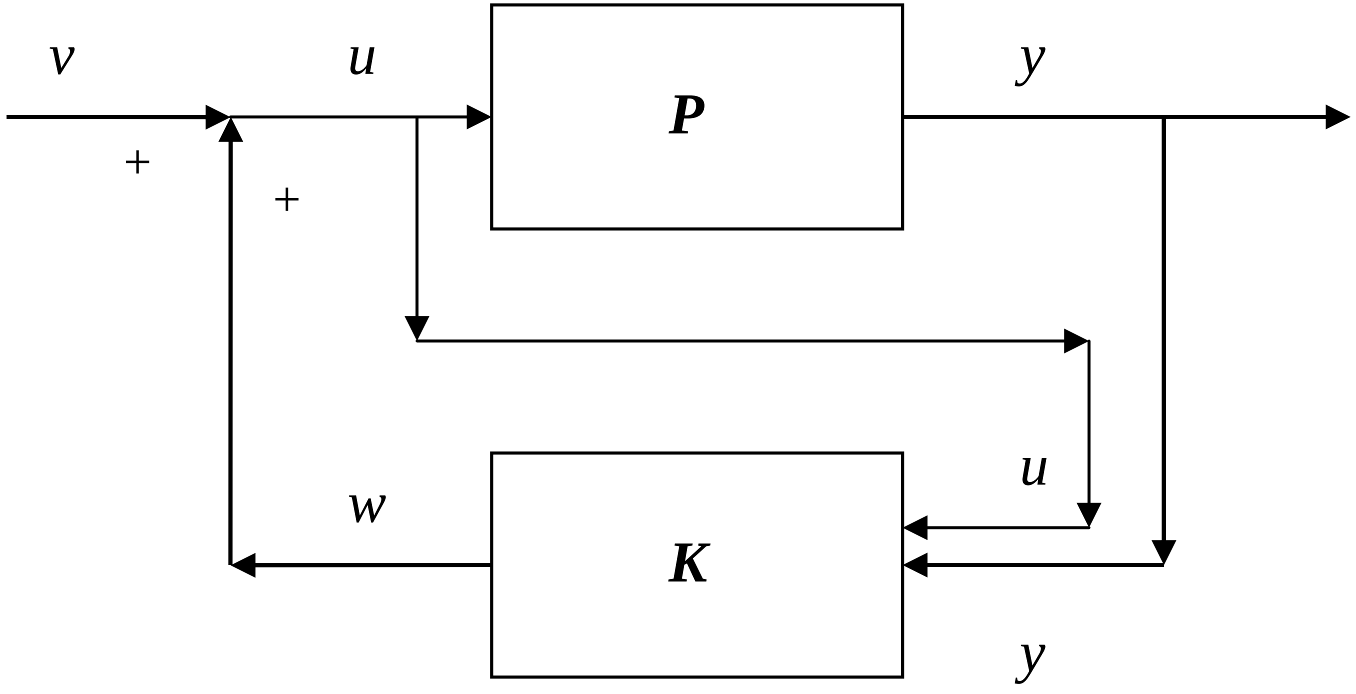
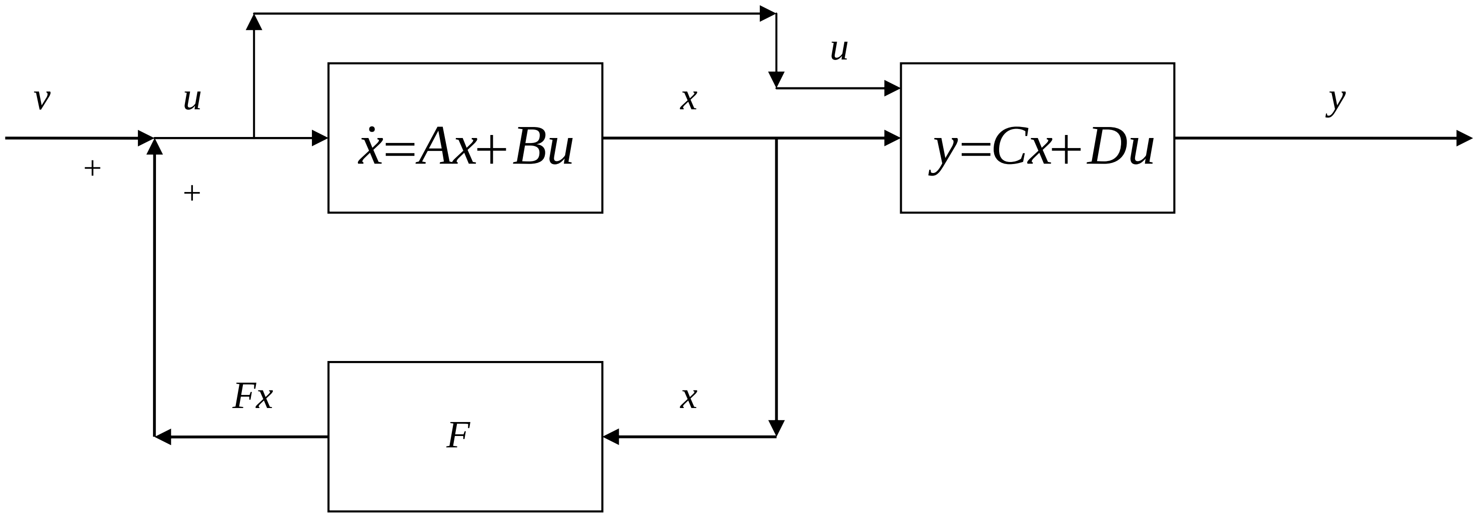
5.1 - Controlo por realimentação do estado

