas com <u>dois</u> elementos. $\square$

Lema Sejam $\varphi: E \to E$ um endomorfismo e F um subespaço φ-invariante.
Sejam $p(\lambda)$ o polinómio característico de φ e $p_F(\lambda)$ o polinómio característico de φ_F.

Então $p_F(\lambda)$ divide $p(\lambda)$

isto é, existe um polinómio $d(\lambda)$ tal que:

$$p(\lambda) = d(\lambda)\, p_F(\lambda).$$

Demonstração

Suponhamos que $\dim E = n$ e $\dim F = p$.
Tomemos uma base $\mathcal{B}$ para E tal que os seus p primeiros elementos sejam uma base ($\mathcal{B}'$) para F.

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{e_1, \dots, e_p}, e_{p+1}, \dots, e_n\} \to \text{base para } E$$

$$\hookrightarrow \mathcal{B}' = \{e_1, \dots, e_p\} \to \text{base para } F.$$

Como foi visto anteriormente:

$$A := [\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, p \text{ linhas} \\ \}\, n-p \text{ linhas} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{p \text{ colunas}} & \underbrace{\quad}_{n-p \text{ colunas}} \end{array} \end{array}$$

Além disso, $A_{11} = [\varphi_F]_{\mathcal{B}'}$ (verifique!).

Mas $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_p - A_{11}) \cdot \det(\lambda I_{n-p} - A_{22}) =$

$$= \underbrace{\det(\lambda I_{n-p} - A_{22})}_{\text{Tomando } d(\lambda) = \uparrow} \cdot \underbrace{\det(\lambda I_p - A_{11})}_{= p_F(\lambda)} = d(\lambda)\, p_F(\lambda) \;//\; \blacksquare$$

Exemplo 9

Consideremos uma vez mais o Exemplo 8.

Verifica-se que, sendo $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$A := [\varphi]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Vimos, no Exemplo 8, que $[\varphi]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

onde $\mathcal{B}' = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ é a base formada pelos dois primeiros elementos de $\mathcal{B}$ e constitui uma base para o subespaço φ-invariante F.

Agora:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \text{(desenvolvendo o determinante a partir da } 3^{\text{a}} \text{ linha)}$$

$$= (\lambda-1) \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}}_{p_F(\lambda)} = (\lambda-1)\, p_F(\lambda)$$

$\square$

4.2. Subespaço invariante contendo um vector dado

Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : E \to E$ um endomorfismo.

Dado um vector não nulo $v \in E$, pretende-se saber qual é o "menor" subespaço φ-invariante que contém v, que designaremos por $\underline{Inv(\varphi, v)}$.

Tal subespaço, por ser φ-invariante, terá de conter os vectores $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots$. Contém também todas as combinações lineares destes vectores, já que é um subespaço vectorial.

<u>Teorema</u> Com a notação anterior:

$$Inv(\varphi, v) = \langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots \rangle$$

<u>Demonstração</u>:

1) $\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots \rangle$ é um subespaço φ-invariante. De facto, se w for um elemento da forma $w = \varphi^k(v)$, então $\varphi(w) = \varphi(\varphi^k(v)) = \varphi^{k+1}(v) \in \langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots \rangle$ e, pelo critério de invariância estudado na secção 2, podemos concluir que $\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots \rangle$ é φ-invariante.

2) $\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots \rangle$ é o menor subespaço φ-invariante que contém v, no sentido de que $\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots \rangle$ está contido em qualquer outro subespaço φ-invariante, F, tal que $v \in F$.

De facto:

$$v \in F \Rightarrow \varphi(v) \in F \Rightarrow \varphi^2(v) \in F$$
$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \varphi^k(v) \in F \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

pelo que $v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots$ são necessariamente elementos de F. Uma vez que F é um subespaço vectorial, também as combinações lineares de v, $\varphi(v), \varphi^2(v), \dots$ pertencem a F, ou seja

$$\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots \rangle \subset F. \qquad \blacksquare$$

<u>Teorema</u> Com a notação anterior, se $\mathrm{Inv}(\varphi, v)$ tem dimensão $\underline{m}$, então:

(i) $v, \varphi(v), \dots, \varphi^{m-1}(v)$ formam uma base de $\mathrm{Inv}(\varphi, v)$

(ii) $$\varphi^m(v) = -\alpha_0 v - \alpha_1 \varphi(v) - \dots - \alpha_{m-1}\varphi^{m-1}(v)$$