Esquema geral de realimentação



Esquema de realimentação estática do estado

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & Ax+Bu\\ y & = & Cx+Du\end{array}\right. \longrightarrow u = Fx+v \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & (A+BF)x+Bv\\ y & = & (C+DF)x+Dv\end{array}\right.$$



Prescrição do polinómio característico (PPC)

Dados: (A, B) - com A $n \times n$ e B $n \times m$

$\pi(\lambda)$ - polinómio mónico de grau n

Pretende-se: Determinar F tal que $\chi(A + BF) = \pi(\lambda)$

Notação

$\chi(M)$ - polinómio característico da matriz M

$\chi_{nc}(A, B)$ - polinómio não controlável de (A, B).

$$\chi_{nc}(A, B) = \chi(A_{22})$$

onde A_{22} é o bloco $(2, 2)$ da forma escalonada de controlabilidade de (A, B)

Convenção: se (A, B) for controlável, $\chi_{nc}(A, B) = 1$

Lema 1

O problema da PPC tem solução para o par (A, B) e o polinómio mónico $\pi(\lambda) \Rightarrow \chi_{nc}(A, B)$ é um factor de $\pi(\lambda)$.

Demonstração

- **Seja F tal que $\chi(A + BF) = \pi(\lambda)$**
- $\chi(A + BF) = \chi(S(A + BF)S^{-1}) = \chi(\bar{A} + \bar{B}\bar{F})$

  com $\bar{A} = SAS^{-1}$, $\bar{B} = SB$ e $\bar{F} = FS^{-1}$
- **Estando $(\bar{A}, \bar{B})$ na forma escalonada de controlabilidade de Kalman e $\bar{F} = [F_1 \quad F_2]$ particionada em conformidade:**

$$\bar{A} + \bar{B}\bar{F} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

- $\pi(\lambda) = \chi(\bar{A} + \bar{B}\bar{F}) = \chi(A_{11} + B_1F_1)\ \chi(A_{22})$ ♣

Lema 2 Se B é $n \times 1$

O par (A, B) é controlável $\Rightarrow$ o problema da PPC tem solução para o par (A, B) e **todo** o polinómio mónico $\pi(\lambda)$ de grau n.

Demonstração

- (A, B) controlável e B $n \times 1 \Rightarrow \exists S$ invertível tal que $(\bar{A}, \bar{B}) = (SAS^{-1}, SB)$ está na forma canónica de controlo:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde os a_i são os coeficientes do polinómio característico de $\bar{A}$ (e de A).

- Supondo que $\pi(\lambda) = \lambda^n + \pi_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \pi_0$ e tomando $\bar{F} = [a_0 - \pi_0 \mid \ldots \mid a_{n-1} - \pi_{n-1}]$, que forma toma $\bar{A} + \bar{B}\bar{F}$? E $\chi(\bar{A} + \bar{B}\bar{F})$?
- Conclua que $F = \bar{F}S$ é tal que $\chi(A + BF) = \pi(\lambda)$ ♣

Lema 3 Se B é $n \times 1$

O par (A, B) é controlável $\Leftarrow$ o problema da PPC tem solução para o par (A, B) e **todo** o polinómio mónico $\pi(\lambda)$ de grau n.

Demonstração

- Atendendo ao Lema 1, $\chi_{nc}(A, B)$ é um factor de todo o polinómio mónico de grau n, $\pi(\lambda)$.
- Mas isto só acontece se $\chi_{nc}(A, B) = 1$.
- Isto significa que (A, B) é controlável. ♣

Teorema 1 Se B é $n \times 1$

O problema da PPC tem solução para o par (A, B) e **todo** o polinómio mónico $\pi(\lambda)$ de grau $n \Leftrightarrow$ o par (A, B) é controlável .

Demonstração Consequência imediata dos Lemas 1 e 2. ♣

Teorema 2 Se B é $n \times 1$

O problema da PPC tem solução para o par (A, B) e o polinómio mónico $\pi(\lambda) \Leftrightarrow \chi_{nc}(A, B)$ é um factor de $\pi(\lambda)$.

Demonstração

$\Rightarrow$ pelo Lema 1

$\Leftarrow$

- S.p.g podemos supor que (A, B) está na forma escalonada de controlabilidade.
- Estando $F = [F_1 \quad F_2]$ particionada em conformidade:

$$\chi(A + BF) = \chi(A_{11} + B_1F_1)\chi(A_{22}) = \chi(A_{11} + B_1F_1)\chi_{nc}(A, B)$$

- Por hipótese $\pi(\lambda) = p(\lambda)\chi_{nc}(A, B)$ para um certo polinómio $p(\lambda)$
- $\chi(A + BF) = \pi(\lambda) \Leftrightarrow \chi(A_{11} + B_1F_1) = p(\lambda)$
- Como (A_{11}, B_1) é controlável existe F_1 tal que $\chi(A_{11} + B_1F_1) = p(\lambda)$
- Portanto existe F tal que $\chi(A + BF) = \pi(\lambda)$. ♣

NOTA: As afirmações dos Lemas 2 e 3 e dos Teoremas 1 e 2 permanecem válidos para o caso geral (mais do que uma entrada), mas as demonstrações são neste caso mais complicadas.

Estabilização (PPC)

Dado: (A, B) - com A $n \times n$ e B $n \times m$

Pretende-se: Determinar F tal que $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}^-$

$\longrightarrow$ Diz-se que (A, B) é um par estabilizável se existir uma solução F para o problema anterior.

Teorema 3

(A, B) estabilizável $\Leftrightarrow$ Todos os zeros de $\chi_{nc}(A, B)$ * estão em $\mathbb{C}^-$.

* modos não controláveis de (A, B)

Demonstração (Exercício!) Consequência do Teorema 2.

Corolário (A, B) controlável $\Rightarrow$ (A, B) estabilizável.