$\Longleftrightarrow$ o polinómio caracteristico de $\varphi_{\mathrm{Inv}(\varphi,v)}$, $P_{\mathrm{Inv}(\varphi,v)}(\lambda)$, é dado por:

$$P_{\mathrm{Inv}(\varphi,v)}(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 .$$

Demonstração

(i) Prove, como exercício, que se $\varphi^k(v)$ for linearmente dependente de $v, \dots, \varphi^{k-1}(v)$ então também $\varphi^l(v)$ é linearmente dependente de $v, \dots, \varphi^{k-1}(v)$. Conclua, a partir deste facto, que se $v, \varphi(v), \dots, \varphi^{m-1}(v)$ não fossem linearmente independentes, então a dimensão de $Inv(\varphi, v)$ não seria m (seria inferior). Portanto $v, \dots, \varphi^{m-1}(v)$ são $\underline{\underline{m}}$ elementos linearmente independentes de um espaço de dimensão $\underline{\underline{m}}$, pelo que constituem uma base deste subespaço.

(ii) $\Rightarrow$ Seja $\mathcal{B} = \{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{m-1}(v)\}$. Escrevendo a matriz de $\varphi_{Inv(\varphi,v)}$ na base $\mathcal{B}$ obtemos:

$$[\varphi_{Inv(\varphi,v)}]_{\mathcal{B}} = [(\varphi(v))_{\mathcal{B}} \dots (\varphi^{m-1}(v))_{\mathcal{B}} \ (\varphi^m(v))_{\mathcal{B}}]$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & -\alpha_{m-2} \\ 0 & & 1 & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix}}_{A} \quad \text{(Verifique!)}$$

Assim, $P_{Inv(\varphi,v)}(\lambda) = \det(\lambda I_m - A)$. Verifique como exercício que $\det(\lambda I_m - A) = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$.

$\Leftarrow$ Seja $\mathcal{B}$ como anteriormente.

Suponhamos que $\varphi^m(v) = \beta_0 v + \beta_1 \varphi(v) + \cdots + \beta_{m-1}\varphi^{m-1}(v)$

Então

$$\left[\varphi_{Inv(\varphi,v)}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \beta_0 \\ 1 & & 0 & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & \beta_{m-2} \\ 0 & & 1 & \beta_{m-1} \end{bmatrix},$$

donde decorre que $p_{Inv(\varphi,v)}(\lambda) = \lambda^m - \beta_{m-1}\lambda^{m-1} - \cdots - \beta_1\lambda - \beta_0$.

Mas, por hipótese, $p_{Inv(\varphi,v)}(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$.

Isto permite concluir que $\beta_0 = -\alpha_0, \ldots, \beta_{m-1} = -\alpha_{m-1}$

e portanto $\varphi^m(v) = -\alpha_0 v - \alpha_1\varphi(v) - \cdots - \alpha_{m-1}\varphi^{m-1}(v)$.

■

<u>Corolário</u> Nas condições do teorema anterior:

$$(p_{Inv(\varphi,v)}(\varphi))(v) = \vec{0} \quad (\text{vector nulo de } E)$$

<u>Demonstração</u>

identidade

$$\begin{aligned}(p_{Inv(\varphi,v)}(\varphi))(v) &= (\varphi^m + \alpha_{m-1}\varphi^{m-1} + \cdots + \alpha_1\varphi + \alpha_0 id)(v) \\ &= \varphi^m(v) + \alpha_{m-1}\varphi^{m-1}(v) + \cdots + \alpha_1\varphi(v) + \alpha_0 v \\ &= -\alpha_{m-1}\varphi^{m-1}(v) - \cdots - \alpha_0 v + \alpha_{m-1}\varphi^{m-1}(v) + \cdots + \alpha_0 v \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

■

Exemplo 10

Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\begin{cases} \varphi(1,1,1) = (1,1,0) \\ \varphi(1,1,0) = (5,5,2) \\ \varphi(1,0,0) = (2,0,1) \end{cases}$

Determinemos o menor subespaço φ-invariante de $\mathbb{R}^3$ que contém $v=(1,1,1)$.

Sabemos que esse subespaço, $Inv(\varphi,(1,1,1))$ é gerado pelos vectores v, $\varphi(v)$, $\varphi^2(v)$, ...

$\varphi(v) = \varphi(1,1,1) = (1,1,0)$

$\varphi^2(v) = \varphi^2(1,1,1) = \varphi(1,1,0) = (5,5,2) = \underline{\underline{3}}.(1,1,0) + \underline{\underline{2}}.(1,1,1)$ (A)

Portanto todos os vectores $\varphi^k(v)$ com $k \geq 2$ são linearmente dependentes de $\underline{\underline{v}}$ e $\underline{\underline{\varphi(v)}}$, pelo que estes vectores (que por sua vez são linearmente independentes um do outro) formam uma base para $Inv(\varphi,v)$.

Consideremos a restrição de φ a $Inv(\varphi,v)$:

$$\varphi_{Inv(\varphi,v)} : Inv(\varphi,v) \to Inv(\varphi,v)$$

A matriz deste endomorfismo na base $\mathcal{B} = \{\underbrace{(1,1,1)}_{v}, \underbrace{(1,1,0)}_{\varphi(v)}\}$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico de φ (e de A) é pois:

$$P_{Inv(\varphi,v)}(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \underline{\underline{3}}\lambda - \underline{\underline{2}}. \quad (B)$$

Portanto, os coeficientes do polinómio característico $P_{Inv(\varphi,v)}(\lambda)$ são os simétricos dos coeficientes da combinação linear de $\varphi(v)=(1,1,0)$ e $v=(1,1,1)$ que resulta no vector $\varphi^2(v)$ (comparar Ⓐ e Ⓑ).

$$P_{Inv(\varphi,v)}(\varphi) = \varphi^2 - 3\varphi - 2id$$

$$\begin{aligned}
(P_{Inv(\varphi,v)}(\varphi))(v) &= (\varphi^2 - 3\varphi - 2id)(v) \\
&= (\varphi^2 - 3\varphi - 2id)(1,1,1) \\
&= \varphi^2(1,1,1) - 3\varphi(1,1,1) - 2(1,1,1) \\
&= (5,5,2) - 3(1,1,0) - 2(1,1,1) \\
&= (5,5,2) - (3,3,0) - (2,2,2) \\
&= (5,5,2) - (5,5,2) = \underbrace{(0,0,0)}_{\text{vector nulo de } \mathbb{R}^3.} \quad //
\end{aligned}$$

▨

4.3. Teorema de Cayley - Hamilton

<u>Enunciado</u>: Seja E um espaço vectorial, sobre um corpo $\mathbb{K}$, com dimensão n.

Seja ainda $\varphi : E \to E$ um endomorfismo, com polinómio característico

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 .$$

Então: $p(\varphi) : E \to E$ é o endomorfismo nulo, ou seja $p(\varphi) = 0$ //.

<u>Demonstração</u>

Para provar que $p(\varphi)$ é o endomorfismo nulo, temos de mostrar que $p(\varphi)(v) = \vec{0}$ (vector nulo de E) para todo $v \in E$.

Se $v = \vec{0}$, claramente $p(\varphi)(v) = p(\varphi)(\vec{0}) = \vec{0}$.

Se $v \neq \vec{0}$, pelos resultados das secções 1 e 2, temos que $p(\lambda) = d(\lambda)\, p_{Inv(\varphi, v)}(\lambda)$, para um certo polinómio $d(\lambda)$, e portanto:

$$\begin{aligned} p(\varphi)(v) &= \left(d(\varphi)\, p_{Inv(\varphi,v)}(\varphi)\right)(v) \\ &= d(\varphi)\Big(\underbrace{p_{Inv(\varphi,v)}(\varphi)\,(v)}_{=\vec{0}}\Big) \\ &= d(\varphi)(\vec{0}) = \vec{0}. \quad // \end{aligned}$$

■

Formulação matricial do Teorema de Cayley-Hamilton:

Sejam A uma matriz $n \times n$, com entradas num corpo $\mathbb{K}$, e $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ o seu polinómio característico.

Então

$$p(A) = O_{n\times n} \rightsquigarrow \text{matriz nula } n\times n,$$

ou seja:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = O_{n\times n}.$$

Demonstração:

A matriz $\underline{\underline{A}}$ pode ser encarada como a matriz de um endomorfismo $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ numa base $\mathcal{B}$ qualquer de $\mathbb{K}^n$.

Uma vez que $p(\varphi)$ é o endomorfismo nulo, a matriz de $p(\varphi)$ na base em questão é a matriz nula $O_{n\times n}$. Mas

$$[p(\varphi)]_{\mathcal{B}} = p(A),$$

donde se conclui que $p(A) = O_{n\times n}$. ■

Exemplo 11 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$ (verifique!).

$$p(A) = A^2 - 2A - I_2 = A.A - 2A - I_2$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} // \quad ■$$